



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 65 за 2014 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Елизарова Т.Г., Истомина М.А.

Квазигазодинамический
алгоритм решения
уравнений мелкой воды в
полярной системе
координат

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Елизарова Т.Г., Истомина М.А.
Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений мелкой воды в полярной системе
координат // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 65. 24 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-65>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук

Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина

Квазигазодинамический алгоритм
решения уравнений мелкой воды
в полярной системе координат

Москва 2014

Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина

Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений мелкой воды в полярной системе координат

Аннотация

В данной работе речь идет о расширении квазигазодинамического алгоритма для решения задач гидродинамики в приближении мелкой воды в полярной системе координат. Приведен новый численный алгоритм решения уравнений мелкой воды, который протестирован на примере двух равновесных аналитических решений. Показан способ построения сбалансированной разностной схемы для приведенных уравнений.

T.G. Elizarova, M.A. Istomina

A quasi-gas dynamic algorithm for numerical solution of shallow water equations in polar coordinates

Abstract

In this paper authors present a development of quasi-gas dynamic algorithm for hydrodynamic flow simulations in shallow water approximation in polar coordinate system. A new numerical finite-difference algorithm for shallow water equations is developed and verified for two analytical equilibrium solutions. The well-balanced finite-difference variant of presented scheme is shown.

Содержание

1	Введение	3
2	Уравнения МВ в полярной системе координат	5
3	КГД уравнения МВ в полярной системе координат	8
4	Одномерные задачи и равновесные аналитические решения	14
5	Одномерный разностный алгоритм и результаты расчета	15
6	Сбалансированная схема	18

1 Введение

Квазигазодинамические (КГД) уравнения и основанные на них численные алгоритмы показали свою эффективность при расчетах разнообразных задач газовой динамики [1], [2], [3]. При этом большинство задач решалось в декартовой и цилиндрической системах координат (r, z) [2], [3]. В [3] рассматривалась задача об осесимметричном обтекании сферы. Для ее решения в рамках КГД подхода были выписаны квазигидродинамические уравнения для несжимаемых и сжимаемых течений и построены соответствующие численные алгоритмы в двумерных сферических координатах (r, θ) . При сопоставлении выполненных расчетов с результатами других авторов была отмечена сложность построения алгоритмов решения уравнений газовой динамики для сферических координат. Поэтому построение удобных и надежных алгоритмов решения уравнений газовой динамики в сферической и полярной геометрии является актуальным.

Данная работа посвящена расширению квазигазодинамического (КГД) подхода для численного моделирования течений вязкого сжимаемого газа для задач, рассмотрение которых естественно и удобно проводить в полярной системе координат. К таким задачам, помимо ряда прикладных инженерных задач, относятся задачи геофизики, в частности, моделирование атмосферных явлений в планетарных масштабах. Другой областью приложений является исследование астрофизических объектов, связанных с вращением материи вокруг притягивающих центров. К последним относится, в частности, численное моделирование течений в аккреционных дисках [4] и их упрощенных моделей в рамках приближения мелкой воды (МВ) [5]. Для последней серии задач требуется гидродинамическая модель в приближении МВ с учетом формы подстилающей поверхности. Для расчета течений в аккреционных дисках необходим учет

влияния внешних притягивающих центров. Для задач, в которых изучаются возмущения решения в окрестности равновесных конфигураций, требуются алгоритмы, хорошо описывающие эти равновесные конфигурации. В современной литературе такие алгоритмы называются хорошо сбалансированными (well-balanced schemes), см., например, работы [9] и [10].

Во втором параграфе работы приведены уравнения Навье-Стокса для описания течения вязкого сжимаемого газа для полярной системы координат. Для упрощения выкладок выбран частный случай – уравнения записаны в баротропном приближении в виде уравнений для описания течений МВ. При этом учтено влияние внешних сил и наличие неровной подстилающей поверхности.

В третьем параграфе построены регуляризованные, или сглаженные, уравнения МВ в полярной системе координат с применением метода осреднения исходных уравнений по малому интервалу времени. Эти сглаженные уравнения МВ являются основой конечно-разностного алгоритма решения уравнений МВ.

Четвертый параграф посвящен построению двух характерных равновесных решений уравнений МВ, которые в тоже время являются точными решениями сглаженных уравнений МВ.

В пятом параграфе приведен разностный алгоритм решения уравнений МВ в полярной системе координат, который тестируется на выписанных ранее равновесных решениях. Показана устойчивость разностной схемы. Параметры разностной схемы, обеспечивающие устойчивость и точность вычислительного алгоритма для одномерной задачи, в дальнейшем будут использоваться при проведении математического моделирования двумерных течений.

