ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 69 за 2014 г.

Шестаков С.А., Иванов Д.С.

Оптимизационные задачи при управлении групповым полетом спутников с помощью переброса массы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Шестаков С.А., Иванов Д.С. Оптимизационные задачи при управлении групповым полетом спутников с помощью переброса массы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 69. 24 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-69**

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук

С. А. Шестаков, Д. С. Иванов

Оптимизационные задачи при управлении групповым полетом спутнков с помощью переброса массы

Москва — 2014

С. А. Шестаков, Д. С. Иванов

Оптимизационные задачи при управлении групповым полетом спутников с помощью переброса массы

Рассматривается управление групповым полетом спутников с помощью переброса массы. От одного из спутников отделяется дополнительное тело, которое попадает в центр масс другого спутника. В результате обмена массой оба спутника получают импульс, что приводит к изменению относительного движения. Подход может быть использован для широкого класса задач изменения конфигурации группового полета спутников. Показано, что возможно остановить относительный дрейф спутников или изменить форму замкнутой траектории. В настоящей работе рассмотрен ряд оптимизационных задач, возникающих при управлении с помощью переброса массы. Эти задачи были решены для конкретных примеров. Кроме того, в работе рассмотрено влияние ошибок исполнения переброса на результирующие относительные траектории.

Ключевые слова: групповой полет спутников, относительное движение, переброс массы

S. A. Shestakov, D. S. Ivanov

Optimization Problems of Satellite Formation Flying Mass Exchange Control

The paper discusses the problem of formation flying relative motion control by approach which based on a mass exchange between satellites. One satellite initially carries a supplementary mass which separates from the satellite and collides inelastically with the other one. Both satellites get additional impulses applied to their centers of mass according to the momentum conservation law. The resulting relative trajectory after the mass transfer changes. This approach can be applied for a wide range formation flying reconfigurations. It was shown that one can obtain a closed relative trajectory and alter the size of it by a single mass exchange. The paper explores some of the optimization problems of the approach. The solutions of these optimization problems are demonstrated on the particular examples. The paper also studies the influence of the separation point and velocity defining errors on relative motion.

Key words: satellite formation flying, relative trajectory, mass exchange

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-00665, 14-01-31313).

Введение

Управление групповым полетом спутников может быть осуществлено без расхода топлива. Для создания сил и моментов, необходимых для управления, используются различные возобновляемые источники энергии. К настоящему времени известны несколько способов бестопливного управления групповым полётом спутников. В качестве примеров можно привести тросовые системы [1,2], методы, основанные на использовании аэродинамического торможения [3], магнитных, электростатических [4] и лоренцевских сил [5].

В последние годы активно исследуется новая концепция управления групповым полётом. Основная идея состоит в следующем: один спутник создаёт импульс, возникающий при отделении дополнительной массы, другой спутник ловит массу и перенаправляет её обратно. Подобный подход был впервые предложен в статье Bae [6]. В ней рассматривается управление относительным движением с помощью лазерных лучей, при этом перенаправление пучка света производится с помощью зеркал. Создаваемый лазером импульс порождает отталкивающую силу, которая и используется для управления. Идея Bae была развита в работе Tragesser [7]. В статье изучаются положения равновесия в группе спутников при наличии непрерывного потока массы между ними. Оригинальный подход к реализации концепции обмена импульсом был предложен Joslyn и Ketsdever [8]. Основная идея состоит в использовании потока жидкости: каждый спутник может генерировать и выпускать поток жидкости в виде капель. Капли жидкости ловятся вторым спутником и затем перенаправляются обратно. В статье также исследуются различные возмущения земной орбиты, способные привести к отклонению потока капель от требуемого пути. Schonig и Ketsdever [9] изучили методы обмена импульсом, способные обеспечивать устойчивость конфигурации спутников в группе.

В описанных работах предполагается, что масса, передаваемая между спутниками, является малой по сравнению с массой самих спутников, равно как и время совершения маневра — малым по сравнению с периодом обращения спутников вокруг Земли. Кроме того, силы, управляющие относительным движением и действующие на пару спутников, равны и противоположно направлены. Данная статья предлагает иной подход к управлению с помощью переброса массы. Дополнительное твёрдое тело служит для передачи импульса между спутниками в группе. До совершения переброса один из спутников состоит из двух частей: собственно спутника и дополнительного тела, которое само по себе может быть пассивной массой или независимым космическим аппаратом. В определённый момент по команде дополнительное тело отделяется от спутника с заданной относительной скоростью, при этом спутник получает импульс согласно закону сохранения импульса. Дополнительное тело движется по некоторой траектории и сталкивается со вторым спутником неупруго. При этом относительная траектория спутников в группе снова меняется, а дополнительное тело остаётся в системе и может быть использовано в дальнейшем (рис. 1).

Данный подход к управлению группой спутников был исследован авторами настоящей работы ранее в [10]. Было продемонстрировано, что переброс одиночной массы может быть использован для изменения относительной траектории спутников в группе, для остановки дрейфа и для управления полётом в условиях возмущений, вносимых нецентральностью гравитационного поля Земли. В настоящей статье рассматривается ряд оптимизационных задач: задача минимизации времени переброса при остановке относительного дрейфа, задача минимизации требуемой относительной скорости выброса дополнительного тела, а также задача остановки дрейфа при сохранении исходной формы траектории.

Наиболее критичным для данной схемы управления является наличие механизма броска/ловли дополнительного тела. Таким механизмом может быть некий манипулятор, установленный на спутниках (в качестве примера можно рассмотреть манипулятор из [11]). Вследствие этого важным представляется определение приемлемых возможных ошибок в определении места и скорости выброса тела, при которых переброс всё ещё будет осуществим и тело не будет потеряно в процессе управления движением. Предполагается, что механизм броска/ловли может ловить дополнительное тело в некоторой малой окрестности центра масс спутника. Допустимые значения ошибок рассчитаны и проиллюстрированы примерами.

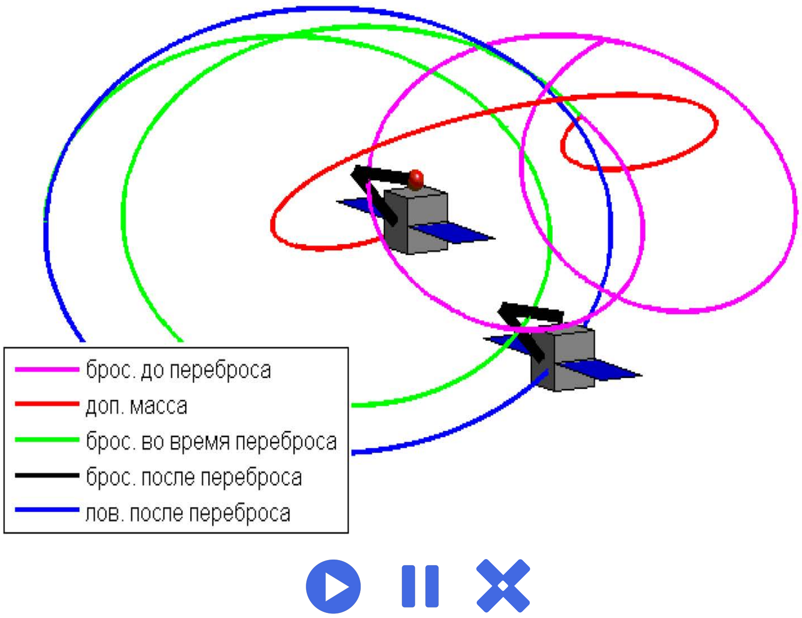

Рис. 1. Схема управления с помощью переброса

1. Задача о перебросе массы

1.1. Постановка задачи

Будем рассматривать конфигурацию из двух спутников с близкими орбитами. Для описания траекторий в таком случае удобно пользоваться уравнениями движения в относительных координатах. Общий вид уравнения относительного движения двух спутников достаточно сложен для аналитического рассмотрения, поэтому в данной работе используется система уравнений Клохесси–Уилтшира (Clohessy–Wiltshire) [12], которая описывает движение спутника относительно некоторого опорного тела O, движущегося вокруг Земли. Система имеет вид

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + 2\omega\dot{z} = 0, \\ &\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \\ &\ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где ось Oz направлена вдоль радиус-вектора опорного тела от центра Земли, ось Oy — по нормали к плоскости опорной орбиты в направлении орбитального момента, ось Ox дополняет систему до правой тройки, O — опорное тело, движущееся по круговой орбите радиуса ρ с угловой скоростью $\omega = \sqrt{\mu/\rho^3}$, μ — гравитационный параметр Земли. Система координат $Oxyz$ — орбитальная система координат (ОСК) — схематично представлена на рис. 2.

