



Бахвалов П.А., Козубская Т.К.

Структура ошибки консервативного 4-точечного конечно-разностного оператора дифференцирования на неравномерных сетках

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П.А., Козубская Т.К. Структура ошибки консервативного 4-точечного конечно-разностного оператора дифференцирования на неравномерных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 74. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-74>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук**

П. А. Бахвалов, Т. К. Козубская

**Структура ошибки
консервативного 4-точечного
конечно-разностного
оператора дифференцирования
на неравномерных сетках**

Москва — 2014

Бахвалов П. А., Козубская Т. К.

Структура ошибки консервативного 4-точечного конечно-разностного оператора дифференцирования на неравномерных сетках

Предлагаемая работа посвящена исследованию точности разностной схемы R3, основанной на консервативной аппроксимации производной по 4 точкам на неравномерной сетке, применительно к модельной задаче $u' + \lambda u = 0$, $u(0) = 1$. Показывается, что относительная ошибка решения представляет из себя сумму трёх слагаемых, первое из которых не накапливается с удалением от границы расчётной области, второе пропорционально квадрату максимальной разности соседних шагов сетки, а третье имеет 3-й порядок малости по максимальному шагу сетки. Таким образом, несмотря на формальный второй порядок точности, при больших размерах расчётной области и некритичных ограничениях на гладкость сетки схема R3 ведёт себя как схема 3-го порядка.

Ключевые слова: схемы повышенной точности, неравномерные сетки

Pavel Alexeevich Bakhvalov, Tatiana Konstantinovna Kozubskaya

Error structure of conservative 4-point finite-difference scheme on non-uniform meshes

We investigate accuracy of finite-difference scheme R3 based on conservative 4-point derivative approximation on non-uniform meshes, in application to model problem $u' + \lambda u = 0$, $u(0) = 1$. It is shown that the relative error consists of three parts: the first one does not accumulate while going away from the boundary of the computational domain, the second one is proportional to the square of the maximal difference of adjacent mesh steps, and the third one is of the third order with respect to the maximal mesh step. Thus despite the second order of accuracy on large computational domains and not too rough meshes R3 scheme behaves like third order schemes.

Key words: high-accuracy schemes, non-uniform meshes

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12-01-00486а.

Введение

Одними из разностных схем, применяемых в настоящее время для решения задач аэроакустики, являются схемы с реконструкцией переменных вдоль направления сеточного ребра (Edge-Based Reconstruction, EBR) на неструктурированных сетках [1]. EBR-схемы являются консервативными схемами с определением сеточных переменных как точечных значений искомой функции в узлах расчётной сетки. На сетках правильной решётчатой структуры EBR3 обладает 3-м, а EBR5 – 5-м порядком аппроксимации, тогда как на произвольной неструктурированной сетке эти схемы обладают только первым порядком аппроксимации в максимальной норме. Несмотря на это, на тестовых расчётах схема EBR3 показывает результат, сравнимый с полиномиальной схемой на основе полиномов 2-го порядка на том же пространственном шаблоне, обладая при этом значительно меньшей вычислительной стоимостью. Использование же схемы EBR5 на более широком шаблоне позволяет добиться ещё более высокой точности (см. [1]). При этом затраты машинного времени возрастают незначительно. Феномен высокой точности схем семейства EBR на неструктурированной сетке в настоящее время не изучен.

В одномерном случае аппроксимация пространственной производной по схеме EBR3 для характеристик, распространяющихся вправо, вырождается в следующую схему, которую будем далее называть схемой R3:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_i = \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\hbar_i},$$

$$F_{i-1/2} = u_{i-1} + \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{3} \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{x_{i-1} - x_{i-2}} \right), \quad (1)$$

где u – некоторая сеточная функция, $\hbar_i = (x_{i+1} - x_{i-1})/2$, и определение $F_{i+1/2}$ получается из определения $F_{i-1/2}$ заменой i на $i+1$. На равномерной сетке эта схема обладает 3-м порядком аппроксимации.

Настоящая работа является шагом к пониманию феномена повышенной точности схем семейства EBR и посвящена оценке точности схемы R3 на неравномерных сетках применительно к модельной задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du(x)}{dx} + \lambda u(x) = 0, \quad x \in (0, L); \quad u(0) = 1. \quad (2)$$

Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ и не зависит от x , $L > 0$. Точным решением такой задачи является функция $u(x) = \exp(-\lambda x)$.