В последнем параграфе приведен способ построения сбалансированной разностной схемы, точность которой для равновесных решений существенно превосходит точность базового алгоритма.

2 Уравнения МВ в полярной системе координат

Система уравнений МВ в полярной системе координат (r, φ) (рис. 1) с учетом компонент тензора вязких напряжений Навье-Стокса записывается следующим образом

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial hu_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_ru_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{gh^2}{2} \right) - \frac{hu_\varphi^2}{r} = \\ = h \left(f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial hu_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 hu_ru_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{gh^2}{2} \right) = \\ = h \left(f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $h(r, \varphi, t)$ – высота жидкости, $\mathbf{u} = \{u_r(r, \varphi, t), u_\varphi(r, \varphi, t)\}$ – скорость жидкости, $b(r, \varphi)$ – профиль дна, μ – естественная физическая вязкость. f_r и f_φ – компоненты внешней силы. Соответствующие декартовой системе координат компоненты тензора вязких напряжений Навье-Стокса для жидкости равны

$$\begin{aligned} \Pi_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \Pi_{\varphi\varphi} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \Pi_{r\varphi} &= \Pi_{\varphi r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Данная система соответствует системе уравнений Навье–Стокса из [6], где она записана в недивергентном виде для вязкой несжимаемой жидкости.

Система уравнений МВ в полярных координатах (1) – (3) также может быть получена из исходной системы уравнений МВ в декартовых координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial h\mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= \operatorname{div}\Pi_{NS} + h\mathbf{f} - gh\nabla b, \end{aligned} \quad (5)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial h\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \operatorname{div}(h\mathbf{u}) + (h\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \nabla \left(\frac{gh^2}{2} \right) &= \operatorname{div}\Pi_{NS} + h\mathbf{f} - gh\nabla b, \end{aligned} \quad (6)$$

с помощью замены переменных

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Единичные векторы в полярной системе координат $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\varphi)$, $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ выражаются через единичные векторы в декартовой системе координат \mathbf{i} , \mathbf{j} следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \cos\varphi + \mathbf{j} \sin\varphi, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{i} \sin\varphi + \mathbf{j} \cos\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом $\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_r$, $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi$. Подставляя в выражение

$$\mathbf{u}(x, y) = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} = u_r \mathbf{e}_r(\varphi) + u_\varphi \mathbf{e}_\varphi(\varphi)$$

значения \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_φ через декартовы координаты, получаем значения компонент вектора скорости \mathbf{u} в декартовых координатах, выраженных через полярные

$$u_x = u_r \cos\varphi - u_\varphi \sin\varphi, \quad u_y = u_r \sin\varphi + u_\varphi \cos\varphi.$$

Из выражения для производных по координатам в полярной системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y} \sin\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \sin\varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos\varphi \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (9)$$

выражаются производные по декартовым координатам

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \quad (10)$$

С помощью соответствующих коэффициентов Ламэ

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r$$

записываются следующие вычисленные выражения

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (h\mathbf{u}) &= \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial \varphi}, \\ \mathbf{u} \operatorname{div} (h\mathbf{u}) &= \mathbf{e}_r \left(\frac{u_r}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial \varphi} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{u_r}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial \varphi} \right), \\ (h\mathbf{u}\nabla) \mathbf{u} &= \mathbf{e}_r \left(hu_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{hu_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{hu_\varphi^2}{r} \right) + \\ &+ \mathbf{e}_\varphi \left(hu_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{hu_r u_\varphi}{r} + \frac{hu_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

С помощью указанных подстановок может быть получена система уравнений МВ в полярной системе координат (1) – (3).

3 КГД уравнения МВ в полярной системе координат

Для вывода квазигазодинамических (КГД) или регуляризованных уравнений МВ в полярных координатах применим метод, описанный в статьях [7], [8], т.е. гидродинамические переменные осредним по малому интервалу времени Δt и вычислим среднее на отрезке $(t, t + \Delta t)$. При этом будем разлагать средние значения переменных в ряд Тейлора и пренебрегать вторыми производными по времени и членами второго порядка малости вида τ^2 и $\tau\mu$, где $0 \leq \tau \leq \Delta t$ – параметр регуляризации, имеющий размерность времени, по которому производится осреднение. Таким образом, в КГД уравнениях МВ в полярной системе координат гидродинамические переменные h, u_r, u_φ заменяются на $h + \tau \frac{\partial h}{\partial t}$, $u_r + \tau \frac{\partial u_r}{\partial t}$ и $u_\varphi + \tau \frac{\partial u_\varphi}{\partial t}$, а потоки hu_r и hu_φ – на $hu_r + \frac{\partial hu_r}{\partial t}$ и $hu_\varphi + \frac{\partial hu_\varphi}{\partial t}$, соответственно.