Предположим, что изначально движение одного из спутников (далее «бросающего») в ОСК описывается уравнениями (1), а второй спутник (далее «ловящий») покоится в точке O.

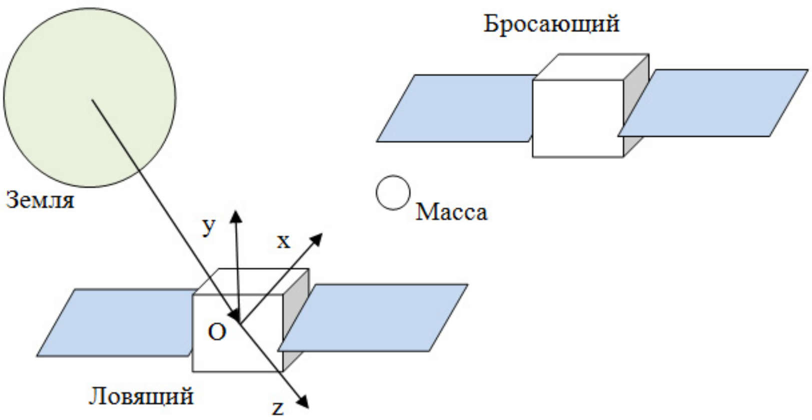

Рис. 2. Схематичное изображение группового полёта

Пусть поставлена задача Коши для системы (1) с начальными условиями

$$\begin{aligned} &x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0, \\ &\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Решение задачи (1, 2) есть

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \left[x_0 - \frac{2\dot z_0}{\omega} + 3\omega\left(\frac{\dot x_0}{\omega} + 2z_0\right)t_0\right] - 3\left(\frac{\dot x_0}{\omega} + 2z_0\right)\omega t \\
&\quad + 2\left[\frac{\dot z_0}{\omega}\cos\omega t_0 - \left(\frac{2\dot x_0}{\omega} + 3z_0\right)\sin\omega t_0\right]\cos\omega t \\
&\quad + 2\left[\frac{\dot z_0}{\omega}\sin\omega t_0 + \left(\frac{2\dot x_0}{\omega} + 3z_0\right)\cos\omega t_0\right]\sin\omega t, \\
y(t) &= \left(y_0\sin\omega t_0 + \frac{\dot y_0}{\omega}\cos\omega t_0\right)\sin\omega t \\
&\quad + \left(y_0\cos\omega t_0 - \frac{\dot y_0}{\omega}\sin\omega t_0\right)\cos\omega t, \\
z(t) &= \left[\frac{\dot z_0}{\omega}\cos\omega t_0 - \left(\frac{2\dot x_0}{\omega} + 3z_0\right)\sin\omega t_0\right]\sin\omega t \\
&\quad - \left[\frac{\dot z_0}{\omega}\sin\omega t_0 + \left(\frac{2\dot x_0}{\omega} + 3z_0\right)\cos\omega t_0\right]\cos\omega t + 2\left(\frac{\dot x_0}{\omega} + 2z_0\right).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Удобно ввести константы

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\dot x_0}{\omega} + 2z_0, \\
C_2 &= \frac{\dot z_0}{\omega}\cos\omega t_0 - \left(\frac{2\dot x_0}{\omega} + 3z_0\right)\sin\omega t_0, \\
C_3 &= \frac{\dot z_0}{\omega}\sin\omega t_0 + \left(\frac{2\dot x_0}{\omega} + 3z_0\right)\cos\omega t_0, \\
C_4 &= x_0 - \frac{2\dot z_0}{\omega} + 3\omega\left(\frac{\dot x_0}{\omega} + 2z_0\right)t_0, \\
C_5 &= y_0\sin\omega t_0 + \frac{\dot y_0}{\omega}\cos\omega t_0, \\
C_6 &= y_0\cos\omega t_0 - \frac{\dot y_0}{\omega}\sin\omega t_0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

С их помощью система (3) записывается в более простом виде

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2C_2\cos\omega t + 2C_3\sin\omega t + C_4 - 3C_1\omega t, \\
y(t) &= C_5\sin\omega t + C_6\cos\omega t, \\
z(t) &= 2C_1 + C_2\sin\omega t - C_3\cos\omega t.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Из (5) видно, что относительная траектория замкнута, когда $C_1 = 0$. При этом, значение C_1 отвечает за величину относительного дрейфа спутников в группе. Величина $\sqrt{C_2^2 + C_3^2}$ определяет амплитуду колебаний траектории вдоль осей Ox и Oz, $\sqrt{C_5^2 + C_6^2}$ — амплитуду вдоль оси Oy. C_4 представляет собой постоянный сдвиг траектории. Введённые константы удобным образом описывают форму и размер относительной траектории. Решение (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= -3C_1\omega t + 2A\cos(\omega t - \varphi) + C_4, \\ y(t) &= B\cos(\omega t - \psi), \\ z(t) &= 2C_1 + A\sin(\omega t - \varphi), \end{aligned} \tag{6}$$

где $A = \sqrt{C_2^2 + C_3^2}$, $B = \sqrt{C_5^2 + C_6^2}$, а дополнительные углы задаются выражениями

$$\varphi:\ \cos\varphi = \frac{C_2}{A},\ \sin\varphi = \frac{C_3}{A};$$
$$\psi:\ \sin\psi = \frac{C_5}{B},\ \cos\psi = \frac{C_6}{B}.$$

Из (5) дифференцированием по времени удобно выразить скорости

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -3C_1\omega - 2C_2\omega\sin\omega t + 2C_3\omega\cos\omega t, \\ \dot{y}(t) &= C_5\omega\cos\omega t - C_6\omega\sin\omega t, \\ \dot{z}(t) &= C_2\omega\cos\omega t + C_3\omega\sin\omega t. \end{aligned} \tag{7}$$

1.2. Скорость выброса

Предположим, что в момент времени $t = t_e$ бросающий спутник производит выброс дополнительного тела массы m. В ОСК оно также движется по некоторой траектории $(x_s(t), y_s(t), z_s(t))$, описываемой уравнениями (1). Потребуем, чтобы в некоторый момент $t = t_m$ эта дополнительная масса столкнулась с ловящим спутником, то есть чтобы выполнялось $x_s(t_m) = y_s(t_m) = z_s(t_m) = 0$.

Скорость массы $\dot{\mathbf{r}}_s$ в момент t_e равна:

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \dot{\mathbf{r}}_t(t_e) + \delta\mathbf{v},$$

где $\delta\mathbf{v} = (\delta\dot{x}, \delta\dot{y}, \delta\dot{z})$ — относительная скорость выброса, а $\dot{\mathbf{r}}_t(t_e)$ — скорость бросающего спутника в момент броска.

Найдем относительную скорость выброса. Для этого подставим скорости в решение (3) и положим $t_0 = t_e$, $t = t_m$

$$\delta\dot{y} = -\dot{y}_0 - y_0\omega\operatorname{ctg} u,$$

$$\begin{pmatrix} 4\sin u - 3u & 2\cos u - 2 \\ 2 - 2\cos u & \sin u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_0 + \delta\dot{x} \\ \dot{z}_0 + \delta\dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6z_0\omega(u - \sin u) - x_0\omega \\ z_0\omega(3\cos u - 4) \end{pmatrix},$$

где $u = \omega(t_m - t_e)$. Неравенство нулю детерминанта $\Delta = 3u\sin u - 8(1-\cos u)$ обеспечивает существование единственного решения:

$$\begin{aligned}
\delta\dot{x} &= -\dot{x}_0 - 2z_0\omega + \frac{1}{\Delta}[x_0\omega\sin u + 2z_0\omega(\cos u - 1)],\\
\delta\dot{y} &= -\dot{y}_0 - y_0\omega\operatorname{ctg} u,\\
\delta\dot{z} &= -\dot{z}_0 - \frac{1}{\Delta}[2x_0\omega(1-\cos u) + z_0\omega(3u\cos u - 4\sin u)].
\end{aligned} \tag{8}$$

Определив начальную траекторию, зададим время начала переброса t_e и длительность переброса $t_m - t_e$ и вычислим необходимую для переброса относительную скорость выброса. Система вырождается при $\sin u = 0, y_0 \neq 0$ и при $\Delta = 0$. В этих случаях нет возможности для столкновения массы с ловящим спутником — краевая задача не имеет решений.