В настоящей работе будет доказано следующее утверждение. Пусть отношение соседних шагов сетки не превосходит 3, а отношение максимального сеточного шага к минимальному ограничено. Тогда относительная ошибка численного решения по схеме R3 подчиняется следующей оценке:

$$\max_k \frac{|u_k - u(x_k)|}{|u(x_k)|} \leq C_2 |\lambda|^2 h_{\max}^2 + C_3 |\lambda|^3 (\Delta h)_{\max}^2 L + O(h_{\max}^3 L |\lambda|^4), \quad (3)$$

где h_{\max} – максимальный шаг сетки, $(\Delta h)_{\max}$ – максимальная разность соседних шагов сетки, L – размер расчётной области. Здесь $u_h = \{u_k\}$ – сеточное решение, $u(x_k) = \exp(-\lambda x_k)$ – точное решение, взятое в сеточных узлах x_k , C_2 и C_3 – некоторые константы, не зависящие от шага сетки и размера расчётной области.

Если $|\lambda|L \gg 1$, то первое слагаемое в (3) мало, и точность решения определяется 2-м и 3-м слагаемым. На достаточно гладкой сетке, если $((\Delta h)_{\max})^2 \ll h_{\max}^3 \lambda$, второе слагаемое также является малым, и старшим членом является член 3-го порядка малости, что обеспечивает близость результатов по схеме R3 и схеме 3-го порядка точности.

Консервативные схемы с потоками, точными на линейной функции

Определим расчётную сетку $\{x_k\}$, $k = 0..N$, $x_0 = 0$, $x_N = L$. Будем считать, что значения сеточной функции определены в сеточных узлах. Будем пользоваться обозначением $h_{k+1/2} = x_{k+1} - x_k$. Если иное не указано явно, будет использоваться максимальная норма вектора и порождённая ей матричная норма.

Рассмотрим задачу (2).

Запишем разностную схему для её решения в общем виде

$$u_0 = 1 \quad (4)$$

$$\sum_m L_{km} u_m + \lambda u_k = RHS_k, k \neq 0, \quad (5)$$

RHS_k равно 0 за исключением нескольких первых значений, определяемых способом аппроксимации граничного условия и уравнения вблизи границы.

Обозначим за L_h разностный оператор производной с коэффициентами L_{km} . Рассмотрим специальный класс разностных схем вида (4-5), определяемый следующими условиями:

Б1) оператор L_h является консервативным в следующем смысле:

$$(L_h u)_k = \frac{1}{\bar{h}_k} (F_{k+1/2} - F_{k-1/2}), \quad k = 1..N,$$

где $\bar{h}_k = (h_{k+1/2} + h_{k-1/2})/2 = (x_{k+1} - x_{k-1})/2$, $\bar{h}_0 = h_{1/2}/2$, $\bar{h}_N = h_{N-1/2}/2$.

Первая строка матрицы L_h состоит из диагонального элемента: $L_{00} = 1/\bar{h}_0$ (так выбрано для того, чтобы диагональные элементы матрицы L_h имели одинаковый порядок), $L_{0m} = 0$ при $m > 0$;

Б2) при $k \neq 0$ потоки $F_{k+1/2}$ точны на линейной функции: если $u_k = Cx_k + D$, то $F_{k+1/2} = C(x_k + x_{k+1})/2 + D$ при $k = 1..N-1$, а $F_{N+1/2} = Cx_N + D$;

Б3) поток $F_{k+1/2}$ линейно зависит от сеточных величин u_m : $F_{k+1/2} = \sum F_{km} u_m + \xi_k$, причём $\xi_k = 0$ при $k \neq 0$. Матрица $F = \{F_{km}\}$ и имеет положительные диагональные элементы и строгое диагональное преобладание:

$$F_{kk} > \frac{1}{1 - \varepsilon} \sum_{m \neq k} |F_{km}|,$$

где $\varepsilon > 0$ и не меняется при измельчении сетки;

Б4) коэффициенты F_{km} ограничены константой, не меняющейся при измельчении сетки; схема имеет локальный шаблон, то есть $F_{km} = 0$ при $|k - m| > M$;

Б5) поток на сегменте $1/2$ определяется следующим образом:

$$F_{1/2} = u_0 + (-\lambda) \exp(-\lambda x_1) \frac{x_1 - x_0}{2}$$

Такой способ задания потока $F_{1/2}$ не противоречит требованию (Б3); кроме того, неформально говоря, он обеспечивает точность вычисления потока на линейной функции вплоть до границы. Почему это так, будет объяснено ниже. Экспоненциальный множитель введён для удобства дальнейшего изложения.