Для вывода КГД уравнений МВ в полярной системе координат нам понадобятся выражения для производных $\frac{\partial u_r}{\partial t}$, $\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}$. Для этого выпишем уравнения движения в недивергентном виде без вязких членов Навье–Стокса

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{gh^2}{2} \right) - \frac{u_\varphi^2}{r} = f_r - g \frac{\partial b}{\partial r}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} u_r \frac{\partial (ru_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{rh} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{gh^2}{2} \right) = f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi}. \quad (13)$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial u_r}{\partial t} + w_r^* &= 0, \\ w_r^* &= \tau \left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} - f_r + g \frac{\partial b}{\partial r} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + w_\varphi^* &= 0, \\ w_\varphi^* &= \tau \left[\frac{1}{r} u_r \frac{\partial (ru_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} g \frac{\partial h}{\partial \varphi} - f_\varphi + \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее раскладываем средние значения hu_r и hu_φ в уравнении неразрывности (1) в ряд Тейлора, заменяя их на $hu_r + \tau \frac{\partial hu_r}{\partial t}$ и $hu_\varphi + \tau \frac{\partial hu_\varphi}{\partial t}$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[hu_r + \tau \frac{\partial (hu_r)}{\partial t} \right] \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[hu_\varphi + \tau \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial t} \right] = 0. \quad (16)$$

Из первого и второго уравнений движения без вязких членов Навье–Стокса (12) и (13) выразим производные по времени

$$\frac{\partial hu_r}{\partial t} = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_r u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{gh^2}{2} \right) - \frac{hu_\varphi^2}{r} - h \left(f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) \right], \quad (17)$$

$$\frac{\partial hu_\varphi}{\partial t} = - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 hu_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{gh^2}{2} \right) - h \left(f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) \right] \quad (18)$$

и введем обозначения

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial hu_r}{\partial t} + w_r &= 0, \\ \tau \frac{\partial hu_\varphi}{\partial t} + w_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 w_r &= \frac{\tau}{h} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_r u_\varphi)}{\partial \varphi} + gh \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{hu_\varphi^2}{r} - h \left(f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) \right], \\
 w_\varphi &= \frac{\tau}{h} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 hu_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} gh \frac{\partial h}{\partial \varphi} - h \left(f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) \right], \\
 j_{mr} &= h(u_r - w_r), \\
 j_{m\varphi} &= h(u_\varphi - w_\varphi).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Тогда уравнение неразрывности в рамках КГД модели полярной системы координат записывается как

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rj_{mr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (j_{m\varphi})}{\partial \varphi} = 0. \tag{21}$$

Рассмотрим первое уравнение движения (2) в регуляризованном виде, где также раскладываются в ряд Тейлора средние значения hu_r , h и u_φ

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial hu_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left[\left(hu_r + \tau \frac{\partial (hu_r)}{\partial t} \right) u_r + hu_r \tau \frac{\partial u_r}{\partial t} \right] + \\
 &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(hu_\varphi + \tau \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial t} \right) u_r + hu_\varphi \tau \frac{\partial u_r}{\partial t} \right] + \frac{\partial g}{\partial r} \frac{g}{2} \left(h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right)^2 - \\
 &- \frac{1}{r} \left(h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left(u_\varphi + \tau \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} \right)^2 = \left(h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left(f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Или, с введением новых обозначений (14) и (20), имеем

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial hu_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rj_{mr}u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (j_{m\varphi}u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{gh^2}{2} \right) - \frac{hu_\varphi^2}{r} = \\
 &= \left(h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left(f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r w_r^*)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi w_r^*)}{\partial \varphi} - \\
 &- \frac{\partial}{\partial r} \left(gh\tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \frac{u_\varphi^2}{r} - 2h \frac{u_\varphi}{r} w_\varphi^* + \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \\
 &+ \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r},
 \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\tau \frac{\partial h}{\partial t} = -\tau \operatorname{div} (h\mathbf{u}) = -\tau \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi)}{\partial \varphi} \right]. \quad (24)$$

Аналогично выписывается второе уравнение движения КГД системы МВ в полярной системе координат

$$\begin{aligned} & \frac{\partial hu_\varphi}{\partial t} + \frac{\partial (r^2 j_{mr} u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (j_{m\varphi} u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{gh^2}{2} \right) = \\ & = \left(h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left(f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial (r^2 hu_r w_\varphi^*)}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi w_\varphi^*)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(gh\tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда в результате получается следующая регуляризованная система уравнений МВ в полярной системе координат

