



Бахолдин И.Б.

Методы исследования
уединенных волн и
обратимых структур
разрывов в трубах с
упругими стенками

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахолдин И.Б. Методы исследования уединенных волн и обратимых структур разрывов в трубах с упругими стенками // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 73. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-73>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

И.Б. Бахолдин

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН
И ОБРАТИМЫХ СТРУКТУР РАЗРЫВОВ
В ТРУБАХ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ

Москва–2014

УДК 534.1+539.3+532.59+517.9+519.6

Бахолдин И.Б. Методы исследования уединенных волн и обратимых структур разрывов в трубах с упругими стенками

Работа посвящена разработке методов расчета и анализу решений для модели трубы с упругими стенками в случае контролируемого внутреннего давления и в случае заполнения трубы жидкостью. Для стенок трубы используется модель мембраны и модель пластины. Применяются методы численного анализа. Уравнения Буссинеска используются для описания волн для области вблизи зоны неустойчивости однородных состояний и для проверки численных методов. Исследуются уединенные волны и солитонные структуры разрывов для этого уравнения. Затем те же методы используются для полных уравнений. Исследуются уединенные волны и обратимые структуры разрывов (обобщенные кинки). Для исследования устойчивости уединенных волн применяется метод, основанный на поиске собственной функции. Для исследования кинков используются общие методы теории обратимых разрывов.

Ключевые слова: труба, упругость, контролируемое давление, жидкость, дисперсия, нелинейность, уединенная волна, кинк, структура разрыва, численный анализ.

Bakholdin I.B. Methods of investigation of solitary waves and reversible shock structures in elastic tubes

The paper is devoted to methods of calculation and analysis of solutions of equations of elastic tube with controlled pressure and for tube filled by fluid. Membrane model and plate model are used for tube. Methods of numerical analysis are applied. Boussinesq equation is used for description of waves in the region near the instability of homogeneous states and for verification of numerical methods also. Solitary waves and shocks for this equation are investigated. Then the same methods are used for complete equations. Solitary waves and reversible shocks (generalized kinks) are investigated. Method based on calculation of eigenfunction is used for investigation of stability of solitary waves. Methods of general theory of reversible shocks are used for investigation of kinks.

Keywords: tube, elasticity, controlled pressure, fluid, dispersion, nonlinearity, solitary wave, kink, shock structure, numerical analysis.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, номер проекта 140100049 и Президентской программы поддержки ведущих научных школ, НШ-3530.2014.1

1 Структура работы и применяемые методы

Вначале исследование уединенных волн и структур разрывов проводится для уравнений Буссинеска, описывающих волны в трубе с контролируемым давлением при некоторых специальных условиях [1]. Это необходимо для разработки методики исследования и проверки применимости численных методов. Исследуется устойчивость уединенных волн. Установлено, что эволюция стоячей уединенной волны в зависимости от характера ее возмущения ведет либо к росту амплитуды до бесконечности, либо к распаду на две уединенные волны. Для более точного управления этим процессом разрабатывается методика расчета собственной функции, а возмущение берется в виде собственной функции с положительным или отрицательным знаком. Далее проводится расчет задачи о распаде произвольного разрыва. Выясняется, что солитонная структура разрыва существует и в случае неустойчивого однородного состояния, но она неустойчива. Ее стабилизация возможна в случае включения в уравнение дополнительных диссипативных членов. Устойчивость солитонной структуры не имеет прямой связи с устойчивостью уединенной волны, поскольку начинает проявляться раньше, чем согласно теории уединенная волна в солитонной структуре становится неустойчивой. Затем аналогичные исследования с применением тех же методов проводится для полных уравнений трубы с контролируемым давлением [1]. Выясняется, что все эффекты, выявленные для уравнения Буссинеска, имеют место и для полных уравнений в том случае, когда параметры решений близки к границе области неустойчивости однородных состояний. Поэтому основное внимание уделено сильно нелинейным случаям. Обнаружены типичные структуры разрывов, характерные для систем уравнений, приводящих при исследовании стационарных структур к интегрируемым уравнениям бегущих волн четвертого порядка. Далее выводятся упрощенные уравнения, описывающие центрированные простые волны в задаче о распаде произвольного разрыва. Затем делается обобщение модели путем включения сопротивления на изгиб. Это позволяет проводить расчет и при сжатии трубы (при сжатии исходные уравнения становятся некорректными). Завершает работу исследование задачи о распаде разрыва для уравнений трубы, наполненной жидкостью [2]. В этом случае система уравнений бегущих волн становится интегрируемой, поэтому наблюдаются только классические кинки и солитонные структуры, что и предсказывается теорией.

Для всех расчетов применяется трехслойная схема типа крест и схема типа Лакса-Вендрофа. Рассматриваются особенности применения этих схем в случае включения в уравнения дополнительных диссипативных членов. Для проверки корректности уравнений используется метод, основанный на анализе дисперсионного соотношения [3, 4]. Для прогноза возможных типов уединенных волн и структур разрывов используются методы, разработанные в теории бездиссипативных разрывов [5]-[10].

2 Основные уравнения и формулы для модели с контролируемым давлением

Вначале исследуются решения уравнений движения для волн в трубе с несжимаемыми упругими стенками и фиксированным внутренним и внешним давлением [1]:

$$\left(R\sigma_1\frac{z'}{\lambda_1^2}\right)' - p_*rr' = \rho R\ddot{z}, \quad \left(R\sigma_1\frac{r'}{\lambda_2^2}\right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + p_*rz' = \rho R\ddot{r} \quad (2.1)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{r'^2 + z'^2}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{R}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{H}, \quad \sigma_i = \lambda_i W_{\lambda_i} - p$$

Здесь $'$ обозначает дифференцирование по переменной Z , являющейся начальной лагранжевой пространственной координатой, направленной вдоль трубы, $\dot{}$ обозначает дифференцирование по времени t . Для описания трубы используется мембранная модель, неизвестные z и r задают поверхность трубы в цилиндрической системе координат, ось z этой системы совпадает с центральной линией трубы. Параметр p_* — разность между внутренним и внешним давлением, неизвестное p — давление внутри материала. Параметр ρ — плотность материала на единицу площади. Толщина стенки трубы обозначена h , она не является параметром этих уравнений. Параметр h будет существенен ниже в разделе 4.6. Здесь λ_i — главные растяжения, а σ_i — главные компоненты тензора напряжений, W — функция сжатия (потенциал).

Предполагается, что при отсутствии нагрузки

$$z = Z, \quad r = R, \quad h = H$$

Поэтому вследствие условия несжимаемости

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1, \quad \sigma_i = \lambda_i\hat{W}_{\lambda_i}, \quad \hat{W} = W(\lambda_1, \lambda_2, 1/(\lambda_1, \lambda_2))$$

Функция сжатия в данной работе соответствует модели материала Гента. Возможное использование иной функции сжатия не меняет методику исследования.

$$W = -\frac{1}{2}\mu J_m \ln \left(1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{J_m}\right)$$

В случае исследования уединенных волн (раздел 4) начальные данные берутся в виде

$$z' = z'_\infty + \Delta z'(Z), \quad r = r_\infty + \Delta r(Z), \quad h = h_\infty + \Delta h(Z); \quad \Delta r, \Delta z', \Delta h \rightarrow 0, \quad Z \rightarrow \infty$$

$$z(Z) = \int_0^Z z'(\zeta) d\zeta$$

На бесконечности ставится условие равновесия

$$P_* = \frac{\hat{W}_{\lambda_2}(r_\infty, z'_\infty)}{r_\infty z'_\infty}$$

В случае задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана) на плюс и минус бесконечности имеются два разных состояния равновесия (раздел 4.4). Кроме того, области, соответствующие другим состояниям равновесия выявляются при решении этой задачи. Анализ дисперсионного соотношения (раздел 4.1) делается для некоторого произвольного состояния (не обязательно состояния равновесия), обозначенного индексом 0.

Ниже будут использоваться обозначения $\hat{W}_1 = \hat{W}_{\lambda_1}$, и.т.д.

3 Решение уравнений Буссинеска и анализ используемых численных методов

Анализ уравнений Буссинеска рассматривается как тестовый пример для развития методов исследования и как наиболее простой способ объяснить эффекты, наблюдаемые при решении полных уравнений (2.1). Это делается также для выявления слабонелинейных эффектов в решениях полных уравнений.

Уравнения Буссинеска были выведены для описания слабонелинейных волн в трубе с упругими стенками и контролируемым давлением [1]

$$V_{\tau\tau} = V_{\xi\xi} - V_{\xi\xi\xi\xi} - (V^2)_{\xi\xi} \quad (3.1)$$

Здесь τ , ξ и V соответствуют t , Z и $r - r_0$ после применения некоторого растяжения.

3.1 Анализ и обобщение уравнения

Обобщенное уравнение Буссинеска–Бюргера имеет вид:

$$V_{\tau\tau} = c_2 V_{\xi\xi} - (V^2)_{\xi\xi} - c_4 V_{\xi\xi\xi\xi} + \varepsilon_d V_{\tau\xi\xi} + c_6 V_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} \quad (3.2)$$

В это уравнение включены дополнительные диссипативные и недиссипативные дисперсионные члены. Упрощенным уравнением здесь является нелинейное волновое уравнение. Оно применимо для длинных волн

$$V_{\tau\tau} = c_2 V_{\xi\xi} - (V^2)_{\xi\xi} \quad (3.3)$$

Линеаризовав уравнение (3.2) в окрестности некоторого однородного состояния V_0 и сделав подстановку $V = V_* \exp i(k\xi - \omega t)$, получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = (c_2 - 2V_0)k^2 + c_4 k^4 - i\varepsilon_d \omega k^2 + c_6 k^6 \quad (3.4)$$

Для проверки необходимого условия корректности задачи Коши нужно проанализировать корни уравнения $k = k(\omega)$ [3, 4]. Если существует $M \in \mathbb{R}$ такое, что для всех ω для которых из $\text{Im}\omega < M$, следует $\text{Im}k \neq 0$, то задача может быть корректно поставлена; задача некорректно поставлена в противном случае. Следовательно, соответствующая задача Коши будет некорректно поставлена, если коэффициент перед членом с высшей пространственной производной меньше нуля. Линеаризованное уравнение (3.3) будет некорректным, если $c_2 - 2V_0 < 0$. Но уравнение (3.2) корректно, если коэффициент перед высшей производной ε_d или c_4 или c_6 положителен, поскольку влияние членов с высшими производными доминирует для коротких волн. Но при этом длинные волны будут неустойчивыми, поскольку эти члены мало влияют на них. Следовательно, однородное состояние V_0 будет неустойчивым. В случае произвольных начальных данных, а также для анализа в процессе эволюции решения для проверки корректности используются коэффициенты, полученные в предположении локальной однородности [4] (заморозка коэффициентов) и проверяется корректность для всех значений x и t . Такой подход можно использовать, поскольку в типичных случаях именно поведение сколь угодно коротких волн и сколь угодно быстрых осцилляций влияет на корректность.