Порядок сходимости на равномерной сетке для задач с гладкими решениями, как правило, при выполнении условия устойчивости совпадает с порядком аппроксимации. На неравномерной же сетке хорошо известен тот факт, что консервативные схемы, точные на полиномах порядка k и обладающие порядком аппроксимации $(k + 1)$ на равномерной сетке, часто имеют порядок сходимости $(k + 1)$.

Впервые такое поведение схем отмечено в работе А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [2] для краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка (стационарной задачи конвекции-диффузии).

В этой работе было сказано, что точность схемы определяется не локальной, а интегральной погрешностью аппроксимации, характеризуемой негативной нормой

$$\|\psi\|_{-1'} = \left\| \sum_{i=1}^N h_{i-1/2} \left| \sum_{k=0}^{i-1} \tilde{h}_k \psi_k \right| \right\|,$$

где $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, $\tilde{h}_i = (h_{i-1/2} + h_{i+1/2})/2$.

Покажем, что это же свойство имеет место и для схемы (4-5), удовлетворяющей условиям (Б1-Б5), при ограничении на коэффициент уравнения $\lambda < 1/\|L_h^{-1}\|$. Нам будет удобно пользоваться другой негативной нормой, а именно,

$$\|\psi\|_{-1} = \max_i \left| \sum_{k=0}^{i-1} \tilde{h}_k \psi_k \right|.$$

Очевидно, что схема, удовлетворяющая условиям (Б1-Б5), будет точна на константе. Далее, матрица оператора L_h при этом будет являться произведением трёх матриц: $L_h = H^{-1}DF$, где H – диагональная матрица с элементами \tilde{h}_k , D – двухдиагональная матрица, имеющая 1 на главной диагонали и -1 под главной диагональю. Поэтому L_h имеет обратный как произведение трёх невырожденных матриц. Оценим норму $\|L_h^{-1}\|$.

Вначале оценим норму матрицы F^{-1} . Для доказательства разобьём её на диагональную и внедиагональную часть $F = \mathcal{D} + M$. $\mathcal{D}^{-1}F = I + \mathcal{D}^{-1}M$. В силу диагонального преобладания $\|\mathcal{D}^{-1}M\| < 1$, и поэтому выполняется

$$(\mathcal{D}^{-1}F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathcal{D}^{-1}M)^k.$$

Отсюда

$$F^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathcal{D}^{-1}M)^k \mathcal{D}^{-1}.$$

Диагональные элементы $F_{kk} = \mathcal{D}_{kk}$ в силу условия точности на константе, очевидно, не меньше $1/2$. Простая оценка нормы даёт

$$\|F^{-1}\| \leq \frac{\|\mathcal{D}^{-1}\|}{1 - \|\mathcal{D}^{-1}M\|} = \frac{\max_i \left\{ \frac{1}{F_{ii}} \right\}}{1 - \max_i \left\{ \frac{1}{F_{ii}} \sum_{j \neq i} F_{ij} \right\}} \leq \frac{2}{1 - (1 - \varepsilon)} = \frac{2}{\varepsilon} = C_\varepsilon$$

Константа C_ε вообще говоря зависит от схемы и структуры сетки, но в силу наложенных на схему и сетку ограничений не меняется при её измельчении.

Теперь рассмотрим систему уравнений с матрицей $L_h : L_h f = R$, где f и R – некоторые сеточные функции. Домножим эту систему слева на диагональную матрицу H и затем на матрицу D^{-1} : матрица D^{-1} есть нижнетреугольная матрица, все элементы которой на и под главной диагональю равны 1. Тогда i -ая строка домноженной системы будет иметь вид

$$\sum_j F_{ij} f_j = \sum_{k \leq i} R_k \tilde{h}_k$$

Таким образом,

$$\|f\| \leq C_\varepsilon \left\| \sum_{k \leq i} R_k \tilde{h}_k \right\| = C_\varepsilon \|R\|_{-1}, \quad (6)$$

то есть норма искомой функции f с точностью до константы ограничена негативной нормой правой части R . Отсюда, в частности, следует оценка на C -норму матрицы L_h : $\|L_h^{-1}\| \leq C_\varepsilon L$, где L – размер расчётной области.