1.3. Изменение относительной траектории

Определим влияние переброса массы на относительное движение спутников. Как показано выше, любое изменение траектории влечёт изменение значений констант $C_1 \dots C_6$. Исследуем эти изменения при однократном перебросе.

Пусть масса каждого из двух спутников формации (без дополнительного тела) есть M, масса дополнительного тела есть m. Тогда, применяя закон сохранения импульса в момент выброса тела (считаем импульс приложенным к центру масс бросающего, а потому не влиящим на его угловое движение), получаем

$$(M+m)\mathbf{v}_{t,0} = M\mathbf{v}_t + m(\mathbf{v}_{t,0} + \delta\mathbf{v}),$$

где $\mathbf{v}_{t,0}$ и $\mathbf{v}_t$ — скорость бросающего в момент времени t_e до и сразу после отделения дополнительного тела соответственно. Отсюда находим скорость бросающего спутника после выброса

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{t,0} - \frac{m}{M}\delta\mathbf{v}.$$

Вместе с начальными условиями $x_t(t_e) = x_0$, $y_t(t_e) = y_0$, $z_t(t_e) = z_0$ она полностью определяет движение бросающего после совершения броска.

После столкновения с перебрасываемым телом траектория ловящего спутника также меняется. Для определения характера изменения вычислим траекторию дополнительного тела на отрезке времени $[t_e, t_m]$. Начальные условия для него есть $x_s(t_e) = x_0$, $y_s(t_e) = y_0$, $z_s(t_e) = z_0$, $\dot{x}_s(t_e) = \dot{x}_0 + \delta\dot{x}$, $\dot{y}_s(t_e) = \dot{y}_0 + \delta\dot{y}$, $\dot{z}_s(t_e) = \dot{z}_0 + \delta\dot{z}$, поэтому оно движется по траектории (5), где константы интегрирования имеют вид

$$
\begin{aligned}
C_{1,s} &= \frac{1}{\Delta}[x_0 \sin u + 2z_0(\cos u - 1)],\\
C_{2,s} &= \frac{\cos\omega t_e}{\Delta}[z_0(4\sin u - 3u\cos u) - 2x_0(1-\cos u)]\\
&- \frac{\sin\omega t_e}{\Delta}[z_0(4(1-\cos u) - 3u\sin u) + 2x_0 \sin u],\\
C_{3,s} &= \frac{\cos\omega t_e}{\Delta}[z_0(4(1-\cos u) - 3u\sin u) + 2x_0\sin u]\\
&- \frac{\sin\omega t_e}{\Delta}[2x_0(1-\cos u) + z_0(3u\cos u - 4\sin u)],\\
C_{4,s} &= \frac{1}{\Delta}[4x_0(\cos u - 1) + 2z_0(3u\cos u - 4\sin u)]\\
&+ \frac{1}{\Delta}[3x_0\sin u + 6z_0(\cos u - 1)]\omega t_e,\\
C_{5,s} &= y_0 \sin\omega t_e - y_0 \operatorname{ctg} u \cos\omega t_e,\\
C_{6,s} &= y_0 \cos\omega t_e + y_0 \operatorname{ctg} u \sin\omega t_e.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Согласно закону сохранения импульса скорость ловящего спутника сразу после столкновения его с дополнительным телом равна (начальная скорость ловящего в ОСК нулевая)

$$
\mathbf{v}_c(t_m) = \frac{m}{M+m}\mathbf{v}_s(t_m).
$$

Начальные условия для ловящего после переброса следующие: $\mathbf{r}_c(t_m) = 0$, $\mathbf{v}_c(t_m)$.

После совершения переброса оба спутника движутся в ОСК по орбитам вида (5) с некоторыми константами $C_1 \ldots C_6$, которые являются функциями начальных условий, времени начала t_e и окончания t_m переброса и масс M и m. Аналитические выражения приведены далее в формулах (10) и (11) (индекс «t» для бросающего, «c» для ловящего). Здесь $\Delta = 3u\sin u - 8(1 - \cos u)$ и $k = m/M$. С помощью полученных формул можно исследовать и вычислить изменения относительных траекторий спутников для конкретных задач управления.

$$
\begin{aligned}
C_{1,t} &= (k+1)\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0\right) + \frac{k}{\Delta}[2z_0(1-\cos u) - x_0 \sin u],\\
C_{2,t} &= (k+1)\left(\frac{\dot{z}_0}{\omega}\cos\omega t_e - \left(2\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0\right)\sin\omega t_e\right)\\
&\quad + \frac{\sin\omega t_e}{\Delta}[4kz_0(1-\cos u) - 3kz_0 u\sin u + 2kx_0\sin u]\\
&\quad + \frac{\cos\omega t_e}{\Delta}[2kx_0(1-\cos u) + 3kz_0 u\cos u - 4kz_0\sin u],\\
C_{3,t} &= (k+1)\left(\frac{\dot{z}_0}{\omega}\sin\omega t_e + \left(2\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0\right)\cos\omega t_e\right)\\
&\quad - \frac{\cos\omega t_e}{\Delta}[4kz_0(1-\cos u) - 3kz_0 u\sin u + 2kx_0\sin u]\\
&\quad + \frac{\sin\omega t_e}{\Delta}[2kx_0(1-\cos u) + 3kz_0 u\cos u - 4kz_0\sin u],\\
C_{4,t} &= x_0 - 2(k+1)\frac{\dot{z}_0}{\omega} + 3(k+1)\left(2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)\omega t_e\\
&\quad - \frac{1}{\Delta}[4kx_0(1-\cos u) + 3k\omega t_e x_0\sin u\\
&\quad - 8kz_0\sin u + 6k\omega t_m z_0\cos u - 6k\omega t_e z_0],\\
C_{5,t} &= y_0\sin\omega t_e + (k+1)\frac{\dot{y}_0}{\omega}\cos\omega t_e + ky_0\cos\omega t_e \operatorname{ctg} u,\\
C_{6,t} &= y_0\cos\omega t_e - (k+1)\frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t_e - ky_0\sin\omega t_e \operatorname{ctg} u;
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{1,c} &= \frac{k}{k+1}\frac{1}{\Delta}[x_0\sin u - 2z_0(1-\cos u)],\\
C_{2,c} &= \frac{k}{k+1}\frac{1}{\Delta}[4z_0(\sin\omega t_m - \sin\omega t_e)\\
&\quad + 2x_0(\cos\omega t_m - \cos\omega t_e) - 3z_0 u\cos\omega t_m],\\
C_{3,c} &= \frac{k}{k+1}\frac{1}{\Delta}[-4z_0(\cos\omega t_m - \cos\omega t_e)\\
&\quad + 2x_0(\sin\omega t_m - \sin\omega t_e) - 3z_0 u\sin\omega t_m],\\
C_{4,c} &= \frac{k}{k+1}\frac{1}{\Delta}[4x_0(1-\cos u) + 3\omega t_m x_0\sin u\\
&\quad + 6z_0 u\cos u - 6\omega t_e z_0(1-\cos u) - 8z_0\sin u],\\
C_{5,c} &= \frac{k}{k+1}y_0\frac{-\cos\omega t_m}{\sin u},\\
C_{6,c} &= \frac{k}{k+1}y_0\frac{\sin\omega t_m}{\sin u},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

2. Некоторые случаи относительного движения после переброса массы

Для работы пары спутников требуется, по крайней мере, чтобы они образовывали группу, то есть не удалялись друг от друга на большие расстояния. В связи с этим целесообразно рассмотреть возможность переброса массы, который приводит к остановке начального дрейфа одного из спутников. Рассмотрим два возможных случая.

2.1. Замкнутость орбиты одного спутника относительно другого

Если два спутника движутся в одной и той же ОСК по различным хилловским орбитам, то, как видно из (5), разность их координат будет ограниченной для любого времени t тогда и только тогда, когда константы C_1 у этих спутников равны между собой. Из (10) и (11) получаем

$$(k+1)\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}+2z_0\right)+\frac{k}{\Delta}[2z_0(1-\cos u)-x_0\sin u]$$
$$=\frac{k}{k+1}\frac{1}{\Delta}[x_0\sin u-2z_0(1-\cos u)]$$

Обозначив $s=\dfrac{u}{2}$, получим

$$\left(2z_0+\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)+\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\cdot\frac{x_0\cos s-2z_0\sin s}{8\sin s-6s\cos s}=0 \qquad (12)$$

Решая это уравнение относительно s при заданных начальных данных, находим требуемое время переброса, а из него — требуемую скорость выброса (8) и окончательные параметры движения бросающего (10) и ловящего (11) спутников.

