ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 61 за 2014 г.

Колесниченко А.В.

Термодинамическая модель сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности космической плазмы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Термодинамическая модель сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности космической плазмы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 61. 48 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-61

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А.В. Колесниченко

Термодинамическая модель сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности космической плазмы

Москва — 2014

Колесниченко А.В.

Термодинамическая модель сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности космической плазмы.

В приближении одножидкостной магнитной гидродинамики получена замкнутая система МГД−уравнений масштаба среднего движения, предназначенная для моделирования сжимаемых турбулентных течений электропроводных сред в присутствии магнитного поля. С целью наглядного физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса плазмы и поля получены различные уравнения энергии, позволяющие прослеживать возможные переходы энергии из одной формы в другую, в частности, понять механизмы перекачки гравитационной и кинетической энергии среднего движения в магнитную энергию. Особое внимание уделено методу получения в рамках расширенной необратимой термодинамики замыкающих соотношений для полного (с учетом магнитного поля) кинетического тензора турбулентных напряжений и так называемого магнитного тензора Рейнольдса, позволяющего также проанализировать ограничения, накладываемые условием возрастания энтропии на коэффициенты турбулентного переноса. Предложена методика моделирования коэффициентов турбулентного переноса, в частности, коэффициента кинематической турбулентной вязкости, учитывающая влияние магнитного поля и обратного эффекта переноса тепла на развитие турбулентности в электропроводной среде.

Ключевые слова: математическое моделирование, термодинамика необратимых процессов, развитая турбулентность, магнитная гидродинамика.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

Thermodynamic model of compressed magnetohydrodynamic turbulence of space plasma.

A closed system of magnetohydrodynamic equations of mean motion designed to model turbulent flows in electrically conducting media in the presence of a magnetic field is derived in the approximation of single-fluid magnetohydrodynamics. For a clear physical interpretation of the individual components of the plasma-field energy balance, we derive various energy equations that allow us to trace the possible transitions of energy from one form to another, in particular, to understand the mechanisms for the transfer of the gravitational and kinetic energies of mean motion to magnetic energy. Particular attention is given to the method of deriving the closing relations for the total (including the magnetic field) kinetic turbulent stress tensor and the so-called magnetic Reynolds tensor within the framework of extended irreversible thermodynamics. This also allows the constraints imposed by the entropy growth condition on the turbulent transport coefficients to be analyzed. We propose a technique for modeling the turbulent transport coefficients, in particular, the kinematic turbulent viscosity, which makes it possible to take into account the influence of a magnetic field and the inverse effect of heat transfer on the development of turbulence in electrically conducting media.

Key words: mathematical modelling, thermodynamics of the irreversible processes, the advanced turbulence, magnetic hydrodynamics.

Введение

Изучение явлений окружающего нас материального мира часто удобно осуществлять с помощью математических моделей для сред, полей и процессов, которые позволяют осмысливать наблюдения и развивать методы прогнозирования предстоящих событий. Каждая такая модель представляет собой определённую схематизацию изучаемого физического явления, учитывающую не всю полноту свойственных ему факторов, а лишь некоторую их часть, характеризующую явление с той или иной стороны.

Одним из общих методов схематизации движения жидкостей, газов и плазмы является метод, основанный на построении новых континуальных моделей среды с усложненными механическими и физико-химическими свойствами. Очевидно, что в качестве фундаментальной основы получения замкнутых систем соответствующих дифференциальных уравнений должны лежать универсальные законы, которые могут служить базой для введения различных гипотез и закономерностей, подлежащих проверке при моделировании разнообразных физических явлений. Как хорошо известно, таким опорным базисом при теоретическом построении моделей сплошных сред служат универсальные законы механики о сохранении массы, количества движения и момента количества движения, универсальные законы термодинамики о сохранении энергии (первый закон термодинамики), об изменении или сохранении энтропии (второй закон термодинамики), законы химической кинетики и т. п. Важно особо отметить, что законы неравновесной термодинамики при конструировании новых континуальных моделей играют ключевую роль, поскольку используются также для установления определяющих материальных соотношений, выражающих специфические свойства конкретной сплошной среды.

В настоящее время какой-либо строгой и общепринятой феноменологической теории турбулентности электропроводных сред не существует. В данной работе упор делается на конструировании континуальной модели турбулентной электропроводной сжимаемой жидкости, взаимодействующей с электромагнитным полем. В приближении одножидкостной магнитной гидродинамики получена замкнутая система магнитогидродинамических уравнений масштаба среднего движения, предназначенная для моделирования сдвиговых и конвективных турбулентных течений электропроводных сред в присутствии магнитного поля. Эти уравнения могут использоваться для численного решения задач по взаимосогласованному моделированию мощных турбулентных течений космической плазмы в аккреционных дисках и в связанных с ними коронах, в которых магнитное поле существенно влияет на динамику происходящих астрофизических процессов. При разработке модели проводящей турбулизованной среды, наряду с традиционным теоретико-вероятностным усреднением МГД–уравнений, в работе систематически использовано также весовое усреднение Фавра, позволяющее в значительной степени упростить запись усредненных уравнений движения для сжимаемой электропроводной жидкости и анализ механизмов усиления макроскопических полей турбулентными течениями. С целью наглядного физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса плазмы и поля получены различные уравнения энергии, позволяющие прослеживать возможные переходы энергии из одной формы в другую, в частности, понять механизмы перекачки гравитационной и кинетической энергии среднего движения в магнитную энергию.

Особое внимание уделено методу получения в рамках расширенной необратимой термодинамики замыкающих соотношений для полного (с учетом магнитного поля) кинетического тензора турбулентных напряжений в электропроводной среде и турбулентной электродвижущей силы (или так называемого магнитного тензора Рейнольдса), что позволяет проанализировать также ограничения, накладываемые условием возрастания энтропии на коэффициенты турбулентного переноса. Предложена методика моделирования коэффициентов турбулентного переноса, в частности, коэффициента кинематической турбулентной вязкости, позволяющая учитывать влияние магнитного поля и обратного эффекта переноса тепла на развитие турбулентности в дифференциально вращающемся электропроводном аккреционном диске.

При этом, опираясь на общую идею, согласно которой любые модели механики сплошной среды и сопряжённая им неравновесная термодинамика разрабатываются параллельно в близком соотнесении между собой, мы остановились на следующих четырёх аспектах проблемы термодинамического конструирования базовой модели турбулентной электропроводной среды:

– на формулировании исходных стохастических МГД-уравнений и их весовом усреднении (по Фавру) с целью феноменологического описания усреднённого движения сжимаемой плазмы с учетом процессов турбулентного тепло- и массопереноса;

– на выводе разнообразных энергетических уравнений масштаба среднего движения для турбулентной плазмы, предназначенных для наглядного физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса и позволяющих прослеживать механизмы обмена между различными видами энергии движущегося вещества и поля, вносящих свой вклад в сохраняющуюся полную энергию материально-полевого плазменного континуума;

– на термодинамическом конструировании определяющих соотношений для различных турбулентных потоков в турбулизованной плазме в присутствии магнитного поля, необходимых для замыкания усреднённых МГД− уравнений;

– на моделировании коэффициентов турбулентного переноса с учетом влияния магнитного поля и обратного эффекта переноса тепла на развитие турбулентности в электропроводной среде.

1. Уравнения магнитной гидродинамики сжимаемой плазмы

Если плазма магнитогидродинамически неустойчива, то в ней возможно возбуждение сравнительно медленных крупномасштабных движений, которые могут быть адекватно описаны в рамках приближения одножидкостной магнитной гидродинамики. Эти течения имеют сходство с обычными течениями жидкости и газа, усложнённые, однако, действием объёмной силы Лоренца. При этом движение электропроводной жидкости в магнитном поле сопровождается специфическими явлениями. Эти явления связаны с тем, что при перемещении проводящих масс жидкости в них возбуждаются токи индукции, которые совместно с магнитным полем оказывают обратное воздействие на жидкость. Если механизмы диссипации в плазме достаточно слабы, то эти течения приобретают турбулентный характер. Поскольку имеется множество работ, подробно описывающих вывод уравнений МГД (см., например, [1-3]), то в этом вводном разделе, являющемся подготовительным для более подробного рассмотрения магнитогидродинамической турбулентности, мы запишем эти уравнения в том виде, который будет использован далее при получении усреднённых уравнений турбулентного движения электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля.

1.1. Уравнение магнитной индукции

Дифференциальные уравнения нерелятивистской магнитной гидродинамики (МГД) представляют собой законы сохранения, полученные из электромагнитных уравнений Максвелла и общих гидродинамических уравнений движения жидкости. Обозначим через $B_j(x_j,t)$ вектор магнитной индукции, $H_j(x_j,t)$ − вектор напряжённости магнитного поля, $E_j(x_j,t)$ − вектор напряжённости электрического поля, $j_i(x_j,t)$ − плотность электрического тока $(i,j=1,2,3)$, $\rho_e(x_j,t)$ − плотность заряда, $\mu(x_j,t)$ − магнитную проницаемость, $\varepsilon(x_j,t)$ − диэлектрическую проницаемость (безразмерные коэффициенты ε и μ связаны с физическими свойствами среды), $\sigma_e(x_j,t)$ − удельную электропроводность и $u_j(x_j,t)$ − гидродинамическую скорость течения проводящей жидкости. Будем далее считать для простоты параметры μ, ε и σ_e постоянными, а переносные свойства среды, несмотря на присутствие магнитного поля, изотропными. Основное предположение магнитной гидродинамики состоит в том, что характерная электромагнитная (плазменная) скорость

$$U_0 \equiv l_0 / t_0 << c \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_0/l_0 \approx B_0/t_0 . \tag{1.1}$$

Здесь $\mathcal{E}_0$ и B_0 − типичные значения E_j и B_j; l_0 и t_0 − характерные электромагнитные длина и время; c − скорость распространения света в пустоте. В этом случае уравнения Максвелла (записанные в абсолютной гауссовой системе единиц) для определения полей B_j, H_j, E_j и j_j принимают вид

$$c^{-1}\partial B_i / \partial t = -\varepsilon_{ijk}\partial E_k / \partial x_j , \qquad \varepsilon_{ijk}\partial H_k / \partial x_j = 4\pi c^{-1} j_i , \tag{1.2}$$

$$\partial D_j / \partial x_j = 4\pi\rho_e, \quad \partial B_j / \partial x_j = 0, \tag{1.3}$$

где объёмная плотность электрического заряда $\rho_e(x_j,t)$ и плотность полного тока $j_j(x_j,t)$ (в неподвижной системе координат), индуцированные движением заряженных частиц плазмы, определяются формулами: $\rho_e \equiv \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \cong 0$, $j_j \equiv \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha u_{\alpha j} = \rho_e u_j + j_j^* \cong j_j^*$. Здесь ε_{ijk} – полностью антисимметричный тензор третьего ранга; $n_\alpha(x_j,t)$, $u_{\alpha j}(x_j,t)$ – соответственно числовая плотность (на единицу объёма среды) и средняя гидродинамическая скорость частиц α-го сорта плазмы; $j_j^* \equiv \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha (u_{\alpha j} - u_j)$ – плотность тока проводимости (тока, измеряемого наблюдателем, движущимся вместе с газом). В формулах для ρ_e и j_j суммирование идёт по электронам (с зарядом $e_e = -e$) и по заряженным частицам α с зарядом $e_\alpha = eZ_\alpha$. Характерной особенностью процессов, происходящих, например, в ионосфере Земли, является то, что плазма с высокой степенью приближения является электрически нейтральной ($\rho_e \cong 0$), что означает практически отсутствие объёмного заряда вне сферы дебаевского радиуса $R_D \equiv \sqrt{k_B T / (4\pi n_e e^2)}$, называемой квазинейтральной областью (здесь k_B – постоянная Больцмана). В этом случае во всех максвелловских и гидродинамических уравнениях можно пренебречь членами с объёмным зарядом ρ_e. В частности, можно пренебречь плотностью конвективного тока $\rho_e u_j$, считая, что плотность электрического тока j_i тождественно равна плотности тока проводимости j_i^*. Для замыкания системы уравнений Максвелла (1.2)-(1.3) необходимы два соотношения, описывающие законы поляризации и намагничивания $D_j = \varepsilon E_j$, $B_j = \mu H_j$, а также закон Ома, дающий зависимость тока проводимости j_i^* от различных факторов, вызывающих диффузию заряженных компонентов электропроводной смеси, в том числе от полей E_j и B_j, гидродинамической скорости u_j и от пространственных градиентов некоторых определяющих параметров среды $j_i^* = j_i^*[\mathbf{E},\mathbf{B},\mathbf{u},\partial / \partial x_j]$. В простейшем варианте МГД, которым мы только и ограничимся в нашем рассмотрении турбулентности, используется следующая упрощённая форма закона Ома

$$j_i^* = \sigma_e \left(E_i + c^{-1} \varepsilon_{ijk} u_j B_k \right). \tag{1.4}$$

Заметим, что одним из следствий условия (1.1) является то, что при написании второго уравнения (1.2) возможно было опустить член, связанный с током смещения $c^{-1}\partial D_j/\partial t$. Другое следствие состоит в том, что уравнение непрерывности для электрического заряда ρ_e принимает вид $\partial j_j/\partial x_j = 0$ (результат взятия дивергенции от второго уравнения (1.2)); физически это означает, что локальные плотности заряда ρ_e во времени пренебрежимо малы и электрические токи текут по замкнутым контурам. Уравнение Пуассона (1.3) служит при этом только для определения (по найденному из остальных уравнений системы (1.2) и (1.3) электрическому полю) малого отклонения плазмы от квазинейтральности, которое часто необходимо учитывать либо вблизи границы системы (в слое толщиной порядка дебаевского радиуса R_D), либо при анализе высокочастотных плазменных колебаний.

Из уравнений Максвелла (1.2) и закона Ома (1.4) удобно исключить поля E_j и j_j, что приводит, при использовании известной формулы векторного анализа $\nabla\times\nabla\times\mathbf{a} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}$, к уравнению магнитной индукции

$$\partial B_i/\partial t = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial(u_l B_m)/\partial x_j + \nu_M \nabla^2 B_i, \tag{1.5}$$

являющемся одним из основных уравнений магнитной гидродинамики. Здесь $\nu_M \equiv c^2/4\pi\mu\sigma_e$ – так называемый коэффициент диффузии магнитного поля (или коэффициент магнитной вязкости), который имеет такую же размеренность, как и коэффициент кинематической вязкости ν, или коэффициент молекулярной диффузии D, т.е. см^2/с; ∇ – набла– оператор (в декартовой системе координат), с помощью которого можно записать большинство операторов дифференцирования, действующих на тензорных полях, в частности, $\nabla\cdot\mathbf{a} = \partial a_j/\partial x_j$ – дивергенция; $(\nabla\cdot\mathbf{aa})_i = \partial(a_j a_i)/\partial x_j$ – дивергенция от тензора (диады); $(\nabla\times\mathbf{a})_i = \varepsilon_{ijk}\partial a_k/\partial x_j$ – ротор; $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x_j\partial x_j$ – оператор Лапласа.

Если применить операцию дивергенции к уравнению индукции (1.5), то получим, что в МГД приближении имеет место уравнение $\partial(\partial B_j/\partial x_j)/\partial t) = 0$. Поэтому для того чтобы какое-либо решение удовлетворяло уравнению $\partial B_j/\partial x_j = 0$, достаточно потребовать, чтобы этому уравнению удовлетворяли начальные условия. Таким образом, второе равенство (1.3) выполняется в силу уравнения индукции и начальных условий.

Для дальнейших целей уравнение (1.5) удобно записать в другой форме. Используя формулу векторного анализа $\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\nabla\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\nabla\cdot\mathbf{a}$ и уравнение непрерывности для скорости среды [см. уравнение (1.8)], перепишем (1.5) в виде

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{B_i}{\rho}\right) = B_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu_M \nabla^2 B_i, \qquad (1.6)$$

где $d/dt \equiv \partial/\partial t + u_j(\partial/\partial x_j)$ − субстанциональная производная, описывающая скорость изменения какого-либо параметра в системе координат, передвигающейся со скоростью u_j.

Из уравнения (1.5) видно, что эволюция вектора магнитной индукции B_j зависит от движения электропроводной среды, т.е. при известной гидродинамической скорости u_j уравнение (1.5) полностью определяет вектор B_j, удовлетворяющий условию $\partial B_j / \partial x_j = 0$. Таким образом, вектор индукции в МГД рассматривается как первопричина возникновения электродинамических движений, а возникновение плотности тока и электрического поля − как вторичные явления: соответствующие значения j_j и E_j могут быть найдены из законов Ампера и Ома

$$j_i = c(4\pi\mu)^{-1} \varepsilon_{ijk} \partial B_k / \partial x_j, \quad E_i = c^{-1} \varepsilon_{ijk} \left(\nu_M \partial B_k / \partial x_j - u_j B_k\right), \qquad (1.7)$$

а плотность заряда ρ_e, в тех случаях, когда это представляет интерес, может быть определена из уравнения Пуассона $\rho_e = (\varepsilon / 4\pi)(\partial E_i / \partial x_i)$.