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rj_{mr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (j_{m\varphi})}{\partial \varphi} = 0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial hu_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rj_{mr} u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (j_{m\varphi} u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{gh^2}{2} \right) - \frac{hu_\varphi^2}{r} = \\ & = (h - \tau \operatorname{div} (h\mathbf{u})) \left(f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r hw_r^*)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi w_r^*)}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{\partial}{\partial r} (gh\tau \operatorname{div} (h\mathbf{u})) - \tau \frac{u_\varphi^2}{r} \operatorname{div} (h\mathbf{u}) - 2h \frac{u_\varphi}{r} w_\varphi^* + \\ & + \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial hu_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 j_{mr} u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (j_{m\varphi} u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{gh^2}{2} \right) = \\ & = (h - \tau \operatorname{div} (h\mathbf{u})) \left(f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 hu_r w_\varphi^*)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (hu_\varphi w_\varphi^*)}{\partial \varphi} + \\ & + \frac{1}{r} g \frac{\partial}{\partial \varphi} (h\tau \operatorname{div} (h\mathbf{u})) + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\operatorname{div}(h\mathbf{u}) = \frac{1}{r} \frac{\partial (hr u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (h u_\varphi)}{\partial \varphi},$$

$$j_{mr} = h(u_r - w_r),$$

$$j_{m\varphi} = h(u_\varphi - w_\varphi),$$

$$w_r = \frac{\tau}{h} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r h u_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (h u_r u_\varphi)}{\partial \varphi} + g h \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{h u_\varphi^2}{r} - h \left(f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) \right],$$

$$w_\varphi = \frac{\tau}{h} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 h u_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (h u_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} g h \frac{\partial h}{\partial \varphi} - h \left(f_\varphi - \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right) \right],$$

$$w_r^* = \tau \left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} - f_r + g \frac{\partial b}{\partial r} \right],$$

$$w_\varphi^* = \tau \left[\frac{1}{r} u_r \frac{\partial (r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} g \frac{\partial h}{\partial \varphi} - f_\varphi + \frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \varphi} \right],$$

$$\Pi_{rr} = 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r},$$

$$\Pi_{\varphi\varphi} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right),$$

$$\Pi_{r\varphi} = \Pi_{\varphi r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right).$$

При $\tau = 0$ регуляризованная система уравнений МВ в полярных координатах (26) – (28) превращается в исходную систему уравнений МВ в полярных координатах (1) – (3).

Построенная система КГД уравнений МВ в полярной системе координат легко может быть обобщена для случая течения политропного газа, рассматриваемого в баротропном приближении. Для этого следует сделать формальную замену переменных h и $p = \frac{gh^2}{2}$ системы уравнений МВ на ρ и $p = k\rho^\gamma$.

В одномерном случае $h = h(r)$, $u_r = u_r(r)$, $u_\varphi = u_\varphi(r)$, $b = b(r)$, $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$

исходная система уравнений МВ в полярных координатах (1) – (3) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial hu_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{gh^2}{2} \right) - \frac{hu_\varphi^2}{r} = \\ = h \left(f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r}, \\ \frac{\partial hu_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 hu_r u_\varphi)}{\partial r} = hf_\varphi + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi}, \end{array} \right. \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \Pi_{\varphi\varphi} &= 2\mu \frac{u_r}{r}, \\ \Pi_{r\varphi} &= \Pi_{\varphi r} = \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \end{aligned}$$

В этом же приближении регуляризованная система уравнений МВ в полярной системе координат (26) – (28) принимает следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rj_{mr})}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial hu_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rj_{mr}u_r)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{gh^2}{2} \right) - \frac{hu_\varphi^2}{r} = \\ = \left(h - \tau \frac{1}{r} \frac{\partial (hru_r)}{\partial r} \right) \left(f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r h w_r^*)}{\partial r} + \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left(gh\tau \frac{1}{r} \frac{\partial (hru_r)}{\partial r} \right) - \tau \frac{u_\varphi^2}{r} \frac{1}{r} \frac{\partial (hru_r)}{\partial r} - 2h \frac{u_\varphi}{r} w_\varphi^* + \frac{\partial \Pi_{rr}}{\partial r} + \frac{\Pi_{rr} - \Pi_{\varphi\varphi}}{r}, \\ \frac{\partial hu_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 j_{mr} u_\varphi)}{\partial r} = \left(h - \tau \frac{1}{r} \frac{\partial (hru_r)}{\partial r} \right) f_\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 hu_r w_\varphi^*)}{\partial r} + \frac{\partial \Pi_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{2}{r} \Pi_{r\varphi}, \end{array} \right. \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned}
 j_{mr} &= h(u_r - w_r), \\
 w_r &= \frac{\tau}{h} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rhu_r^2)}{\partial r} + gh \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{hu_\varphi^2}{r} - h \left(f_r - g \frac{\partial b}{\partial r} \right) \right], \\
 w_r^* &= \tau \left[u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{u_\varphi^2}{r} - f_r + g \frac{\partial b}{\partial r} \right], \\
 w_\varphi^* &= \tau \left[\frac{1}{r} u_r \frac{\partial (ru_\varphi)}{\partial r} - f_\varphi \right].
 \end{aligned}$$

4 Одномерные задачи и равновесные аналитические решения

Пример 1.