Рассмотрим пример. Зададим начальные данные: $\omega = 0.0011\,\text{с}^{-1}$, $x_0 = 242\,\text{м}$, $y_0 = 67\,\text{м}$, $z_0 = 62\,\text{м}$, $\dot{x}_0 = -0.1254\,\text{м/с}$, $\dot{y}_0 = 0.11\,\text{м/с}$, $\dot{z}_0 = 0.11\,\text{м/с}$, $k = 1/20$, для простоты положим $t_e = 0$. Заметим, что $C_1 = 10\,\text{м}$, так что начальная относительная траектория незамкнута. Тогда из (12):

$$15098\sin s+4961\cos s-13230s\cos s=0; \qquad (13)$$

Это уравнение вида $\operatorname{tg} x = l_1x + l_2$, оно имеет бесконечно много корней. Возьмем первый положительный корень этого уравнения: $s = 4.4386 = \dfrac{\omega t_m}{2}$, найдём время переброса $t_m = 8070\,\text{с}$. Подставляя полученные данные в (8), находим скорость выброса $|\delta\mathbf{v}| = 0.85\,\text{м/с}$.

На рис. 3 представлены траектории всех тел в процессе переброса в ОСК, а на рис. 4 представлена траектория бросающего спутника относительно ловящего после совершения переброса. Изначально бросающий спутник совершал дрейф по оси Ox, так как $C_1 = 10$ м. После переброса массы в исходной системе координат дрейф сохранился, однако вследствие столкновения с ловящим спутником у последнего появился такой же дрейф, поэтому после переброса спутники движутся друг относительно друга по замкнутой траектории. В ОСК спутники дрейфуют, не разлетаясь друг от друга.

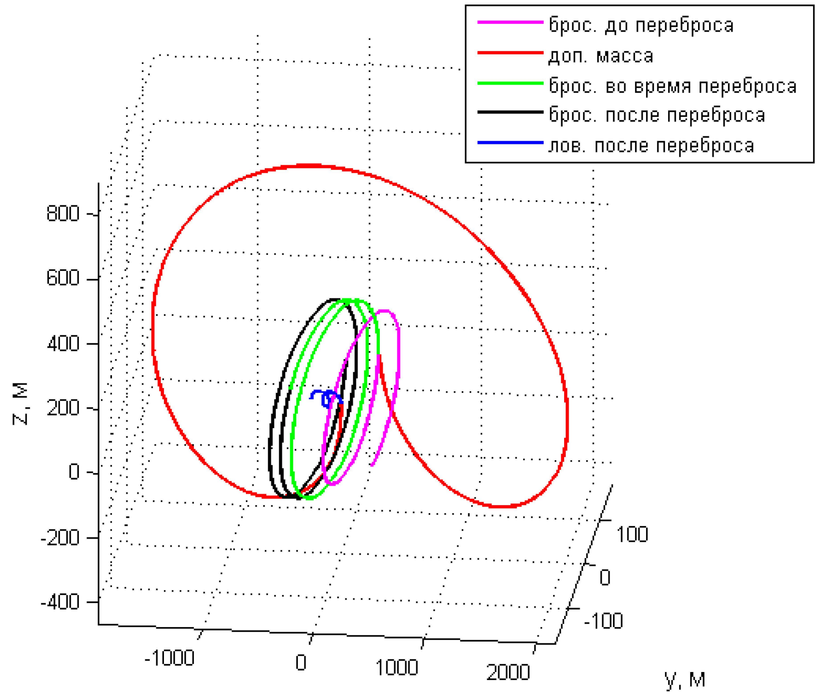

Рис. 3. Траектория в ОСК, первый корень

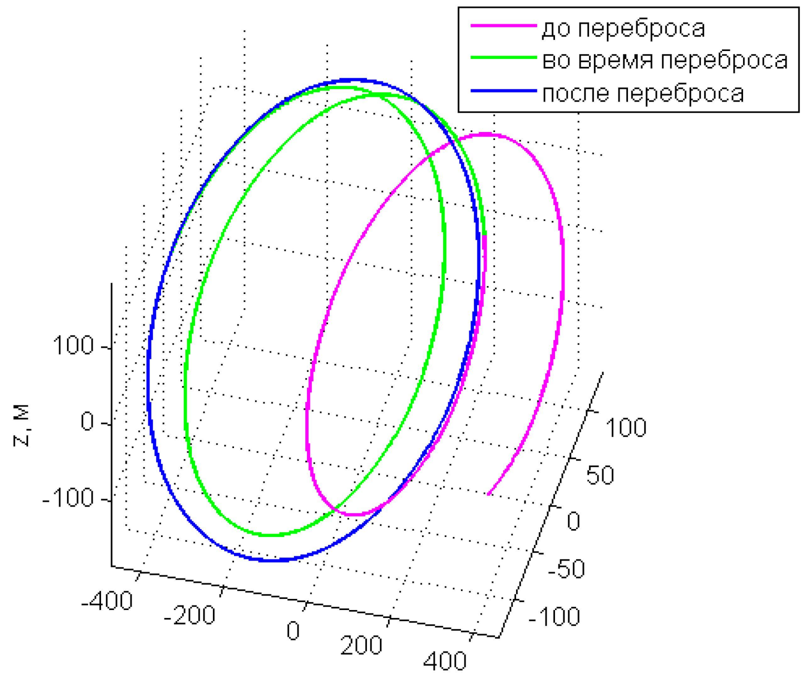

Рис. 4. Относительная траектория, первый корень

Возьмем теперь следующий положительный корень уравнения (13): $s = 7.6994$ тогда $t_m = 13999$ с, переброс совершается почти за 2.5 периода обращения ОСК вокруг Земли. В данном случае $|\delta \mathbf{v}| \approx 1.42$ м/с. Как и в предыдущем случае, относительный дрейф остановлен. Соответствующие траектории показаны на рис. 5 и 6.