Из уравнения магнитной индукции (1.6) следует, что условия подобия течений электропроводных сред дополнительно определяются магнитным числом Рейнольдса $\mathbf{Re}_M \equiv U_0 L_0 / \nu_M$, характеризующим отношение конвективного члена в уравнении (1.6) к диффузионному члену. Это число дополняет критерии подобия течений неэлектропроводных сред. Здесь ρ_0, U_0 и L_0 − характерные для рассматриваемой задачи значения плотности, скорости и длины соответственно. Если $\mathbf{Re}_M >> 1$, то членами с магнитной вязкостью ν_M в (1.8) можно пренебречь. В свою очередь закон Ома (1.4) в случае идеально проводящей среды с очень высокой степенью аппроксимации сводится к виду $E_i = -c^{-1} \varepsilon_{ijk} u_j B_k$. В магнитной гидродинамике показано (см., например,[1]), что в этом случае величина (B_j/ρ) в каждой точке среды изменяется пропорционально удалению друг от друга двух соседних «жидких частиц», расположенных на магнитной силовой линии, другими словами силовые линии магнитного поля как бы «вморожены» в частицы вещества. Если $\mathbf{Re}_M << 1$, то уравнение индукции принимает простой вид $\partial B_i / \partial t = \nu_M \nabla^2 B_i$, когда поле B_i определяется уравнением диффузии.

1.2. Уравнения сохранения массы и импульса

Рассмотрим теперь несколько подробнее магнитогидродинамические уравнения, которые достаточно хорошо описывают крупномасштабные движения в плазме, для которых несущественно различие в движении составляющих её компонент.

Уравнение непрерывности

Уравнение сохранения массы может быть записано в виде

$$\partial\rho / \partial t + \partial(\rho u_j) / \partial x_j = 0. \qquad (1.8)$$

Здесь плотность массы $\rho(x_j, t)$ и полная гидродинамическая скорость потока $u_j(x_j, t)$ определяются соотношениями: $\rho(x_j, t) \equiv \sum_\alpha \rho_\alpha = \sum_\alpha n_\alpha m_\alpha$, $u_j(x_j, t) \equiv \rho^{-1} \sum_\alpha \rho_\alpha u_{\alpha j}$, где m_α – молекулярная масса частицы сорта α.

Сохранение импульса

Уравнение баланса импульса для проводящей среды имеет вид

$$\rho \frac{d}{dt} u_i \equiv \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \sum_\alpha n_\alpha F_{\alpha i}, \qquad (1.9)$$

где $p(x_j, t)$ – термодинамическое давление жидкости; $u_i u_j$ – тензор с девятью декартовыми компонентами; $\tau_{ij}(x_j, t)$ – тензор вязких напряжений, связанный с процессами молекулярного переноса количества движения всех компонентов плазмы, причём для изотропной жидкости связь между тензорами вязкости τ_{jk} и дисторсии $\partial u_k / \partial x_j$ имеет обычную форму

$$\tau_{jk} = \rho\nu \left(\partial u_k / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_k - \tfrac{2}{3} \delta_{jk} \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \mu_\vartheta \delta_{jk} \nabla \cdot \mathbf{u}, \qquad (1.10)$$

где ν, μ_ϑ – молекулярные коэффициенты кинематической и объёмной вязкости соответственно; $F_{\alpha j}(x_j, t) = F_{\alpha j}^{pond}(x_j, t) + m_\alpha g_j(x_j)$ – внешняя сила, действующая на одну заряженную частицу вещества сорта α; $F_{\alpha j}^{pond}$ – сила Лоренца (так называемая пондеромоторная сила электромагнитного поля), которая в инерциальной системе координат в нерелятивистском приближении имеет вид $F_{\alpha i}^{pond} \equiv e_\alpha \left(E_i + c^{-1} \varepsilon_{ijk} u_j B_k \right)$, и её нужно учитывать, если частицы сорта α несут заряд e_α; $g_j(x_j) = -\partial \Psi_G / \partial x_j$ – вектор ускорения внешней массовой силы (силы тяжести); $\Psi_G(x_j)$ – потенциальная функция гравитационного поля.

При использовании силы Лоренца $F_{\alpha j}^{pond}$ член в уравнении движения (1.9), соответствующий внешним электромагнитным и гравитационным силам, в случае квазинейтральности плазмы принимает вид

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} F_{\alpha i} = \rho g_i + \rho_e\left(E_i + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk} u_j B_k \right) + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk} j_j B_k \cong \rho g_i + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk} j_j B_k. \quad (1.11)$$

Плотность пондеромоторной силы $c^{-1}\varepsilon_{ijk} j_j B_k$ в этом выражении, при использовании (1.7) и известной формулы векторного анализа $\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{a})= \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{a}|^2 - \nabla\cdot\mathbf{aa}+\mathbf{a}\nabla\cdot\mathbf{a}$, может быть представлена следующим образом:

$$\frac{1}{c}\varepsilon_{ijk} j_j B_k = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{B_i B_j}{4\pi\mu}\right) = -\frac{\partial p^M}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}^M}{\partial x_j}. \quad (1.12)$$

Здесь $\tau_{ij}^M(x_j,t) \equiv (B_i B_j)/4\pi\mu$ – тензор магнитных натяжений Максвелла; $p^M(x_j,t) \equiv |\mathbf{B}|^2/8\pi\mu$ – давление магнитного поля. В результате уравнение баланса импульса (1.9) может быть записано в виде

$$\rho\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk} j_j B_k + \rho g_i = -\frac{\partial p^{\Sigma}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau_{ij} + \tau_{ij}^M\right) - \rho\frac{\partial \Psi_G}{\partial x_i}, \quad (1.13)$$

где $p^{\Sigma}(x_j,t) \equiv p + p^M = p + |\mathbf{B}|^2/8\pi\mu$ – полное давление плазмы.

Проанализируем это уравнение. Из соображений размерности легко получить следующие выражения: $F_{iner} \propto \rho U_0^2/L_0$ – для оценки силы инерции, $F_{vis} \propto \rho\nu U_0/L_0^2$ – для вязкой силы, $F_{mag} \propto \sigma_e B_0^2 U_0/c^2$ – для электромагнитной силы (здесь B_0 – характерная величина индукции магнитного поля; σ_e – электрическая проводимость жидкости). Отсюда следует, что порядок отношения электромагнитной силы к силе вязкости характеризует величина $\sigma_e B_0^2 L_0^2/\rho\nu c^2$. Обычно используется квадратный корень из этой величины, называемый числом Гартмана $\mathbf{Ha} \equiv B_0 L_0\sqrt{\sigma_e/\rho\nu c^2}$. Порядок отношения электромагнитной силы к силе инерции характеризует число Стюарта $\mathbf{N} \equiv \sigma_e B_0^2 L_0/c^2\rho U_0$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{Ha}^2 = \mathbf{NRe}$, где $\mathbf{Re} \equiv U_0 L_0/\nu$ – число Рейнольдса. Из критериев $\mathbf{Re}$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{Re}_M$ можно получить, путём их комбинации, все другие критерии, характеризующие движение проводящей жидкости в магнитном поле. В частности, при делении числа Стюарта на магнитное число Рейнольдса получается критерий, называемый числом Альфвена: $\mathbf{Al} \equiv B_0^2 / 4\pi\mu\rho U_0^2$, характеризующий отношение магнитной энергии к кинетической энергии. Заметим, что в случае, когда рассматриваются вопросы теплообмена, к этим критериям необходимо добавить числа Нуссельта, Пекле и др.

1.3. Различные формы уравнения энергетического баланса для электропроводной среды

При феноменологическом построении одножидкостной модели МГД-турбулентности нам придётся усреднять различные уравнения энергетического баланса. Приведём здесь их краткий вывод.

Уравнение для механической энергии проводящего вещества

Уравнение механической энергии (кинетической энергии движения центра тяжести плюс потенциальной энергии) вещества плазмы может быть получено путём скалярного умножения уравнения движения (1.13) на скорость u_j. В результате получим

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \Psi_G \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ p^\Sigma u_j - \left(\tau_{ij} + \tau_{ij}^M \right) u_i \right\} + p^\Sigma \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\tau_{ij} + \tau_{ij}^M \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1.14)$$

или (в виде уравнения баланса)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \rho \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \Psi_G \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(J_{(mech)j} \right) = p^\Sigma \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \left(\tau_{ij} + \tau_{ij}^M \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (1.15)$$

Здесь $J_{(mech)j} \equiv \left\{ \rho\left(|\mathbf{u}|^2 / 2 + \Psi_G \right) u_j + p^\Sigma u_j - \left(\tau_{ij} + \tau_{ij}^M \right) u_i \right\}$ − полный поток механической энергии плазмы. Энергия, стоящая в правой части уравнения (1.15) и представляющая собой работу, затрачиваемую на деформацию, расширение или сжатие единичного объёма среды, превращается в другие формы энергии, например, во внутреннюю энергию [см. (1.16)] или энергию магнитного поля [см. (1.24)].

Уравнение для внутренней энергии

Дифференциальное уравнение (закон сохранения) для внутренней (удельной) энергии $E(x_j, t)$ вещества в МГД − приближении может быть записано в следующей субстанциональной форме:

$$\rho\frac{d}{dt}E+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_j+q_{Rj}\right)=-\ p\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\ \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\ +\frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma_e}\equiv Q_E, \qquad (1.16)$$

где $\mathbf{q}(x_j,t)$ − плотность молекулярного потока тепла; $\mathbf{q}_R(x_j,t)$ − плотность потока энергии, переносимого излучением. Последний член в правой части этого уравнения представляет собой джоулево тепло за единицу времени. Уравнение (1.16) является модификацией уравнения для внутренней энергии многокомпонентной смеси на случай проводящей среды, получающейся при использовании преобразования

$$\sum_{\alpha=1} n_\alpha(u_{\alpha i}-u_i)F_{\alpha i}=j_i\left(E_i+c^{-1}\varepsilon_{ijk}u_j B_k\right)=\frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma_e}=\frac{\nu_M}{4\pi\mu}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial B_k}{\partial x_j}\right)^2. \qquad (1.17)$$

Приведём также другую полезную для дальнейшего форму записи энергетического уравнения для электропроводного вещества. При использовании тождества Гиббса $TdS/dt=dE/dt+pdv/dt$ для энтропии $S(x_j,t)$ (на единицу массы) системы, которая есть функция внутренней энергии и удельного объёма $v(x_j,t)\equiv(1/\rho)$, совершенно такой же, как в случае неэлектропроводной жидкости [4], запишем (1.16) в виде так называемого общего уравнения переноса тепла

$$\rho T\frac{d}{dt}S=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(q_j+q_{Rj}\right)+\ \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\ +\ j_i\left(E_i+\frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}u_j B_k\right), \qquad (1.18)$$

где для идеальной жидкости $S=c_V\ln(p\rho^{-\gamma})+\text{const}$; c_P, c_V − соответственно удельная теплоёмкость при постоянном давлении и объёме; $\gamma=c_P/c_V$ − показатель адиабаты. Уравнение (1.18) может быть переписано в дивергентном (балансовом) виде

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho S u_j+J_{(S)j}\right)=\sigma_{(S)}\geq 0, \qquad (1.19)$$

где $J_{(S)j}\equiv\left(q_j+q_{Rj}\right)/T$ − субстанциональный поток энтропии;

$$0\leq\sigma_{(S)}\equiv\frac{1}{T}\left\{-(q_j+q_{Rj})\frac{\partial\ln T}{\partial x_j}+\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\ +\ j_i\left(E_i+\frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}u_j B_k\right)\right\} \qquad (1.20)$$

− возникновение энтропии в результате необратимых процессов теплопроводности, внутреннего трения и электропроводности среды. Последний член в (1.20), соответствующий джоулевому нагреву, учитывает вклад электромагнитных явлений в производство энтропии системы. Заметим, что именно выражение (1.20) позволяет получить при использовании метода Онзагера неравновесной термодинамики замыкающие (определяющие) соотношения для необратимых процессов в электропроводной среде, которые линейно (в первом приближении) связывают термодинамические потоки q_j, τ_{ij} и j_i с термодинамическими силами $\partial \ln T/\partial x_j$, $\partial u_i/\partial x_j$ и $\left(E_i + c^{-1}\varepsilon_{ijk}u_j B_k\right)$.

В дополнение к приведённым выше уравнениям электродинамики и гидродинамики необходимо привлекать уравнение состояния $p = p(\rho, T)$ и калорическое уравнение состояния $E = E(\rho, T)$. Давление газа будем далее определять уравнением состояния совершенного газа $p = \Re\rho T$, где $\Re = \mathcal{R}/\tilde{\mu}$; $\mathcal{R}$ − газовая постоянная; $\tilde{\mu}$ − средняя атомная масса (средняя масса на частицу в единицах m_p). Здесь знак тильды служит для того, чтобы отличить среднюю атомную массу от магнитной проницаемости. Внутреннюю энергию газа будем далее считать пропорциональной температуре $E(x_j, t) = c_V T = p/(\gamma - 1)\rho$, где $c_V = (\mathcal{R}/\tilde{\mu})/(\gamma - 1)$ − теплоёмкость газа, соответствующая нагреванию при постоянном объёме, которую в дальнейшем будем считать постоянной величиной.

Уравнение для магнитной энергии плазмы

Уравнение для магнитной энергии плазмы $E^M \equiv (B_i B_i)/8\pi\mu\rho$ (на единицу массы) получим путём скалярного умножения на вектор $\mathbf{B}$ уравнения индукции (1.6). В результате, при учёте дифференциального тождества $\mathbf{ab}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{c}$, будем иметь

$$\rho\frac{d}{dt}E^M = -p^M\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \tau_{ij}^M\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\nu_M}{4\pi\mu}B_i\nabla^2 B_i, \tag{1.21}$$

или

$$\frac{\partial(\rho E^M)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(\rho E^M + p^M)u_j - \nu_M\frac{\partial p^M}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu_M\tau_{ij}^M\right)\right\} =$$

$$= \tau_{ij}^M\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\nu_M}{4\pi\mu}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial B_k}{\partial x_j}\right)^2. \tag{1.22}$$

Балансовая форма (1.22) представления уравнения для магнитной энергии записана с учетом соотношения

$$\frac{\nu_M}{4\pi\mu} B_i \nabla^2 B_i = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\nu_M\left(-p^M\delta_{ij}+\tau_{ij}^M\right)\right\} - \frac{\nu_M}{4\pi\mu}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial B_k}{\partial x_j}\right)^2,$$

которое получается (с учетом формулы векторного анализа $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\nabla\times\mathbf{a} - \mathbf{a}\nabla\times\mathbf{b}$) путём взятия дивергенции от выражения (1.12).

Отметим, что в некоторых случаях уравнение (1.22) удобно переписать, используя вектор Умова–Пойнтинга $q_{(\mathrm{Poynt})i}(x_j,t) \equiv (c/4\pi)\varepsilon_{ijk} E_j H_k$, который имеет смысл плотности потока энергии электромагнитного поля. В приближении МГД этот вектор может быть преобразован, при использовании (1.7) и (1.12), к виду

$$q_{(\mathrm{Poynt})i} \equiv \frac{c}{4\pi}\varepsilon_{ijk}E_jH_k = \frac{1}{4\pi\mu}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\left(\nu_M\frac{\partial B_m}{\partial x_l} - u_l B_m\right)B_k =$$

$$= \left(\rho E^M + p^M\right)u_i - \tau_{ij}^M u_j - \nu_M\,\partial p^M/\partial x_i + \nu_M \partial\tau_{ij}^M/\partial x_j. \qquad (1.23)$$

С учетом (1.23), уравнение баланса для магнитной энергии (1.22) для медленно движущейся среды ($|\mathbf{u}|/c \ll 1$) может быть записано в следующей «классической» форме:

$$\frac{\partial(\rho E^M)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{c}{4\pi}\varepsilon_{ijk}E_jH_k - p^M u_i + \tau_{ij}^M u_j\right\} -$$

$$-p^M\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \tau_{ij}^M\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - j_i\left(E_i + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}u_j B_k\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{q_{(\mathrm{Poynt})i}\right\} - j_i E_i. \qquad (1.24)$$

Наконец, комбинируя (1.15) и (1.24), получим уравнение баланса механической и магнитной энергии электропроводной среды

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left[\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \Psi_G + E^M\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\rho\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \Psi_G\right)u_i + p u_i + q_{(\mathrm{Poynt})i} - \tau_{ij}u_j\right\} =$$

$$+p\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{|\mathbf{j}|^2}{\sigma_e} \equiv -Q_E. \qquad (1.25)$$

Это уравнение выражает тот факт, что сумма плотностей механической энергии и магнитной энергии плазмы не сохраняется, а именно, количество энергии, равное Q_E, превращается во внутреннюю энергию системы [см. уравнение (1.16)]. Заметим, что в приближении МГД электрическое поле энергии в среде не создаёт.