Уравнение (3.2) может быть переписано в двух разных формах, не содержащих производную по времени второго порядка

$$Q_\tau = c_2 V_{\xi\xi} - (V^2)_{\xi\xi} - c_4 V_{\xi\xi\xi\xi} + c_6 V_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi}, \quad V_\tau = Q + \varepsilon_d V_{\xi\xi} \quad (3.5)$$

$$W_\tau = c_2 V_\xi - (V^2)_\xi - c_4 V_{\xi\xi\xi} + c_6 V_{\xi\xi\xi\xi\xi\xi} + \varepsilon_d W_{\xi\xi}, \quad V_\tau = W_\xi \quad (3.6)$$

3.2 Численные методы

Есть много статей, посвященных численному решению уравнений Буссинеска, одна из последних, например, [12]. Здесь будут использованы стандартные трехслойная центрированная схема и схема типа схемы метода Лакса–Вендрофа. Эти схемы эффективно использовались в работах [5]–[9] для уравнений со сложной дисперсией. В настоящей работе расчеты основаны на форме (3.5). Заметим, что в [5, 6] расчеты для системы двух спаренных уравнений Буссинеска с кубической нелинейностью были основаны на форме (3.6). Заметим также, что, как можно заключить из предыдущего исследования [5, 6], трехслойный метод может быть применен непосредственно к уравнению (3.1), но не к спаренной системе таких уравнений. В данном случае попытка использовать непосредственно уравнения (2.1) также не удалась из-за численной неустойчивости.

При применении трехслойной схемы диссипативные члены аппроксимируются специальным способом: используется аппроксимация по первому слою или схема Дюфорты–Франкеля. Ниже приводится трехслойная численная схема для уравнений (3.1) с двумя различными аппроксимациями диссипативных членов

$$\begin{aligned}
\frac{V_{k+1}^n + V_{k-1}^n - 2V_k^n}{\Delta\xi^2} - \frac{Q_k^{n+1} - Q_k^{n-1}}{2\Delta\tau} &= \frac{V_{k+2}^n + V_{k-2}^n - 4V_{k+1}^n - 4V_{k-1}^n + 6V_k^n}{\Delta\xi^4} \\
+ \frac{(V^2)_{k+1}^n + (V^2)_{k-1}^n - 2(V^2)_k^n}{\Delta\xi^2} \\
\frac{V_k^{n+1} - V_k^{n-1}}{2\Delta\tau} &= Q_k^n + \varepsilon_d \frac{V_{k+1}^{n-1} + V_{k-1}^{n-1} - 2V_k^{n-1}}{\Delta\xi^2} \\
\frac{V_k^{n+1} - V_k^{n-1}}{2\Delta\tau} &= Q_k^n + \varepsilon_d \frac{V_{k+1}^n + V_{k-1}^n - V_k^{n+1} - V_k^{n-1}}{\Delta\xi^2}
\end{aligned}$$

Здесь k и n — пространственные и временные индексы, $\Delta\xi$ and $\Delta\tau$ — пространственные и временные шаги.

Аналогичные недиссипативные (при условии отсутствия диссипативных членов в исходных уравнениях) схемы были эффективно использованы для исследования проблем теории нелинейных диспергирующих волн таких как волны под упругой пластиной, волны в композитном материале и электронной магнитной гидродинамике [5]-[9]. Другая подходящая схема — двухслойная схема типа схемы Лакса-Вендрофа. В этой схеме приближение пространственных производных такое же как и в приведенной выше схеме, но аппроксимация временных производных такая же как в методе Рунге-Кутты, применяемом для обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта схема также имеет второй порядок точности, но она обладает слабой схемной диссипацией, порожденной наличием в уравнениях, аппроксимируемых схемой, диссипативных членов с производными высокого порядка. Включение диссипации не требует модификации этой схемы. Трехслойная схема более предпочтительна для недиссипативных уравнений, а схема Лакса-Вендрофа может быть использована для проверки результатов.

Обе схемы условно устойчивы. Условие устойчивости может быть получено спектральным методом или выявлено посредством численного эксперимента. При $\Delta\xi \rightarrow 0$ оно обычно принимает вид $\Delta\tau < c\Delta\xi^l$, $c = const$. Для трехслойной схемы l обычно равно порядку роста $\omega(k)$ при $k \rightarrow \infty$, здесь $\omega = \omega(k)$ — дисперсионное соотношение для рассматриваемых уравнений, или равно порядку высшей пространственной производной. Во всех расчетах данной работы отношение между пространственными и временными шагами далеко от области линейной численной неустойчивости.

Расчеты выполнены в некоторой ограниченной области достаточно большой, чтобы избежать заметных отражений от границ. На границах ставятся жесткие граничные условия ($V = const$, $r = const$, $z = const$).

3.3 Уединенные волны

Решение в виде стоячей уединенной волны имеет вид [1]:

$$V_s(\xi) = \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (3.7)$$

Заметим, что рассматриваемое уравнение имеет также решения в виде бегущих уединенных волн. Соотношение между стоячими и бегущими уединенными волнами будет выявлено ниже.

В работе [1] была выведена линеаризованная версия уравнения (3.1). Линеаризация была осуществлена в окрестности решения (3.7). Цель — исследование устойчивости стоячей уединенной волны. Метод функции Эванса был применен для определения действительного положительного собственного значения s , квадрат этого собственного значения, видимо, равен рациональному числу $s = 3/16$. Это позволяет найти собственную функцию аналитически:

$$B(\xi) = -\operatorname{sech}\left(\frac{\xi}{2}\right) + 2\operatorname{sech}^3\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

Следовательно, решение (3.7) неустойчиво.

Сначала начальные данные для численного эксперимента были взяты в виде:

$$V = V_s + \varepsilon B, \quad Q = \varepsilon s B$$

Как и предполагалось, при $\varepsilon > 0$ на первой стадии эволюции максимальное значение r растет со временем, а при $\varepsilon < 0$ оно уменьшается.

В случае $\varepsilon > 0$ этот рост быстро ускоряется со временем, как показано на рис. 1, и расчет прекращается из-за переполнения.

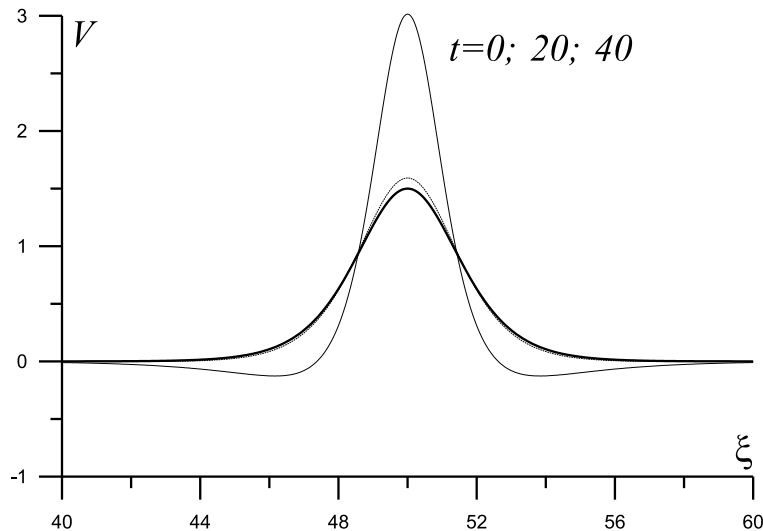


Рис. 1: Рост амплитуды уединенной волны и тенденция к распаду на две волны

В случае $\varepsilon < 0$ на финальной стадии процесса стоячая уединенная волна распадается на пару двух бегущих волн, движущихся в разном направлении, как показано на рис. 2. Никаких других волн не наблюдается. Мы можем обратить этот процесс и рассматривать стоячую волну как результат столкновения двух уединенных волн, движущихся навстречу друг другу. Таким образом, стоячая волна — специальное резонансное решение. Резонансы между уединенными волнами известны для двумерных моделей (уравнение Кадомцева–Петвиашвили) и для моделей с дисперсией высокого порядка (обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза, уравнения электронной магнитной гидродинамики плазмы, уравнения композитного материала) [5].

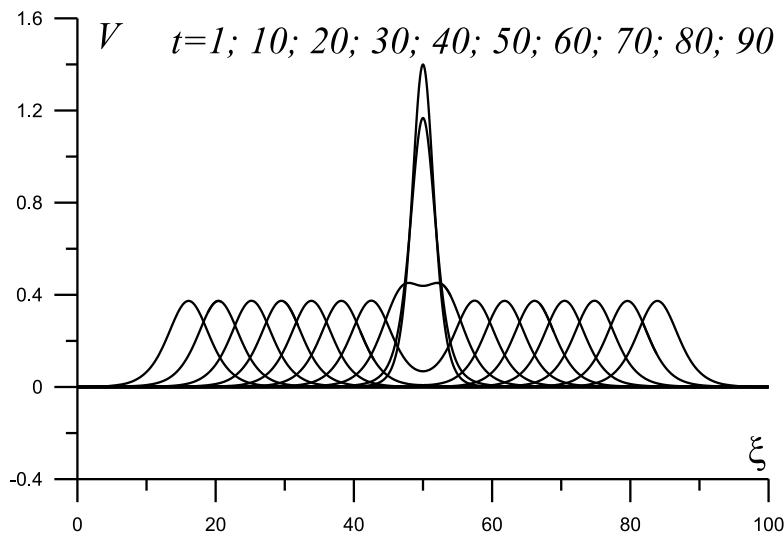


Рис. 2: Распад уединенной волны

Уравнения (2.1) и (3.1) принадлежат к классу симметричных уравнений, для которых волны, движущиеся с некоторой фиксированной скоростью описываются симметричными системами уравнений бегущих волн. Методы поиска периодических волн, уединенных волн и кинков, развитые в [5]–[10] и основанные на численном моделировании неустойчивых инвариантных многообразий могут быть применены для линеаризованных версий этих уравнений для получения симметричных собственных функций. Предварительные оценки показывают, что применение метода пристрелки для уравнений бегущих волн, соответствующих уравнениям (2.1) и (3.1), требуют вариации двух параметров (выполнимо на персональном компьютере), если известно собственное значение, или вариации трех параметров (полезно применение многопроцессорного компьютера), если собственное значение действительно, но не известно. Но исследования, приведенные ниже, предлагают метод, который не требует вычисления собственных функций для анализа устойчивости уединенных волн.