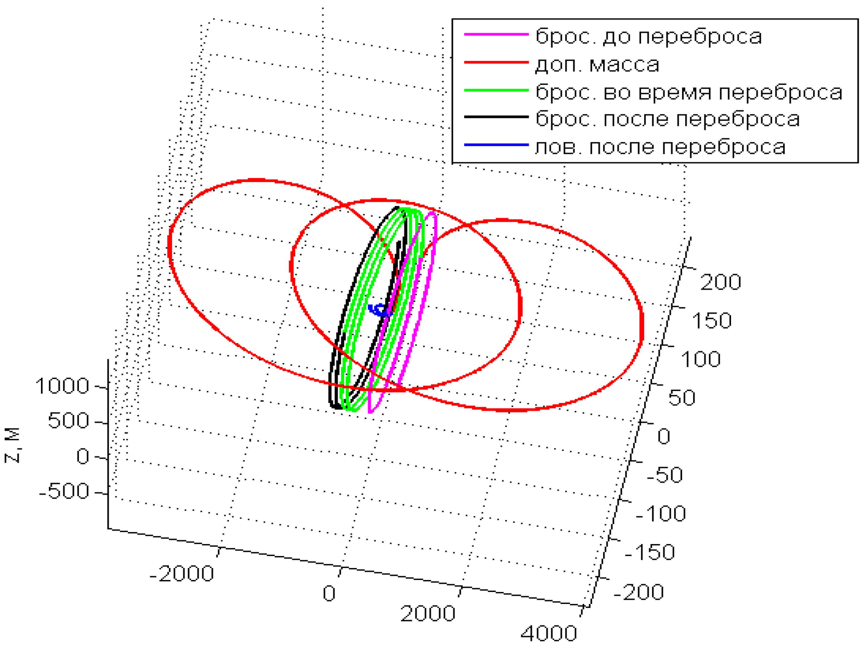

Рис. 5. Траектория в ОСК, второй корень

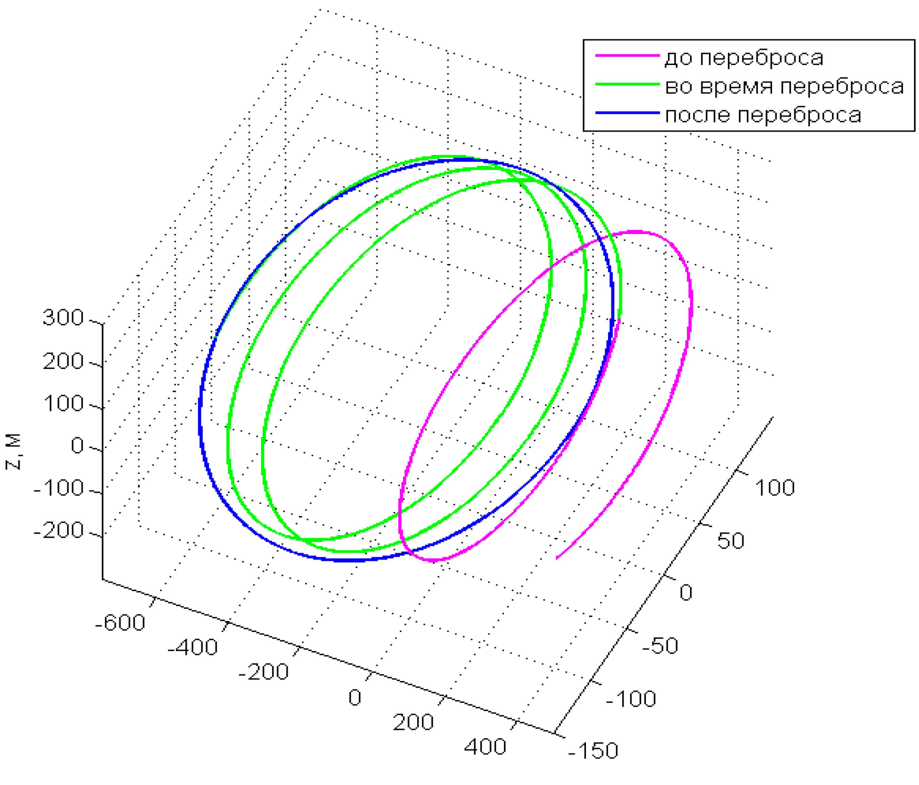

Рис. 6. Относительная траектория, второй корень

2.2. Замкнутость двух орбит

Более сильным условием ограниченности движения является замкнутость орбит обоих спутников в ОСК. Исследуем возможность такого переброса. Из (10) и (11) с условиями $C_{1,t} = C_{1,c} = 0$ получим систему уравнений относительно времени переброса (положительные множители опущены):

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0\right) + \frac{k}{k+1}\frac{1}{\Delta}[2z_0(1-\cos u) - x_0 \sin u] = 0, \\ \frac{1}{\Delta}[x_0 \sin u - 2z_0(1-\cos u)] = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, $C_1 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 = 0$.

Следовательно, замкнутые орбиты относительно исходной системы координат после переброса массы можно получить только в случае изначально замкнутой относительной орбиты. Если верно, что $C_1 = 0$, то время переброса можно получить из уравнения

$$\frac{x_0 \sin u - 2z_0(1-\cos u)}{3u \sin u - 8(1-\cos u)} = 0.$$

$$x_0 \cos\frac{u}{2} = 2z_0 \sin\frac{u}{2}, \qquad \frac{3u}{2}\cos\frac{u}{2} - 4\sin\frac{u}{2} \neq 0. \tag{14}$$

В качестве примера рассмотрим случай круговой относительной начальной орбиты. Для этого положим

$$x_0 = 2a, y_0 = -\sqrt{3}b, z_0 = -b,$$

$$\dot{x}_0 = 2b\omega, \dot{y}_0 = \sqrt{3}a\omega, \dot{z}_0 = a\omega,$$

где a, b — произвольные константы. Относительная орбита круговая, т.к.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4(a^2 + b^2) \quad \text{и} \quad (x, y, z) \perp (0, -1, \sqrt{3}).$$

Уравнение (14) переходит в

$$a \cos\frac{u}{2} + b \sin\frac{u}{2} = 0.$$

В простейшем случае $a = b$, $u = 2\pi n + \frac{3\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$. Пусть $a = 100\,\text{м}$, $n = 0$, $u = \frac{3\pi}{2}$, $t_0 = 0\,\text{с}$, траектории тел в процессе переброса показаны на рис. 7. Видно, что начальная траектория бросающего и конечные траектории двух спутников замкнуты.

Зависимость относительной траектории после переброса от точки выброса исследована ранее в статье [10].

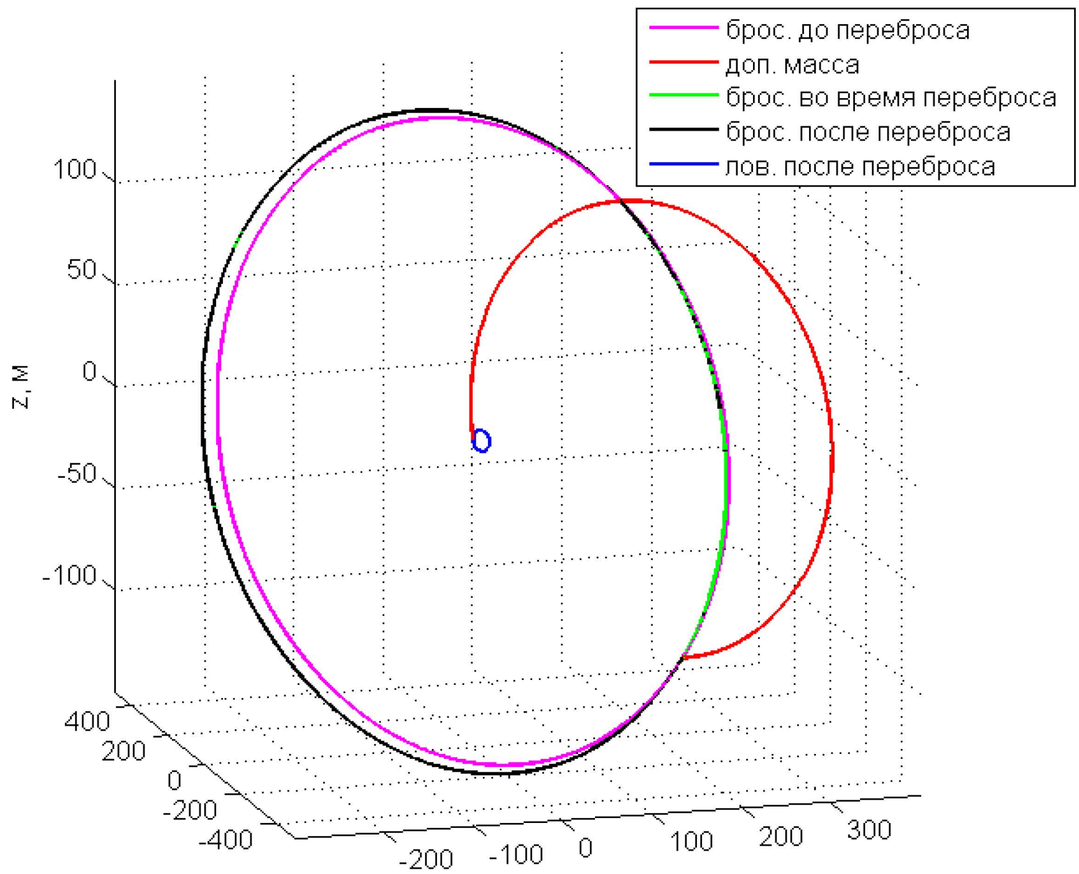

Рис. 7. Две замкнутые траектории

3. Оптимизационные задачи

Прежде всего, заметим, что после переброса движение двух спутников в ОСК описывается уравнениями (5) с константами $C_{1,t} \ldots C_{6,t}$ для бросающего и $C_{1,c} \ldots C_{6,c}$ для ловящего спутников. Поэтому, относительная орбита спутников также описывается уравнениями (5), при этом константы равны разностям соответствующих констант бросающего и ловящего спутников. Для более наглядного представления рассмотрим решение задачи (1, 2) в форме (6). Константы для относительной орбиты после переброса будем обозначать символами с чертой: $\overline{C_1}$, $\overline{C_4}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{\psi}$ и $\overline{\varphi}$. Они есть функции от t_e и t_m, при этом C_1, C_4, A, B, ψ, φ выступают как параметры, зависящие от начальных условий.

Для получения значений t_e и t_m, а затем и для расчёта необходимых скоростей выброса по (8) при каком-то дополнительном оптимизирующем условии следует явно задать функцию, подлежащую минимизации на перебросе. Конкретный вид функции определяется оптимизирующими условиями. Также разумно требовать $\overline{C_1} = 0$ для отсутствия постоянного дрейфа относительной орбиты после переброса.

