

<u>ИПМ им.М.В.Келдыша РАН</u> • <u>Электронная библиотека</u> <u>Препринты ИПМ</u> • <u>Препринт № 60 за 2014 г.</u>



Бондарев А. Е., <u>Жуков В.Т.,</u> Мануковский К. В., <u>Новикова Н.Д.,</u> <u>Феодоритова О.Б.</u>

Разработка и организация математического моделирования обтекания неподвижной лопатки энергетической установки

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Разработка и организация математического моделирования обтекания неподвижной лопатки энергетической установки / А.Е.Бондарев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 60. 19 с. URL: <u>http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-60</u>

Ордена Ленина ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В.Келдыша Российской академии наук

А.Е.Бондарев, В.Т.Жуков, К.В.Мануковский, Н.Д.Новикова, О.Б.Феодоритова

Разработка и организация математического моделирования обтекания неподвижной лопатки энергетической установки

Бондарев А.Е., Жуков В.Т., Мануковский К.В., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б.

Разработка и организация математического моделирования обтекания неподвижной лопатки энергетической установки

Приведено описание начального методологического этапа решения задачи математического моделирования обтекания внешним потоком энергетической установки (ЭУ) сложной формы. Задача рассматривается в вязкой постановке на основе использования уравнений Навье-Стокса. Общей целью ведущихся исследований является построение математической и вычислительной моделей и организация расчетов в параллельном режиме вычислений для имитации ЭУ и оптимизации ее свойств.

Ключевые слова: энергетическая установка, уравнения Навье-Стокса, OpenFOAM

Alexander Evgenevich Bondarev, Victor Timofeevich Zhukov, Konstantin Victorovich Manukovskii, Natalia Dmitrievna Novikova, Olga Borisovna Feodoritova

Development and organization of mathematical simulation of flow around steady blade of the power plant

It is given a description of the initial methodological stage of investigation mathematical simulation of flow around power plant of complicated shape. We consider the problem as viscous one based on Navier-Stokes equations. The goal of research is to construct the mathematical model and perform the parallel calculations to simulate power plant and optimize its properties.

Key words: power plant, Navier-Stokes equations, OpenFOAM

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 13-01-00367-а и программы фундаментальных исследований Президиума РАН №1.

Оглавление

Введение	
Технология построения расчетных сеток	
Организация расчетов	7
Математическая формулировка задачи	7
Вычислительная модель	
Расчетные исследования	9
Оценка физической достоверности	
Заключение	
блиографический список	
(Введение Технология построения расчетных сеток Организация расчетов Математическая формулировка задачи Вычислительная модель Расчетные исследования Оценка физической достоверности Заключение блиографический список

1. Введение

Данный препринт представляет собой описание начального методологического этапа решения задачи математического моделирования обтекания энергетической установки (ЭУ), обладающей чрезвычайно сложной формой. Общей целью ведущихся в этом направлении исследований является построение работоспособной математической модели и организация расчетов в параллельном режиме вычислений для возможности имитации вращения ЭУ под воздействием внешнего потока и оптимизация ее свойств.

На данном этапе исследований рассматривается одна основная часть ЭУ – лопасть в неподвижном положении. Целью данного этапа является постановка задачи, выбор математической модели, построение расчетных сеток, организация проведения расчетов в параллельном режиме и оценка получаемых результатов. В целом, данный этап можно охарактеризовать как этап методологической подготовки к проведению расчетов более сложных задач, таких как моделирование обтекания полной компоновки ЭУ, имитация вращения ЭУ, оптимизация формы и геометрических параметров.

2. Технология построения расчетных сеток

При расчетах реальных трехмерных объектов традиционно одним из наиболее трудоемких и затратных по времени этапов в процессе построения численной (CFD) модели является подготовка расчетной сетки приемлемого качества. Для достижения указанной цели используется ряд автоматических инструментов с широким набором средств контроля качества и параметров получаемой объемной численной сетки.