Пусть начальные данные имеют вид:

$$V = V_s, \quad Q = 0,$$

Все возмущения порождаются численными методами. Численный эксперимент показывает, что после некоторого времени стояния максимальная ам-

плитуда $V_m(t) = \max_x a(x, t)$ растет и затем при достижении некоторого конечного момента времени $V_m(t)$ стремится к $+\infty$. Кроме того, было замечено, что через некоторое время с начала расчета разность $\hat{B} = V(\tau_*) - V_s$ становится подобной собственной функции B . Начальные данные $V = V_s + \varepsilon \hat{B}$, $Q = \varepsilon \hat{Q}$ вызывают рост и аварийную остановку при $\varepsilon > 0$ и уменьшение и распад на две уединенные волны при $\varepsilon < 0$.

Тип эволюции численного решения (рост или снижение) в общем случае зависит от разницы между уединенной волной в численном эксперименте и уединенной волной, принимаемой в качестве начальных данных. Другие уравнения и другой метод получения начальных данных используется в разделе ниже. На начальном этапе наблюдается снижение при $\varepsilon > 0$ и рост при $\varepsilon < 0$.

Другой способ получить приблизительное решение в виде собственной функции без анализа решений обыкновенных дифференциальных уравнений состоит в решении уравнений в частных производных, линеаризованных около уединенной волны. Некоторое начальное возмущение при этом необходимо, иначе получится нулевое решение. В общем случае при выборе некоторых специальных возмущений собственная функция может и не появиться. Будут наблюдаться только осцилляции. В этом основная разница между линейными и нелинейными уравнениями. В нелинейном случае все волны взаимосвязаны, поэтому любое произвольное возмущение ведет к появлению всех типов волн.

Заметим, что фактически численные эксперименты для выявления собственной функции с максимальным ростом проводились в некоторой ограниченной области.

Сопоставление с результатами других работ. Известно, что для уравнения (3.1) существуют семейства бегущих уединенных волн, распространяющихся со скоростью $U \in (-1, +1)$ [12, 13, 14, 15]. При $U \in (-1/2, 1/2)$ эти волны неустойчивы, поскольку имеется растущая собственная функция [13]. Нелинейная устойчивость при $|U| \in (1/2, 1)$ доказана в работе [14]. Кроме того, уединенные волны для интервала $U \in (-1/2, 1/2)$ линейной неустойчивости могут распадаться на две уединенные волны. Точные аналитические решения, описывающие такой распад, даны в [15]. Решения уравнения (3.1) могут быть получены как стационарные решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Следовательно, это те же решения, что ранее были найдены в работе [16] и были проанализированы в [5, 17]. В [15] были также найдены точные аналитические решения типа сингулярного бризера. Показана их эволюция со временем. В этих решениях начальные данные сходны со стоячей уединенной волной. Со временем возникает быстрый рост амплитуды, но затем волна распадается на две уединенные волны понижения уровня. Затем за конечное время амплитуда этих волн стремится к $-\infty$. Затем через некоторое время решение возвращается в исходное состояние. Затем цикл повторяется. С математической точки зрения такое поведение не рассматривается как блоуап. Доказано, что блоуап может иметь место для некоторых начальных данных в случае краевой задачи [18], но не из-

вестно определенно, может ли он иметь место в случае задачи Коши [19]. Стоячая уединенная волна является некоторым предельным решением семейства решений типа бризера, следовательно ее эволюция по типу бризера должна наблюдаться при некотором выборе начальных данных и при специальном выборе начальных возмущений. Очевидно, период осцилляций для этого предельного решения должен стремиться к бесконечности и возможно максимум амплитуды должен стремиться к $+\infty$. Заметим, что наблюдаемое в численном эксперименте ограниченное решение с распадом на две волны совпадает с решением, описанным в [15], но неограниченное решение обладает иными свойствами, чем бризерное решение, поскольку амплитуда стремится к $+\infty$, хотя тенденция к распаду на две волны понижения уровня заметна. С формальной точки зрения в случае сколь угодно малых начальных возмущений стоячей уединенной волны рост амплитуды до $+\infty$ может продолжаться сколь угодно долго, что согласуется со сделанным выше предположением. Заметим также, что ранее [12] расчеты, демонстрирующие неустойчивость уединенных волн при $U \in (-1/2, 1/2)$, уже делались. Рост амплитуды до бесконечности наблюдался в случае, когда начальная уединенная волна близка к стоячей уединенной волне, а в других случаях наблюдался распад на две уединенные волны. Как уже отмечалось выше, при таком походе (с самопроизвольно возникающими возмущениями) конечный результат может зависеть от численных эффектов. Здесь же развивается более точный подход, основанный на использовании вполне определенных начальных возмущений. Он показывает, что результат определяется знаком коэффициента перед собственной функцией.

3.4 Бездиссипативные и слабодиссипативные разрывы

Здесь анализируются решения задачи о распаде произвольного разрыва. Начальные данные берутся в виде сглаженной ступеньки. Цель исследования — анализ устойчивости солитонных структур и сравнение с устойчивостью уединенных волн. Результаты этого исследования будут использованы для анализа аналогичных решений уравнений (2.1).

Основные понятия. Согласно [5] в общем случае обратимых (бездиссипативных) уравнений решение содержит области однородных состояний, области центрированных простых волн, описываемых упрощенными уравнениями без производных высокого порядка, и расширяющиеся волновые зоны. Волновые зоны могут быть регулярными или стохастическими. В регулярном случае волновые зоны могут рассматриваться как центрированные простые волны для некоторых усредненных уравнений. Эти области могут разделяться обратимыми разрывами. Решение основных уравнений, описывающее переходы между однородными или волновыми состояниями, называется структурой разрыва. В случае стационарной структуры разрыва она описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями бегущих волн. Это может быть классический или обобщенный кинк или солитонная структура. При включении слабой диссипации возникают аналогичные не расширяющиеся со временем решения. Волновые зоны в этом случае могут быть

описаны как стационарные решения усредненных уравнений. Слабодиссипативные стационарные структуры разрывов описываются как комбинации стационарных волновых зон и обратимых структур (кинков).

Для уравнения (3.1) уравнения бегущих волн простые, поэтому только солитонный разрыв может наблюдаться. Уединенная волна играет роль структуры и разделяет однородную область и волновую зону. Уравнение (3.3) может рассматриваться как упрощенное уравнение, но лучше вывести упрощенное уравнение из (3.6):

$$W_\tau = V_\xi - (V^2)_\xi, \quad V_\tau = W_\xi$$

Эти уравнения записаны в виде законов сохранения. Следовательно, можно вывести условия на разрывах:

$$U[W] + [V - V^2] = 0, \quad U[V] + [W] = 0 \quad (3.8)$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность значений для разных сторон разрыва. Законы сохранения выполняются как для недиссипативного, так и для диссипативного случая, но только в диссипативном случае условия (3.8) позволяют определить скорость разрыва:

$$U^2 = [V - V^2]/[V] \quad (3.9)$$

Начальные условия для задачи о распаде произвольного разрыва были взяты в виде:

$$V = 0.5a + 0.5a \tanh(\xi/l), \quad V_\tau = 0$$

Здесь a — амплитуда начального разрыва для V , l — параметр сглаживания. Заметим, что при таком подходе величина начального разрыва для W равна нулю, это неявно задается начальными условиями.

Решение задачи о распаде произвольного разрыва содержит центрированную простую волну и солитонный разрыв. В бездиссипативном случае для $a > 0.5$ (в этом случае согласно (3.4) состояние справа от разрыва неустойчивое) наблюдается неустойчивость, похожая на описанную в разделе 3.3, см. рис. 3. Амплитуда первой волны в волновой зоне со структурой солитонного типа начинает расти и расчет останавливается. Тенденция к распаду на две волны понижения уровня также наблюдается. Обозначим через S отношение скорости длинных линейных волн и скорости уединенных волн. Для уравнений Буссинеска значение S — характерное значение для оценки амплитуды уединенной волны, поскольку оно не зависит от коэффициентов уравнения, а эти коэффициенты для уравнений выведенных для разных состояний V_0 , наблюдаемых на рис. 3, разные. В бездиссипативном случае $a = 0.5$ соответствует значению S приблизительно равному 0.61 (численный результат). В случае слабой диссипации при $a > 0.5$ аналогичные эффекты тоже наблюдаются. Значение S для $a = 0.5$ может быть

определено из соотношения (3.9): $S = \sqrt{2}/2 \approx 0.71$. Значение $S = 0.5$ согласно предыдущему подразделу соответствует предельной точке неустойчивости уединенной волны, т.е. при $S = 0.61$ и $S = 0.71$ уединенная волна сама по себе устойчивая. Таким образом, представляется, что неустойчивость солитонной структуры не связана непосредственно с неустойчивостью уединенной волны. Детальный анализ показывает, что в процессе эволюции решения на первом этапе амплитуда разрыва нарастает, поэтому возможно на втором этапе первая волна становится близка к неустойчивой уединенной волне, рис. 3.

Для конечных значений ε_d наблюдается регулярное решение задачи о распаде произвольного разрыва и при $a > 0.5$ (по крайней мере для случая, когда a не слишком превышает значение 0.5). Заметим, что анализ решений уравнений бегущих волн показывает, что в слабодиссипативном случае структура разрыва существует при $\varepsilon_d \rightarrow 0$ даже если $a > 0.5$. Упрощенные уравнения для однородного состояния справа, для которого $V > 0.5$ не гиперболические, а эллиптические. Задача Коши для них некорректно поставлена (неэволюционность). Тем не менее структура разрыва существует и решение уравнений Буссинеска стабилизируется диссипацией.

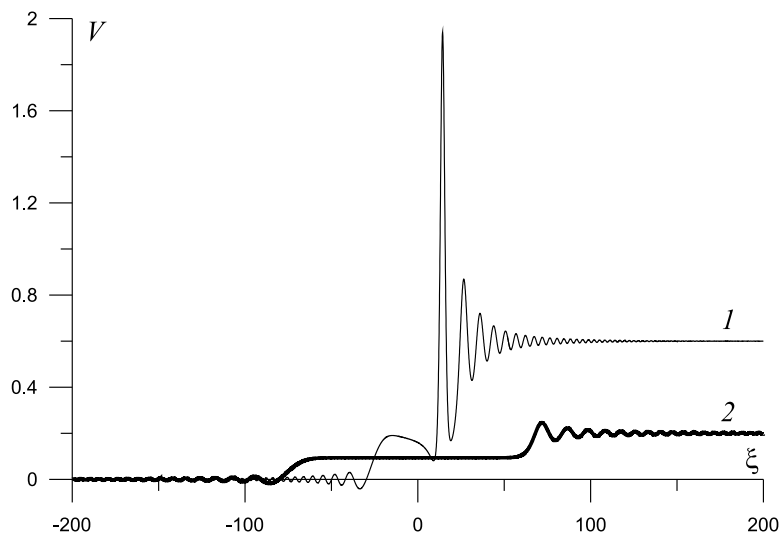


Рис. 3: Решения с неустойчивой (1, $\tau = 26$) и устойчивой (2, $\tau = 75$) солитонной структурой

4 Решения уравнений с контролируемым давлением

Анализ результатов численных экспериментов показал, что для области параметров, где справедливо уравнение (3.1) (область, где имеет место переход от устойчивого к неустойчивому солитонному разрыву малой амплитуды), все явления, описываемые в предыдущем разделе наблюдаются и для уравнений (2.1). В этом разделе основное внимание уделено эффектам, связанным с сильной нелинейностью.