3.1. Достижение траектории наиболее «близкой» к начальной

Предположим, оптимизирующее условие есть минимальность различия форм начальной и конечной относительных орбит. $\overline{C_4}$, $\overline{\psi}$ и $\overline{\varphi}$ не влияют на форму орбиты, а потому в качестве функции, подлежащей минимизации, выберем

$$\Phi_1(t_e, t_m) = (\overline{A} - A)^2 + (\overline{B} - B)^2.$$

Для замкнутости относительной орбиты после переброса потребуем $\overline{C_1} = 0$.

Рассмотрим пример относительной начальной траектории: пусть в начальный момент времени $x_0 = 242$ м, $y_0 = 67$ м, $z_0 = 140$ м, $\dot{x}_0 = -0.2244$ м/с, $\dot{y}_0 = 0.11$ м/с, $\dot{z}_0 = 0.11$ м/с, $\omega = 0.0011\,\text{с}^{-1}$, $k = 1/20$, при этом $A = 100.7$ м, $B = 120.4$ м, $C_1 = 76$ м, $|v| = 1.30$ м/с. Численный расчёт дает значения $t_e = 4380$ с и $t_m = 5286$ с. Новые константы $\overline{A} = 101.2$ м, $\overline{B} = 115.8$ м. На рис. 8 представлен график траекторий тел формации во время переброса в ОСК.

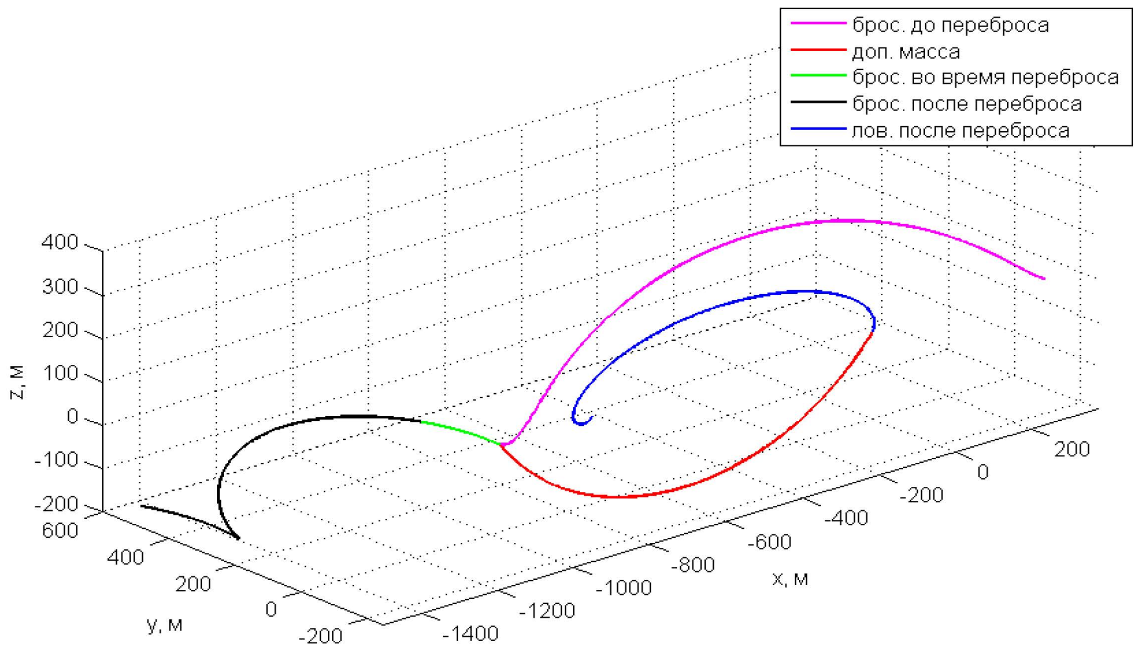

Рис. 8. Траектории в ОСК: «ближайшая» к исходной

3.2. Минимизация скорости броска

Предположим, критичной для миссии спутников является не форма или размер орбиты, а потребляемая при перебросе энергия, а следовательно, и скорость, придаваемая при броске дополнительному телу. В качестве минимизируемой функции выберем

$$\Phi_2(t_e, t_m) = \|\delta\mathbf{v}\|^2 = \delta\dot{x}^2 + \delta\dot{y}^2 + \delta\dot{z}^2.$$

Как и раньше, требование $\overline{C_1} = 0$ обязательно.

Для той же начальной траектории численный расчёт даёт значения $t_e = 1806$ с и $t_m = 2424$ с. При этом $\delta\mathbf{v} = (0.816, -0.024, -0.941)$ м/с, $|v| = 1.25$ м/с. На рис. 9 представлены траектории движения спутников и перебрасываемого тела, записанные в ОСК

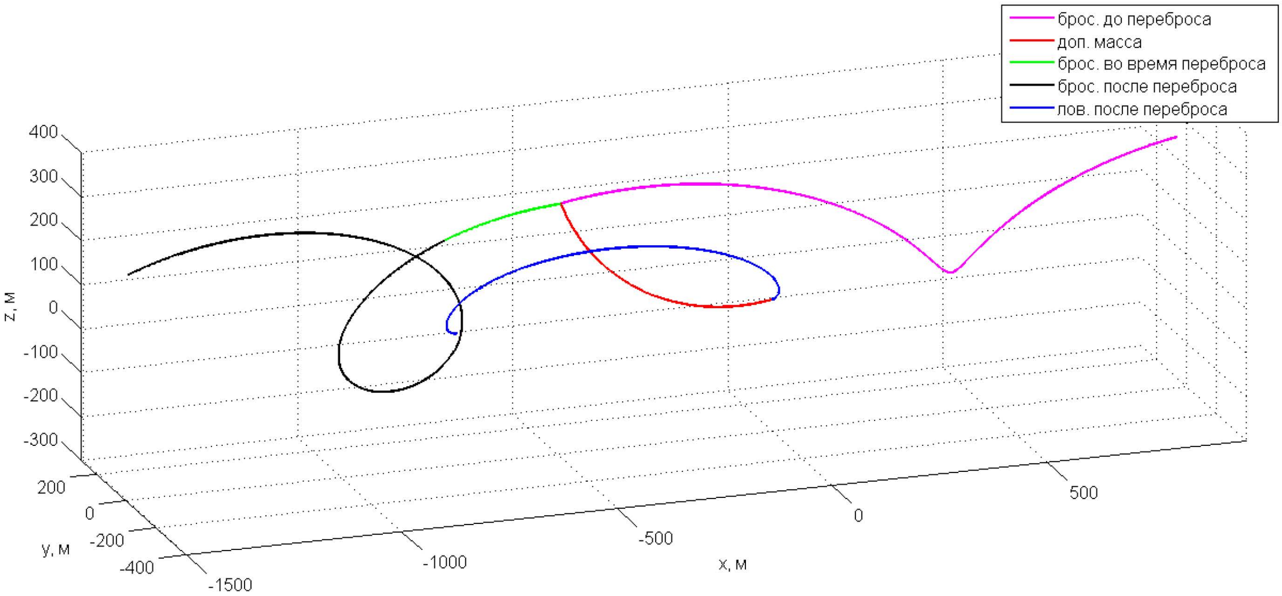

Рис. 9. Траектории в ОСК: минимальная скорость броска

3.3. Минимизация времени переброса

Также найдём переброс, минимизирующий продолжительность полёта дополнительного тела, что соответствует задаче наискорейшей остановке относительного дрейфа. Минимизируемая функция есть

$$\Phi_3(t_e, t_m) = t_m - t_e.$$

Численный расчёт даёт значения $t_e = 925$ с и $t_m = 1025$ с. Относительная скорость выброса при этом $|v| = 2.86$ м/с. На рис.10 представлены траектории движения спутников и перебрасываемого тела, записанные в ОСК.

На рис. 11 одновременно представлены три относительные траектории после соответствующих перебросов. Жирными линиями представлены пространственные траектории. Тонкими — проекции на оси координат.