Покажем, что результат вида (6) имеет место и для системы уравнений $(L_h + \lambda)f = R$ при $|\lambda| < 1/\|L_h^{-1}\|$. Действительно,

$$f = (L_h + \lambda)^{-1} R = (1 + \lambda L_h^{-1})^{-1} L_h^{-1} R.$$

Отсюда можно оценить норму f :

$$\|f\| \leq \|(1 + \lambda L_h^{-1})^{-1}\| \cdot \|L_h^{-1} R\| \leq \frac{\|L_h^{-1} R\|}{1 - |\lambda| \cdot \|L_h^{-1}\|} \leq \frac{C_\varepsilon}{1 - C_\varepsilon |\lambda| L} \|R\|_{-1}. \quad (7)$$

Отсюда, в частности, следует, что при $|\lambda| < 1/(C_\varepsilon L)$ схема, удовлетворяющая условиям (Б1-Б5), является устойчивой.

Полученная оценка области устойчивости является грубой. Далее в этой работе будет показано, что область устойчивости схемы как не меньше, чем $\lambda \sqrt{hL} < 1$. Но естественно ожидать, что она определяется минимальным собственным значением матрицы L_h : $\lambda < \lambda_{\min}(L_h)$.

Изобразим спектр оператора L_h на примере схемы РЗ для различных сеток: на рисунке 1 – для равномерной сетки, на рисунке 2 – для шахматной сетки (то есть шаги сетки чередуются: $h_{\min}, h_{\max}, h_{\min}, h_{\max}, \dots$) с отношением соседних шагов, равным 10, и на рисунке 3 – для сетки, каждый шаг которой представлял собой случайную величину от h_{\min} до $h_{\max} = 10h_{\min}$. Длина расчётной области во всех трёх примерах была положена равной 1;