4.1 Анализ дисперсионного соотношения и обобщение уравнений

Для анализа результатов расчетов мы должны исследовать дисперсионное соотношение, полученное в [2]. Дисперсионное соотношение может быть выведено путем подстановки $z = z_l \exp(i(kZ - \omega)t)$, $r = r_l \exp(i(kZ - \omega)t)$ в линеаризованный вариант уравнений (2.1). Заметим, что здесь используется физическая частота и волновое число при Лагранжевом подходе, поскольку все графики и расчеты также соответствуют этому подходу. При Эйлеровом подходе волновое число равно k/λ_1 . Это физически наблюдаемое волновое число. Уравнения линеаризованы около некоторого однородного состояния z'_0 и r_0 . Индекс 0 ниже будет опущен. В случае неоднородных состояний используется описанный выше метод замораживания коэффициентов, при этом допускается, что очевидное условие для стационарных однородных состояний $P^* = \hat{W}_2/(rz')$ может не выполняться.

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\sigma_{10}}{\rho z_0'^2} k^2 + \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4[(P^* r_0 - \hat{W}_{210})^2 - (-\frac{\hat{W}_{220}}{R} + P^* z'_0)(-R \hat{W}_{110})] k^2}}{2\rho R}}$$

$$b = R \hat{W}_{110} k^2 + \frac{\hat{W}_{220}}{R} - P^* z'_0,$$

Ниже при рассмотрении асимптотических значений и знаков второй производной и подразумеваются ветви, расположенные в области $k > 0$, $\omega > 0$, см. рис. 4.

При знаке + перед внутренним квадратным корнем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega/k = U_+ = \sqrt{\hat{W}_{11}/\rho}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \omega/k = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{\hat{W}_{22}}{R} - P^* z'_0}{\rho R}}$$

При знаке – перед внутренним квадратным корнем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega/k = U_- = \sqrt{\sigma_1/(\rho z'^2)}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \omega/k = U_{0-} = \sqrt{\hat{W}_{11}/\rho - \frac{(P^* r - \hat{W}_{21})^2}{\rho R (\frac{\hat{W}_{22}}{R} - P^* z')}}}$$

Согласно [3, 4] уравнения (2.1) некорректны, если U_+ или U_- мнимая величина. Первое ограничение корректности естественно для мембранной модели: $\sigma_1 > 0$.

Одно из необходимых условий устойчивости связано с плюсовой ветвью: $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Если это условие не выполнено, труба неустойчива сама по себе в ортогональном направлении даже при отсутствии продольных волн и $\text{Im}\omega > 0$ при $k = 0$.

Другое условие связано с минусовой ветвью: $U_{0-} \in \mathbb{R}$. Это условие аналогично условию $V < 0.5$ для уравнения (3.1): $\text{Im}\omega = 0$ для $k = 0$. Если это условие не выполнено, то минусовая ветвь начинается не при $k = 0$, а при некотором положительном значении $k = k_{**}$. Состояния с такой неустойчивостью рассматриваются при решении задачи о распаде произвольного разрыва (раздел 4.4).

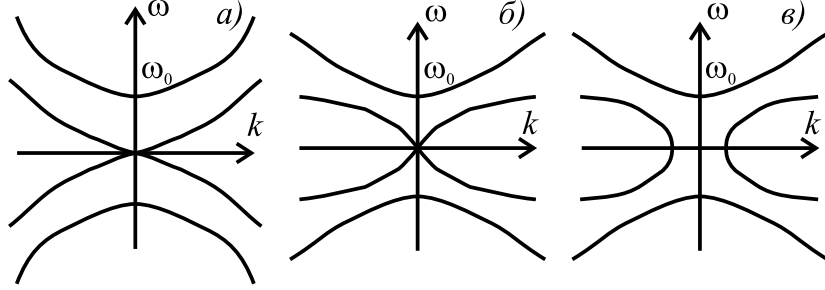


Рис. 4: Некоторые типы расположения ветвей

На рис. 4 показаны некоторые типичные варианты расположения ветвей: $\partial^2\omega/\partial k^2|_{k=0} < 0$ для минусовой ветви (а), $\partial^2\omega/\partial k^2|_{k=0} > 0$ (б), с неустойчивостью однородного состояния (в). Заметим, что в случае а и в в окрестности начала координат минусовые ветви сходны с ветвями уравнения Буссинеска для случая устойчивого и неустойчивого однородного состояния.

Дальнейшие исследования показали, что некорректность при $\sigma_1 < 0$ в некоторых случаях — реальная проблема. Обобщенная версия уравнений может быть использована в таких случаях:

$$\left(R\sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2}\right)' - p_* r r' + \varepsilon_z \dot{z}'' = \rho R \ddot{z}, \quad -c_5 r'''' + \left(R\sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2}\right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + p_* r z' + \varepsilon_r \dot{r}'' = \rho R \ddot{r}$$

Здесь включены диссипативные члены, соответствующие модели вязкой упругости. Недиссипативные члены с производной пятого порядка соответствуют включению сопротивления на изгиб. Детали вывода описаны в разделе 4.6. Дисперсионные кривые для (2.1) обладают линейной асимптотикой на бесконечности. Поэтому как диссипативные, так и недиссипативные члены будут доминировать при $k \rightarrow \infty$ и уравнение будет корректным.

4.2 Численный метод

Уравнения (2.1) были записаны в форме без производных второго порядка по времени:

$$\left(R\sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2}\right)' - p_* \left(\frac{r^2}{2}\right)' = \rho R \dot{F}, \quad \dot{z} = F, \quad \left(R\sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2}\right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + p_* r z' = \rho R \dot{G}, \quad \dot{r} = G$$

Первое уравнение записано в форме закона сохранения. Консервативная трехслойная центрированная схема и схема типа Лакса-Вендрофа были использованы. Пример консервативной аппроксимации первого члена приведен ниже:

$$\left(R\sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2} \right)' \rightarrow \frac{K_{k+1/2}^n \frac{z_{i+1}^n - z_i^n}{\Delta Z} - K_{k-1/2}^n \frac{z_i^n - z_{i-1}^n}{\Delta Z}}{\Delta Z},$$

$$K_{k\pm 1/2}^n = \frac{(\hat{W}_{\lambda_1})_{k\pm 1}^n (\lambda_1)_{k\pm 1}^n + (\hat{W}_{\lambda_1})_k^n (\lambda_1)_k^n}{2}$$

Стандартные центральные разности использованы для других пространственных производных.

4.3 Уединенные волны

Основное отличие данного исследования от исследования раздела 3.3 состоит в том, что здесь решение в виде стоячей уединенной волны r_s, z_s является решением уравнений бегущих волн, полученным численно при помощи некоторой программы [1] (программа была предоставлена Fu Y.B.). Это решение зависит от некоторых параметров, связанных с условиями на бесконечности. В предельном случае стоячая уединенная волна имеет вид двух кинков, смещенных на большое расстояние друг от друга. Согласно методу функции Эванса стоячая уединенная является неустойчивым решением (исключение — случай двух кинков), но аналитического решения для собственной функции нет.

Расчет с начальными данными

$$r = r_s, \quad z = z_s, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{z} = 0 \quad (4.1)$$

показывает, что после некоторого периода времени, в течение которого амплитуда неизменна, начинается снижение амплитуды и затем распад волны.

Для случая малых амплитуд стационарная уединенная волна распадается на две уединенные волны, движущиеся в противоположных направлениях. Следовательно, мы имеем тот же тип эволюции, какой был описан в предыдущем разделе для $\varepsilon < 0$. В этом случае нет пересечения между дисперсионными кривыми и линией $U = \omega/k$, соответствующей скорости движущихся уединенных волн. Точное решение в виде уединенной волны повышения уровня может существовать согласно [5]-[10].

Метод, разработанный в предыдущем разделе, был использован для получения решения с ростом амплитуды. Разница состоит в том, что здесь это происходит при $\varepsilon < 0$.

Расчеты с начальными данными

$$z = z_s + \varepsilon(z(t_*) - z_s), \quad r = r_s + \varepsilon(r(t_*) - r_s), \quad \dot{z} = \varepsilon \dot{z}(t_*), \quad \dot{r} = \varepsilon \dot{r}(t_*)$$

дают рост амплитуды при $\varepsilon < 0$ и снижение при $\varepsilon > 0$. Здесь $z(t_*)$, $r(t_*)$ — решение с начальными данными (4.1) в некоторый момент времени t_* , при

котором снижение амплитуды уже проявляется. В случае малых амплитуд после некоторого времени, при котором наблюдается рост амплитуды, расчет останавливается из-за переполнения. Таким образом, эволюция здесь такая же, как описывается уравнениями Буссинеска.

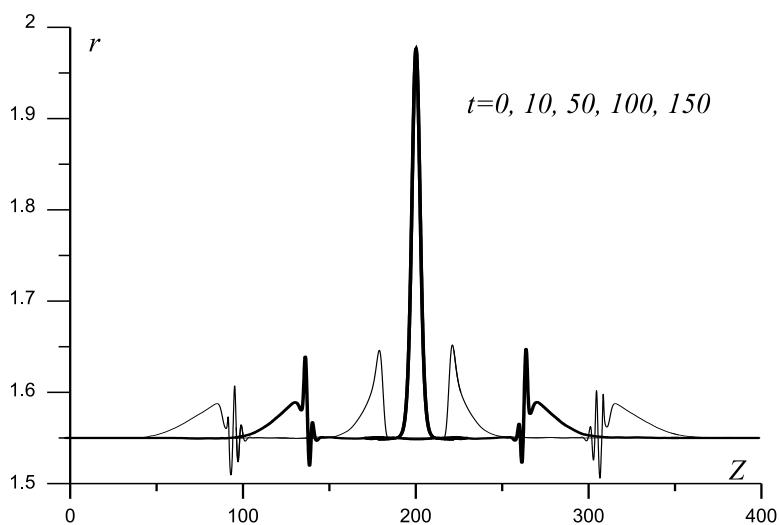


Рис. 5: Случай умеренной амплитуды: начальное снижение и распад

Поведение в случае умеренной амплитуды отличается от поведения в случае малых амплитуд, рис. 5. В случае понижения амплитуды стоячая уединенная волна тоже распадается на две волны, но это не чистые уединенные волны. Линия $U = \omega/k$ пересекает минусовую ветвь. Амплитуда бегущих волн понижается из-за дисперсионных эффектов. Излучаются короткие волны. Заметим, что в этом случае для минусовой дисперсионной ветви $\partial^2\omega/\partial k^2|_{k=0} > 0$, но у соответствующей дисперсионной ветви уравнения (3.1) $\partial^2\omega/\partial k^2|_{k=0} < 0$, а в случае малых амплитуд, описанном выше, $\partial^2\omega/\partial k^2|_{k=0} < 0$ как и у дисперсионной ветви уравнения (3.1).