Как правило, начальным шагом для создания сетки является описание поверхности, ограничивающей заданное трехмерное тело. Эта поверхность обычно (полностью или частично) импортируются из CAD-пакетов. При этом поддерживается широкий выбор допустимых форматов. В случае необходимости импортированная CAD-модель может быть отредактирована. Таким образом, входные данные представляют собой поверхность (или несколько поверхностей в случае многообластной задачи), которая служит построения объемной сетки. Такая поверхность основой для должна требованиям: удовлетворять определенным замкнутость, отсутствие самопересечений, триангуляция приемлемого качества и т.п. На практике CADпромышленных объектов лишь поверхности реальных только В исключительных ситуациях удовлетворяют необходимым критериям. В подавляющем большинстве случаев поверхность нуждается в дополнительной подготовке.

Для такой подготовки применяются автоматические инструменты создания и редактирования поверхностных сеток, что позволяет значительно

сократить затрачиваемое время и практически полностью исключить подготовку сетки «вручную».



Рис. 1. Подготовленная поверхность. Общий вид

В первую очередь исправляются дефекты CAD-геометрии (отверстия, самопересечения и т.д.), что позволяет получить на выходе замкнутую поверхность с требуемой степенью детализации. Затем создается треугольная поверхностная сетка, обладающая необходимыми параметрами (степень гладкости в областях с высокой кривизной, степень разрешения тонких мест, скорость роста характерного размера поверхностных ячеек при удалении от областей с высокой детализацией, сохранение топологических особенностей, локальное измельчение сетки и т.д.). Результирующая поверхностная сетка является основой для построения объемной сетки.

В данном конкретном случае геометрическая модель неподвижной лопасти представлена в CAD-форматах в виде триангулированных поверхностей. Эта модель подвергается корректирующей обработке с помощью вышеописанных инструментов с целью исправления ряда дефектов геометрической модели. Результаты обработки приведены на рис. 1 и рис. 2; они служат основой для дальнейшего построения расчетной сетки.

Объемная сетка для моделирования течений жидкостей и газов, как правило, состоит из двух основных частей: призматической вблизи обтекаемых поверхностей и произвольной многогранной на удалении от поверхностей. Для создания пристеночного призматического слоя с заданным числом ячеек в направлении от стенки, с заданным законом роста размеров ячеек и полной толщиной слоя используются два возможных подхода. В первом строится поверхностная сетка, отстоящая от исходной на полную толщину слоя. Получившийся таким образом пристеночный объем разрезается на заданное число призматических слоев. Такой подход обычно не гарантирует создание призматического слоя с заданными параметрами и требуемой полной толщиной в областях со сложной геометрией. В таких случаях предпочтительней использовать метод последовательного создания призматических слоев, допускающий модификацию поверхностной сетки текущего слоя (коллапс ребер, разрезание ячеек, оптимизация положения вершин и т. д.), что позволяет создать слой призматических ячеек, проникающий значительно дальше от стенок вглубь расчетной области (рис. 3).



Рис. 2. Подготовленная поверхность. Детали.



Рис. 3. Визуализация призматических слоев

Для заполнения внепристеночного объема также могут использоваться различные подходы: тетраэдры, усеченные ячейки (гексагональные во внутренней части и многогранные на границе расчетной области), а также многогранные ячейки во всей счетной области).



Рис. 4. Объемная расчетная сетка. Общий вид.



Рис. 5. Объемная расчетная сетка. Детали.

Программный пакет OpenFOAM, который использовался при численном моделировании, в общем случае (как следует из описания) позволяет проводить

расчеты на численных сетках, состоящих из произвольных многогранных ячеек, ограниченных произвольным числом многоугольных граней. Тем не менее, на начальном этапе применения OpenFOAM принято решение ограничиться использованием сеток с ячейками в виде треугольных призм в пристеночных слоях и тетраэдрами во внепристеночном объеме расчетной области (рис. 4 и рис. 5).

3. Организация расчетов

Математическая формулировка задачи

В настоящее время течения газовой сплошной среды рассчитываются на основе уравнений Навье-Стокса, в которые введены дополнительные члены, учитывающие эффекты турбулентности. Указанная система уравнений выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_t)$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} H) = \nabla \cdot \left[\vec{u} \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_t) + (\vec{q}_m + \vec{q}_t) \right]$$
(1)

Здесь \vec{u} есть вектор скорости осредненного течения с компонентами (u,v,w); τ_m и τ_t – молекулярные и турбулентные (полученные путем осреднения различных функционалов от мелкомасштабных пульсаций) компоненты тензора вязких напряжений; $E = e + |\vec{u}|^2 / 2 -$ удельная полная энергия газа, e -удельная внутренняя энергия газа; $H = E + p / \rho$ – полная энтальпия; \vec{q}_m и \vec{q}_t – молекулярные и турбулентные компоненты векторов плотности теплового потока.