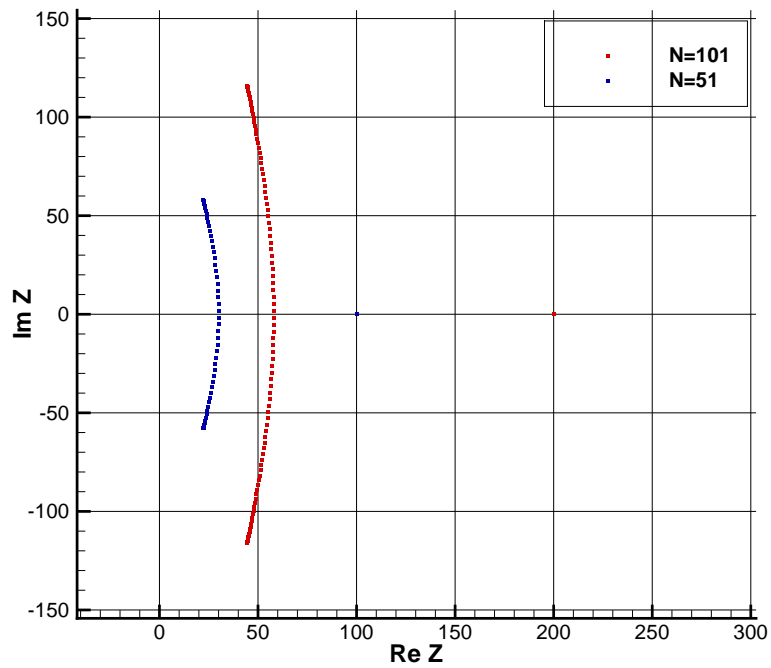


Рис. 1: Спектр оператора L_h на равномерной сетке

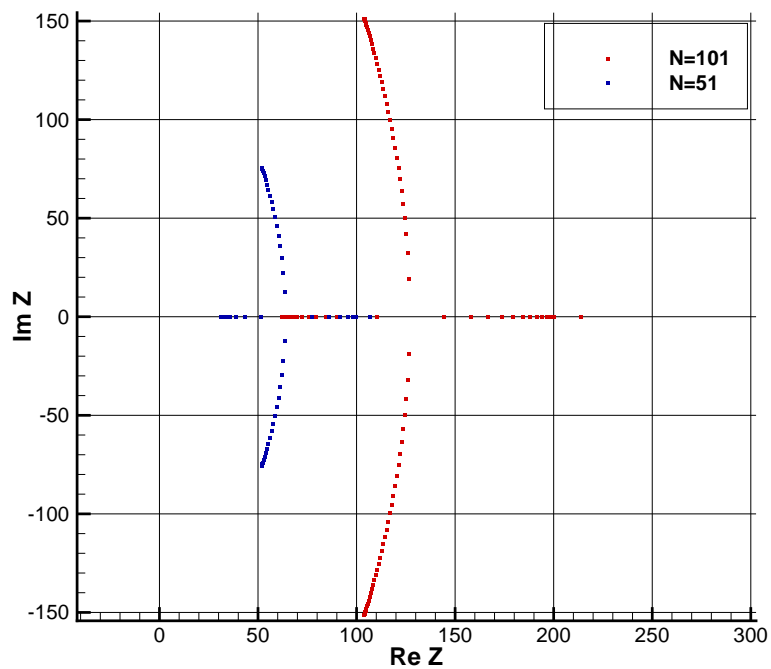


Рис. 2: Спектр оператора L_h на шахматной сетке

точки спектра для сетки из 51 узлов обозначены полыми квадратами, а для сетки из 101 узлов – закрашенными квадратами. Рисунки 1-3 показывают, что точки спектра матрицы L_h для схемы R3 действительно отодвигаются от нуля со скоростью $1/h$ при измельчении сетки.

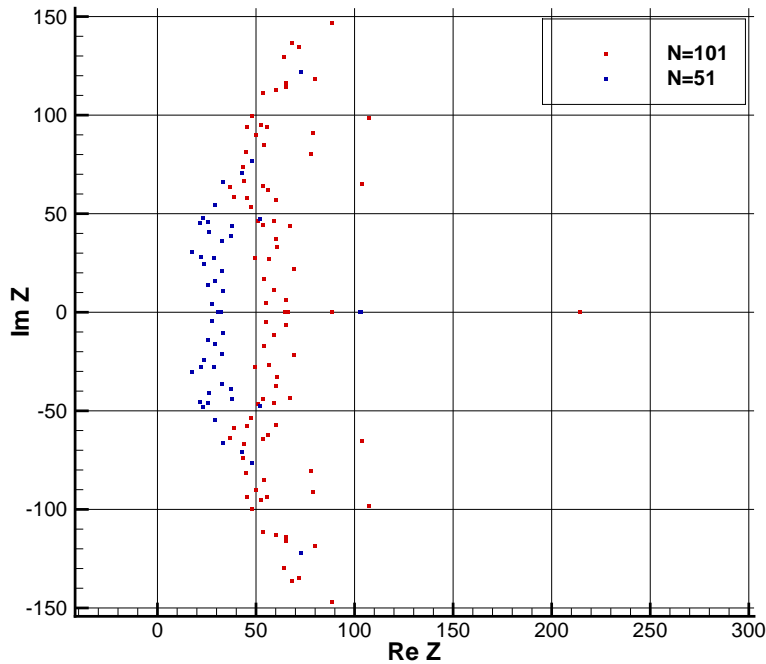


Рис. 3: Спектр оператора L_h на сетке со случайным шагом

Оценка (7) никак не учитывает знак λ , хотя естественно ожидать, что схема, удовлетворяющая условиям (Б1-Б5), благодаря своему направленному шаблону должна быть устойчива в широком диапазоне чисел λ в левой комплексной полуплоскости (при $Re\lambda < 0$). Рисунки 1-3 показывают, что для схемы R3 весь спектр лежит в правой полуплоскости.

На равномерной сетке для схемы R3 матрица L_h является положительно определённой, так как представляет из себя сумму кососимметрической матрицы (центральной разности 4-го порядка) и диссипативного члена $\Lambda^2 h^4 / 12$, где Λ – оператор Лапласа на сетке с единичным шагом. Как только сетка отклоняется от равномерной, положительная определённость теряется, однако оператор $(L_h + \lambda)$ остаётся обратим при $Re\lambda > 0$.