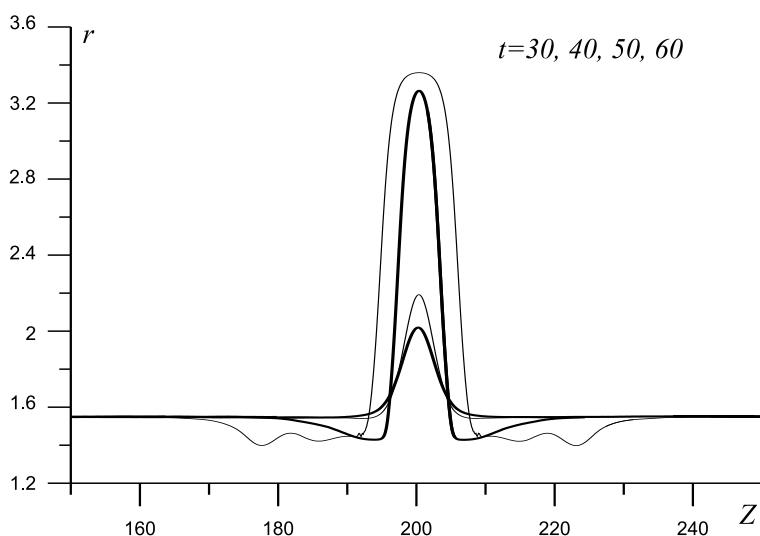


Рис. 6: Случай умеренной амплитуды: начальный рост и остановка

В случае роста для умеренных амплитуд через некоторое время этот рост останавливается (рис. 6) и огибающая графика результирующего решения становится автомодельной (рис. 7). Огибающая зависит от x/t . Эти решения содержат два разрыва солитонного типа и два кинка, движущихся в противоположных направлениях. Очевидно, если начальная стоячая уединенная волна будет стремиться к комбинации двух кинков, то скорость кинков в этом решении и амплитуда солитонного разрыва будет стремиться к нулю. Половина графика в этих решениях (левая или правая сторона от оси симметрии) совпадает с графиком некоторого специального решения задачи о распаде произвольного разрыва, смотри раздел ниже. Типичное решение задачи о распаде произвольного разрыва содержит два элемента типа разрыва или простой волны, дополнительно может быть один кинк. Здесь же наблюдается один кинк и один разрыв.

Анализ решений при малых амплитудах начальной уединенной волны показывает, что расчеты останавливаются из-за появления областей, где $\sigma_1 < 0$. Расчеты с включением члена с сопротивлением на изгиб показывают, что в этом случае расчет может быть продолжен, но решение становится хаотичным, но в случае включения диссипативных членов регулярное решение, аналогичное показанному на рис. 6, может быть получено.

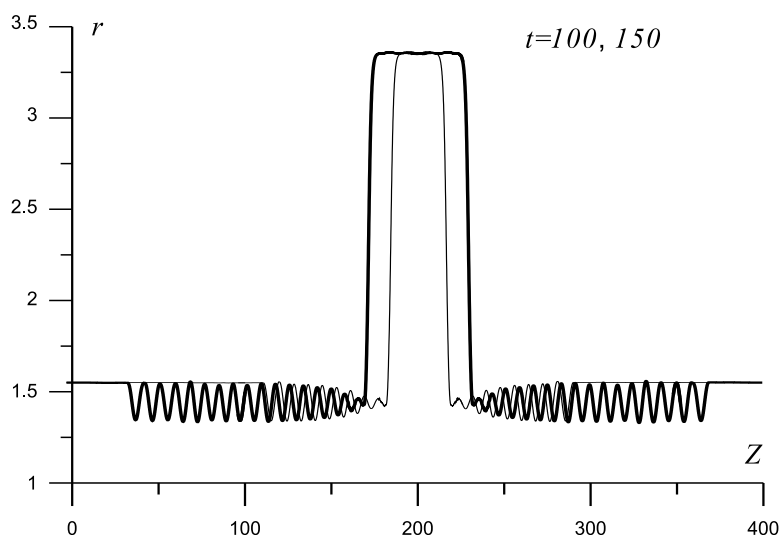


Рис. 7: Автомодельное решение

Для проверки результатов была рассчитана также собственная функция как результат эволюции решений линеаризованных уравнений в случае наличия некоторых начальных возмущений, рис. 8. Интересный факт, что собственная функция получалась не при всех начальных возмущениях. Для некоторых начальных возмущений в течение длительного времени наблюдались осцилляции. Хотя амплитуда здесь умеренная, собственная функция сходна с собственной функцией при использовании уравнений Буссинеска.

Приведенные в данном разделе графики соответствуют расчетам при $R = 1$, $\rho = 1$, $\mu = 1$, $J_m = 30$, $z'_\infty = 1.1$, $r_\infty = 1.55$.

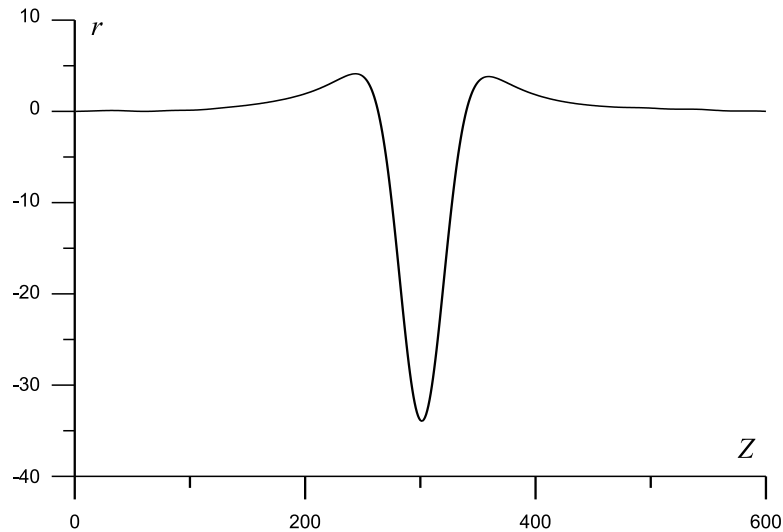


Рис. 8: Умеренная амплитуда: собственная функция

4.4 Распад произвольного разрыва и кинки

Для понимания смысла кинкового решения и проверки его устойчивости была исследована задача о распаде произвольного разрыва. Теория бездиссипативных разрывов [5]-[10] применима для этой модели, описанные ниже исследования сделаны при помощи методов разработанных в этой теории. Эта теория базируется на анализе дисперсионного соотношения, анализе размерностей инвариантных многообразий решений уравнений бегущих волн (систем обыкновенных уравнений, описывающих волны, движущиеся с фиксированной скоростью), численного моделирования инвариантных многообразий и прямого расчета уравнений в частных производных. Те же структуры, что были обнаружены для моделей, обладающих системами уравнений бегущих волн четвертого порядка [5]-[10], могут быть найдены для уравнений (4.6). Солитонный разрыв или обычный разрыв с излучением наблюдаются, если линия $U = \omega/k$ не пересекает дисперсионную кривую для одной стороны разрыва и имеется одно пересечение для другой стороны, разрывы со стохастической структурой наблюдаются в случае пересечения с одной стороны и двух пересечений с другой. Классический кинк наблюдается, если нет пересечений для обеих сторон, кинк с излучением наблюдается в случае наличия одного пересечения с обеих сторон. Заметим, что все эти структуры (за исключением солитонной структуры) обратимы и могут рассматриваться как неклассические кинки [9, 10]. Кинки, для которых число свободных параметров аналогично ударной волне в газовой динамике, рассматриваются как структуры класса 0. Кинки, для которых число свободных параметров на один меньше, рассматриваются как структуры класса -1 . Кинки класса $+1$ для этой модели должны существовать также, они типичны для случая наличия двух пересечений [6, 8]. Но здесь для простоты изложения и понимания мы рассматриваем структуры класса 0 как обычные структуры (солитонный разрыв и разрыв с излучением) а кинковые структуры класса -1 — как кинки (классический кинк, кинк с излучением).

Уравнения с контролируемым давлением — Гамильтоновы уравнения, как и все уравнения, анализируемые в [5]-[10]. Но здесь нет закона сохранения энергии. Гамильтониан здесь не энергия. Уравнения бегущих волн для этой модели неинтегрируемые. Исключение — случай нулевой скорости.

Начальные данные для расчета задачи о распаде произвольного разрыва были взяты в форме ступеньки:

$$\begin{aligned} r &= r_1 + (r_2 - r_1) \tanh((Z - Z_0)/l)/2, & \dot{r} &= 0, & r_1 &= r_\infty \\ z' &= z'_1 + (z'_2 - z'_1) \tanh((Z - Z_0)/l)/2, & \dot{z}' &= 0, & z'_1 &= z'_\infty \end{aligned}$$

Пусть r_1 и z'_1 фиксированные величины, r_2 некоторая произвольная величина, а z'_2 находится из уравнения

$$P_* = \frac{\hat{W}_{\lambda_2}(r_2, z'_2)}{r_2 z'_2}; \quad P_* = \frac{\hat{W}_{\lambda_2}(r_1, z'_1)}{r_1 z'_1} \quad (4.2)$$

Задача сводится к проблеме поиска корней полиномиального уравнения, решаемого численно. Берется решение, обладающее свойством $\Delta = z'_{02} > z'_{01}$. Имеется пять корней. Для двух из них $z'_2 < 0$ поэтому они не используются.

Вначале были проанализированы решения в окрестности критического значения z'_1 , где применимы уравнения Буссинеска. Был использован корень, ответвляющийся от нулевого значения при рассмотрении величины $\Delta = z'_2 - z'_1$ (корень 1). Область существования этого корня схематично показана на рис. 9. Здесь кривая L_1 — граница существования корня, а L_2 — граница неустойчивости однородного состояния 2. В окрестности точки A (пересечение прямой $r_2 = r_1$ с кривой L_2) решения описываются уравнениями Буссинеска и результаты расчета совершенно такие же, как описывается в разделе 3.