Закон сохранения полной энергии электропроводной среды

Уравнение первого начала термодинамики, выражающее сохранение полной энергии (на единицу массы вещества) замкнутой системы (электропроводная среда плюс магнитное поле)

$$U_{(tot)}(x_j,t)=\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}+\Psi_G+E+E^M, \qquad (1.26)$$

может быть получено путём сложения балансовых уравнений для механической энергии (1.15), внутренней энергии (1.16) и магнитной энергии (1.24) плазмы. В результате получим

$$\frac{\partial(\rho U_{(tot)})}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\rho U_{(tot)}u_i+J_{(U_{tot})i}\right\}=0, \qquad (1.27)$$

где

$$J_{(U_{tot})i}(x_j,t)\equiv q_i+q_{Ri}+q_{(Poynt)i}+pu_i-\left(|\mathbf{B}|^2/8\pi\mu\right)u_i-\tau_{ij}u_j=$$

$$=q_i+q_{Ri}+\left(p+p^M\right)u_i-\left(\tau_{ij}+\tau_{ij}^M\right)u_j-\nu_M\frac{\partial p^M}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_M\tau_{ij}^M\right) \qquad (1.28)$$

− вектор субстанционального потока полной энергии движущейся плазмы (в одножидкостном МГД− приближении с законом Ома в форме (1.4)).

Система магнитогидродинамических уравнений должна быть дополнена определяющими соотношениями для потоков энергии q_j и радиационного тепла q_{Rj}, для тензора вязких напряжений τ_{ij}, а также выражениями для всех необходимых термодинамических и переносных характеристик среды. Отметим, что граничные и начальные условия для гидротермодинамических параметров в МГД не отличаются от соответствующих условий для неэлектропроводных сред, но необходимы дополнительные условия для поля магнитной индукции B_j[5].

Следует иметь в виду, что в настоящее время все более широкое применение находят методы прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) на основе решения выписанной нестационарной системы трёхмерных МГД− уравнений. В приложении к конкретным видам течений метод

DNS предполагает решение дискретного аналога этих уравнений без привлечения каких-либо дополнительных соотношений. Этот метод представляется наиболее надежным подходом, предоставляющим возможность всестороннего изучения турбулентных явлений в тех случаях, когда экспериментальные исследования затруднены или вообще невозможны. Он позволяет иногда проследить не только эволюцию образований различных пространственных структур с течением времени, но также изучать общую динамику и природу развития турбулентности. Заметим, однако, что в силу стохастичности явления турбулентности, в реальности методом DNS удается получать интересные результаты только при сравнительно невысоких значениях числа Рейнольдса.

В связи с этим в настоящее время на первый план выступает задача приближенного описания турбулентности, основанная на усредненных МГД−уравнениях. Метод усреднения МГД−уравнений, имеющий английскую аббревиатуру RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes), предполагает запись уравнений переноса усреднённого по времени потока, со всеми предполагаемыми масштабами турбулентности. Такой подход значительно уменьшает вычислительные ресурсы, необходимые для решения численной задачи.

2. Усреднённые МГД−уравнения для турбулентного движения сжимаемой плазмы

В настоящее время какой-либо строгой и общепринятой полуэмпирической теории турбулентности электропроводных сред не существует. Большая часть теоретических работ по моделированию турбулентного движения подобных сред выполнена для проводящей жидкости с постоянными свойствами и изотропным тензором проводимости, т.е. применительно к случаю, когда качественное различие между плазмой и жидкими металлами не проявляется. Как известно, к этому случаю при некоторых ограничениях можно отнести и проблемы моделирования турбулентного движения высокотемпературных электропроводных сред с большой плотностью, либо при небольшой величине напряженности магнитного поля (напомним, что высокотемпературные электропроводные среды (плазма) в магнитном поле характеризуются в общем случае анизотропным коэффициентом проводимости). В данной работе предпринята попытка термодинамического вывода (при систематическом использовании средневзвешенного усреднения Фавра) основной системы усредненных уравнений МГД –турбулентности. Подобный подход позволяет описать все основные специфические особенности, присущие турбулентным движениям проводящих изотропных сред в присутствии магнитного поля, которые важны не только для задач моделирования магнитных астрофизических аккреционных дисков (естественным состоянием движения которых в виду их огромности должно быть турбулентное движение), но и для многих других случаев.

Как мы уже упоминали выше, магнитогидродинамические течения при $\mathbf{Re}_{\mathrm{M}} << 1$ и при $\mathbf{Re}_{\mathrm{M}} >> 1$ качественно отличаются друг от друга. Это, естественно, относится и к турбулентным течениям, когда в качестве характерных скорости U_0 и масштаба L_0 течения выбраны пульсационная скорость $w \equiv \sqrt{\overline{|\mathbf{u}''|^2}}$ и масштаб турбулентности L. Если магнитное число Рейнольдса $\mathbf{Re}_M \equiv Lw/\nu_M$ для турбулентных пульсаций много больше единицы, то представление о «вмороженном» магнитном поле применимо как для рассмотрения движений крупных турбулентных вихрей, так и для исследования мелкомасштабной структуры турбулентности в таком диапазоне масштабов, в котором число $\mathbf{Re}_M$ для соответствующих вихрей остаётся существенно больше единицы. Это означает, что магнитные силовые линии получаются столь же запутанными, как и «материальные» линии, образованные жидкими частицами. В результате возникает пульсирующее магнитное поле. Физической причиной его возникновения являются, в конечном счёте, турбулентные электрические токи, возникающие в среде в результате турбулентных пульсаций скорости при наличии магнитного поля.

Далее мы ограничимся рассмотрением только магнитогидродинамической турбулентности низкотемпературной плазмы при следующих предположениях, вытекающих из анализа уравнений МГД [6]:

(i) $\mathbf{Re}_M \leq 1$; в этом случае можно учитывать влияние на поток только внешнего магнитного поля $B_{0\,j}$ и вызываемых им токов.

(ii) $\mathbf{N} \cdot \mathbf{Re}_M << 1$ в этом случае оказывается несущественной генерация магнитогидродинамических волн турбулентными пульсациями.

(iii) $(c_A/c_s)(\mathbf{N} \cdot \mathbf{Re}_M)^{3/2} << 1$, $w/c_s << 1$ (где $c_A \equiv B_0/\sqrt{4\pi\mu\rho}$ – характерная альфвеновская скорость, c_s – скорость звука); в этом случае динамика развития турбулентности может рассматриваться без учёта генерации акустических колебаний.

При нарушении какого-либо из указанных условий механизм турбулентного движения существенно усложняется. Например, при нарушении условия (ii) турбулентные пульсации в электропроводной среде должны приводить к появлению турбулентного поля магнитогидродинамических и акустических волн, и волн, связанных с взаимодействием магнитогидродинамических и акустических колебаний, причём энергия пульсационного движения среды может быть при этом меньше или равна энергии пульсационного магнитного поля и энергии акустических колебаний. В тоже время и при таких ограниченных полях, при которых условие (ii) выполняется, воздействие магнитного поля на турбулентность может быть весьма существенным.

2.1. Средневзвешенное усреднение Фавра

В турбулентной низкотемпературной плазме гидродинамическая скорость, температура, плотность и электромагнитные поля являются флуктуирующими величинами. Как известно (см., например, [8]), при построении модели развитой турбулентности в сжимаемой среде удобно использовать, наряду с “обычными” средними значениями $\overline{\mathcal{A}}$ некоторых гидродинамических величин $\mathcal{A}(x_j, t)$ (таких как плотность, давление, молекулярные потоки переноса массы, количества движения и энергии), так называемые, средневзвешенные значения $\langle \mathcal{A} \rangle$, или средние по Фавру [8] для некоторых других параметров (например, температуры, внутренней энергии, энтропии, гидродинамической скорости и т.п.), задаваемые соотношением

$$\langle \mathcal{A} \rangle \equiv \overline{\rho \mathcal{A}} / \overline{\rho} = \left(\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{p=1}^{M} \rho^{(p)} \mathcal{A}^{(p)} \right) \Big/ \left(\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{p=1}^{M} \rho^{(p)} \right).$$

Таким образом, для обозначения средних значений физических величин далее мы будем использовать два символа: черта сверху означает усреднение по ансамблю реализаций (времени и/или пространству), в то время как угловые скобки будут означать средневзвешенное усреднение. Двойной штрих используется далее для обозначения пульсаций $\mathcal{A}''$ тех величин $\mathcal{A}(x_j, t)$, которые усреднены по Фавру, $\mathcal{A} = \langle \mathcal{A} \rangle + \mathcal{A}''$, $(\overline{\mathcal{A}''} \neq 0)$

Следует отметить, что использование усреднения Фавра для ряда пульсирующих физических величин в значительной степени упрощает запись и анализ усреднённых гидродинамических уравнений [7]. Кроме этого, оно удобно ещё и по той причине, что экспериментальные исследования турбулентных течений, проводимые традиционными методами, приводят, по-видимому, к измерению именно этих средних значений. Приведём здесь некоторые употребляемые далее в статье свойства средневзвешенного усреднения физических величин, которые легко выводятся из его определения и известных постулатов Рейнольдса

$$\overline{\langle \mathcal{A} \rangle} = \langle \mathcal{A} \rangle, \quad \langle \overline{\mathcal{A}} \rangle = \overline{\mathcal{A}}, \quad \langle \mathcal{A} \langle \mathcal{B} \rangle \rangle = \langle \mathcal{A} \rangle \langle \mathcal{B} \rangle, \quad \overline{\rho' \mathcal{A}'} = \overline{\rho' \mathcal{A}''},$$

$$\overline{\rho\, \mathcal{A}''} = 0, \qquad \overline{\mathcal{A}''} = -\overline{\rho' \mathcal{A}''} / \overline{\rho}, \qquad \overline{\rho\, \mathcal{A}\, \mathcal{B}} = \overline{\rho} \langle \mathcal{A} \rangle \langle \mathcal{B} \rangle + \overline{\rho\, \mathcal{A}''\, \mathcal{B}''},$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})'' = \langle \mathcal{A} \rangle \mathcal{B}'' + \langle \mathcal{B} \rangle \mathcal{A}'' + \mathcal{A}''\mathcal{B}'' - \overline{\rho \mathcal{A}''\mathcal{B}''} / \overline{\rho}, \qquad (\rho \mathcal{A})' = \overline{\rho}\, \mathcal{A}'' + \rho'' \langle \mathcal{A} \rangle,$$

$$\overline{\frac{\partial \langle \mathcal{A} \rangle}{\partial x_j}} = \frac{\partial \langle \mathcal{A} \rangle}{\partial x_j}, \qquad \overline{\rho \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x_j}} = \overline{\rho} \langle \mathcal{A} \rangle \frac{\partial \langle \mathcal{B} \rangle}{\partial x_j} + \overline{\rho \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{B}''}{\partial x_j}},$$

$$\overline{\rho \frac{d\mathcal{A}}{dt}} = \overline{\rho} \frac{D\langle \mathcal{A} \rangle}{Dt} + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho \mathcal{A}'' u_j''} \right),$$

где $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \langle u_j\rangle \partial/\partial x_j$ − субстанциональная производная по времени для усреднённого движения.

2.2. Усреднённое уравнение непрерывности

Легко видеть, что усреднённая плотность $\bar{\rho}$ и средневзвешенная гидродинамическая скорость плазмы $\langle u_j\rangle \equiv \overline{\rho u_j}/\bar{\rho}$ удовлетворяют следующему уравнению непрерывности для среднего движения

$$\partial\bar{\rho}/\partial t + \partial\left(\bar{\rho}\langle u_j\rangle\right)/\partial x_j = 0. \tag{2.1}$$

Далее мы широко будем использовать тождество

$$\overline{\rho\frac{d\mathcal{A}}{dt}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\langle\mathcal{A}\rangle\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\langle\mathcal{A}\rangle\langle u_j\rangle\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}J^{turb}_{(\mathcal{A})j} \equiv \bar{\rho}\frac{D\langle\mathcal{A}\rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j}J^{turb}_{(\mathcal{A})j}, \tag{2.2}$$

которое может быть получено путём усреднения по Рейнольдсу известного операторного соотношения $\rho\, d\mathcal{A}/dt = \partial(\rho\mathcal{A})/\partial t + \partial(\rho\mathcal{A}u_j)/\partial x_j$ (описывающего связь между субстанциональным и локальным изменениями характеристики $\mathcal{A}$ в мгновенном движении среды) при учёте формулы (2.1). Здесь

$$J^{turb}_{(\mathcal{A})j}(x_j,t) \equiv \overline{\rho\mathcal{A}''u''_j} = \bar{\rho}\langle\mathcal{A}''u''_j\rangle \tag{2.3}$$

− турбулентный поток характеристики $\mathcal{A}(x_j,t)$.

2.3. Уравнение магнитной индукции для средних полей

Усредняя по ансамблю возможных реализаций (стохастического электропроводного жидкостного континуума) справедливые по предположению уравнения Максвелла (1.2)-(1.3) и закон Ома (1.4) для мгновенных значений электродинамических полей, в результате получим

$$c^{-1}\partial\overline{B_i}/\partial t = -\varepsilon_{ijk}\partial\bar{E}_k/\partial x_j,\quad \varepsilon_{ijk}\partial\overline{B_k}/\partial x_j = \left(4\pi\mu/c\right)\bar{j}_i,\quad \partial\bar{B}_j/\partial x_j = 0, \tag{2.4}$$

$$\bar{j}_i(x_j,t) = \sigma_e\left(\bar{E}_i + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\overline{u_j B_k}\right) \equiv \sigma_e\left(\bar{E}_i + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\langle u_j\rangle\overline{B_k} + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\overline{u''_j B_k}\right). \tag{2.5}$$

Из (2.4) видно, что уравнения Максвелла в силу их линейности сохраняют свой первоначальный вид и для усреднённых электродинамических полей. Однако в усреднённом законе Ома (2.5) появляется новый член $c^{-1}\varepsilon_{ijk}\overline{u''_j B_k}$, который приводит к дополнительной «турбулентной электродвижущей силе»

$$\mathcal{G}_i(x_j,t) \equiv \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\overline{u''_j B_k}\,. \qquad (2.6)$$

Величина $\mathcal{G}_i(x_j,t)$ имеет размерность напряжённости электрического поля и описывает средний результат взаимодействия пульсаций поля скорости и магнитной индукции. Силу $\mathcal{G}_i$ для дальнейших целей удобно представить в виде

$$\mathcal{G}_i(x_j,t) \equiv -\frac{1}{2c}\varepsilon_{ijk}R^M_{jk}, \quad R^M_{jk}(x_j,t) = -\left(\overline{u''_j B_k} - \overline{u''_k B_j}\right), \qquad (2.6^*)$$

где $R^M_{jk}(x_j,t)$ – так называемый магнитный тензор Рейнольдса. Таким образом, закон Ома для средних полей принимает вид

$$\overline{j_i} = \sigma_e\left(\overline{E}_i + c^{-1}\varepsilon_{ijk}\langle u_j\rangle\overline{B_k} + \mathcal{G}_i\right) \equiv \sigma_e\left(E_i^* + \mathcal{G}_i\right), \qquad (2.7)$$

где $E_i^*(x_j,t) \equiv \overline{E}_i + c^{-1}\varepsilon_{ijk}\langle u_j\rangle\overline{B_k}$ – электрическое поле в системе координат, движущейся с усреднённой скоростью $\langle u_j\rangle$.