Численные эксперименты показывают, что для схемы R3 при $Re\lambda > 0$ оператор $(L_h + \lambda)$ обратим на любой сетке, но мы покажем обратимость лишь при $\lambda > 0$ (на действительной полуоси) и лишь на достаточно гладкой сетке. В качестве условия гладкости предположим наличие диагонального преобладания для матрицы $\Upsilon = FH^{-1} + (FH^{-1})^T$. Для схемы R3 для этого достаточно, чтобы отношение соседних шагов сетки удовлетворяло условию $\Lambda_k < 5/2$ для всех k .

Матрица D является положительно полуопределённой: действительно, $D + D^T = -\Lambda > 0$, где Λ – оператор Лапласа на сетке с единичным шагом.

Диагональное преобладание симметричной матрицы Υ гарантирует её положительную определённость. Допустим противное, что у матрицы Υ существует собственный вектор u , соответствующий отрицательному или

нулевому собственному значению. Пусть k – его максимальная по модулю компонента. Тогда, рассматривая k -ую строку системы $\Upsilon u = \lambda u$, получим в силу диагонального преобладания, что знак левой части совпадает со знаком u_k , а знак правой части – нет. Полученное противоречие доказывает, что матрица Υ является положительно определённой, а, следовательно, положительно определённой является и матрица FH^{-1} .

Далее, матрица DFH^{-1} не может иметь отрицательных собственных значений как произведение двух положительно определённых матриц D и $\tilde{F} = FH^{-1}$. Допустим противное, что существует $\lambda > 0$ и ненулевой вектор w такой, что $(D\tilde{F} + \lambda)w = 0$. Тогда, домножая слева на $(\tilde{F}w)^T$,

$$(\tilde{F}w)^T(D\tilde{F} + \lambda)w = (\tilde{F}w)^T D(\tilde{F}w) + \lambda w^T \tilde{F}^T w = 0$$

Но $(\tilde{F}w)^T D(\tilde{F}w) \geq 0$ в силу положительной полуопределённости матрицы D (в качестве вектора в определении положительной полуопределённости подставлено $\tilde{F}w$), а $w^T \tilde{F}^T w > 0$ в силу положительной определённости матрицы \tilde{F} . Пришли к противоречию.

Осталось показать, что спектр произведения невырожденных матриц не зависит от циклической перестановки сомножителей. Действительно, пусть у матрицы ABC есть собственный вектор u , соответствующий собственному значению λ . То есть $ABCu = \lambda u$. Отсюда $BCu = \lambda A^{-1}u$. Обозначим $u = Aw$, тогда $BCAw = \lambda w$, то есть у матрицы BCA тоже есть собственный вектор $w = A^{-1}u$, соответствующий тому же собственному значению.

Таким образом, при $\lambda > 0$ и наличии диагонального преобладания у матрицы Υ матрица $L + \lambda$ невырождена, что и требовалось доказать.

Оценка негативной нормы аппроксимационной ошибки

Покажем, что для схем, удовлетворяющих условиям (Б1-Б5), негативная норма аппроксимационной ошибки имеет порядок $O(h^2)$.

Введём обозначение $F_{i+1/2}|_{f(x)}$ для численного потока $F_{i+1/2}$, определённого по сеточной функции $f_h = \{f(x_k)\}$. Тогда аппроксимационная ошибка выражается как

$$e_i(f) = \frac{1}{\tilde{h}_i} (F_{i+1/2}|_f - F_{i-1/2}|_f) - f'(x_i)$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$e_i(f) = \frac{1}{\tilde{h}_i} (f''(x_{i+1/2})F_{i+1/2}|_{(x-x_i)^2/2} - f''(x_{i-1/2})F_{i-1/2}|_{(x-x_i)^2/2}) +$$

$$+\frac{1}{\bar{h}_i} \left(F_{i+1/2} |f(x) - f''(x_{i+1/2})(x-x_i)^2/2 - F_{i-1/2} |f(x) - f''(x_{i-1/2})(x-x_i)^2/2 \right) - f'(x_i)$$

В первом слагаемом преобразуем выражение вида $F_{i\pm 1/2} |(x-x_i)^2/2$:

$$F_{i\pm 1/2} |(x-x_i)^2/2 = F_{i\pm 1/2} |(x-x_{i\pm 1/2})^2/2 + F_{i\pm 1/2} |(x-x_i)^2/2 - (x-x_{i\pm 1/2})^2/2$$