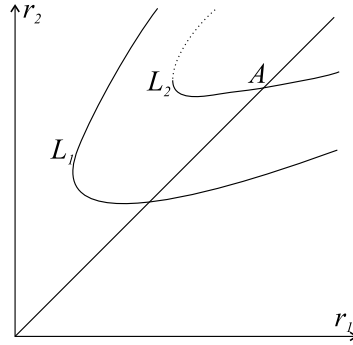


Рис. 9: Область существования корня 1

Зафиксируем $z'_1 = z_f$ ($z_f = 1.1$ для всех рисунков в этом разделе; $r_{1A} \approx 1.7$) и будем варьировать параметр r_1 , а затем параметр r_2 и будем анализировать тип решения. Если использовать уравнение (4.2) для определения z'_2 при произвольных фиксированных значениях r_1 , то мы можем взять любые два различных значения r_2 как левые и правые значения для задачи о распаде произвольного разрыва, но в этом случае z'_1 будет отличаться

от z_f , а точка A будет соответствовать некоторой другой точке на кривой L_2 . Следовательно, если эти два значения берутся в окрестности кривой L_2 , то такое решение может быть описано некоторым уравнением Буссинеска. Кривая L_2 состоит из двух ветвей (ветвь 2 показана пунктирной линией на рис. 9), в соответствующих уравнениях Буссинеска будет разный знак перед нелинейным членом. Поэтому для одной ветви мы имеем уединенные волны повышения уровня, а для другой — понижения. Такое поведение уединенных волн наблюдается в численных решениях.

Пусть r_1 близко к r_A , но меньше, чем это значение. При малых значениях Δ решение регулярное и не содержит кинков. Если Δ увеличить, то в расчете начиная с некоторого момента времени идет быстрый рост первой волны в солитонной структуре разрыва. Затем расчет останавливается из-за возникновения неустойчивости в областях, где $\sigma_1 < 0$. Следовательно, уравнения становятся некорректными для этих областей. Уравнения могут быть скорректированы включением вязкости или сопротивления на изгиб. В случае включения вязкости можно получить решение с двумя кинками. Оно сходно с решением с двумя кинками, найденном в разделе 4.3. Включение сопротивления на изгиб ведет к разрушению кинков и к хаотическому поведению. Для больших значений Δ решение содержит один кинк. Стационарный кинк может быть найден вариацией Δ . Примеры расчетов с положительной и отрицательной скоростью кинка показаны ниже, рис.10. Параметры расчета специально были подобраны такими, что соответствующая им стоячая уединенная волна, описанная в разделе 4.3, близка к комбинации двух кинков для значения $r_\infty = r_1$. Поэтому амплитуды разрывов и простых волн на левой стороне рисунка невелики.

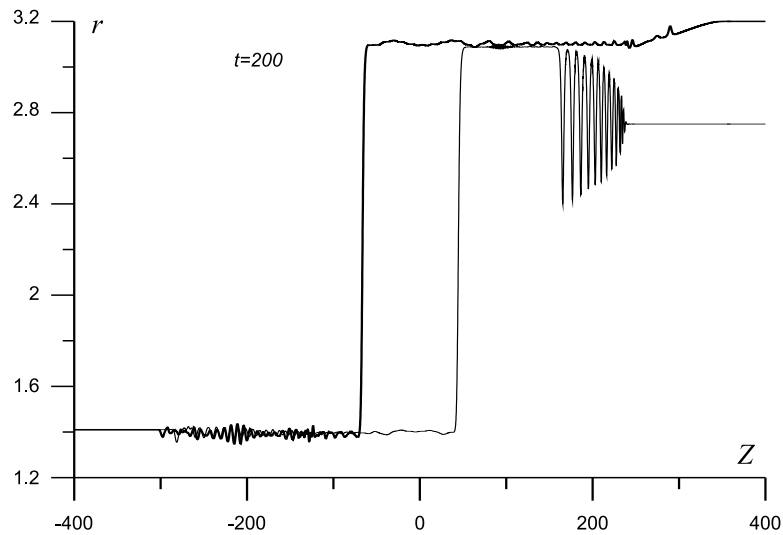


Рис. 10: Решения задачи о распаде произвольного разрыва, близкие к стационарному кинку, начальный разрыв расположен в точке $Z = 0$, $r_1 = 1.41$.

Анализ решений и дисперсионного соотношения для однородных состояний для обеих сторон кинка показывает, что прямая, касательная к минусовой дисперсионной кривой в начале координат, не пересекает ее. Знак второй производной для минусовой дисперсионной ветви для правой стороны

начального скачка и кинка положительный. Поэтому солитонный разрыв и уединенная волна понижения уровня, наблюдаемая на одном из графиков, предсказываются теорией. Должны существовать семейства уединенных волн понижения и повышения уровня, стремящиеся к кинке.

В случае умеренной амплитуды начального разрыва (величины Δ) однородное состояние 2 неустойчивое, со временем возникает аварийная остановка расчета. Расчеты можно продолжить, если включить диссипативные члены или члены с сопротивлением на изгиб. Заметим, что для меньших значений r_1 аварийная остановка не наблюдается даже в бездиссипативном случае, но структура разрыва становится стохастической. В этом случае от правой границы распространяются фронты неустойчивых волн. Это явление может рассматриваться как краевой (приграничный) флаттер. Эти фронты со временем могут приводить к остановке расчета из-за роста амплитуды волн, но встречаются и решения, где эта амплитуда ограничена, рис. 11.

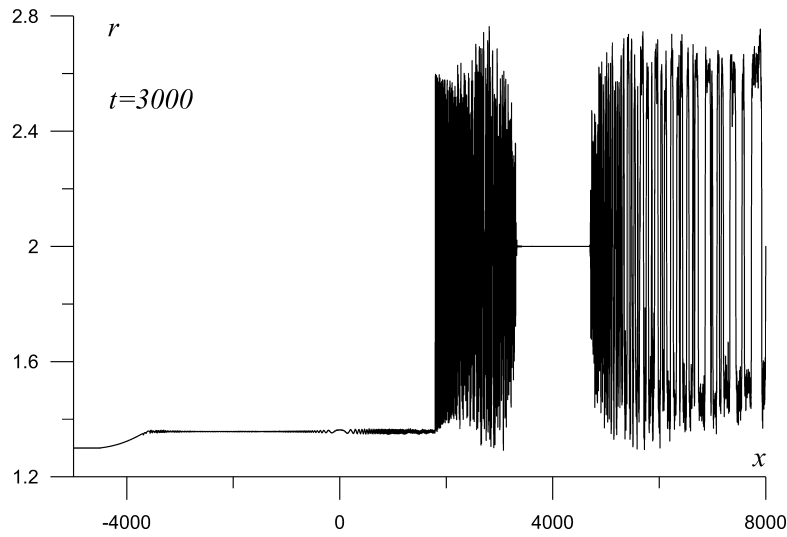


Рис. 11: Решение в случае неустойчивого однородного состояния справа

Теперь мы можем проанализировать одну существенную с практической точки зрения проблему. Пусть имеются начальные данные типа двух противоположных ступеней:

$$r = r_2, \quad -d < Z < d; \quad r = r_1 \quad (-d > Z) \vee (Z > d)$$

Здесь подразумевается крупномасштабный подход, d — некоторое расстояние. Ступеньки в расчете в действительности сглажены. Решение в виде стоячего кинка в этой задаче соответствует некоторому критическому случаю. Если скорость левого кинка отрицательная, то возмущенная область со временем будет расширяться, а если скорость положительна, то область возмущения будет уменьшаться.

Существование таких решений означает, что для некоторой области параметров имеется два решения о распаде произвольного разрыва. Например, с формальной точки зрения решение, представленное на рис. 7, — это решение задачи о распаде произвольного разрыва в случае $r_1 = r_2$, $z'_1 = z'_2$, в то же время существует очевидное решение, где все величины постоянны.

В окрестности точки A знак $\partial\omega^2/\partial k^2|_{k=0}$ для минусовой дисперсионной ветви положителен. Тот же знак и у дисперсионной ветви уравнения (3.1). Но для меньших значений r_1 этот знак становится отрицательным. Это означает, что уединенная волна повышения уровня должна смениться уединенной волной понижения уровня. Интересный новый тип нестационарной структуры разрыва может быть найден в случае, когда знак для левой и правой стороны разрыва разный, график решения показан на рис. 12. Здесь и далее наиболее интересный фрагмент графика показан в прямоугольнике в крупном масштабе. Имеется одно пересечение и одна излучаемая волна для обеих сторон разрыва.

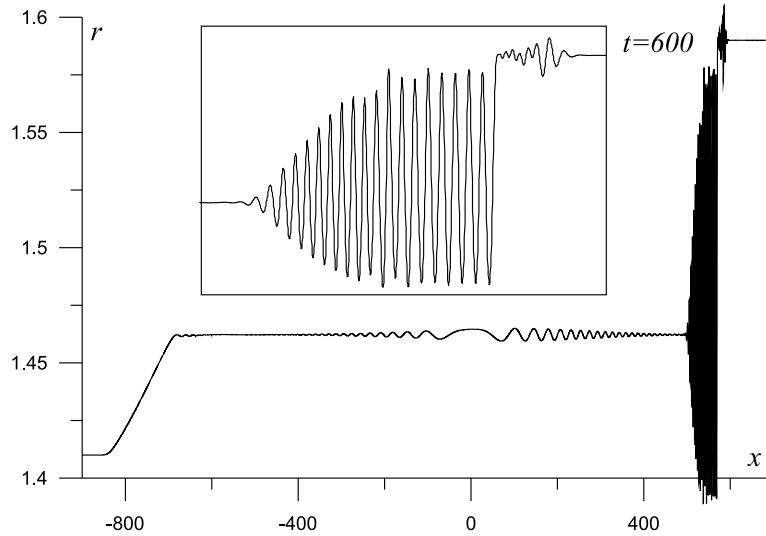


Рис. 12: Решение с нестационарной структурой в случае разных знаков второй производной для дисперсионного соотношения для левой и правой стороны разрыва, $r_1 = 1.41$

При дальнейшем уменьшении r_1 изменение знака $\partial^2\omega/\partial k^2|_{k=0}$ для обеих сторон разрыва ведет к появлению решений без кинка, но с комбинацией центрированной простой волны, солитонного разрыва типа Жуге (в таком разрыве скорость уединенной волны совпадает с характеристической скоростью упрощенной системы уравнений, класс -1) и еще одной центрированной простой волны, график решения показан на рис. 13.

Заметим, что аналогичные решения (с кинком и солитонным разрывом типа Жуге) были ранее найдены [7] для модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза с нелинейностью третьего порядка. Тип решения (с кинком или разрывом Жуге) для этого уравнения зависит от знака коэффициента при производной третьего порядка.