Система уравнений (1) дополняется еще уравнением состояния газа. В простейшем случае идеального газа (который однако может служить хорошим первоначальным приближением для рассматриваемого случая) $p = (R/M)\rho T$, где M – молекулярный вес, а R – универсальная газовая постоянная (R=8.31434Дж/(моль K)), $e = C_v T$, C_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Молекулярный тензор вязких напряжений и молекулярный вектор теплового потока имеют следующий вид

$$\boldsymbol{\tau}_{m} = 2\mu \left(T\right) \left(\boldsymbol{S} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I} \nabla \cdot \boldsymbol{\vec{u}}\right) \quad , \quad \boldsymbol{\vec{q}}_{m} = -\lambda \left(T\right) \nabla T \tag{2}$$

где $S = \frac{1}{2} \Big(\nabla \vec{u} + [\nabla \vec{u}]^r \Big)$ – тензор скоростей деформации, $\mu(T)$ – коэффициент молекулярной динамической вязкости, $\lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности. Коэффициент теплопроводности $\lambda(T)$ может быть определен из молекулярного числа Прандтля $\Pr = \frac{C_p}{\lambda}$ (для интересующих нас задач $\Pr = 0.71$).

Вид оставшихся турбулентных компонент уже не является универсальным, их выбор представляет собой так называемые модели турбулентности. Модели турбулентности необходимо выбирать, учитывая свойства реальных физических течений при выбранном диапазоне параметров. Вопрос выбора модели турбулентности вынесен за рамки данной работы. На первоначальном этапе будем рассматривать ламинарные течения.

Вычислительная модель

Процесс математического моделирования предполагает выбор вычислительной модели, выбор расчетных областей и подобластей, граничных условий, а также проведение цикла методических начальных И параметрических расчетов. В современных расчетах необходимо также учитывать возможность хорошего распараллеливания алгоритма.

В начале 2000-х годов возник новый подход к расчету гиперболических задач с вязкими потоками, к классу которых относятся уравнения Навье-Стокса. Это так называемые «центрально-противопотоковые» схемы, которые в соответствии с названием представляют собой комбинацию центральноразностной и противопотоковой схем, [2, 3]. Преимущество указанных схем состоит в том, что, применяя соответствующую технику уменьшения численной вязкости, можно добиться хорошей разрешимости и для разрывных решений – ударных волн в газовой динамике – и для решений, где основную роль играют вязкие явления. Суть центрально-противопотоковых схем состоит в специальном выборе контрольного объема.

За прошедшее десятилетие этот метод интенсивно развивался и продемонстрировал свои преимущества при проведении предсказательных вычислений. Было решено значительное количество практических задач, список ссылок доступен, см., например, [4]. Также солверы с использованием центрально-противопотокового подхода были недавно реализованы в открытом пакете для решения промышленных задач OpenFOAM (солвер rhoCentralFoam) [5]. Элементы OpenFOAM активно используются в промышленности, в академической сфере и экспертном сообществе, в частности энергетических характеристик установок горизонтального типа [6].

Расчеты проводились на гибридном вычислительном кластере К-100 в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (см. [7]). Вычислительный кластер К-100 состоит из 64 вычислительных узлов. На каждом узле - два процессора Intel Xeon

Х5670, т.е. 12 доступных задаче пользователя ядер и 3 графических ускорителя nVideo Fermi C2050 с 448 ядрами и по 2.5 Гб памяти на каждом ускорителе. Сразу отметим, что относительно небольшая оперативная память ускорителя является для рассматриваемого в данном отчете класса задач серьезным ограничением. Общая оперативная память узла составляет 96 Гб. Управляющая машина состоит из двух 6-ядерных процессоров Intel Xeon X5670 и 48 Гбайт оперативной памяти. Тактовая частота процессора Intel Xeon X5670 2.93 GHz. Доступные программные средства включают в себя системы распараллеливания вычислений OpenMP, MPI, CUDA.