Таким образом, в отличие от регулярного течения, для определения усреднённых полей $\overline{B_i}$, $\overline{E_i}$ и $\overline{j_i}$ необходимо знание не только величины усреднённой скорости $\langle u_j\rangle$, но и турбулентной электродвижущей силы $\mathcal{G}_i$:

$$\overline{j_i} = \left(c/4\pi\mu\right)\varepsilon_{ijk}\partial\overline{B_k}/\partial x_j, \qquad (2.8)$$

$$\overline{E_i} = \frac{1}{\sigma_e}\overline{j_i} - \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\langle u_j\rangle\overline{B_k} - \mathcal{G}_i = \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\left(\nu_M\frac{\partial\overline{B_k}}{\partial x_j} - \langle u_j\rangle\overline{B_k}\right) - \mathcal{G}_i. \qquad (2.9)$$

При этом эволюция магнитного поля $\overline{B_i}$ определяется следующим усреднённым уравнением индукции

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overline{B_i}}{\overline{\rho}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{B_j u''_i}\right) = \overline{B_j}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j} + \overline{B_j\frac{\partial u''_i}{\partial x_j}} + \nu_M\nabla^2\overline{B_i}, \quad \frac{\partial\overline{B_j}}{\partial x_j} = 0, \quad (2.10)$$

которое может быть получено путём усреднения по Рейнольдсу уравнения (1.6). Для дальнейших целей уравнение (2.10) удобно записать в более компактном виде

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overline{B_i}}{\bar{\rho}}\right)=\overline{B_j}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+c\,\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\mathcal{G}_k}{\partial x_j}+\nu_M\nabla^2\overline{B_i}, \qquad (2.10^*)$$

или, если использовать преобразование

$$c\,\varepsilon_{ijk}\partial\mathcal{G}_k/\partial x_j=\overline{B_j\,\partial u_i''/\partial x_j}-\overline{u_j''\partial B_i/\partial x_j}-\overline{B_i\,\partial u_j''/\partial x_j}\equiv\partial R_{ij}^M/\partial x_j,$$

в виде

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overline{B_i}}{\bar{\rho}}\right)=\overline{B_j}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial R_{ij}^M}{\partial x_j}+\nu_M\nabla^2\overline{B_i}\,. \qquad (2.11)$$

Таким образом, в усреднённом уравнении индукции (2.10*) появился член $c\,\varepsilon_{ijk}(\partial\mathcal{G}_k/\partial x_j)$, играющий роль дополнительного источника, генерирующего магнитное поле $\overline{B_i}$. Ясно, что одной из основных целей полуэмпирической теории МГД –турбулентности должно являться конструирование специального замыкающего соотношения для турбулентной электродвижущей силы $\mathcal{G}_i$, как функции средних полей $\overline{B_i}$ и $\langle u_i\rangle$, с тем чтобы, задавшись полем $\langle u_i\rangle$, можно было решить уравнение (2.10*).

2.4. Усреднённое уравнение движения в присутствии магнитного поля

Усреднённое уравнение движения для электропроводных сред получим путём усреднения уравнения движения (1.13) для регулярных течений. В результате будем иметь

$$\bar{\rho}\frac{D\langle u_j\rangle}{Dt}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{p}+\overline{p^M}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\tau_{ij}}+R_{ij}+\overline{\tau_{ij}^M}\right)-\bar{\rho}\frac{\partial\Psi_G}{\partial x_j}. \qquad (2.12)$$

Здесь $\overline{\tau_{ij}}$ − усреднённый тензор вязких напряжений, описывающий обмен импульсом между жидкими частицами благодаря силам молекулярной вязкости; $R_{jk}=-\bar{\rho}\langle u_j''u_k''\rangle$ − «обычный» тензор Рейнольдса для жидкости, имеющий смысл турбулентных напряжений; $\tau_{ij}^M\equiv(1/4\pi\mu)\overline{B_iB_j}=\tau_{(av)ij}^M+\tau_{(turb)ij}^M$ и $\overline{p^M}\equiv p_{av}^M+p_{turb}^M$ − усреднённый тензор магнитных натяжений и усреднённое давление магнитного поля; $\tau^{M}_{(av)ij} \equiv (1/4\pi\mu)\,\overline{B_i}\;\overline{B_j}$ и $\tau^{M}_{(turb)ij} \equiv (1/4\pi\mu)\,\overline{B'_i B'_j}$ − компоненты тензоров магнитных натяжений для усреднённого магнитного поля и пульсационной составляющей магнитного поля; $p^{M}_{av} \equiv |\overline{\mathbf{B}}|^2/8\pi\mu$ и $p^{M}_{turb} \equiv \overline{B'_j B'_j}/8\pi\mu$ − давление усреднённого магнитного поля и турбулентное магнитное давление электропроводной жидкости.

Используя преобразование [ср. с (1.15)]

$$-\frac{\partial p^{M}_{av}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\tau^{M}_{(av)ij}\right) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{|\overline{\mathbf{B}}|^2}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\overline{B}_i\overline{B}_j}{4\pi\mu}\right) = -\frac{1}{4\pi\mu}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\,\overline{B}_j\frac{\partial \overline{B}_m}{\partial x_l} = \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\;\overline{j}_j\overline{B}_k\,,$$

придадим усреднённому уравнению движения плазмы (2.12) следующий вид

$$\overline{\rho}\frac{D\langle u_i\rangle}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{p} + p^{M}_{turb}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tau_{ij}} + R_{ij} + \tau^{M}_{(turb)ij}\right) + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\;\overline{j}_j\overline{B}_k - \overline{\rho}\frac{\partial \Psi_G}{\partial x_i} \cong$$

$$\cong -\frac{\partial(\overline{p} + p^{M}_{turb})}{\partial x_i} + \frac{\partial R^{K}_{ij}}{\partial x_j} + (1/4\pi m)\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\,\overline{B}_k\frac{\partial \overline{B}_m}{\partial x_l} + \overline{\rho}g_i\,, \qquad (2.13)$$

где $R^{K}_{ij} \equiv R_{ij} + \tau^{M}_{(turb)ij} \equiv \left(-\overline{\rho u''_i u''_j} + \frac{1}{4\pi\mu}\overline{B'_i B'_j}\right)$ − полный тензор турбулентных напряжений в плазме (так называемый кинетический тензор Рейнольдса для электропроводной жидкости, находящейся в магнитном поле). Заметим, что приближённая форма уравнения (2.13) справедлива только в случае развитой турбулентности, когда усреднённым тензором вязких (молекулярных) напряжений $\overline{\tau_{ij}}$ можно пренебречь по сравнению с тензором R_{ij}(за исключением примыкающего к твёрдым стенкам вязкого подслоя).

2.5. Энергетические уравнения масштаба среднего движения для электропроводного вещества

В усреднённом турбулизованном течении проводящей жидкости, по сравнению с его регулярным аналогом, существует большое количество всевозможных механизмов обмена (скоростей перехода) между различными видами энергии движущихся элементарных объёмов вещества, вносящих свой вклад в сохраняющуюся полную энергию материально-полевого плазменного континуума. Для наглядного физического истолкования отдельных составляющих энергетического баланса, выпишем сначала различные уравнения энергии для усреднённого движения материальной составляющей плазмы, включая уравнение баланса для турбулентной кинетической энергии вещества.

Уравнение притока тепла для среднего движения турбулентной плазмы

Усредняя по Рейнольдсу уравнение (1.16) для внутренней энергии плазмы и используя тождества

$$\bar{\rho}\frac{D\langle E\rangle}{Dt}+\bar{p}\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_j}\equiv\bar{\rho}\frac{D\langle H\rangle}{Dt}-\frac{D\bar{p}}{Dt},\quad \overline{\frac{dp}{dt}}\equiv\frac{D\bar{p}}{Dt}+J^{turb}_{(v)j}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{p'u''_j}\right)-\overline{p'\frac{\partial u''_j}{\partial x_j}},$$

где $\langle H\rangle\equiv\langle E\rangle+\bar{p}/\bar{\rho}$ − усреднённая энтальпия среды, получим уравнение притока тепла для среднего движения проводящей жидкости в следующем виде

$$\bar{\rho}\frac{D\langle E\rangle}{Dt}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{q}_j+\bar{q}_{Rj}+\tilde{q}^{turb}_j\right)=$$

$$=-\bar{p}\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_j}+\bar{\tau}_{ij}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\left|\bar{\mathbf{j}}\right|^2}{\sigma_e}+J^{turb}_{(v)j}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j}-\overline{p'\frac{\partial u''_j}{\partial x_j}}+\frac{\overline{\left|\mathbf{j}'\right|^2}}{\sigma_e}+\bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle, \qquad (2.14)$$

или

$$\bar{\rho}\frac{D\langle H\rangle}{Dt}+\frac{\partial J_{\langle E\rangle j}}{\partial x_j}=\frac{D\bar{p}}{Dt}+\bar{\tau}_{ij}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\left|\bar{\mathbf{j}}\right|^2}{\sigma_e}+J^{turb}_{(v)j}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j}-\overline{p'\frac{\partial u''_j}{\partial x_j}}+\bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle+\bar{\rho}\langle\varepsilon_M\rangle. \qquad (2.15)$$

Здесь $J_{\langle E\rangle j}\equiv\bar{q}_j+\bar{q}_{Rj}+\tilde{q}^{turb}_j$ − полной поток внутренней энергии усреднённого движения плазмы; $J^{turb}_{(v)j}\equiv\overline{\rho\,(v)''u''_j}=\overline{u''_j}$ и $q^{turb}_j\equiv\overline{\rho H''u''_j}\cong c_p\overline{\rho T''u''_j}$ − соответственно турбулентные потоки удельного объёма и тепла; $\tilde{q}^{turb}_j\equiv q^{turb}_j-\overline{p'u''_j}$; $0\le\bar{\rho}\langle\varepsilon_b\rangle\equiv\overline{\tau_{kj}\partial u''_k/\partial x_j}$ и $0\le\bar{\rho}\langle\varepsilon_M\rangle\equiv\overline{\left|\mathbf{j}'\right|^2}/\sigma_e$ − соответственно удельная скорость вязкой диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло (под действием молекулярной кинематической вязкости) и удельная скорость диссипации энергии турбулентности, связанная с действием пульсирующего магнитного поля. Эту последнюю величину можно интерпретировать как джоулево тепловыделение от пульсационных электрических токов, возникающих при турбулентных пульсациях магнитного поля в проводящей среде.

Уравнение для усреднённой механической энергии в присутствии магнитного поля

Уравнение для усреднённой механической энергии плазмы может быть получено путём умножения обеих частей усреднённого уравнения движения (2.12) на компоненту скорости $\langle u_j \rangle$ и суммирования полученного результата по индексу j. В результате будем иметь

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{|\langle \mathbf{u} \rangle|^2}{2} + \Psi_G\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ \left(\bar{p} + p^M_{turb}\right)\langle u_j \rangle - \left(\overline{\tau_{ij}} + R^K_{ij} + \tau^M_{(av)ij}\right)\langle u_i \rangle \right\} =$$

$$= \left(\bar{p} + p^M_{turb}\right)\frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} - \left(\overline{\tau_{ij}} + R^K_{ij} + \tau^M_{(av)ij}\right)\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}. \qquad (2.16)$$

Уравнение для турбулентной энергии вещества плазмы

Уравнение для турбулентной кинетической энергии вещества может быть получено различными способами (см., например, [8]), одним из которых мы воспользуемся в рассматриваемом здесь случае электропроводной среды. Пусть $\mathcal{A}(x_j, t) -$ актуальное значение какой-либо скалярной величины (в частности, это могут быть компоненты какого-либо вектора), субстанциональный баланс которой имеет вид $\rho d\mathcal{A}/dt = -(\partial J_{(\mathcal{A})j}/\partial x_j + \sigma_{(\mathcal{A})}$, где $J_{(\mathcal{A})j}$ и $\sigma_{\mathcal{A}}$ – соответственно вектор субстанциональной плотности потока и объёмная плотность источника признака $\mathcal{A}$. Легко показать (для чего нужно умножить тождество $d\mathcal{A}''/dt \equiv d\mathcal{A}/dt - D\langle \mathcal{A} \rangle / Dt - u_j(\partial \langle \mathcal{A} \rangle / \partial x_j)$ на $\rho \mathcal{A}''$ и усреднить результат по Рейнольдсу), что уравнение переноса для среднеквадратичной пульсации $\langle \mathcal{A}''^2 \rangle$ имеет следующий общий вид [9]

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\langle \mathcal{A}''^2 \rangle}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\overline{\rho \mathcal{A}''^2 u''_j} + \overline{\mathcal{A}'' J_{(\mathcal{A})j}}\right) =$$

$$-J^{turb}_{(\mathcal{A})j}\frac{\partial\langle\mathcal{A}\rangle}{\partial x_j}+\overline{\mathcal{A}''\sigma_{(\mathcal{A})}}-\overline{\rho}\langle\varepsilon_{(\mathcal{A})}\rangle\,, \qquad (2.17)$$

где $\overline{\rho}\langle\varepsilon_{(\mathcal{A})}\rangle\equiv-\overline{J_{(\mathcal{A})j}\,\partial\mathcal{A}''/\partial x_j}$ – скорость скалярной диссипации дисперсии $\langle\mathcal{A}''^2\rangle$. Уравнение переноса (2.17) содержит члены, отражающие влияние на пространственно-временное распределение дисперсии $\langle\mathcal{A}''^2\rangle$ следующих процессов: конвективного переноса, турбулентной диффузии (второй член слева), образования за счёт обмена энергией между усреднённым и пульсационным движением (первый член справа), перераспределения (между пульсационными движениями в различных направлениях) и диссипации турбулентной характеристики $\langle\mathcal{A}''^2\rangle$ вследствие «молекулярных» процессов переноса.

Тогда уравнение для турбулентной энергии вещества $\langle b\rangle\equiv\overline{\rho\,u''_j u''_j}/2\overline{\rho}$ может быть получено из (2.17) путём подстановки в него следующих выражений: $\mathcal{A}\equiv u_i$, $J_{(u_i)j}\equiv-\tau_{ij}$, $\sigma_{(u_i)}\equiv-\partial p/\partial x_i+c^{-1}\varepsilon_{ijk}\,j_j B_k+\rho\,g_i$ (см. (1.13)); в результате будем иметь

$$\overline{\rho}\frac{D}{Dt}\langle b\rangle+\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(J_{\langle b\rangle j}\Big)=R_{ij}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}-J^{turb}_{(v)j}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_j}+\overline{p'\frac{\partial u''_j}{\partial x_j}}-$$

$$-\mathcal{G}_j\,\overline{j}_j-\frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\langle u_i\rangle\overline{j'_j B'_k}+\overline{j'_j E'_j}-\overline{\rho}\left\{\langle\varepsilon_b\rangle+\langle\varepsilon_M\rangle\right\}, \qquad (2.18)$$

где $J_{\langle b\rangle j}\equiv\overline{\rho\,(b+p'/\rho)\,u''_j}-\overline{\tau_{ij}u''_i}$ – турбулентно-диффузионный поток турбулентной энергии вещественной составляющей плазмы. При написании (2.18) было использовано преобразование

$$c^{-1}\overline{u''_i\varepsilon_{ijk}(j_j B_k)}\equiv-c^{-1}\varepsilon_{ijk}\langle u_i\rangle\overline{j'_j B'_k}+\overline{j'_j E'_j}-\overline{\rho}\langle\varepsilon_M\rangle-\mathcal{G}_j\,\overline{j}_j\,. \qquad (2.19)$$

Физический смысл членов, стоящих в правой части уравнения (2.18) следующий: величина $R_{ij}\,(\partial\langle u_i\rangle/\partial x_j)$ фигурирует в правых частях уравнений (2.16) и (2.18) с разными знаками, и потому её можно интерпретировать как скорость перехода кинетической энергии усреднённого движения в энергию турбулентности электропроводной жидкости; величина $\overline{p'\partial u''_j/\partial x_j}$ связана со скоростью преобразования внутренней энергии плазмы в кинетическую энергию турбулентных вихрей и представляет собой работу, совершаемую за единицу времени в единице объёма пульсирующей средой над вихрями, как следствие существования пульсаций гидродинамического давления p' в системе и расширения ($\partial u''_j / \partial x_j > 0$) или сжатия ($\partial u''_j / \partial x_j < 0$) турбулентных вихрей; величина $J^{turb}_{(v)j}(\partial \overline{p} / \partial x_j)$ представляет собой скорость перехода (в единице объёма среды) между турбулентной и усреднённой внутренней энергиями системы, причём мелкомасштабные вихри превращают энергию турбулентности в тепло, поскольку для них эта величина всегда положительна (заметим, однако, что крупные вихревые образования, связанные с тепловой конвекцией, для которых $J^{turb}_{(v)j}(\partial \overline{p} / \partial x_j) < 0$, могут преобразовывать тепловую энергию турбулизованного потока в усреднённую кинетическую энергию пульсаций скорости [10]); парная корреляция $\overline{\rho}\langle \varepsilon_b \rangle$ в развитом турбулентном потоке представляет собой скорость вязкой диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости [см. (2.14)]; наконец, величину $\overline{\rho}\langle \varepsilon_M \rangle$, представляющую собой работу в турбулентном потоке (отнесённую к единице времени и единице объёма), совершаемую пульсациями тензора магнитных натяжений над турбулентными вихрями, можно интерпретировать как дополнительное рассеяние турбулентной энергии под влиянием магнитной вязкости, происходящее в электропроводной турбулентной среде (джоулева диссипация).