Приведем точное решение уравнений МВ (29) для покоящейся жидкости. Пусть $h = h(r)$, $u_\varphi = 0$, производные по времени равны нулю $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $f_r = 0$, $f_\varphi = 0$. Тогда из первого уравнения следует, что $u_r = 0$. Третье уравнение системы удовлетворяется точно. Из второго уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial r} = 0$$

получается естественное условие равновесия для покоящейся жидкости

$$h(r) + b(r) = const. \tag{31}$$

Пример 2.

Рассмотрим задачу о равновесии вращающейся жидкости.

Пусть $h = h(r)$, $u_\varphi = u_\varphi(r)$, $b(r) = const$, $f_r = 0$, $f_\varphi = 0$. Будем искать решение системы (29) в виде $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $u_r = 0$. Зададим поперечную скорость как $u_\varphi = r\omega_0$, где ω_0 – некоторая константа.

Первое и третье уравнения системы удовлетворяются тождественно. Из второго уравнения системы (29) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{gh^2}{2} \right) - hr\omega_0^2 = 0,$$

и стационарное, или равновесное, решение системы (29) имеет вид

$$\begin{cases} u(r) = 0, \\ h(r) = \frac{\omega_0^2 r^2}{2g} + C_1, \end{cases} \quad (32)$$

где C_1 – константа, которая находится при задании начальных условий. Эта постановка эквивалентна заданию компоненты центробежной силы f_r при $u_\varphi = 0$

$$h = h(r), u_r = 0, u_\varphi = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0, f_r = r\omega_0^2, f_\varphi = 0.$$

5 Одномерный разностный алгоритм и результаты расчета

Введем равномерную сетку по координате r с шагом Δr , координатами узлов r_i , а также сетку по времени с шагом Δt . Для решения системы КГД уравнений МВ в полярной системе координат используем явную по времени схему с центральными разностями. Значения гидродинамических величин определяются в узлах сетки, значения потоков определяются в полуцелых узлах.

Одномерная разностная аппроксимация для первых двух уравнений системы (30) выглядит следующим образом

$$\frac{\hat{h}_i - h_i}{\Delta t} + \frac{1}{r_i} \frac{(rj_{mr})_{i+\frac{1}{2}} - (rj_{mr})_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} = 0, \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\hat{h}u_r)_i - (hu_r)_i}{\Delta t} + \frac{1}{r_i} \frac{(rj_{mr}u_r)_{i+\frac{1}{2}} - (rj_{mr}u_r)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \frac{1}{\Delta r} \left(\left(\frac{gh^2}{2} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{gh^2}{2} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right) \\
& - \frac{h_i u_{\varphi i}^2}{r_i} = \left(h_i - \tau_i \frac{1}{r_i} \frac{1}{\Delta r} \left((rhu_r)_{i+\frac{1}{2}} - (rhu_r)_{i-\frac{1}{2}} \right) \right) \left(f_{ri} - g \frac{1}{\Delta r} (b_{i+\frac{1}{2}} - b_{i-\frac{1}{2}}) \right) + \\
& + \frac{1}{\Delta r} \left(\left(\frac{gh\tau}{r} \right)_{i+\frac{1}{2}} \frac{(hru_r)_{i+1} - (hru_r)_i}{\Delta r} - \left(\frac{gh\tau}{r} \right)_{i-\frac{1}{2}} \frac{(hru_r)_i - (hru_r)_{i-1}}{\Delta r} \right) + \\
& + \frac{1}{r_i} \frac{(ru_r h w_r^*)_{i+\frac{1}{2}} - (ru_r h w_r^*)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} - \tau \omega_0^2 \frac{(hru_r)_{i+\frac{1}{2}} - (hru_r)_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} - 2h_i \omega_0 w_{\varphi}^* + \\
& + \frac{\Pi_{rr i+\frac{1}{2}} - \Pi_{rr i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} + \frac{\Pi_{rr i} - \Pi_{\varphi\varphi i}}{r_i},
\end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned}
w_{r i+\frac{1}{2}} = & \frac{\tau_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{r_{i+\frac{1}{2}}} \frac{(rhu_r^2)_{i+1} - (rhu_r^2)_i}{\Delta r} + \frac{1}{\Delta r} gh_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1} - h_i) - \right. \\
& \left. - h_{i+\frac{1}{2}} \left(f_{i+\frac{1}{2}} - g \frac{1}{\Delta r} (b_{i+1} - b_i) \right) \right],
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
w_{r i+\frac{1}{2}}^* = & \tau_{i+\frac{1}{2}} \left[u_{r i+\frac{1}{2}} \frac{u_{r i+1} - u_{r i}}{\Delta r} + \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\Delta r} gh_{i+\frac{1}{2}} (h_{i+1} - h_i) - \right. \\
& \left. - f_{r i+\frac{1}{2}} + g \frac{1}{\Delta r} (b_{i+1} - b_i) \right],
\end{aligned} \tag{36}$$