Функция $(x-x_i)^2/2 - (x-x_{i\pm 1/2})^2/2$ линейна по x , а по сделанному предположению потоки точны на линейной функции. Поэтому последнее слагаемое равно значению этой линейной функции в $x = x_{i\pm 1/2}$, то есть равно $(x_i - x_{i\pm 1/2})^2/2 = h_{i\pm 1/2}^2/8$. Таким образом,

$$\begin{aligned} e_i(f) = & \frac{1}{\bar{h}_i} \left(f''(x_{i+1/2}) \left(F_{i+1/2} |(x-x_{i+1/2})^2/2 + \frac{h_{i+1/2}^2}{8} \right) - \right. \\ & \left. - f''(x_{i-1/2}) \left(F_{i-1/2} |(x-x_{i-1/2})^2/2 + \frac{h_{i-1/2}^2}{8} \right) \right) + \\ & + \frac{1}{\bar{h}_i} \left(F_{i+1/2} |f(x) - f(x_i) - (x-x_i)f'(x_i) - f''(x_{i+1/2})(x-x_i)^2/2 - \right. \\ & \left. - F_{i-1/2} |f(x) - f(x_i) - (x-x_i)f'(x_i) - f''(x_{i-1/2})(x-x_i)^2/2 \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее слагаемое преобразовано с учётом точности на линейной функции и определения $\bar{h}_i = (h_{i+1/2} + h_{i-1/2})/2$.

Первое слагаемое имеет дивергентный вид с выражением порядка $O(h^2)$ в числителе, поэтому негативная норма от него имеет порядок $O(h^2)$. Числитель во втором слагаемом имеет порядок $O(h^3)$, поэтому само слагаемое $-O(h^2)$ в максимальной, а, следовательно, и в негативной норме. Добавочное слагаемое при $i = 1$, для которого приведённые рассуждения неприменимы в силу отсутствия точности потока на линейной функции, вносят в негативную норму вклад не более чем $O(h^2)$. Таким образом доказано, что негативная норма аппроксимационной ошибки является величиной порядка $O(h^2)$.

Уточним полученную оценку для схемы R3 применительно к задаче (2), выделив в ней слагаемое, не зависящее от L .

Из условия (Б5) следует, что система с матрицей $L_h + \lambda$ имеет вид

$$(L_h + \lambda)u_h = RHS = \left(\frac{1}{\bar{h}} + \lambda \right) r + \lambda e^{-\lambda x} s = e^{-\lambda x} \left(\left(\frac{1}{\bar{h}} + \lambda \right) r + \lambda s \right) \quad (9)$$

где $r = (1, 0, \dots, 0)^T$, а $s = (0, -(x_1 - x_0)/(x_2 - x_0), 0, \dots, 0)^T$. Возникновение λr в правой части связано с тем, что в левой части теперь λ прибавляется и к значению в нулевом сеточном узле тоже.

Рассмотрим аппроксимационную ошибку в k -ом узле:

$$\begin{aligned} ((L_h + \lambda)e^{-\lambda x})_k - RHS_k &= e^{-\lambda x_k} \left((L_h e^{-\lambda(x-x_k)})_k + \lambda - RHS_k e^{\lambda x_k} \right) = \\ &= \exp(-\lambda x_k) \left(L_h \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p (x-x_k)^p}{p!} \right) + \lambda - \left(\frac{1}{\bar{h}_k} + \lambda \right) r_k - \lambda s_k \right) \end{aligned}$$

В силу точности на константе выражение в скобках не содержит слагаемых при λ^0 . Покажем, что слагаемое при λ^1 также равно 0. При $k \neq 0$ и $k \neq 1$ это следует из точности на линейной функции. При $k = 0$ в этом также легко убедиться. Осталось показать это для $k = 1$. Выпишем это слагаемое: $\lambda(-(L_h(x-x_1))_1 + 1 - s_1)$.

Приравняем это выражение к нулю, откуда найдём s_1 :

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 - \sum_m L_{1m} x_m = 1 - \frac{1}{\bar{h}_1} (\phi_{3/2}|_x - \phi_{1/2}|_x) = 1 - \frac{1}{\bar{h}_1} (x_{3/2} - x_0) = \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2}(x_2 - x_0) + \frac{1}{2}(x_1 - x_0)}{\frac{1}{2}(x_2 - x_0)} = -\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом слагаемые при λ^0 и λ^1 зануляются, и мы получаем соотношение

$$\frac{((L_h + \lambda)e^{-\lambda x})_k - RHS_k}{\exp(-\lambda x_k)} = \sum_{p=2}^{\infty} (-\lambda)^p L_h \frac{(x-x_k)^p}{p!} = \sum_{p=2}^{\infty} E_k^{(p)}$$

То есть мы представили аппроксимационную ошибку на экспоненте через аппроксимационную ошибку на полиномах. Если бы правая часть была задана иначе, чем по формуле (9), то мы получили бы здесь дополнительные слагаемые, связанные с заданием этой правой части.