Расчетные исследования

Была проведена серия специальных методических расчетов, которая позволила сформировать топологию, форму и размеры расчетной области, наиболее соответствующие целям проводимого компьютерного моделирования и принятой постановке задачи.

Расчетная область представляла собой прямоугольный параллелепипед $[-2.5:2.5] \times [-1.5:1.5] \times [-3.5:3.5]$, внутрь которого помещалась одна неподвижная лопатка энергетической установки. Лопасть помещалась в набегающий поток, обладающий следующими базовыми характеристиками $\rho_{\infty} = 1.21 \frac{\kappa^2}{M^3}$, $T_{\infty} = 291^{\circ} K = 18^{\circ} C$, $P_{\infty} = 101330 \Pi a$.

Среди аэродинамических характеристик нас интересовали прежде всего полная аэродинамическая сила \vec{F} и крутящий момент \vec{M} , а также влияние на них скорости набегающего потока U_{∞} , его температуры T_{∞} и, учитывая существенную трехмерность исследуемого объекта, направление набегающего потока относительно неподвижной лопасти.

Сила рассчитывается по известным распределениям давления p и касательного напряжения трения τ по поверхности S обтекаемого тела (см.[1])

$$\overline{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

$$F_x = \int_{(S)} [p\cos(n^2x) + \tau\cos(t^2x)] dS$$

$$F_y = \int_{(S)} [-p\cos(n^2y) + \tau\cos(t^2y)] dS$$

$$F_z = -\int_{(S)} [p\cos(n^2z) + \tau\cos(t^2z)] dS$$

Здесь n и t – нормаль и касательная к элементарной поверхности соответственно. x, y, z – система координат, связанная с движущимся телом (ось Ох направлена по вектору скорости движения центра масс).

Если ввести в рассмотрение коэффициенты аэродинамических сил c_x , c_y , c_z , силы можно представить в виде

Соответствующие моменты рассчитываются по формуле $\vec{M} = \int_{(S)} \vec{r} \times \vec{F} \, dS$, \vec{r} -

радиус вектор.

Были проведены расчеты для трех значений скорости набегающего потока $U_{\infty} = 5 \frac{M}{ce\kappa}, \ 15 \frac{M}{ce\kappa}, \ 25 \frac{M}{ce\kappa}$ (число Маха $Max = \frac{U_{\infty}}{c} = 0.015, \ 0.045, \ 0.06$) и двух значений температуры $T_{\infty} = 18^{\circ}C, \ 30^{\circ}C.$ Здесь $c = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = 340.3 \frac{M}{ce\kappa}$ - скорость звука.

Для определения динамической вязкости μ идеального газа в зависимости от температуры *T* использовалась формула Сазерленда

$$\mu = As \frac{T^{3/2}}{T + Ts}$$
, $As = 1.512 \ 10^{-6}$, $Ts = 120$

Были сгенерированы три трехмерных гибридных тетраэдральных сетки с призматическими слоями в областях пограничного слоя на твердых поверхностях общим объемом 2.5 млн., 4.5 млн. и 8 млн. ячеек. Из них призматический слой составлял около 30% (для сетки 2.5 млн. ячеек число призматических ячеек равнялось 746540).

Для проведения расчетов выделено семь граничных поверхностей – это шесть граней параллелепипеда, ограничивающих расчетную область (на рис. 6 они обозначены "Inlet", "Outlet", "Top", "Bottom", "Side_1", "Side_2"), и поверхность лопатки установки (обозначение – "Wing").



Рис. 6. Геометрия расчетной области.

На границе "Inlet" задана скорость набегающего потока - $u = U_{\infty}$; на границах "Outlet", "Top", "Bottom", "Side_1", "Side_2" – условие $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$. На поверхности лопатки ("Wing") задано условие прилипания u = 0. Для давления и температуры на всех граничных поверхностях задано условие $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$. Начальные распределения полей скорости, давления и температуры однородны $u = U_{\infty}$, $p = P_{\infty}$, $T = T_{\infty}$.