$$w_{\varphi}^* = \tau_{i+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{r_{i+\frac{1}{2}}} u_{i+\frac{1}{2}} \frac{(ru_{\varphi})_{i+1} - (ru_{\varphi})_i}{\Delta r} \right], \tag{37}$$

$$\Pi_{rr i+\frac{1}{2}} = 2\mu_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{r i+1} - u_{r i}}{\Delta r}, \tag{38}$$

$$\Pi_{\varphi\varphi i} = 2\mu_i \frac{u_{r i}}{r_i}. \tag{39}$$

Динамическая вязкость μ берется пропорциональной давлению в ячейке и рассматривается как регуляризирующая добавка

$$\mu = \tau p = \tau \frac{gh^2}{2}. \quad (40)$$

Параметр регуляризации пропорционален шагу сетки Δr

$$\tau = \alpha \frac{\Delta r}{|u_r(r)| + \sqrt{gh(r,t)}}. \quad (41)$$

Шаг по времени выбирается из условия Куранта в виде

$$\Delta t = \beta \frac{\Delta r}{|u_r(r)| + \sqrt{gh(r,t)}}, \quad (42)$$

где β – число Куранта, $0 < \alpha < 1$ – числовой коэффициент.

Расчетная область в примерах берется от $r_1 = 10$ см до $r_2 = 110$ см, ускорение свободного падения $g = 980$ см/сек² (рис. 1).

Пример 1. Численная проверка условия покоящейся жидкости. Начальные условия $u_r = 0$, $h(r) + b(r) = const$, профиль дна задается как небольшой холмик в виде полуокружности $b(r) = \sqrt{100 - (r - 60)^2}$ радиуса 10 см с центром в точке $r = 60$ см. Граничные условия для высоты жидкости h берутся исходя из требования выполнения условия непротекания потока массы $j_{mr} = 0$ на границе расчетной области

$$\left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{\Gamma} = - \left. \frac{\partial b}{\partial r} \right|_{\Gamma}. \quad (43)$$

Действительно, поток массы на границе должен быть равен нулю $j_{mr} = 0$, и при граничном условии на скорость $u_r|_{\Gamma} = 0$ получаем $j_{mr} = -hw_r = 0$.

На рис. 2 приведен результат расчета этой задачи. Численный коэффициент α в пределах $0.1 \div 1$ не влияет на результат расчета.

Пример 2. Константа интегрирования C_1 в аналитическом решении выбирается из задания значения высоты жидкости на левой границе рас-

четной области $h(r_1, 0) = 10$ см и равна $C_1 = 9.95$. Угловая скорость равна $\omega_0 = 1.0$ сек⁻¹ (см. рис. 3).

Начальный уровень жидкости h_0 находится из условия равенства объемов при $t = 0$ и $t = \infty$

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\omega_0^2 r^2}{2g} + C_1 \right) r dr = h_0 \pi (r_2^2 - r_1^2) \quad (44)$$

и равен $h_0 = 13$ см. Начальные условия в данном примере выбраны таким образом, чтобы в процессе эволюции уровня жидкости не образовывались области с сухим дном.

Граничное условие для высоты жидкости h берется из требования непротекания потока массы на границе $j_{mr}|_{\Gamma} = 0$ при $u_r|_{\Gamma} = 0$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{\Gamma} = r|_{\Gamma} \frac{\omega_0^2}{g}. \quad (45)$$

Время расчета составляет 50 сек. Шаги сетки равны $\Delta r = 2.0, 1.0, 0.5$ см, параметр $\alpha = 0.5$, число Куранта $\beta = 0.1$. Область расчета для α от 0.1 до 1.0, для β – до 0.4. Результаты расчетов представлены на рис. 4.

Оба представленных расчета показывают, что построенная разностная схема монотонно сходится к аналитическим решениям в указанном интервале шагов сетки и чисел Куранта. Точность численного решения для $h(r)$ и $u_r = 0$ на сетке с шагом $\Delta r = 1.0$ при задании начального условия в виде аналитического решения составляет $\sim 10^{-3}$.