Для умеренных значений r_1 было найдено переходное решение между решениями, представленными на рис. 10 и рис. 13, оно представлено на рис. 14. Оно содержит кинк с излучением (класс -1). Это означает, что в этом случае линия $U = \omega/k$, где U — скорость кинка, пересекает дисперсионную кривую. Заметим также, что решения с кинком с излучением ранее были найдены для обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза с производной пятого порядка и кубической нелинейностью [5, 7]. Этот разрыв соответствует

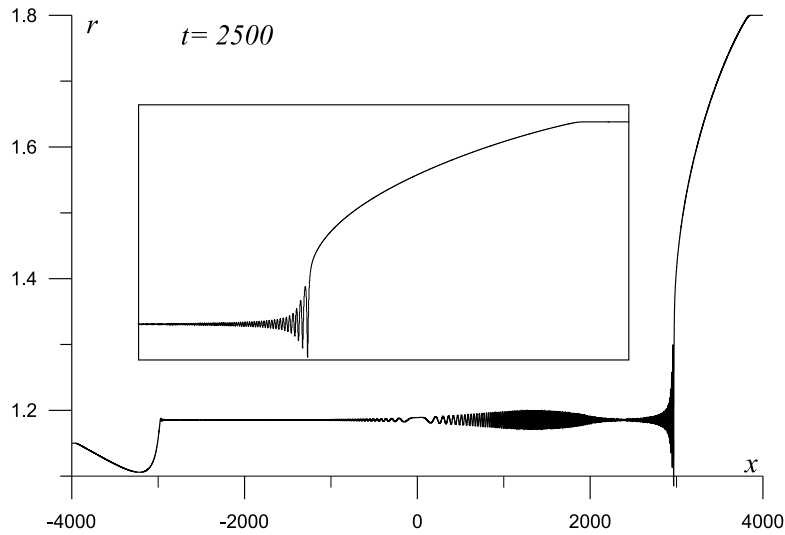


Рис. 13: Решения с солитонной структурой типа Жуге, $r_1 = 1.15$

случаю, когда имеются пересечения для обеих сторон разрыва. Обычный разрыв с излучением (класс 0) также наблюдается на рис. 14 ближе к правой границе. Такая структура соответствует случаю, когда есть пересечение для одной стороны и нет пересечения для другой. Существование таких структур подтверждает тот факт, что уравнения бегущих волн здесь неинтегрируемые. Для интегрируемых Гамильтоновых моделей можно ожидать наличие только классических уединенных волн и кинков.

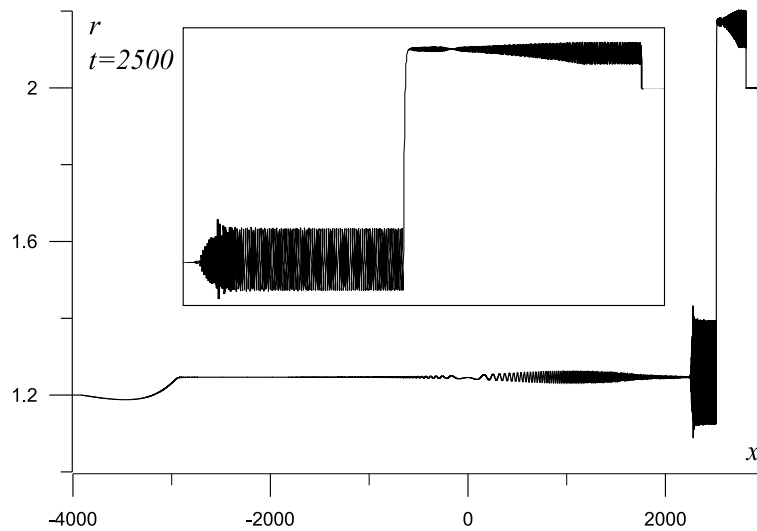


Рис. 14: Решение с кинком с излучением и обычным разрывом с излучением, $r_1 = 1.2$

Пример графика расчета в случае использования разных корней уравнения (4.2) для левой и правой стороны начального разрыва представлен на рис. 15. В этом случае дисперсионные ветви пересекаются друг с другом. Нестационарную структуру разрыва класса 0 с излучением двух волн можно видеть на рис. 15. Корень 2 используется для левой стороны, а корень 1 используется для правой стороны. Поэтому одно значение $r = 1.1975$ исполь-

зуются для обеих сторон начального разрыва. Для расчета P_* использовано значение $r_1 = 1.2$. Здесь имеется два пересечения между прямой $U = \omega/k$ и дисперсионными ветвями для однородного состояния в середине рисунка. Для одной излучаемой волны (в основном продольной) огибающая близка к огибающей для случая разрыва солитонного типа, а для другой (в основном поперечной) огибающая близка к случаю обычного разрыва с излучением. При изменении параметров расчета, направленном на увеличение амплитуды разрыва, решение становится более хаотичным. Здесь ожидается также существование кинков с резонансными двухволновыми зонами класса -1 и класса $+1$.

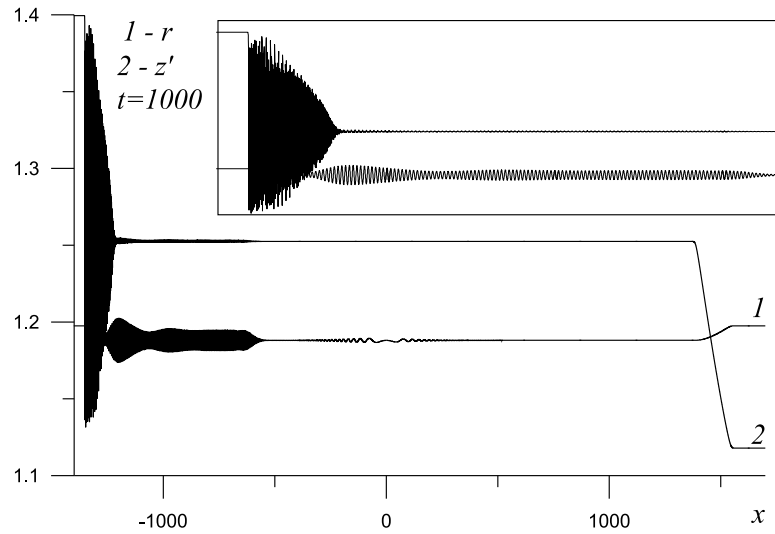


Рис. 15: Решение с нестационарной структурой в случае, когда при построении начального разрыва использованы два разных корня

4.5 Вывод упрощенных уравнений

Упрощенные уравнения необходимы для описания центрированных простых волн. Для вывода упрощенных уравнений введем новое обозначение:

$$u = z'$$

Теперь уравнения принимают вид:

$$\left(RW\hat{W}_1 \frac{u}{\sqrt{u^2 + r'^2}} \right)'' - P_*(rr')' = \rho R\ddot{u}$$

$$\left(RW\hat{W}_1(u, r, r') \frac{r'}{\sqrt{u^2 + r'^2}} \right)' - \hat{W}_2(u, r, r') + P_*ru = \rho R\ddot{r}$$

Упрощенный вариант второго уравнения такой:

$$-\hat{W}_2(u, r, r') + P_*ru = 0$$

Допустим, что мы можем выразим u из этого уравнения. Подставим это выражение в первое уравнение. Затем мы выбрасываем из результирующего уравнения все члены с производными выше второго порядка. Упрощенные уравнения принимают вид:

$$(c_x(r)r')' = (c_t(r)\dot{r})$$

Условия на разрывах в случае включения диссипативных членов в исходные уравнения можно найти также как и в случае уравнений Буссинеска.

4.6 Вывод уравнений с сопротивлением на изгиб и их расчет

Почему это необходимо. В решениях появляются области, где $\sigma_1 < 0$. Согласно [3, 4] это означает, что в этих областях уравнения (2.1) некорректны. Другая возможная проблема состоит в том, что на границе области корректности и некорректности графики $r(z)$ и $r(Z)$ имеют вид ломаной линии. Таким образом, мы имеем здесь разрыв производной. Модель формально допускает опрокидывание и изломы, но анализ показывает, что такие проблемы могут возникнуть только в случае сжатия трубы, а следовательно при некорректности. Еще одна проблема состоит в том, что в рассматриваемой модели нет дисперсии коротких волн ($\omega/k \rightarrow const$ for $k \rightarrow +\infty$). Это может вызвать неограниченный рост огибающей этих волн.

Области некорректности в численных решениях. Численная схема сама по себе обладает сглаживающими и корректирующими свойствами. Поэтому расчет продолжается еще некоторое время после появления некорректных областей, но позднее появляются коротковолновые осцилляции и расчет останавливается из-за роста этих осцилляций. Численное решение в некорректном случае может рассматриваться только как приближительное решение. Обычно наблюдается сходимость численной схемы в корректном случае, если некоторое условие устойчивости выполнено, и нет сходимости при любом соотношении пространственных и временных шагов в случае некорректности. Поэтому некорректность можно обнаружить и численно. Методика оценки корректности по дисперсионному соотношению дает только необходимое условие корректности, поэтому корректность приходится проверять численно.

Очевидно, некорректность связана с тем, что мембранная модель может быть использована только в случае растяжения. Модель пластины, где во внимание принимается также сопротивление на изгиб, работает и в случае сжатия. Сопротивление на сжатие предотвращает пластину и от изломов, т.е. от появления разрывов для r' .

Прежде всего заметим, что способ вывода здесь существенно отличается от способа вывода уравнений (2.1). Вывод базируется на формуле линейной теории упругости и переходе от Эйлера подхода к Лагранжу. Основная цель — подтверждение гипотезы, сделанной в предыдущем разделе о том, что включение сопротивления на изгиб может разрешить проблемы, возникшие при расчетах.

Используем хорошо известную формулу Жермена–Лагранжа, описывающую стационарное состояние пластины при условии растяжения или сжатия:

$$p_l = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)} \eta_{xxxx}$$

Здесь p_l — давление на поверхности пластины, η — смещение по вертикали, h — горизонтальная координата, h — толщина, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона. Следовательно, действие внутренних упругих сил при изгибании пластины может быть заменено действием давления.

В случае слабого растяжения дополнительная вертикальная сила должна быть включена в уравнения (4.6). Дифференциал от этой силы имеет вид:

$$df_r = \frac{1}{3} \mu h^3 R r'''' dZ$$

Здесь учтена цилиндрическая форма поверхности, несжимаемость материала, а также значения величин $\sigma = 1/2$, $E = 3\mu$ для рассматриваемой модели материала.

Уравнение для r имеет вид:

$$-cr'''' + \left(R\sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + p_* r z' = \rho R \ddot{r}$$

Анализ дисперсионного соотношения показывает, что теперь уравнения корректны, независимо от того, $\sigma_1 > 0$ или $\sigma_1 < 0$. Были выполнены расчеты при тех же параметрах, что и ранее, величина c рассматривалась как малый параметр (стенка трубы тонкая). Никаких проблем при расчетах обнаружено не было.