Первая серия экспериментов проведена на сетке 2.5 млн. ячеек. Оценить диапазон изменения аэродинамических характеристик в рассматриваемой задаче позволяют рис. 7 (поле распределения числа Маха в сечении y=0.0) и 6 (поле распределений температуры в трех характерных плоскостях z=-0.25, z=0.0, z=0.25).



Рис. 7. Характерное поле распределений чисел Маха в сечении у=0.



Рис. 8. Характерное поле температур Т в сечениях *z*=-0.25, *z*=0.0, *z*=0.25.

Рисунки 9 и 10 демонстрируют влияние силы тяжести на силу F и крутящий момент M. На рисунках приняты обозначения для модуля силы без учета гравитации - F и с учетом гравитации - F(g) (аналогично M и M(g) – модуль крутящего момента без учета и с учетом гравитации соответственно).



Рис. 9. Влияние гравитации на аэродинамическую силу.



Рис. 10. Влияние гравитации на крутящий момент.

Приведем результаты зависимостей аэродинамических характеристик от параметров набегающего потока и внешней среды. На рис. 11-14 представлены зависимости модулей аэродинамической силы |F|, крутящего момента |M|, аэродинамического коэффициента $C_p = \frac{|F|}{q_{\infty}S}$ и коэффициента лобового коэффициента $C_x = \frac{F_x}{q_{\infty}S}$ от скорости и направления набегающего потока. Синим и зеленым цветом обозначены результаты расчетов в случае горизонтального направления скорости (вдоль оси Ox) (дополнительно на графиках именован inlet). Красный цвет выбран для презентации расчетов, в которых скорость набегающего потока направлена вдоль оси Oz (графиках введено обозначение bottom). Колонки, отмеченные синим и красным цветами, выполнены при температуре $T_{\infty} = 18^{\circ}C$, зеленый цвет соответствует температуре $T_{\infty} = 30^{\circ}C$.



Рис. 11. Зависимость модуля полной аэродинамической силы |F| от скорости набегающего потока $U_{\infty} = 5 \frac{M}{ce\kappa}$, $15 \frac{M}{ce\kappa}$, $25 \frac{M}{ce\kappa}$ и его направления.



Рис. 12. Зависимость модуля крутящего момента |M| от скорости набегающего потока $U_{\infty} = 5 \frac{M}{ce\kappa}$, $15 \frac{M}{ce\kappa}$, $25 \frac{M}{ce\kappa}$ и его направления.



Рис. 13. Зависимость аэродинамического коэффициента $C_p = \frac{|F|}{q_{\infty}S}$

от скорости набегающего потока $U_{\infty} = 5 \frac{M}{ce\kappa}$, $15 \frac{M}{ce\kappa}$, $25 \frac{M}{ce\kappa}$ и его направления.



Рис. 14. Зависимость коэффициента лобового коэффициента $C_x = \frac{F_x}{q_{\infty}S}$ от скорости набегающего потока $U_{\infty} = 5\frac{M}{ce\kappa}$, $15\frac{M}{ce\kappa}$, $25\frac{M}{ce\kappa}$ и его направления.

Время счета одной задачи с числом ячеек равным 2.5 млн. на 48 процессорах составляет около 2 часов.

Вторая серия расчетов носит методический характер и призвана оценить влияние параметров сетки на аэродинамические характеристики. Рис. 15 и 16

15

показывают зависимость модуля аэродинамической силы и крутящего момента от размера расчетной сетки.



Рис. 15. Зависимость аэродинамической силы от размера расчетной сетки



Рис. 16. Зависимость крутящего момента от размера расчетной сетки

На рис. 17 и 18 представлены детальные картины распределения газодинамических величин на поверхности лопасти.



Рис. 17. Распределение давления по поверхности лопасти. Детали.



Рис. 18. Распределение температуры по поверхности лопасти. Детали.

Теперь рассмотрим вопрос о том, какие предварительные выводы можно сделать из проведенных нескольких серий расчетов обтекания ламинарным потоком лопасти ЭУ в неподвижном состоянии.

Рост скорости обтекания лопасти приводит к увеличению силы и момента, воздействующих на лопасть, что соответствует физической природе моделируемого процесса. Изменение температуры потока практически не

оказывает влияния на силовые характеристики. Введение учета гравитации в расчетах приводит к небольшому изменению в силовых характеристиках.