6 Сбалансированная схема

Для ряда задач важно, чтобы разностная схема обладала свойством "well-balanced"[9]. Указанное условие означает, что в состоянии равновесия ($u \equiv 0$) сила давления должна быть уравновешена приложенной к

системе внешней силой. Для уравнения Эйлера это соотношение записывается в виде

$$\nabla p = h\mathbf{f} = h\nabla\phi, \quad (46)$$

где p – давление, h – высота жидкости, $\mathbf{f} = \nabla\phi$ – массовая сила.

Для сбалансированных схем соотношение (46) должно удовлетворяться с высокой точностью на уровне разностного алгоритма. Для "well-balanced" схемы эта точность может составлять порядка $10^{-13} - 10^{-15}$. Разработке таких схем посвящено много работ, но построить такие схемы на базе численных алгоритмов повышенного порядка точности достаточно сложно [10].

КГД алгоритм естественным образом можно сделать сбалансированным, поскольку включенная в него адаптивная численная диссипация зануляется на равновесных решениях. Приведем способ построения сбалансированной КГД схемы для двух рассмотренных выше примеров.

Пример 1. Аналогом внешней силы в данном случае выступает выражение $-g\partial b/\partial r$, и соотношение (46) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial b}{\partial r} = 0 \quad (47)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial r} (h + b) = 0. \quad (48)$$

Разностная аппроксимация соответствующих слагаемых в схеме (34) записывается в виде

$$\frac{g}{2} \frac{h_{i+\frac{1}{2}}^2 - h_{i-\frac{1}{2}}^2}{\Delta r} + gh_i \frac{b_{i+\frac{1}{2}} - b_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r} = 0. \quad (49)$$

Для того чтобы получить сбалансированную разностную схему, необходимо заменить h_i на $\frac{h_{i+1/2} + h_{i-1/2}}{2}$. Тогда получается разностное соот-

ношение

$$\frac{1}{\Delta r} \left(h_{i+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2}} + b_{i+\frac{1}{2}} - b_{i-\frac{1}{2}} \right) = 0, \quad (50)$$

которое непосредственно аппроксимирует (48).

При такой модификации разностного уравнения (34) точное решение $b(r) + h(r) = 13$ см вычисляется с точностью до 10^{-13} и скорость $u_r = 0$ – с точностью до 10^{-14} . Указанная модификация разностного КГД алгоритма для уравнений МВ впервые была предложена в [8] для плоских одномерных течений и обобщена в [11] на двумерные задачи для схем, построенных на прямоугольных и неструктурированных сетках.

Пример 2. Аналогом внешней силы в данном случае выступает выражение hrw_0^2 , и соотношение (46) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{gh^2}{2} \right) - hw_0^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{2} \right) = 0. \quad (51)$$

Разностная аппроксимация записывается в виде

$$\frac{g}{2} \frac{h_{i+\frac{1}{2}}^2 - h_{i-\frac{1}{2}}^2}{\Delta r} - h_i \omega_0^2 \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2}{2\Delta r} = 0. \quad (52)$$

Для того чтобы получить сбалансированную разностную схему для выражения $\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\omega_0^2 r}{2g}$, в схеме (34) также необходимо заменить h_i на $\frac{h_{i+1/2} + h_{i-1/2}}{2}$, т.е.

$$\frac{g}{2} \frac{h_{i+\frac{1}{2}}^2 - h_{i-\frac{1}{2}}^2}{\Delta r} - \frac{h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}}}{2} \omega_0^2 \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2}{2\Delta r} = 0. \quad (53)$$

Точность численного решения при задании начального условия в виде аналитического решения (32) составляет 10^{-14} для $h(r)$ и $u_r = 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 13-01-00703-а, 12-01-00769-а.

Список литературы

- [1] *Б.Н. Четверушкин* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. – Москва: МАКС Пресс, 2004 г.
- [2] *Т.Г. Елизарова* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. – Москва: Научный мир, 2007 г.
- [3] *Ю.В. Шеретов* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. – Москва; Ижевск: НИЦ РХД, 2009 г.
- [4] *Е.П. Велихов, А.Ю. Луговский, С.И. Мухин, Ю.П. Попов, В.М. Четкин* Роль крупномасштабной турбулентности в перераспределении углового момента в аккреционных звездных дисках. – Москва: *Астрономических журнал*, 2007 г., т. 84, № 2, с. 1 – 8.
- [5] *А.М. Фридман* Предсказание и открытие новых структур в спиральных галактиках. – Москва: УФН, 2007 г., т. 117(2), с. 121 – 148.
- [6] *Н.Е. Кочин* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, – Москва: Наука, 1965 г.
- [7] *Т.Г. Елизарова* Осреднение по времени как приближенный способ построения квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. *ЖВМиМФ*, 2011 г., т. 51, № 11, с. 2096 – 2105.
- [8] *T.G. Elizarova, O.V. Bulatov* Regularized shallow water equations and a new method of simulation of the open channel flows. *Comp. Fluids*, 2011, № 46, p.206-211.
- [9] *R.J. LeVeque* Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods: The Quasi-Steady Wave-Propagation Algorithm. *J. Comput. Phys.* 146, 346 (1998).