Уравнение для полной усреднённой энергии вещества плазмы

Комбинируя уравнения (2.14), (2.16) и (2.18), получим балансовое уравнение для полной усреднённой удельной энергии $\langle U^{sub}_{tot} \rangle \equiv |\langle \mathbf{u} \rangle|^2 / 2 + \Psi_G + \langle E \rangle + \langle b \rangle$ электропроводного вещества в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\langle U^{sub}_{tot}\rangle\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ \overline{\rho}\langle U^{sub}_{tot}\rangle\langle u_j\rangle + J_{\langle U^{sub}_{tot}\rangle j}\right\} =$$

$$= \overline{p^M}\,\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_j} - \overline{\tau^M_{ij}}\,\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j} + \frac{|\overline{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} - \mathcal{G}_j\,\overline{j}_j - \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\langle u_i\rangle\overline{j'_j B'_k} + \overline{j'_j E'_j} \equiv \aleph, \quad (2.20)$$

где

$$J_{\langle U^{sub}_{tot}\rangle j} \equiv \overline{q}_j + \overline{q}_{Rj} + q^{turb}_j + \overline{\rho b\, u''_j} - \overline{\tau_{ij} u''_i} + \left(\overline{p} + p^M_{turb}\right)\langle u_j\rangle - \left(\overline{\tau_{ij}} + \tau^M_{(av)ij} + R^K_{ij}\right)\langle u_i\rangle$$

– субстанциональный поток полной усреднённой энергии вещественной составляющей турбулентной плазмы. Из этого уравнения видно, что усреднённая плотность полной энергии для электропроводного вещества не сохраняется: полная энергия вещества $\langle U^{sub}_{tot}\rangle$ и магнитная энергия $\langle E^M \rangle$ могут переходить одна в другую [см. (2.21)].

2.6. Уравнения для магнитной энергии турбулентной плазмы

Для турбулентной плазмы следует принимать во внимание ещё и другие виды энергии, связанные с проявлением магнитного поля. Получим сначала уравнение для усреднённой плотности магнитной энергии плазмы $\langle E_M \rangle$, которую удобно разложить на сумму двух величин: $\langle E_M \rangle \equiv \overline{|\mathbf{B}|^2 / 8\pi\mu} / \overline{\rho} = E_M^{av} + \langle b_M \rangle$, где $E_M^{av} \equiv |\overline{\mathbf{B}}|^2 / 8\pi\mu\overline{\rho}$ – плотность магнитной энергии среднего поля; $\langle b_M \rangle = \overline{B'_j B'_j} / 8\pi\mu\overline{\rho}$ – плотность турбулентной магнитной энергии. Проводя теоретико-вероятностное усреднение уравнения (1.26) и учитывая соотношения (2.28) и (2.29), будем иметь

$$\overline{\rho}\frac{D\langle E^M \rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ J^{turb}_{(E^M)j} + \overline{p^M u''_j} - \overline{\tau^M_{ij}}\, u''_i - \nu_M \frac{\partial \overline{p^M}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu_M \overline{\tau^M_{ij}}\right)\right\} = -\aleph, \quad (2.21)$$

где $J^{turb}_{(E^M)j} \equiv \overline{\rho E^M u''_j} = (1/8\pi\mu)\overline{|\mathbf{B}|^2 u''_j}$ – турбулентный поток магнитной энергии плазмы.

Заметим, что поскольку правые части уравнений (2.20) и (2.21) отличаются лишь по знаку, то плотность полной энергии усреднённого континуума $\langle U_{(tot)} \rangle = \langle U^{sub}_{tot} \rangle + \langle E^M \rangle$, равная сумме плотностей (на единицу массы), усреднённой энергии вещества $\langle U^{sub}_{tot} \rangle$ и усреднённой магнитной энергии плазмы $\langle E^M \rangle$ сохраняется. Единственным процессом, под влиянием которого изменяется в неподвижном объёме полная энергия $\langle U_{(tot)} \rangle$ усреднённого континуума для плазмы является приток или отток энергии через поверхность этого объёма, что и выражает принцип сохранения энергии в механически, термически и электромагнитно изолированной системе.

Если использовать усреднённый вектор Пойнтинга [см. (1.29)]

$$\overline{q_{(Poynt)i}} \equiv \frac{c}{4\pi}\varepsilon_{ijk}\overline{E_j H_k} = \overline{\rho(E^M + p^M/\rho)u_i} - \overline{\tau^M_{ij} u_j} - \nu_M \frac{\partial \overline{p^M}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_M \overline{\tau^M_{ij}}\right), \quad (2.22)$$

то уравнению (2.21) для усреднённой магнитной энергии можно придать следующий балансовый вид:

$$\frac{\partial\left(\bar{\rho}\langle E^{M}\rangle\right)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\overline{q_{(\mathrm{Poynt})i}}-\overline{p^{M}}\langle u_i\rangle+\overline{\tau_{ij}^{M}}\langle u_j\rangle\right\}=-\aleph \tag{2.23}$$

эквивалентный, как легко проверить, усреднённому закону сохранения энергии электромагнитного поля [11]

$$\frac{\partial\left(\bar{\rho}\langle E^{M}\rangle\right)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{q_{(\mathrm{Poynt})i}}\right)-\overline{j_j E_j}\,. \tag{2.24}$$

Уравнение для магнитной энергии среднего поля

Получим теперь уравнение для магнитной энергии среднего поля. С этой целью умножим на $\overline{B}_j/4\pi\mu$ усреднённое уравнение индукции (2.10*) и результат просуммируем по индексу j. При учёте выражения

$$\frac{\nu_M}{4\pi\mu}\overline{B}_i\,\nabla^2\,\overline{B}_i=-\frac{\left|\overline{\mathbf{j}}\right|^2}{\sigma_e}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{-\nu_M\frac{\partial p_{av}^{M}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_M\,\tau_{(av)ij}^{M}\right)\right\}, \tag{2.25}$$

справедливого также и для усреднённых полей, в результате будем иметь

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}E_{av}^{M}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{-\nu_M\frac{\partial p_{av}^{M}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_M\,\tau_{(av)ij}^{M}\right)\right\}=$$

$$-p_{av}^{M}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_i}+\tau_{(av)ij}^{M}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{c}{4\pi\mu}\varepsilon_{ijk}\,\overline{B}_i\frac{\partial\mathcal{G}_k}{\partial x_j}-\frac{\left|\overline{\mathbf{j}}\right|^2}{\sigma_e}. \tag{2.26}$$

Придадим уравнению (2.26) более наглядный вид, воспользовавшись для этого соотношением $\left|\overline{\mathbf{j}}\right|^2/\sigma_e=\nu_M(4\pi\mu)^{-1}\left(\varepsilon_{ijk}\partial\overline{B_k}/\partial x_j\right)^2$ и формулой $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\nabla\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\nabla\times\mathbf{b}$; в результате получим

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}E_{av}^{M}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{-\nu_M\frac{\partial p_{av}^{M}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu_M\,\tau_{(av)ij}^{M}\right)-\frac{c}{4\pi\mu}\varepsilon_{ijk}\mathcal{G}_j\,\overline{B}_k\right\}=$$

$$=-p_{av}^{M}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_i}+\tau_{(av)ij}^{M}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\overline{j}_j\,\mathcal{G}_j-\frac{\nu_M}{4\pi\mu}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\overline{B_k}}{\partial x_j}\right)^2. \tag{2.27}$$

Из правой части этого уравнения видно, что магнитная энергия среднего поля E_{av}^{M} убывает за счёт диссипации (последний член) и возрастает в результате перехода кинетической энергии среднего движения (второй член справа) и турбулентной кинетической энергии вещества (третий член справа) в магнитную энергию среднего уравнения (2.19*), (2.23) и (2.27)].

Уравнение для турбулентной магнитной энергии

Уравнение для турбулентной магнитной энергии $\langle b_M \rangle$ может быть получено тогда из разности (2.21) и (2.27):

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\langle b_M\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(J_{\langle b_M\rangle j}\right) =$$

$$-p_{turb}^{M}\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_j} + \tau_{(turb)ij}^{M}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{c}\langle u_i\rangle\varepsilon_{ijk}\overline{j_j' B_k'} - \overline{j_j' E_j'}, \qquad (2.28)$$

где $J_{\langle b_M\rangle i} \equiv \left\{\overline{\rho(E^M + p^M/\rho)u_i''} - \overline{\tau_{ij}^M u_j''} + (c/4\pi\mu)\varepsilon_{ijk}\mathcal{G}_j\bar{B}_k\right\}$ – турбулентно-диффузионный поток турбулентной магнитной энергии $\langle b_M \rangle$ плазмы. Из этого уравнения видно, что физической причиной возникновения и поддержания турбулентной магнитной энергии (турбулентного магнитного поля) являются турбулентные электрические токи (член $c^{-1}\varepsilon_{ijk}\overline{j_j' B_k'} \equiv \partial(\tau_{(turb)ij}^{M})/\partial x_j$), возникающие в среде при турбулентных пульсациях скорости при наличии магнитного поля и пульсациях магнитного поля. Последний член уравнения (2.28) описывает убывание турбулентной магнитной энергии за счёт перехода её в турбулентную энергию среды [см. уравнение (2.18)].

Балансовое уравнение для полной турбулентной энергии плазмы

Складывая теперь (2.18) и (2.28), получим балансовое уравнение для полной энергии турбулентности $b_\Sigma \equiv \langle b\rangle + \langle b_M\rangle$ электропроводной среды в виде

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\, b_\Sigma)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\bar{\rho} b_\Sigma\langle u_j\rangle + J_{(b_\Sigma)j}\right\} =$$

$$= -p_{turb}^{M}\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_j} + R_{ij}^{K}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi\mu}R_{ij}^{M}\frac{\partial\bar{B}_i}{\partial x_j} - J_{(v)j}^{turb}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j} + \overline{p'\frac{\partial u_j''}{\partial x_j}} - \bar{\rho}\,\varepsilon_\Sigma, \quad (2.29)$$

где

$$J_{(b_\Sigma)j} = \overline{\rho(b + p'/\rho)\, u''_j} - \overline{\left[\tau_{ij} + (1/4\pi\mu) B'_i B'_j\right] u''_i} - (1/4\pi\mu)\left\{\overline{B'_i u''_i}\ \overline{B}_j + \overline{u''_j B_i}\ \overline{B}_i\right\} -$$

турбулентно-диффузионный поток полной (кинетической плюс магнитной) турбулентной энергии электропроводной среды;

$$\overline{\rho}\varepsilon_\Sigma \equiv \overline{\rho}\left(\langle\varepsilon_M\rangle + \langle\varepsilon_b\rangle\right) = \overline{\tau_{ij}\partial u''/\partial x_j} + \overline{j'_i j'_i}/\sigma_e \tag{2.30}$$

– полная удельная скорость диссипации турбулентной кинетической и турбулентной магнитной энергии в тепло (под действием молекулярной кинематической вязкости и вязкости магнитного поля); $R^K_{ij} \equiv R_{ij} + \tau^{turb}_{ij}$ – полный тензор турбулентных напряжений плазмы (так называемый кинетический тензор Рейнольдса). При написании (2.29) использовано преобразование

$$\mathcal{G}_j\, \overline{j}_j \equiv -(1/4\pi\mu) R^M_{ij}\, \partial \overline{B}_i / \partial x_j, \tag{2.31}$$

которое следует из соотношений (2.6*) и (2.8); действительно,

$$\mathcal{G}_i\, \overline{j}_i = -\frac{1}{8\pi\mu}\varepsilon_{kji}\varepsilon_{mli} R^M_{jk}\frac{\partial \overline{B}_m}{\partial x_l} =$$

$$= -\frac{1}{8\pi\mu} R^M_{jk}\frac{\partial \overline{B}_m}{\partial x_l}(\delta_{km}\delta_{jl} - \delta_{jm}\delta_{kl}) = -\frac{1}{4\pi\mu} R^M_{jk}\frac{\partial \overline{B}_k}{\partial x_j}.$$

Заметим, что в пульсационном магнитном поле может содержаться значительная (а по некоторым оценкам даже большая) часть общей энергии турбулентности системы. Из уравнения (2.29) видно, что джоулева диссипация [член $\overline{\rho}\langle\varepsilon_M\rangle$] приводит к более быстрому затуханию возмущения плазмы, чем в случае, когда имеется лишь вязкая диссипация, т.е. непосредственное взаимодействие поля с возмущениями течения всегда приводит к повышению устойчивости течения плазмы. С другой стороны, магнитное поле может взаимодействовать и с усреднённым течением жидкости. При этом скорость кинематического обмена $R^K_{ij}\,(\partial\langle u_i\rangle/\partial x_j)$ между кинетической энергией среднего движения жидкости [см. (2.16)] и кинетической энергией вихревого движения системы зависит как от корреляции между пульсациями составляющих скоростей R_{ij} и пульсациями компонент магнитного поля R^M_{ij}, так и от сдвига средней скорости $\partial\langle u_i\rangle/\partial x_j$, т.е. тензор дисторсии оказывает определённое воздействие на устойчивость течения.

Случай развитой турбулентности

При решении практических задач турбулентной гидродинамики электропроводных сред в случае развитой турбулентности (когда $\mathbf{Re} >> 1$) часто поступают следующим образом. Подставляя в (2.19*) выражение $\langle H\rangle \equiv \langle H_0\rangle - |\langle \mathbf{u}\rangle|^2/2 - \Psi_G$ (где $\langle H_0\rangle -$ так называемая полная энтальпия среды, определяемая этим соотношением), после несложных преобразований, выполненных с использованием уравнения баланса усреднённой механической энергии (2.16), получим

$$\bar{\rho}\frac{D\langle H_0\rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ \bar{q}_{Rj} + \tilde{q}_j^{turb} + \overline{p^M}\langle u_j\rangle - \left(\tau_{ij} + \tau^M_{(av)ij} + R^K_{ij}\right)\langle u_i\rangle\right\} =$$

$$= \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e} + \overline{p^M}\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_j} - \left(\tau^M_{(av)ij} + R^K_{ij}\right)\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j} - \overline{p'\frac{\partial u''_j}{\partial x_j}} + J^{turb}_{(v)j}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \bar{\rho}\varepsilon_\Sigma. \quad (2.32)$$

Сделаем теперь важное предположение (которое часто реализуется на практике), что в структуре пульсирующих полей u''_j и B'_j в случае развитой турбулентности, устанавливается такое стационарно-неравновесное состояние турбулентного поля, при котором полная турбулентная энергия плазмы b_Σ почти не меняется как во времени, так и в пространстве. В этом случае справедливо следующее приближённое соотношение [см. (2.29)]

$$-p^M_{turb}\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_j} + R^K_{ij}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi\mu}R^M_{ij}\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} \cong J^{turb}_{(1/\rho)j}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j} - \overline{p'\frac{\partial u''_j}{\partial x_j}} + \bar{\rho}\varepsilon_\Sigma. \quad (2.33)$$

С учетом (2.29) уравнение притока тепла (2.15) принимает форму

$$\bar{\rho}\frac{D\langle H\rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ \bar{q}_{Rj} + \tilde{q}_j^{turb}\right\} =$$

$$= \frac{D\bar{p}}{Dt} - p^M_{turb}\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_j} + R^K_{ij}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi\mu}R^M_{ij}\frac{\partial\bar{B}_i}{\partial x_j} + \frac{|\bar{\mathbf{j}}|^2}{\sigma_e}, \quad (2.34)$$

а уравнение (2.32) для полной энтальпии $\langle H_0\rangle$ при учёте тождественного преобразования

$$\langle u_j\rangle \frac{\partial p_{av}^{M}}{\partial x_j} - \langle u_j\rangle \frac{\partial \tau_{(av)ij}^{M}}{\partial x_i} = \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}\, \overline{j_i}\langle u_j\rangle \overline{B}_k = \frac{\left|\overline{\mathbf{j}}\right|^2}{\sigma_e} + \frac{1}{4\pi\mu} R_{ij}^{M} \frac{\partial \overline{B}_i}{\partial x_j} - \overline{j_j}\,\overline{E}_j ,$$

принимает следующий почти «классический» вид:

$$\overline{\rho}\,\frac{D\langle H_0\rangle}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ \overline{q}_{Rj} + \tilde{q}_j^{turb} + p_{turb}^{M}\langle u_j\rangle - R_{ij}^{K}\langle u_i\rangle \right\} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \overline{j_j}\,\overline{E}_j . \qquad (2.35)$$

Заметим, что на практике усреднённое уравнение для внутренней энергии плазмы может быть использовано в любой форме: (2.15), (2.34) или (2.35).