Следует особо остановиться на влиянии вариации сетки в сторону измельчения на результаты расчетов. Видно, что измельчение сетки приводит к уменьшению силовых характеристик, при этом можно уловить тенденцию к сходимости численного решения. Одновременно, очевидна необходимость использования достаточно мелких и подробных сеток.

Оценка физической достоверности

Обычно для верификации численных результатов используются экспериментальные данные. В тех случаях, когда экспериментальные данные отсутствуют, как в случае данной задачи, прибегают к физическим оценкам.

Оценим, какое давление оказывает поток скоростью 5^{*м*}/_{*сек*} на квадратный метр поверхности, расположенной перпендикулярно внешнему потоку с помощью известной формулы

 $w_0 = 0.61 * U_0^2$, где U_0 – скорость внешнего потока.

Данная формула используется со времен СССР в СНИП для оценки давления на плохообтекаемые неподвижные объекты и представляет собой аналог известной формулы для силы

 $F = C_p \frac{1}{2} \rho u^2 S$, при $C_p = 1$ для плохообтекаемых объектов и $S = 1 M^2$,

Руководствуясь этой формулой, мы получаем, что на 1 квадратный метр при обтекании воздухом на скорости 5 м/с будет действовать сила F = 0.61 * 25 = 15.25 кгс = 155.4 н = 0.1554 кПа, где кгс – килограмм-сила.

Для оценки наветренной площади лопасти возьмем условно половину ее общей площади, равной 3.47 м². Тогда для силы, действующей на лопасть, мы получим следующую оценку сверху: F = 269 н.

В расчетах для подробных сеток с учетом влияния силы тяжести, мы получаем после интегрирования следующее значение силы: F = 154.82 н.

Таким образом, по порядку величин мы имеем удовлетворительное совпадение. Что касается количественной разницы, то здесь следует заметить, что вышеприведенная формула оценки предназначена для тел, большая часть площади которых перпендикулярна потоку. В нашем случае площадь, перпендикулярная потоку, гораздо меньше ввиду сложной трехмерной формы лопасти. Следовательно, площадь сеточных элементов лопасти, спроецированных на плоскость, будет значительно меньше половины общей площади лопасти. Что позволяет приблизить оценочный и полученный результаты.

Отсюда можно сделать вывод: проведенные расчеты для подробных сеток позволяют получить результат, достаточно близкий к физической оценке.

4. Заключение

Проведен ряд методологических численных исследования для решения задачи обтекания неподвижной лопасти ЭУ. Проведено построение расчетных сеток, постановка задачи и граничных условий. Организовано проведение исследовательских расчетов в параллельном режиме на гибридном вычислительном кластере К-100.

Полученные результаты позволяют получить распределение газодинамических величин по поверхности обтекаемой лопасти, и силовые характеристики, оценить влияние скорости и температуры потока, учета гравитации. Проведен ряд расчетов с измельчением расчетной сетки, что позволяет ориентировочно оценить уровень измельчения сетки, необходимый для масштабных расчетов полной компоновки ЭУ. Полученные в расчетах силовые характеристики удовлетворительно согласуются с приближенной физической оценкой.

Библиографический список

1. Н.Ф.Краснов. Аэродинамика. Москва. Высшая школа. 1980.

2. A. Kurganov and E. Tadmor. New high resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations, J. Comput. Phys., Vol. 160, 2000, pp. 241-282.

3. A. Kurganov and E. Tadmor. Solution of two-dimensional Riemann problems for gas dynamics without Riemann problem solvers, Numer. Methods Partial Differential Equations, Vol. 18, 2002, pp. 584-608.

4. CentPack: A package of high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and related problems, University of Maryland: <u>http://www.cscamm.umd.edu/centpack/publications/</u>

5. Free, open source CFD software package OpenFOAM: <u>http://www.openfoam.com/</u>

6. 1st Symposium on OpenFOAM® in Wind Energy 20th & 21st of March 2013 – Oldenburg: <u>http://www.forwind.de/sowe/Site/Home.html/</u>

7.Гибридный вычислительный кластерK-100URL:http://www.kiam.ru/MVS/resourses/k100.html