5 Решения для трубы, заполненной жидкостью

Уравнения для случая трубы, наполненной жидкостью, [2] приведены ниже:

$$\left(R\sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2} \right)' - Pr r' = \rho R \ddot{z} \quad (5.1)$$

$$[-cr''''] + \left(R\sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + Pr z' = \rho R \ddot{r} \quad (5.2)$$

$$\dot{r}z' - r'\dot{z} + vr' + \frac{1}{2}rv' = 0 \quad (5.3)$$

$$\rho_f(\dot{v}z' - v'\dot{z} + vv') + P' = 0 \quad (5.4)$$

Здесь v — скорость жидкости, ρ_f — плотность жидкости. Корректирующий член, описанный в предыдущем разделе, включен здесь в двойных скобках.

Дисперсионное соотношение для этих уравнений было выведено в [2]. Уединенные волны изучались в [11]. Основное отличие от случая уравнений с контролируемым давлением состоит в том, что обе ветви пересекаются в точке $\omega = 0$, $k = 0$.

Один из способов расчета таких уравнений — заменить жидкость слабо сжимаемым газом. Требуемая модификация гидродинамической части уравнений дана ниже:

$$(\dot{\rho}_f z' - \rho'_f \dot{z})r^2 + 2\rho_f r(\dot{r}z' - r'\dot{z}) + (\rho_f v r^2)' = 0$$

$$P = P(\rho_f)$$

Здесь модифицировано уравнение сохранения массы. Добавлено уравнение состояния. При этом существует проблема того, может ли дисперсия предотвратить опрокидывание волн в газе, если $c = 0$. Если нет, то потребуется включение вязкости газа.

У этих уравнений имеется три дисперсионные ветви.

Другой способ — исключить давление и получить уравнения для v , r , z и $q = \dot{z}$:

$$\left[\rho_f z' - \left(\frac{r' \rho_f R}{r z'^2} \right)' \right] \dot{v} - \left[\left(\frac{r' \rho_f R}{r z'^2} \right) + \left(\frac{\rho_f R}{2 z'^2} \right)' \right] \dot{v}' - \left(\frac{\rho_f R}{2 z'^2} \right) \dot{v}'' =$$

$$\rho_f (v'q - vv') - [[cr''''/(rz')]'] +$$

$$\left[\frac{(1-r') \left(R \sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2}}{r z'} - \frac{\rho_f R}{r z'^2} (q - v) \left(\frac{z'q - vr' - \frac{1}{2}rv'}{z'} \right)' - \frac{\rho_f R}{r z'^3} (r'q - vr' - \frac{1}{2}rv') \left(\frac{1}{2}v' - q' \right) \right]'$$

$$\dot{r}z' - r'q + vr' + \frac{1}{2}rv' = 0$$

$$\dot{z} = q, \quad \rho_f R \dot{q} = \left(R \sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2} \right)' - P r r'$$

Для вывода этих уравнений делается подстановка \dot{r} из (5.3) в (5.2), в полученное уравнение подставляется \dot{z} из (5.1), затем из полученного уравнения

выражается P и делается подстановка в (5.4) и (5.1). Формула для давления, необходимая для последнего уравнения, имеет вид:

$$P = \left[\frac{cr''''}{(rz')} \right] + \frac{-1}{1 + \frac{r'^2}{z'^2}} \left[\frac{r'\rho R}{rz'^2} \dot{v} + \frac{\rho R}{2z'^2} \dot{v}' + \frac{(1-r') \left(R\sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2}}{rz'} \right. \\ \left. - \frac{\rho R}{rz'^2} (q-v) \left(\frac{z'q - vr' - \frac{1}{2}rv'}{z'} \right)' - \frac{\rho R}{rz'^3} (r'q - vr' - \frac{1}{2}rv') \left(\frac{1}{2}v' - q' \right) \right]$$

Эти уравнения были решены численно при помощи схемы типа Лакса-Вендрофа. Вследствие наличия пространственно-временных производных эта схема для первого уравнения неявная. Система неявных уравнений решается при помощи метода итераций. Вначале рассчитывалось первое уравнение. После его расчета значение \dot{v} в формуле для давления, используемой в последнем уравнении, становится известным. Пример расчета задачи о распаде произвольного разрыва представлен на рис. 16, $v|_{t=0} = 0$, $\rho_f = 1$. Кинк и солитонная структура разрыва здесь ясно различимы.

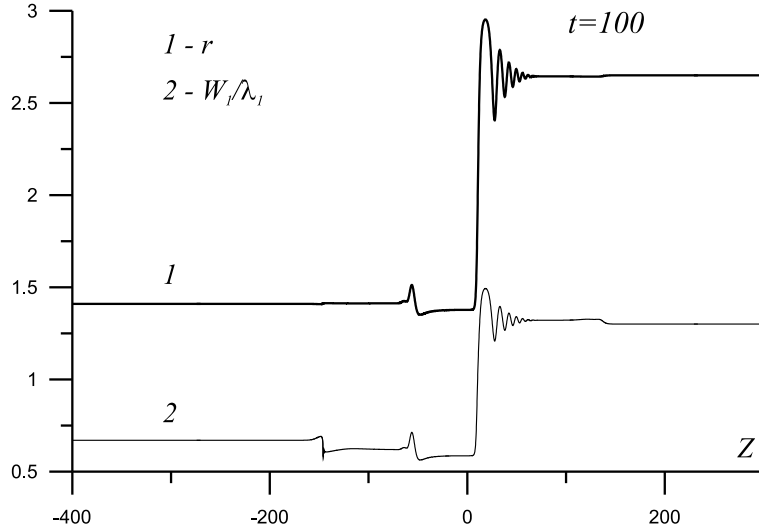


Рис. 16: Труба с жидкостью: задача о распаде произвольного разрыва

Для модели трубы, наполненной жидкостью, в отличие от модели трубы с контролируемым давлением выполняется закон сохранения энергии (при контролируемом давлении гамильтониан не является энергией). Это ведет к тому, что в случае система уравнений бегущих волн становится интегрируемой (в случае контролируемого давления она интегрируема только при нулевой скорости волн). Это приводит к тому, что наблюдаются только классические уединенные волны и кинки.

Отметим, что рассматриваемая модель из-за гидравлического приближения может подразумевать слабые отклонения $r(Z)$, упрощения могут быть сделаны, например, могут быть исключены пространственно-временные производные. Но такое упрощение, очевидно, ведет к снижению точности и появлению нефизичных эффектов. В случае низкого давления можно сделать

дальнейшие упрощения и вывести классическое или обобщенное (при включении сопротивления на изгиб) уравнение Кортевега–де Вриза. Детальный анализ решений этого уравнения сделан в [5] и [8].

6 Заключение

Расчеты уравнений Буссинеска показали, что как и предсказывалось теорией, есть устойчивые и неустойчивые уединенные волны и структуры разрывов солитонного типа. Анализ численных решений показал, что уравнения Буссинеска правильно описывают волны малой амплитуды в области параметров, соответствующих переходу от устойчивости к неустойчивости. Рост амплитуды уединенной волны, наблюдаемый для уравнений Буссинеска, может останавливаться в случае использования полных уравнений. Результаты решения содержат кинки и могут рассматриваться как решения задачи о распаде произвольного разрыва. Анализ решений задачи о распаде произвольного разрыва показал, что большинство наблюдаемых структур разрывов типичны для моделей с неинтегрируемыми системами уравнений бегущих волн но обнаружены и некоторые новые типы структур разрывов. Расчет интегрируемой модели трубы, наполненной жидкостью подтвердил, что в этом случае наблюдаются только классические кинки и солитонные структуры.

Список литературы

- [1] Fu Y.B., Pearce S.P. Characterization and stability of localized bulging/necking in inflated membrane tubes // IMA J. Appl. Math., 2010. 75, 581-602.
- [2] Fu Y.B., Il'ichev A. Solitary waves in fluid-filled elastic tubes: existence, persistence, and the role of axial displacement // IMA J. Appl. Math., 2010. 75, 257-268.
- [3] Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний // Прикл. матем. и мех. 1966. Т. 30, Вып. 1. С. 148-153.
- [4] Куликовский А.Г., Свешникова Е.И., Чугайнова А.П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. Лекционные курсы НОЦ. Выпуск 16. 2010. Москва: МИАН. 120 с.
- [5] Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды.— Москва: Физматлит. 2004. 318 с.
- [6] Бахолдин И.Б., Томашпольский В.Я. Уединенные волны в модели предварительно деформированного нелинейного композита // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 4. С. 527–538.

- [7] Бахолдин И. Б. Разрывы, описываемые обобщенными уравнениями Кортевега–де Вриза // Изв. РАН. Мех. жидк. и газов. 1999. №4. С. 95-109.
- [8] Бахолдин И.Б. Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега–Бюргерса // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 271–302.
- [9] Бахолдин И.Б. Методы исследования, теория и классификация обратимых структур в моделях гидродинамического типа// Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. №.30. 40 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-30>
- [10] Бахолдин И.Б. Теория и классификация обратимых структур разрывов в моделях гидродинамического типа // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 6.
- [11] Ilchev A.T., Fu I.B. Stability of aneurism solutions in fluid-filled elastic membrane tube// Acta Mechanica Sinica. 2012. 28. 1209-1218.
- [12] Aydin A., Karasozen B. Symplectic and multisymplectic Lobatto methods for the "good" Boussinesq equation// Journal of mathematical physics. 2008. 49. 083509. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2970148>.
- [13] Alexander J. C., Sachs R. Linear instability of solitary waves of Boussinesq-type equation: a computer assisted computation// Nonlinear World. 1995. 2. 471-507.
- [14] Bona J.L., Sachs R.L. Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation// Commun. Math. Phys. 1988. 118, 15-29.
- [15] Bogdanov L.V., Zakharov V.E. The Boussinesq equation revisited// Physica D. 2002. 165. 137-162
- [16] Miles J.W. Resonantly interacting solitary waves// J. Fluid Mech. 1977. 79. Pt. 1. 157-169.
- [17] Бахолдин И.Б. Разрывы переменных, характеризующих распространение уединенных волн в слое жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 87–93.
- [18] Калантаров В.К., Ладыженская О.А., О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 69, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1977, 77–102.
- [19] Linares F. Global existence of small solutions for a generalized Boussinesq equation// Journal of differential equations. 1993. 106. 257-293.

Содержание

1	Структура работы и применяемые методы	3
2	Основные уравнения и формулы для модели с контролируемым давлением	4
3	Решение уравнений Буссинеска и анализ используемых численных методов	5
3.1	Анализ и обобщение уравнения	5
3.2	Численные методы	6
3.3	Уединенные волны	8
3.4	Бездиссипативные и слабодиссипативные разрывы	11
4	Решения уравнений с контролируемым давлением	13
4.1	Анализ дисперсионного соотношения и обобщение уравнений	14
4.2	Численный метод	15
4.3	Уединенные волны	16
4.4	Распад произвольного разрыва и кинки	19
4.5	Вывод упрощенных уравнений	25
4.6	Вывод уравнений с сопротивлением на изгиб и их расчет	26
5	Решения для трубы, заполненной жидкостью	27
6	Заключение	30