Система усреднённых уравнений среднего движения электропроводной среды должна быть дополнена усреднённым уравнением состояния для давления

$$\overline{p} = \Re\,\overline{\rho}\langle T\rangle , \qquad (2.36)$$

которое обычно применяется в простых моделях МГД- турбулентности, основанных на градиентной гипотезе замыкания.

3. Вывод определяющих соотношений для турбулентных течений электропроводной среды в присутствии магнитного поля

В предыдущем разделе на основе классических одножидкостных МГД уравнений с упрощённой формой закона Ома были получены (при использовании средневзвешенного усреднения Фавра) магнитогидродинамические уравнения масштаба среднего движения, предназначенные для описания усреднённых турбулентных течений электропроводной среды в присутствии магнитного поля. Эти уравнения имеют, вообще говоря, ту же форму, как и выписанные в первом разделе уравнения магнитной гидродинамики для регулярного режима движения проводящей жидкости. Вместе с тем, основная система усреднённых магнитогидродинамических уравнений, состоящая из уравнений (2.1), (2.11), (2.13), (2.15), (2.29) и (2.36), является незамкнутой, поскольку содержит, наряду со средними значениями параметров состояния, таких как $\overline{\rho}$, $\langle u_j\rangle$, $\overline{p}$, $\langle T\rangle$, $\overline{B_j}$ и их производными, также и неопределённые корреляционные вторые моменты (турбулентные потоки) q_j^{turb}, R_{ij}^{K}, $J_{(v)j}^{turb}$ и R_{ij}^{M}, которые появляются в результате усреднения исходных нелинейных МГД−уравнений. В связи с этим обстоятельством возникает главная проблема полуэмпирической теории турбулентности плазмы − проблема замыкания, связанная с необходимостью конструирования определяющих соотношений для перечисленных турбулентных потоков, которые для турбулентного течения электропроводной среды в присутствии магнитного поля имеют свои специфические особенности. Воспользуемся для этой цели методами расширенной неравновесной термодинамики [12].

3.1. Уравнение баланса усреднённой энтропии

Термодинамический анализ турбулентной электропроводной среды мы проведём в предположении, что одноточечные корреляции $\langle \mathcal{A}''\mathcal{B}'' \rangle$ для любых (но не равных гидродинамической скорости течения u_j) пульсирующих термодинамических параметров $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ малы по сравнению с членами первого порядка $\langle \mathcal{A} \rangle \langle \mathcal{B} \rangle$ и могут быть опущены. Ранее нами было показано [13], что в этом случае фундаментальное тождество Гиббса для микродвижений среды (записанное вдоль траектории движения центра масс физического элементарного объёма) справедливо и для средневзвешенных удельной энтропии $\langle S \rangle$ и удельной внутренней энергии $\langle E \rangle$ проводящей жидкости

$$\langle T \rangle \frac{D\langle S}{Dt} = \frac{D\langle E \rangle}{Dt} + \overline{p} \frac{D\langle v \rangle}{Dt}. \tag{3.1}$$

Исключая из (3.1) производные от параметров $\langle E \rangle$ и $\langle v \rangle \equiv 1/\overline{\rho}$ с помощью уравнений (2.1) и (2.14), в результате получим уравнение субстанционального баланса усреднённой энтропии $\langle S \rangle$ среды в следующем явном виде:

$$\overline{\rho} \frac{D}{Dt} \langle S \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\overline{q}_j + \overline{q}_{Rj} + \tilde{q}_j^{turb}}{\langle T \rangle} \right\} = \sigma_{\langle S \rangle} = \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)} + \sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}, \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\langle S \rangle}^{(i)}(x_j, t) \equiv \dfrac{1}{\langle T \rangle} \left\{ -J_{\langle S \rangle j} \dfrac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_j} + \overline{\tau}_{ij} \dfrac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \dfrac{\nu_M}{4\pi\mu} \left(\varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial \overline{B}_k}{\partial x_j} \right)^2 \right\} \geq 0, \\ \\ \sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}(x_j, t) \equiv \dfrac{1}{\langle T \rangle} \left\{ -\overline{p' \dfrac{\partial u_j''}{\partial x_j}} + J_{(v)j}^{turb} \dfrac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \overline{\rho} \varepsilon_\Sigma \right\} \equiv \dfrac{\mathfrak{I}}{\langle T \rangle}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Величина $\sigma_{\text{áS}\rangle}^{(i)}$, определяющая скорость локального производства энтропии $\langle S \rangle$ жидкости (обусловленного необратимыми процессами переноса внутри подсистемы усреднённого движения), всегда положительна. Однако величина $\sigma_{\langle S \rangle}^{(e)}$ (относящаяся к стоку или притоку усреднённой энтропии) может быть разной по знаку и, как будет ясно из дальнейшего, отражает обмен энтропией между подсистемами усреднённого движения и так называемой подсистемой турбулентного хаоса [13]. Таким образом, одной только энтропии $\langle S \rangle$ недостаточно для адекватного описания всех особенностей турбулентного течения электропроводной жидкости, поскольку для неё не выполняется второй закон термодинамики. Кроме этого, энтропия $\langle S \rangle$ не связана явно с какими-либо параметрами пульсирующего турбулентного хаоса, характеризующими его внутреннюю структуру, в частности, с такими ключевыми характеристиками турбулентности, как энергия кинетической турбулентности $\langle b \rangle$ и энергия турбулентности магнитного поля $\langle b_M \rangle$. Собственно, по этой причине представляется необходимым при конструировании адекватной термодинамической модели МГД –турбулентности введение в рассмотрение подсистемы турбулентного хаоса.

3.2. Уравнения баланса энтропии и производство энтропии для подсистемы турбулентного хаоса

Турбулентное движение электропроводной жидкости будем далее описывать в рамках двухжидкостного континуума, состоящего из двух взаимосвязанных открытых подсистем: подсистемы среднего движения, которая получается в результате теоретико-вероятностного усреднения МГД– уравнений, и подсистемы турбулентного хаоса (так называемой турбулентной надструктуры), которая связана с пульсационным движением электропроводной среды. Будем при этом считать, что термодинамически элементарный объем $d\mathbf{x}$ может быть дополнительно охарактеризован экстенсивными переменными состояния, такими как плотность внутренней энергии E_{turb} и обобщённая энтропия S_{turb} турбулизации вещества, а также интенсивными переменными состояния, в качестве которых фигурируют обобщённая температура турбулизации T_{turb} (величина, характеризующая степень интенсивности турбулентных пульсаций) и давление турбулизации p_{turb} [14]. При этом важно иметь в виду, что такие термодинамические параметры состояния турбулентного хаоса, как энтропия S_{turb} и энергия E_{turb} турбулизации (рассматриваемые далее в качестве первичных концепций) вводятся здесь *a priori* для обеспечения связности теории и не имеют, в общем случае, точной физической интерпретации [12].

Перейдём теперь к некоторым следствиям из этого формального подхода. Следуя методу Гиббса, выберем в качестве локальной характеристической функции, содержащей все термодинамические сведения о подсистеме турбулентного хаоса в локально-равновесном (либо в стационарном состоянии), фундаментальное уравнение Гиббса для обобщённой энтропии: $S_{turb} = S_{turb}\left(E_{turb}, \langle v \rangle\right)$. Это функциональное соотношение будем считать заданным *a priori*. Примем теперь, как это делается обычно при формализованном построении классической термодинамики, следующие определения сопряжённых переменных T_{turb} и p_{turb} (считая, что все указанные производные положительны): $1/T_{turb} \equiv \{\partial S_{turb}/\partial E_{turb}\}_{\langle v\rangle}$, $p_{turb}/T_{turb} \equiv \{\partial S_{turb}/\partial\langle v\rangle\}_{E_{turb}}$. В этом случае интенсивным переменным T_{turb} и p_{turb} можно приписать смысл соответственно обобщённой температуры и давления (турбулизации). Тогда, дифференциальная форма фундаментального уравнения Гиббса, записанная вдоль траектории движения центра масс физически элементарного объёма, принимает вид [13]

$$T_{turb} DS_{turb}/Dt = DE_{turb}/Dt - \tfrac{1}{3} R^K_{ij}\delta_{ij} D\langle v\rangle/Dt. \tag{3.4}$$

Далее будем отождествлять величину E_{turb} с полной энергией турбулентности электропроводной жидкости $\bar{\rho}E_{turb} \equiv \bar{\rho}b_\Sigma = \overline{\rho|\mathbf{u}''|^2}/2 + \overline{|\mathbf{B}'|^2}/8\pi\mu$; тогда $p_{turb} \equiv \tfrac{1}{3}(R^K_{ij}\delta_{ij}) = \tfrac{2}{3}\bar{\rho}b_\Sigma$.

Соответствующее балансовое уравнение для энтропии турбулизации S_{turb} проводящей среды получим из (3.4) указанным выше способом, используя для этого уравнение для удельного объёма $\langle v\rangle \equiv 1/\bar{\rho}$ и уравнение (2.29) для полной турбулентной энергии b_Σ; в результате будем иметь:

$$\bar{\rho}\frac{DS_{turb}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{J_{(b_\Sigma)j}/T_{turb}\right\} = \sigma_{(S_{turb})} \equiv \sigma^{(i)}_{(S_{turb})} + \sigma^{(e)}_{(S_{turb})}, \tag{3.5}$$

$$0 \le \sigma^{(i)}_{(S_{turb})} = \frac{1}{T_{turb}}\left\{-J_{(b_\Sigma)j}\frac{\partial \ln T_{turb}}{\partial x_j} + \left(\left[R^K_{ij} - \frac{1}{3}\left(R^K_{lm}\delta_{lm}\right)\delta_{ij}\right]\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{4\pi\mu}R^M_{ij}\frac{\partial\bar{B}_i}{\partial x_j}\right\}, \tag{3.6}$$

$$\sigma^{(e)}_{(S_{turb})} \equiv \frac{1}{T_{turb}}\left\{\overline{p'\frac{\partial u''_j}{\partial x_j}} - J^{turb}_{(v)j}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j} - \bar{\rho}\varepsilon_\Sigma\right\} \equiv -\frac{\mathfrak{I}}{T_{turb}}. \tag{3.7}$$

Здесь величины $\sigma^{(i)}_{(S_{turb})}$ и $\sigma^{(e)}_{(S_{turb})}$ имеют соответственно смысл скоростей локального производства и стока пульсационной энтропии S_{turb}. Отметим, что отнесение отдельных слагаемых уравнения (3.5) к турбулентному потоку $J_{(S_{turb})j} \equiv J_{(b_\Sigma)j}/T_{turb}$ либо к производству $\sigma_{(S_{turb})}$ энтропии S_{turb}, вообще говоря, неоднозначно: возможен целый ряд альтернативных формулировок, использующих различные определения величины $J_{(S_{turb})j}$ [4,15].

3.3. Балансовое уравнение для суммарной энтропии

Таким образом, введение двух энтропий $\langle S\rangle$ и S_{turb} конкретизирует наше представление о турбулизованном усреднённом континууме, как о термодинамическом комплексе, состоящем из двух взаимно открытых подсистем, заполняющих одно и то же координатное пространство непрерывно – подсистемы среднего движения проводящей жидкости и подсистемы турбулентного хаоса. Комбинируя (3.2) и (3.5), получим уравнение баланса для суммарной $S_\Sigma \equiv \langle S\rangle + S_{turb}$ энтропии системы в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} S_\Sigma) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{ \bar{\rho} S_\Sigma \langle u_j\rangle + \frac{J_{\langle E\rangle j}}{\langle T\rangle} + \frac{J_{(b_\Sigma)j}}{T_{turb}} \right\} = \sigma_\Sigma \geq 0\,, \qquad (3.8)$$

где $\sigma_\Sigma \equiv \sigma^{(i)}_{\langle S\rangle} + \sigma^{(i)}_{(S_{turb})} + \Im \dfrac{T_{turb} - \langle T\rangle}{T_{turb}\langle T\rangle}$ – производство суммарной энтропии, связанное с необратимыми процессами в турбулентной плазме; $\Im \equiv -\overline{p'\partial u''_j / \partial x_j} + J^{turb}_{(v)j}\ \partial \bar{p} / \partial x_j + \bar{\rho}\varepsilon_\Sigma$ – поток энергии перехода между подсистемами усреднённого движения и турбулентного хаоса.

Положительная величина σ_Σ имеет следующую билинейную структуру

$$0 \leq \sigma_\Sigma \equiv \Im \frac{T_{turb} - \langle T\rangle}{T_{turb}\langle T\rangle} + \frac{1}{\langle T\rangle}\left\{ -J_{\langle E\rangle j}\frac{\partial \ln\langle T\rangle}{\partial x_j} + \bar{\tau}_{ij}\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j} + \frac{\nu_M}{4\pi\mu}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial \bar{B}_k}{\partial x_j}\right)^2 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{T_{turb}}\left\{ -J_{(b_\Sigma)j}\frac{\partial \ln T_{turb}}{\partial x_j} + \left[R^K_{ij} - \frac{1}{3}\left(R^K_{lm}\,\delta_{lm}\right)\delta_{ij} \right]\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi\mu} R^M_{ij}\,\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} \right\}. \qquad (3.9)$$

Из (3.9) видно, что локальное производство σ_Σ суммарной энтропии S_Σ определяется следующим набором термодинамических потоков

$$J_{\langle E\rangle j},\ J_{(b_\Sigma)j},\ \tau_{ij},\ \left[R^K_{ij} - \tfrac{1}{3}\left(R^K_{lm}\,\delta_{lm}\right)\delta_{ij} \right],\ R^M_{ij},\ \Im$$

и сопряжённых им термодинамических сил

$$\partial\left(1/\langle T\rangle\right)/\partial x_j,\ \ \partial\left(1/T_{turb}\right)/\partial x_j,\ \langle T\rangle^{-1}\partial\langle u_i\rangle/\partial x_j,\ \ T^{-1}_{turb}\partial\langle u_i\rangle/\partial x_j,$$

$$T_{turb}^{-1}\partial\overline{B_i}/\partial x_j,\ \ (T_{turb}-\langle T\rangle)/T_{turb}\langle T\rangle .$$

Согласно основному постулату неравновесной термодинамики в том случае, когда термодинамическая система находится вблизи локального равновесия или вблизи устойчивого стационарно-неравновесного состояния, термодинамические потоки могут быть представлены в виде линейных конститутивных соотношений от сопряжённых им макроскопических сил [4,15]. Это позволяет получить замыкающие определяющие соотношения как для усреднённых молекулярных потоков, так и для турбулентных потоков, фигурирующих в усреднённых уравнениях МГД. Следует иметь в виду, что спектр возможных перекрёстных эффектов для турбулентного режима течения электропроводной жидкости значительно расширяется по сравнению с её регулярным режимом течения. Однако в настоящее время, к сожалению, отсутствуют надёжные экспериментальные данные, количественно описывающие многие эффекты такого рода. Кроме того, вклад от любых перекрёстных эффектов в общую скорость процессов переноса на порядок меньше вклада от прямых эффектов [15]. С учётом этих замечаний будем далее распространять условие положительности производства суммарной энтропии σ_Σ на каждое слагаемое в отдельности, т.е. полагать, что $\sigma_{\langle S\rangle}^{(i)}\ge 0$, $\sigma_{S_{turb}}^{(i)}\ge 0$, $\sigma_{\langle S\rangle,S_{turb}}\ge 0$. Будем также без специальных оговорок опускать ряд перекрёстных эффектов в линейных конститутивных соотношениях.

В заключение заметим, что первое слагаемое в правой части (3.9), описывающее производство энтропии внутри полной системы за счёт необратимого обмена энтропией между подсистемами турбулентного хаоса и усреднённого движения, в силу второго закона термодинамики всегда положительно $\sigma_{\langle S\rangle,S_{turb}}\equiv\mathfrak{I}(T_{turb}-\langle T\rangle)/T_{turb}\langle T\rangle\ge 0$, и потому «направление» термодинамического потока $\mathfrak{I}$ определяется знаком функции состояния $X_{\mathfrak{I}}\equiv(1/\langle T\rangle-1/T_{turb})$. Эту функцию следует рассматривать как сопряжённую термодинамическую силу, вызывающую именно этот поток энтропии. Известно, что подобного рода обмен энтропией между двумя взаимно открытыми подсистемами является непременным условием возникновения когерентных структур, т.е. может быть источником самоорганизации в одной из них [15]. Покажем, что диссипативная активность подсистемы турбулентного хаоса в случае стационарно-неравновесного состояния как раз и определяется притоком отрицательной энтропии ($\sigma_{(S_{turb})}^{e}\equiv-\mathfrak{I}/T_{turb}<0$) от подсистемы усреднённого движения.