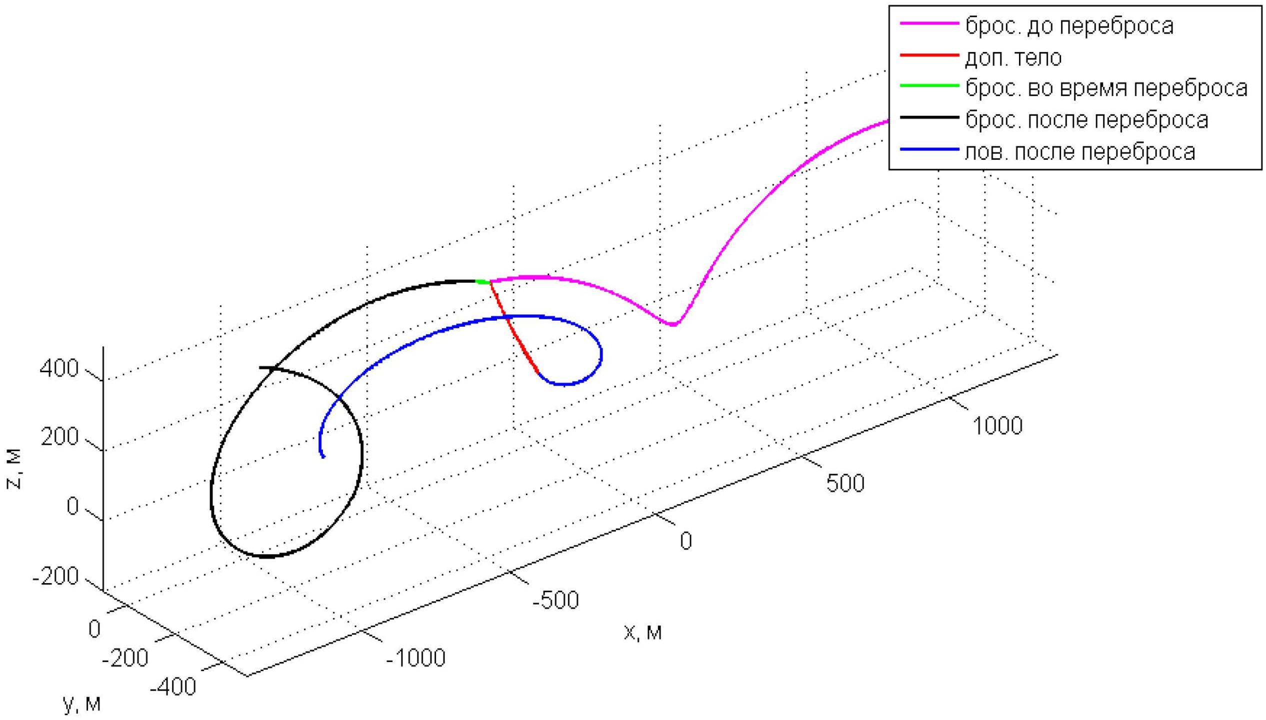

Рис. 10. Траектории в ОСК: минимальное время переброса

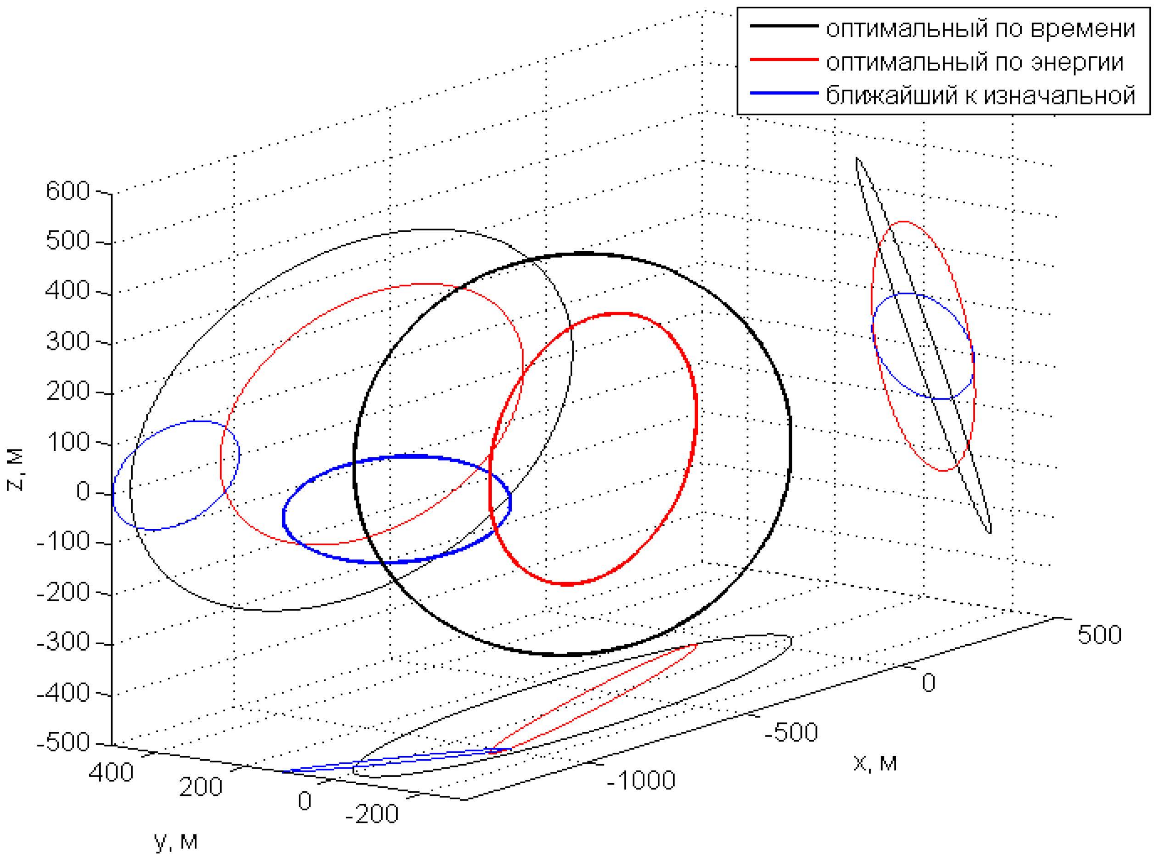

Рис. 11. Относительные траектории для разных задач

4. Влияние ошибок

Предположим, что в системе, реализующей бросок/ловлю дополнительного тела, есть ошибки исполнения. Рассмотрим в качестве такой системы манипулятор. Будем считать, что существует некоторая окрестность относительно центра масс ловящего спутника, внутри которой перебрасываемая масса будет поймана. Исследуем возможные ошибки исполнения броска в этом случае.

4.1. Ошибка при определении точки выброса

Пусть для некоторого переброса было рассчитано требуемое время выброса t_e и время столкновения t_m. Однако, вследствие неучтённых факторов, реальное отделение дополнительного тела произошло в момент времени $t_e+\varepsilon_t$. Исследуем влияние этой ошибки на переброс.

В описанном выше случае движение тела описывается решением задачи (1, 2), где начальные условия, вычисляемые из (3) и (7), задаются положением и скоростью бросающего спутника не в момент времени $t = t_e$, а в момент $t = t_e + \varepsilon_t$.

В расчётный момент столкновения $t = t_m$ тело будет располагаться не в начале координат ОСК, а в некоторой точке $\mathbf{R}_t = (X_t, Y_t, Z_t)$. Точная формула достаточно громоздка, однако заметим, что при $\varepsilon_t = 0$ $\mathbf{R}_t = \mathbf{0}$. Разложим $\mathbf{R}_t$ в ряд по степеням $\omega\varepsilon_t$ и далее, считая ε_t малой величиной, отбросим члены второго и более высоких порядков. В таком случае формулы преобразуются к виду

$$
\begin{aligned}
X_t &= \omega\varepsilon_t \left(6z_0(\cos u - 1) - \frac{\dot{x}_0}{\omega}(3 - 4\cos u) - 2\frac{\dot{z}_0}{\omega}\sin u + \frac{2z_0(1-\cos u) - x_0 \sin u}{\Delta} \right), \\
Y_t &= \omega\varepsilon_t \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}\cos u + y_0 \frac{\cos^2 u}{\sin u} \right), \\
Z_t &= \omega\varepsilon_t \left(3z_0 \sin u + 2\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin u + \frac{\dot{z}_0}{\omega}\cos u + \frac{z_0(3u - 4\sin u) - 2x_0(1-\cos u)}{\Delta} \right).
\end{aligned}
$$

Предположим, существует некоторое устройство, позволяющее ловящему спутнику поймать тело даже при наличии ошибок в совершении переброса. Будем считать переброс совершённым удачно, если в момент времени t_m тело сталкивается с шаром некоторого радиуса R с центром в ловящем спутнике. Получим численные оценки для примера 2.1: $\mathbf{R}_t = (-0.293, 0.009, -0.834)\varepsilon_t$. Следовательно, тело попадает в шар радиуса 1 м при $\varepsilon_t \leqslant 1.13$ с.