- [10] *R. Kapelli, S. Mishra* Well-balanced schemes for the Euler equations with gravitation. Research Report No. 2013-05, Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

- [11] *Елизарова Т.Г., Булатов О.В.* Численный алгоритм решения регуляризованных уравнений мелкой воды на неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 21. 27 с. <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-21>.

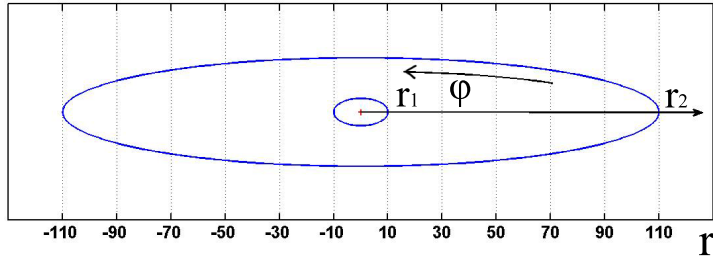


Рис. 1. Расчетная область.

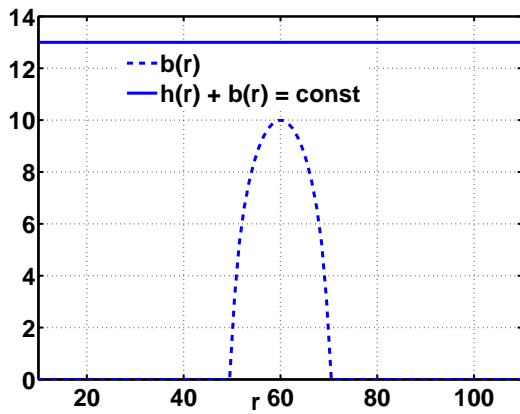


Рис. 2. Пример 1. Высота $h(r)$ – численный расчет для $\Delta r = 1.0$ при $t = 1$ сек.
 $\alpha = 0.5, \beta = 0.1$.

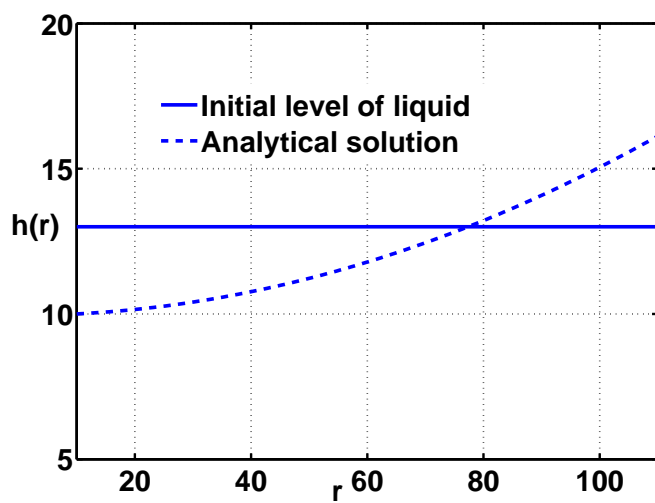


Рис. 3. Пример 2. Вычисление начального уровня жидкости. Начальный и конечный уровни жидкости в аналитическом расчете.

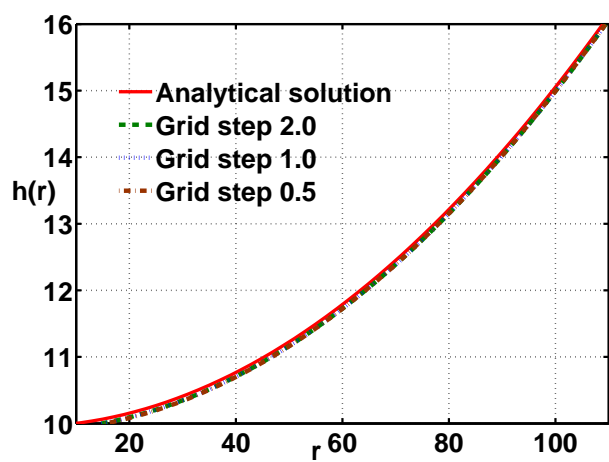


Рис. 4. Пример 2. Высота $h(r)$ – аналитический и численный расчеты для $\Delta r = 2.0, 1.0, 0.5$. $\alpha = 0.5, \beta = 0.1, t = 50$ сек.