3.4. Стационарно-неравновесный режим подсистемы турбулентного хаоса

С этой целью проанализируем режим развитого турбулентного движения жидкости – режим стационарно-неравновесной турбулентности, когда в подсистеме турбулентного хаоса устанавливается такое квазистационарное состояние, при котором $dS_{turb}/dt \cong 0$, а поток $J_{(S_{turb})j} \equiv J_{(b_\Sigma)j}/T_{turb}$ энтропии турбулизации S_{turb} почти постоянен, $J_{(S_{turb})j} \cong \mathrm{const}$ [10,13]. Последнее означает, что производство $\sigma^{i}_{(S_{turb})}$ энтропии турбулизации таким образом компенсируется её оттоком $\sigma^{e}_{(S_{turb})}$, что суммарное возникновение энтропии S_{turb} почти отсутствует, $\sigma_{(S_{turb})} \equiv \sigma^{e}_{(S_{turb})} + \sigma^{i}_{(S_{turb})} \cong 0$. Так как величина $\sigma^{i}_{(S_{turb})} \geq 0$, то справедливо приближённое равенство $0 > \sigma^{e}_{(S_{turb})} \cong -\sigma^{i}_{(S_{turb})}$. Таким образом, в этом случае турбулентный хаос должен экспортировать энтропию во «внешнюю среду» (т.е. отдавать количество $\sigma^{e}_{(S_{turb})}$ усреднённому движению) для того чтобы скомпенсировать её производство (количество $\sigma^{i}_{(S_{turb})}$) за счёт внутренних необратимых процессов. Другими словами, для поддержания квазистационарного состояния в подсистеме турбулентной надструктуры необходим приток отрицательной энтропии (негэнтропии) от подсистемы усреднённого движения, $\sigma^{e}_{(S_{turb})} \equiv -\Im/T_{turb} = -\langle T\rangle \sigma^{e}_{\langle S\rangle}/T_{turb} < 0$. Именно эта поступающая в подсистему турбулентного хаоса негэнтропия расходуется на образование разнообразных диссипативных структур [10].

Действительно, поскольку в стационарно-неравновесном состоянии величина оттока энтропии из подсистемы усреднённого движения положительна $0 \leq \sigma^{e}_{\langle S\rangle} = \Im/\langle T\rangle$, то скорость обмена энтропией (теплом) между усреднённым и турбулентным движениями также положительна, $\Im \geq 0$. Но тогда из неравенства $\sigma_{\langle S\rangle, S_{turb}} \equiv \Im(T_{turb} - \langle T\rangle)/T_{turb}\langle T\rangle \geq 0$ следует, что температура турбулизации T_{turb} выше усреднённой температуры $\langle T\rangle$, что находится в полном согласии с основным синергетическим принципом о самоорганизации диссипативной системы. В соответствии с этим принципом, формирование упорядоченных структур (разномасштабных вихревых образований) в подсистеме турбулентного хаоса при отводе тепла из неё, т.е. при переходе к более низким температурам, является универсальным свойством материи [16].

Кроме этого, в рассматриваемом случае верно приближенное равенство $0 \leq \sigma^{e}_{\langle S\rangle} = -T_{turb}\sigma^{e}_{(S_{turb})}/\langle T\rangle \cong T_{turb}\sigma^{i}_{(S_{turb})}/\langle T\rangle$, и уравнение (3.2) для энтропии $\langle S\rangle$ принимает вид

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\langle S\rangle+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{J_{\langle E\rangle j}}{\langle T\rangle}\right\}=\sigma_{\langle S\rangle}=\sigma^{(i)}_{\langle S\rangle}+\sigma^{(e)}_{\langle S\rangle}=\sigma^{(i)}_{\langle S\rangle}+\frac{T_{turb}}{\langle T\rangle}\sigma^{i}_{(S_{turb})}, \qquad (3.10)$$

где для локального рассеяния энергии $\langle T\rangle\sigma_{\langle S\rangle}$ справедливо выражение

$$0\le\langle T\rangle\sigma_{\langle S\rangle}\equiv-\tilde{q}^{\,turb}_j\frac{\partial\ln\langle T\rangle}{\partial x_j}+\frac{\nu_M}{4\pi\mu}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\bar{B}_k}{\partial x_j}\right)^2$$

$$+\left[R^K_{ij}-\tfrac{1}{3}\left(R^K_{lm}\,\delta_{lm}\right)\delta_{ij}\right]\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{1}{4\pi\mu}R^M_{ij}\frac{\partial\bar{B}_i}{\partial x_j}. \qquad (3.11)$$

Выражение (3.11) содержит потоки и термодинамические силы первой и второй тензорных размерностей. Если разложить тензор второго ранга $\partial\langle u_i\rangle/\partial x_j$ на симметричную (тензор скорости деформации) $D_{ij}\equiv\left(\partial\langle u_i\rangle/\partial x_j\right)^s=\left(\partial\langle u_i\rangle/\partial x_j+\partial\langle u_j\rangle/\partial x_i\right)/2$ и антисимметричную (кососимметричный тензор скорости) $\left(\partial\langle u_i\rangle/\partial x_j\right)^a=\left(\partial\langle u_i\rangle/\partial x_j-\partial\langle u_j\rangle/\partial x_i\right)/2$ части, то предпоследнее слагаемое в (3.11) может быть записано в виде

$$\left[R^K_{ij}-\frac{1}{3}\left(R^K_{lm}\,\delta_{lm}\right)\delta_{ij}\right]\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}\equiv\overset{0}{R}{}^K_{ij}\,\overset{0}{D}_{ij},\qquad \overset{0}{R}{}^K_{ij}\equiv\overset{0}{R}_{ij}+\overset{0}{\tau}{}^M_{(turb)ij}), \qquad (3.12)$$

где

$$\overset{0}{D}_{ij}=D_{ij}-\tfrac{1}{3}\delta_{ik}\nabla\cdot\langle\mathbf{u}\rangle,\quad \overset{0}{R}_{ij}\equiv R_{ij}-\tfrac{1}{3}\left(R_{lm}\,\delta_{lm}\right)\delta_{ij}=R_{ij}+\tfrac{2}{3}\bar{\rho}\langle b\rangle\delta_{ij},$$

$$\overset{0}{\tau}{}^M_{(turb)ij}\equiv\tau^M_{(turb)ij}-\tfrac{1}{3}\left(\tau^M_{(turb)lm}\delta_{lm}\right)\delta_{ij}=\tau^M_{(turb)ij}+\tfrac{2}{3}\bar{\rho}\langle b_M\rangle\delta_{ij}$$

– симметричные тензоры турбулентных напряжений Рейнольдса R_{ij} и магнитных натяжений $\tau^M_{(turb)ij}$. Аналогично последнее слагаемое в (3.11), с учетом (2.6*), может быть представлено в виде

$$(4\pi\mu)^{-1}R^M_{ij}\,\partial\bar{B}_i/\partial x_j=(4\pi\mu)^{-1}R^M_{ij}\left\{\left(\partial\bar{B}_i/\partial x\right)^s+\left(\partial\bar{B}_i/\partial x_j\right)^a\right\}=-\mathcal{G}_j\,\bar{j}_j. \qquad (3.13)$$

Исходя из (3.11) при использовании принципа Кюри-Пригожина (согласно которому связь между тензорами различного ранга в изотропной среде невозможна [4]) можно получить следующие определяющие соотношения для турбулентных потоков:

$$\begin{cases} J_{\langle E\rangle k} = -\lambda^{\text{turb}} \dfrac{\partial\langle T\rangle}{\partial x_k}, \\ R^{K}_{jk} = -\frac{2}{3}\bar{\rho}\Gamma\delta_{jk} + \bar{\rho}\nu^{\text{turb}}_{K}\left\{\left(\dfrac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_k} + \dfrac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j}\right) - \frac{2}{3}\delta_{jk}\dfrac{\partial\langle u_l\rangle}{\partial x_l}\right\} - \nu^{\text{turb}}_{K,M}\left(\dfrac{\partial\bar{B}_j}{\partial x_k} + \dfrac{\partial\bar{B}_k}{\partial x_j}\right), \\ R^{M}_{jk} = -\nu^{\text{turb}}_{M,K}\left(\dfrac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_k} - \dfrac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j}\right) + \nu^{\text{turb}}_{M}\left(\dfrac{\partial\bar{B}_j}{\partial x_k} + \dfrac{\partial\bar{B}_k}{\partial x_j}\right) \end{cases} \tag{3.14}$$

где $\Gamma \equiv \langle b\rangle - \langle b_M\rangle$; λ^{turb}, ν^{turb}_{K}, ν^{turb}_{M} – соответственно эмпирические коэффициенты турбулентной теплопроводности, турбулентной кинематической вязкости и турбулентной диффузии магнитного поля. Заметим, что в общем случае анизотропной турбулентности эти коэффициенты являются тензорами 2-го или 4-го рангов [3, 17-19]. В случае развитой турбулентности электропроводной среды коэффициенты турбулентного переноса зависят от поля пульсирующих параметров u''_j, B'_j, $\partial u''_k/\partial x_j$ и масштаба $L(x_j, t)$, который может быть отождествлён с прандтлевской «длиной пути смешения» [6].

Из (2.6*) и третьего соотношения (3.14) вытекает следующее представление для турбулентной электродвижущей силы

$$c\mathcal{G}_i = -\nu^{\text{turb}}_{M}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\bar{B}_k}{\partial x_j} + \nu^{\text{turb}}_{M,K}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j}. \tag{3.15}$$

Здесь коэффициенты ν^{turb}_{M} и $\nu^{\text{turb}}_{M,K}$, определяемые пульсационным полем скорости u''_j, являются, по предположению, постоянными. Поскольку вектор $\bar{B}_j$ является псевдовектором (т.е. он изменяет знак при инверсии пространственных координат), а вектор $\mathcal{G}_i$ представляет собой истинный (полярный) вектор и должен быть образован из различных истинных векторов, то магнитный коэффициент турбулентной вязкости (диффузии) ν^{turb}_{M} должен являться скаляром, в то время как коэффициенты $\nu^{\text{turb}}_{M,K}$ и $\nu^{\text{turb}}_{K,M}$ являются псевдоскалярами. Часто, слагаемые с коэффициентами $\nu^{\text{turb}}_{M,K}$ и $\nu^{\text{turb}}_{K,M} \cong \frac{7}{5}\nu^{turb}_{M,K}$, описывающие перекрёстные эффекты, могут быть опущены [18]. Тогда соотношение (3.15) принимает простой вид $c\mathcal{G}_i = -\nu^{\text{turb}}_{M}\varepsilon_{ijk}\partial\bar{B}_k/\partial x_j = -\nu^{\text{turb}}_{M}(4\pi\mu/c)\bar{j}_i$. Подстановка этого выражения в (2.10*) приводит к следующему виду уравнения индукции для средних полей:

$$\bar{\rho}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\overline{B}_i}{\bar{\rho}}\right)=\overline{B}_j\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\left(\nu_M+\nu_M^{turb}\right)\nabla^2\overline{B_i}\,, \qquad (3.16)$$

из которого следует, что суммарное влияние ЭДС $\mathcal{G}_j$ сводится просто к изменению величины эффективного коэффициента диффузии магнитного поля, т.е. ν_M переходит в $(\nu_M+\nu_M^{turb})$. Поэтому, когда коэффициент ν_M^{turb} положителен, следует ожидать, что случайное перемешивание среды (создаваемое пульсационным полем скорости u_j'') должно не ослаблять, а усиливать процесс диффузии.

Покажем теперь, что в рамках развитого здесь термодинамического подхода коэффициент турбулентной диффузии ν_M^{turb} должен быть всегда положительным. Сразу же отметим, что данное утверждение находится в противоречии с известной точкой зрения Г. Моффата, предполагающего, что коэффициент ν_M^{turb} при некоторых экстремальных условиях может стать отрицательным [17]. Подставляя для этого (3.14) в (3.11), получим для производства энтропии $\langle S\rangle$ следующее выражение:

$$0\le\langle T\rangle\sigma'_{\langle S\rangle}\equiv \overset{0}{R}{}^K_{ij}\,\overset{0}{D}_{ij}-\mathcal{G}_j\,\overline{j}_j=2\bar{\rho}\nu_K^{turb}\,\overset{0}{D}_{ij}\,\overset{0}{D}_{ij}+\nu_M^{turb}\frac{4\pi\mu}{c^2}\left|\overline{\mathbf{j}}\right|^2. \qquad (3.17)$$

Здесь первый член представляет собой увеличение энтропии $\langle S\rangle$ благодаря кинематической турбулентной вязкости, а второй − её увеличение, обусловленное магнитной вязкостью. Второй закон термодинамики требует положительности всей суммы (3.17) в целом. Вместе с тем, второе слагаемое этой суммы может быть отлично от нуля даже при равенстве нулю первого члена (симметричный тензор $\overset{0}{D}_{ij}$ обращается в нуль, например, когда вещество локально покоится или когда оно вращается как твёрдое тело с постоянной угловой скоростью). Отсюда следует, в частности, что коэффициент ν_M^{turb} при всех условиях должен быть положительным, а это означает, что случайное перемешивание всегда усиливает процесс магнитной молекулярной диффузии. Приведённые соображения являются термодинамическим обоснованием невозможности появления эффекта отрицательной магнитной вязкости в изотропных зеркально-симметричных турбулентных течениях электропроводной жидкости.

Формула (3.15) получена для изотропной мелкомасштабной турбулентности, когда поле пульсирующих скоростей u_j'' обладает зеркальной симметрией, при которой полученные из него любые средние величины инвариантны при отражении поля относительно произвольной плоскости. Может, однако, случиться, что в турбулентной среде отсутствует зеркальная симметрия поля u_j''

относительно некоторых плоскостей и турбулентность имеет так называемую спиральность [20], при которой левовращательные движения более вероятны, чем правовращательные, или наоборот. Обобщённая на этот случай формула (3.15) принимает следующий вид [22]:

$$c\mathcal{G}_i(x_j,t) = \alpha\,\overline{B}_i - \nu_M^{turb}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\overline{B}_k}{\partial x_j} + \nu_{M,K}^{turb}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_j}, \tag{3.18}$$

где безразмерный коэффициент α является псевдоскаляром [21]. Покажем, что для случая изотропного и зеркально-симметричного поля скоростей u_j'' коэффициент α должен быть равен нулю. Действительно, для изотропной среды одинакова вероятность, как некоторой данной реализации ансамбля этого поля, так и реализации, полученной из неё зеркальным отражением. Тогда, с одной стороны, величина α не должна изменяться, если выполнить это отражение, так как ансамбль не изменился, но, с другой стороны, коэффициент α должен изменить свой знак, так как он является псевдоскаляром; поэтому $\alpha = 0$. Таким образом, отражательно-симметричная изотропная турбулентность, в отличие от гиротропной (отражательно-несимметричной турбулентности), может вызывать только турбулентную диффузию магнитного поля [20].

Подставляя теперь в усреднённый закон Ома (2.7) выражение (3.18), получим следующее выражение для усреднённого тока:

$$\overline{j_j} = \sigma_e^{turb}\left(\overline{E}_i + c^{-1}\varepsilon_{ijk}\langle u_j\rangle\overline{B_k} + \alpha c^{-1}\overline{B}_j\right),$$

$$\sigma_e^{turb} = \frac{\sigma_e}{1+4\pi\mu\nu_M^{turb}\sigma_e/c^2} = \frac{\sigma_e\nu_M}{\nu_M+\nu_M^{turb}}, \tag{3.19}$$

из которого видно, что турбулентная проводимость σ_e^{turb} всегда меньше молекулярной проводимости σ_e.

3.5. Вывод поправочной функции к коэффициенту турбулентной вязкости для проводящей среды с переменной плотностью

Рассмотрим теперь полуэмпирический способ определения коэффициентов турбулентного переноса в электропроводной среде, находящейся под воздействием магнитного поля. Известно, что при изотропной турбулентности оба коэффициента ν_K^{turb} и ν_M^{turb} близки к произведению $w_{turb}l_{cor}$ скорости турбулентных вихрей $w_{turb} \cong \sqrt{|\mathbf{u}''|^2}$ и их корреляционной длины l_{cor}, а коэффициент α по порядку величины $\alpha \cong -\tfrac{1}{3}\varepsilon_{ijk}\overline{u_i''\partial u_k''/\partial x_j}\tau_{cor} = -\tfrac{1}{3}h\tau_{cor}$, где $h-$ так называемая вихревая спиральность (псевдоскаляр), τ_{cor} − масштаб, характеризующий изменения поля турбулентных скоростей u''_j во времени [20,22]. Обобщая известную формулу Колмогорова для непроводящей жидкости на случай МГД –турбулентности, можно, с точностью, вполне достаточной для практических приложений, предполагать, что кинетический коэффициент турбулентной вязкости ν_K^{turb} может быть вычислен по формуле $\nu_K^{turb} = L\sqrt{b_\Sigma}$, где L – путь перемешивания по Прандтлю при отсутствии магнитного поля (здесь числовой множитель включён в L). Однако в этой формуле явно не учитывается влияние магнитного поля на турбулентное течение проводящей жидкости через посредство пути смешения L, что для многих практически важных случаев развитой МГД– турбулентности становится не вполне приемлемым. По этой причине в соотношение для ν_K^{turb} необходимо вводить поправочный множитель, учитывающий влияние как магнитного поля, так и обратных эффектов переноса тепла на развитие турбулентности.