4.2. Ошибка в скорости выброса

Теперь предположим, что вследствие ошибок относительная скорость выброса в момент времени $t = t_e$ отличается от предполагаемой: $\delta\mathbf{v} + \vec{\varepsilon}_v = (\delta\dot{x} + \varepsilon_x, \delta\dot{y} + \varepsilon_y, \delta\dot{z} + \varepsilon_z)$, здесь $\delta\mathbf{v}$ получено из (8).

В расчётный момент столкновения $t = t_m$ дополнительное тело будет находиться в некоторой точке $\mathbf{R}_v = \mathbf{r}_s(t_m) = (X_v, Y_v, Z_v)$. Получим выражение для $\mathbf{R}_v$: подставим начальные данные в (3) и воспользуемся (8)

$$
\begin{aligned}
X_v &= \frac{\varepsilon_x}{\omega}(4\sin u - 3u) + \frac{2\varepsilon_z}{\omega}(\cos u - 1),\\
Y_v &= \frac{\varepsilon_y}{\omega}\sin u,\\
Z_v &= \frac{2\varepsilon_x}{\omega}(1 - \cos u) + \frac{\varepsilon_z}{\omega}\sin u.
\end{aligned}
$$

Положим $X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2 = R^2$, тогда

$$
R^2\omega^2 = A\varepsilon_x^2 + B\varepsilon_y^2 + C\varepsilon_z^2 + 2D\varepsilon_x\varepsilon_z
$$

где

$$
\begin{aligned}
A &= 8(1 - \cos u) + 12\sin u(\sin u - 2u) + 9u^2,\\
B &= \sin^2 u,\\
C &= 5 + 3\cos^2 u - 8\cos u,\\
D &= 6(\sin u - u)(\cos u - 1).
\end{aligned}
$$

Пусть $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$. Для удачного совершения переброса необходимо

$$
\varepsilon \leqslant \frac{R\omega}{\sqrt{A + B + C + 2D}}.
$$

Пусть допустимая ошибка в пролёте тела мимо ловящего $R = 1\,\text{м}$. Для трёх примеров из предыдущей главы получим:

— для примера 3.1 $u = 0.9966$, $A = 1.0013$, $B = 0.7050$, $C = 1.5398$, $D = 0.4303$, $\varepsilon \leqslant 5.4 \cdot 10^{-2}\,\text{см/с}$,

— для примера 3.2 $u = 0.6798$, $A = 2.3825$, $B = 0.3952$, $C = 0.5929$, $D = 0.0682$, $\varepsilon \leqslant 5.9 \cdot 10^{-2}\,\text{см/с}$,

— для примера 3.3 $u = 0.1100$, $A = 0.8932$, $B = 0.0121$, $C = 0.0122$, $D \approx 8 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon \leqslant 0.11\,\text{см/с}$.

4.3. Нецентральное столкновение

Пусть из-за ошибок наведения дополнительное тело столкнулось с ловящим спутником нецентрально. После такого столкновения центр масс системы ловящий–тело сместится из начала координат ОСК.

Предположим, задачей переброса была остановка дрейфа. Тогда, после переброса константа C_1 в (5) должна была бы обнулиться. Однако, вследствие изменения положения центра масс, изменились и начальные данные движения ловящего спутника после совершения переброса. Это изменение само по себе может привести к появлению относительного дрейфа.

За один виток ($\omega t = 2\pi$) согласно (5) между спутниками накапливается дрейф $d = 6\pi C_1$, где $C_1 = \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0$. Центральное столкновение даёт $C_1 = 0$, в случае нецентрального член $2z_0$ заменяется на $2(z_0 + \delta z)$. Окончательно, за один виток накапливается дрейф $d = 12\pi\delta z$.

Пусть как и прежде, тело пролетает мимо ловящего спутника на расстоянии $R = 1$ м, пусть, кроме того, масса ловящего спутника в двадцать раз больше массы тела: $M = 20m$. Тогда $\delta z \leqslant \frac{m}{m+M}R$, $d \leqslant \frac{12\pi}{21} \approx 1.8$м.

Заключение

Управление групповым полетом с помощью переброса массы позволяет изменять относительную траекторию движения требуемым образом. Рассмотренные оптимизационные задачи показали возможность выбора параметров переброса, дающих минимум выбранному функционалу (сохранение исходной формы орбиты, минимальное время переброса и минимальная скорость броска массы) при условии остановки относительного дрейфа. Для одних и тех же начальных условий разные задачи оптимизации естественно приводят к сильно отличающимся, но замкнутым относительным траекториям.

Ошибки исполнения броска неизбежны для реальной системы. В настоящей работе предполагается, что бросок и захват массы производится с помощью специального манипулятора, установленного на спутнике. Исследование различных типов ошибок — ошибка точки броска, скорости выброса — показало наличие ограничений на их значения при фиксированной ошибке попадания перебрасываемой массы. Само значение допустимой ошибки определяется расстоянием от центра масс, на котором манипулятор способен поймать перебрасываемое тело.

Список литературы

[1] Stationary configurations of a tetrahedral tethered satellite formation / A. D. Guerman, G. Smirnov, P. Paglione, A. M. Vale Seabra // Journal of guidance, control, and dynamics. — 2008. — Vol. 31, no. 2. — P. 424–428.

[2] Misra A. K. Equilibrium configurations of tethered three-body systems and their stability // The Journal of the astronautical sciences. — 2002. — Vol. 50, no. 3. — P. 241–253.

[3] Reid T., Misra A. K. Formation flight of satellites in the presence of atmospheric drag // Journal of Aerospace Engineering. — 2011. — Vol. 3, no. 1. — P. 64.

[4] Schaub H., Parker G. G., King L. B. Challenges and prospects of coulomb spacecraft formation control // Journal of Astronautical Sciences. — 2004. — Vol. 52, no. 1. — P. 169–193.

[5] Spacecraft formation flying using lorentz forces / M. A. Peck, B. Streetman, C. M. Saaj, V. Lappas // Journal of the British Interplanetary Society. — 2007. — Vol. 60. — P. 263–267.

[6] Bae Y. K. A contamination-free ultrahigh precision formation flying method for micro-, nano-, and pico-satellites with nanometer accuracy // Space Technology and Applications International Forum- Staif 2006. — Vol. 813. — 2006. — P. 1213–1223.

[7] Tragesser S. G. Static formations using momentum exchange between satellites // Journal of guidance, control, and dynamics. — 2009. — Vol. 32, no. 4. — P. 1277–1286.

[8] Joslyn T., Ketsdever A. Constant momentum exchange between microspacecraft using liquid droplet thrusters // 46th joint Propulsion Conference. — Vol. 6966. — 2010. — P. 25–28.

[9] Schonig J. A. et al. Constant momentum exchange to maintain spacecraft formations // Journal of Spacecraft and Rockets. — 2012. — Vol. 49, no. 1.

[10] Ivanov D., Ovchinnikov M., Shestakov S. Satellite formation flying control by mass exchange // Acta Astronautica. — 2014. — Vol. 102. — P. 392–401.

[11] Missel J., Mortari D. Removing space debris through sequential captures and ejections // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2013. — Vol. 36, no. 3. — P. 743–752.

[12] Clohessy W. H., Wiltshire R. S. Terminal guidance system for satellite rendezvous // Aerospace Sci. — 1960. — Vol. 27. — P. 653–658.

Содержание

Введение **3**

1 Задача о перебросе массы **5**
1.1 Постановка задачи 5
1.2 Скорость выброса 7
1.3 Изменение относительной траектории 8

2 Некоторые случаи относительного движения после переброса массы **11**
2.1 Замкнутость орбиты одного спутника относительно другого . . 11
2.2 Замкнутость двух орбит 14

3 Оптимизационные задачи **15**
3.1 Достижение траектории наиболее «близкой» к начальной 16
3.2 Минимизация скорости броска 16
3.3 Минимизация времени переброса 17

4 Влияние ошибок **19**
4.1 Ошибка при определении точки выброса 19
4.2 Ошибка в скорости выброса 19
4.3 Нецентральное столкновение 20

Заключение **21**

Список литературы **22**