Далее, предполагая стационарно-неравновесный режим турбулентности в электропроводной среде, для определения указанного множителя к коэффициенту турбулентной вязкости воспользуемся уравнением (5.3.5) для энтропии турбулизации S_{turb}.

$$\bar{\rho}\frac{DS_{turb}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(J_{(S_{turb})j}\right) = \frac{1}{T_{turb}}\left\{\overset{0}{R}{}_{ij}^{K}\,\overset{0}{D}_{ij} - \mathscr{G}_j\,\bar{j}_j - J_{(v)j}^{turb}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j} - \bar{\rho}\varepsilon_\Sigma\right\} \cong 0. \quad (3.20)$$

Диссипацию турбулентной кинетической и турбулентной магнитной энергии в тепло ε_Σ при развитом режиме турбулентности будем считать (на основании соображений теории подобия при числе Рейнольдса $\mathbf{Re} \to \infty$) прямо пропорциональной кубу характерной пульсационной скорости w_{turb} и обратно пропорциональной характерной длине L, $\varepsilon_\Sigma \propto w_{turb}^3 / L$ [23]. Воспользовавшись выражениями

$$\mathscr{G}_j\,\bar{j}_j = \frac{1}{4\pi\mu}\left(\varepsilon_{ijk}\,\alpha\,\bar{B}_i\,\frac{\partial\bar{B}_j}{\partial x_k} - \nu_M^{turb}(\nabla\times\bar{\mathbf{B}})^2\right),$$

$$J_{(v)j}^{turb}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j} \cong -\frac{\lambda^{turb} g_j}{\langle c_p\rangle\langle T\rangle}\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x_j} - \frac{g_j}{\langle c_p\rangle}\right), \qquad \overset{0}{R}{}_{ij}^{K}\,\overset{0}{D}_{ij} = 2\bar{\rho}\nu_K^{turb}\,\overset{0}{D}_{ij}\,\overset{0}{D}_{ij}$$

преобразуем правую часть (3.20) к следующему виду:

$$2\bar{\rho}\nu_K^{turb}\,\overset{0}{D}_{ij}\,\overset{0}{D}_{ij} - \frac{\nu_M^{turb}}{4\pi\mu}\left(\frac{c\alpha}{\nu_M^{turb}}\varepsilon_{ijk}\,\bar{B}_i\,\frac{\partial\bar{B}_j}{\partial x_k} - (\nabla\times\bar{\mathbf{B}})^2\right) +$$

$$\frac{\lambda^{turb}}{\langle c_p\rangle\langle T\rangle} g_j \left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x_j} - \frac{g_j}{\langle c_p\rangle} \right) - \overline{\rho}\varepsilon_\Sigma \cong 0 . \qquad (3.21)$$

Используя теперь величины w_{turb} и L, можно написать

$$\nu_K^{turb} = L w_{turb} , \quad \nu_M^{turb} = \frac{L w_{turb}}{\mathbf{Pr}_M^{turb}}, \quad \frac{\lambda^{turb}}{\overline{\rho}\langle c_p\rangle} = \frac{L w_{turb}}{\mathbf{Pr}_K^{turb}}, \quad \varepsilon_\Sigma = \frac{1}{\alpha_{ss}^2}\frac{w_{turb}^3}{L}, \qquad (3.22)$$

где эмпирическую константу α_{ss}, а также турбулентные числа Прандтля (кинетическое $\mathbf{Pr}_K^{turb} = \overline{\rho}\langle c_p\rangle \nu_K^{turb}/\lambda^{turb}$ и магнитное $\mathbf{Pr}_M^{turb} = \nu_K^{turb} / \nu_M^{turb}$) будем в первом приближении считать постоянными, предполагая, что $\nu_M^{turb} > 0$ и $\mathbf{Pr}_M^{turb} \cong \mathbf{Pr}_K^{turb}$. При подстановке выражений (3.22) в (3.21) будем иметь

$$w_{turb} \left\{ 2L \overset{0}{D}_{ij} \overset{0}{D}_{ij} + \frac{L}{\mathrm{Pr}_M^{turb}} \frac{l_{cor}^{-1}\varepsilon_{ijk}\overline{B}_i(\partial\overline{B}_j/\partial x_k) + (\nabla\times\overline{\mathbf{B}})^2}{4\pi\mu\overline{\rho}} + \right.$$

$$\left. + \frac{L}{\mathbf{Pr}_K^{turb}} \frac{g_j}{\langle T\rangle}\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x_j} - \frac{\mathbf{g}}{\langle c_p\rangle}\right) - \frac{1}{\alpha_{ss}^2}\frac{w_{turb}^2}{L} \right\} \cong 0 , \qquad (3.23)$$

где $l_{cor} \equiv -(\nu_M^{turb}/\alpha)$ – масштаб корреляции, характеризующий изменение поля турбулентных скоростей u_j'' в пространстве. Это уравнение распадается на два: уравнение $w_{turb} = 0$, соответствующее ламинарному режиму течения, и уравнение

$$w_{turb}^2 / \alpha_{ss}^2 L^2 =$$

$$= \left\{ 2\overset{0}{D}_{ij}\overset{0}{D}_{ij} + \frac{1}{4\pi\mu\overline{\rho}\,\mathbf{Pr}_M^{turb}} \left(\frac{1}{l_{cor}}\varepsilon_{ijk}\overline{B}_i\frac{\partial\overline{B}_j}{\partial x_k} + (\nabla\times\overline{\mathbf{B}})^2 \right) + \frac{1}{\mathbf{Pr}_K^{turb}}\frac{g_k}{\langle T\rangle}\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x_k} - \frac{g_k}{\langle c_p\rangle} \right) \right\} \qquad (3.24)$$

для установившегося турбулентного режима. Уравнение (3.24) имеет вещественное решение только в том случае, когда

$$2\left(\overset{0}{D}_{ij}\overset{0}{D}_{ij} \right) + \frac{1}{\mathbf{Pr}_K^{turb}} \left\{ \frac{1}{4\pi\mu\overline{\rho}} \left(\frac{1}{l_{cor}}\varepsilon_{ijk}\overline{B}_i\frac{\partial\overline{B}_j}{\partial x_k} + (\nabla\times\overline{\mathbf{B}})^2 \right) + \frac{g_k}{\langle T\rangle}\left(\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x_k} - \frac{g_k}{\langle c_p\rangle}\right) \right\} \ge 0 , \qquad (3.25)$$

откуда следует, что $\mathbf{Ri}_\Sigma \equiv \mathbf{Ri}_K - \mathbf{Ri}_M \le \left(\mathbf{Ri}_\Sigma\right)_{cr} = \mathbf{Pr}_K^{turb}$, где

$$\mathbf{Ri}_K \equiv \frac{\tilde{q}_k^{turb}}{\lambda^{turb} 2\langle T\rangle \overset{\circ}{D}_{ij} \overset{\circ}{D}_{ij}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_k} = -\frac{1}{2\langle T\rangle \overset{\circ}{D}_{ij} \overset{\circ}{D}_{ij}} g_k \left(\frac{\partial \langle T\rangle}{\partial x_k} - \frac{g_k}{\langle c_p\rangle} \right),$$

$$\mathbf{Ri}_M \equiv -\frac{1}{\overline{\rho}\nu_M^{turb}} \frac{\mathcal{G}_k \overline{j_k}}{2\overset{\circ}{D}_{ij} \overset{\circ}{D}_{ij}} = \frac{1}{4\pi\mu\overline{\rho} l_{cor}} \frac{\varepsilon_{ijk} \overline{B}_i (\partial \overline{B}_j / \partial x_k) + (\nabla \times \overline{\mathbf{B}})^2}{2\overset{\circ}{D}_{ij} \overset{\circ}{D}_{ij}}$$

– соответственно градиентное гидродинамическое число Ричардсона (безразмерная величина, определяющая относительный вклад термической конвекции вещества в порождение турбулентной энергии в проводящей среде) и градиентное магнитогидродинамическое число Ричардсона (учитывающее влияние магнитного поля, в частности турбулентной электродвижущей силы на возникновение турбулентности в потоке). Легко видеть, что число Ri_M пропорционально числу Альфвена $\mathbf{Al} \equiv \mathbf{N} / \mathbf{Re}_M \equiv B_0^2 / 4\pi\mu\rho U_0^2$ и характеризует отношение магнитной энергии к кинетической энергии плазмы.

Если $\mathbf{Ri}_\Sigma = \mathbf{Pr}_K^{turb}$, то имеется единственное вещественное решение $w_{turb} = 0$, соответствующее ламинарному режиму. Пусть имеет место турбулентный режим и, следовательно, $\mathbf{Ri}_\Sigma < \left(\mathbf{Ri}_\Sigma\right)_{cr}$, тогда для турбулентного коэффициента вязкости электропроводной жидкости получим

$$\nu_K^{turb} = \alpha_{ss} L^2 \sqrt{2\left(\overset{0}{D}_{ij} \overset{0}{D}_{ij}\right)} \sqrt{1 - \mathbf{Ri}_\Sigma / \mathbf{Pr}_K^{turb}} = \alpha_{ss} L^{*2} \sqrt{2\left(\overset{0}{D}_{ij} \overset{0}{D}_{ij}\right)}, \tag{3.26}$$

где L^* – масштаб смешения в случае течения электропроводной жидкости под влиянием магнитного поля. Таким образом, рассмотрев балансовое уравнение (3.20) для энтропии хаоса, мы установили вид безразмерной функции $\phi\left(\mathbf{Ri}_\Sigma / (\mathbf{Ri}_\Sigma)_{cr}\right) = (1 - \mathbf{Ri}_\Sigma / \mathbf{Pr}_K^{turb})^{1/4}$, учитывающей влияние магнитного поля и обратный эффект переноса тепла на развитие турбулентности через посредство обобщённого пути смешения

$$L^* \equiv L(1 - \mathbf{Ri}_\Sigma / \mathbf{Pr}_K^{turb})^{1/4} = L\phi\left(\mathbf{Ri}_\Sigma / (\mathbf{Ri}_\Sigma)_{cr}\right). \tag{3.27}$$

Одновременно получилась приближённая оценка для критического числа Ричардсона

$$\left(\mathbf{Ri}_{\Sigma}\right)_{cr} = \mathbf{Pr}_{K}^{turb} = \overline{\rho}\langle c_p\rangle \nu_{K}^{turb}/\lambda^{turb}. \qquad (328)$$

Заметим, что для определения величины пути смешения L при отсутствии магнитного поля можно воспользоваться формулой Никурадзе $L = L_{00}\left\{1-\exp(-zu^{*}/A\nu)\right\}$ с поправкой Ван-Драйста [24], учитывающей быстрое затухание турбулентности вблизи твёрдой стенки (здесь $A-$ численная константа, $u^{*}-$динамическая скорость на стенке; $L_{00}-$ величина пути смешения, предложенная Прандтлем−Никурадзе, которая, например, для тонкого слоя толщиной δh имеет вид

$$L_{00}/\delta h = 0{,}14 - 0{,}08(1-z/\delta h)^2 - 0.06(1-z/\delta h)^4). \qquad (3.29)$$

В заключение отметим, что в общем случае влияние магнитного поля на турбулентное течение электропроводных сред существенно зависит также и от относительной ориентации магнитного поля и средней скорости потока (см., например, [6]). Кроме того, магнитное поле может создаваться не только токами в плазме, но и внешними по отношению к рассматриваемой среде источниками. В этом случае рассмотренный в работе подход претерпит незначительные изменения.

4. Заключение

В работе использован классический подход к моделированию турбулентности сжимаемой многокомпонентной смеси, который основывается на идее Рейнольдса об усреднении гидродинамических уравнений по ансамблю тождественных течений (возможных реализаций), или посредством другой эквивалентной процедуры усреднения. Полученные таким образом уравнения масштаба среднего движения, вследствие нелинейности исходных гидродинамических уравнений, содержат большое количество неопределённых корреляционных членов (типа векторов турбулентной диффузии и тепла или тензора напряжений Рейнольдса) и потому оказываются незамкнутыми. Замыкание усреднённых по Рейнольдсу уравнений гидродинамики смеси обычно проводится с помощью тех или иных полуэмпирических моделей турбулентности, основанных, в частности, на градиентной гипотезе Прандтля для неизвестных турбулентных потоков. Вместе с тем, важно уже здесь указать на принципиальный недостаток этого подхода, который состоит в том, что усреднение Рейнольдса осуществляется по всем пространственным масштабам турбулентности, т.е. моделирование на основе полуэмпирических гипотез замыкания по необходимости проводится одновременно по всему спектру разномасштабных вихревых структур. Если учесть, что, в отличие от практически универсального спектра мелкомасштабных пульсаций, крупномасштабные вихревые структуры существенно различны для разных течений, то становится очевидной бесперспективность создания на этом пути универсальных полуэмпирических моделей турбулентности, пригодных для описания разнотипных турбулентных течений. По этой причине задача состоит главным образом в установлении границ применимости той или иной полуэмпирической модели турбулентности. Тем не менее есть некоторые основания надеяться, что привлечение многопараметрических аппроксимаций, основанных на эволюционных уравнениях переноса для старших моментов пульсирующих в потоке термо- и гидродинамических параметров, позволит до некоторой степени продвинуться на пути построения универсальных феноменологических моделей турбулентности с усложнёнными свойствами, описывающих достаточно большое число разнообразных турбулизованных природных сред [25].

Список литературы

1. Сыроватский С.И. Магнитная гидродинамика// УФН. 1957. Т. 62. № 3. С. 247-303.

2. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физмат. лит. 1962. 246 с.

3. Biskamp D. Magnetohydrodynamic turbulence. Cambridge: University Press. 2003. 297 p.

4. де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.

5. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н. Электродинамика плазмы. М.: Наука. 1974. 718 с.

6. Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука. 1975. 256 с.

7. Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Mechanics of turbulence of multicomponent gases. Dordrecht, Boston, London.: Kluwer Academic Publishers. 2002. 375 p.

8. Favre A. Statistical Equations of Turbulents Gases // In: Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics, SIAM, Philadelphia.1969. P. 231-267.

9. Колесниченко А.В. К теории турбулентности в планетных атмосферах. Численное моделирование структурных параметров // Астрон. вестн. 1995. Т.29. № 2. С.133-155.

10. Колесниченко А.В. Маров М.Я. Турбулентность многокомпонентных сред. М.: “МАИК-Наука”. 1999. 336 с.

11. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука. 1989. 504 с.

12. Жоу Д., Касас-Бскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований. 2006. 528 с.

13. Колесниченко А.В. Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для турбулентных многокомпонентных сплошных сред// Проблемы современной механики. К юбилею Л.И. Седова. М.: Изд-во МГУ. 1998. С. 52-76.

14.Blackadar A.K. Extension of the laws of thermodynamics to turbulent system // J. Meteorology. 1955. V. 12.

15. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир. 1974. 304 с.

16. Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: Издательская группа “Прогресс”, 1994. 240 с.

17. Моффат Г**.** Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир. 1980. 339 с.

18. Yoshizawa A. Self –consistend turbulent dynamo modeling of reversed field pinches and planetary magnetic fields // Phys. Fluids B. 1990. V. 2. № 7. P. 1589-1600.

19. Брановер Г.Г., Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука.1970. 379 с.

20. Колесниченко А. В, Маров М.Я. О влиянии спиральности на эволюцию турбулентности в солнечном протопланетном облаке // Астрон. вестник. 2007. Т.41. № 1. С. 3-23.

21. Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H. Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke $\overline{\mathbf{V}\times\mathbf{B}}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinfluβter Bewegung // Z. Naturforsch. 1966. 21a. S. 369-376.

22. Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир. 1984. 315 с.

23. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.

24. Van− Driest E.R. On turbulent flow near a wall // J. Aeronaut. Sci. 1956. V. 23. № 10. P. 107.

25. Kolesnichenko A. Vl., Marov M. Ya. Turbulence and selforganizing: problems modelling of space and environments // Springer. Berlin. 2012. P. 657.

Оглавление