Слагаемое при $p = 2$ было рассмотрено выше; было показано, что его негативная норма оценивается как $O(h_{\max}^2)$.

Рассмотрим слагаемое при $p = 3$. Выпишем аппроксимационную ошибку на функции $(x-x_k)^3/6$ по схеме R3, используя её явный вид:

$$E_k^{(3)} = \frac{1}{6\bar{h}_k} \left(-\frac{\Lambda_{k-1}}{6} (x_{k-2} - x_k)^3 + \left(\frac{2}{3} + \frac{\Lambda_{k-1} + \Lambda_k}{6} \right) (x_{k-1} - x_k)^3 - \frac{1}{3} (x_{k+1} - x_k)^3 \right) \quad (10)$$

Можно показать, что E_k^3 можно представить в следующем виде:

$$E_k^{(3)} = \frac{\eta_{i+1/2} - \eta_{i-1/2}}{\hbar_i} + \frac{1}{36} \frac{(2h_{i+1/2} + h_{i-1/2})(h_{i+1/2} - h_{i-1/2})^2}{\hbar_i},$$

где $\eta_{i+1/2} = -(h_{i-1/2}^2 h_{i+1/2} + 3h_{i-1/2} h_{i+1/2}^2)/36$.

Первое слагаемое имеет дивергентный вид с величиной порядка $O(h_{\max}^3)$ в числителе, а второе пропорционально $(\Delta h)^2$. Таким образом, негативная норма слагаемого при $p = 3$ оценивается величиной $O(h_{\max}^3 + (\Delta h)_{\max}^2 L)$.

Слагаемые при $p = 4$ и выше можно оценить величиной $O(h_{\max}^3)$ в C -норме и, следовательно, величиной $O(h_{\max}^3 L)$ в негативной норме.

Остаётся показать, что домножение на ограниченную гладкую функцию (в данном случае, экспоненту) не меняет оценки негативной нормы. Действительно, рассмотрим величину $\xi_i = (\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2})/\hbar_i + \psi_i$, негативная норма которой равна $O(\|\phi\| + \|\psi\|L)$. Домножим её на некоторую функцию f :

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}}{\hbar_i} f(x_i) + \psi_i f(x_i) &= \frac{\phi_{i+1/2} f(x_{i+1/2}) - \phi_{i-1/2} f(x_{i-1/2})}{\hbar_i} + \psi_i f(x_i) - \\ &- \phi_{i+1/2} \frac{f(x_{i+1/2}) - f(x_i)}{x_{i+1/2} - x_i} \frac{x_{i+1/2} - x_i}{\hbar_i} + \phi_{i-1/2} \frac{f(x_{i-1/2}) - f(x_i)}{x_{i-1/2} - x_i} \frac{x_{i-1/2} - x_i}{\hbar_i} \end{aligned}$$

Здесь $x_{i\pm 1/2} = (x_i + x_{i\pm 1})/2$. Очевидно, что негативная норма ξf оценивается величиной $O(\|\phi\| \|f\| + \|\psi\| \|f\|L + \|\phi\| \|f'\|L)$.

Приведённые рассуждения доказывают искомую оценку (3) при упомянутом выше ограничении на λ : $C_\varepsilon L \lambda < 1$.

Чтобы снять это ограничение, мы воспользуемся другим способом оценки. А именно, будем раскладывать по степеням λ не аппроксимационную ошибку, относительную ошибку решения по разностной схеме.

Выражение погрешности решения через производные от точного решения

Всюду будем отождествлять непрерывные функции $f(x)$ с их проекциями на сетку $f_k = f(x_k)$. Произведение сеточных функций будет подразумеваться покомпонентное.

В этом пункте рассмотрим более широкий класс разностных схем. По-прежнему будем считать, что значения сеточной функции определены в сеточных узлах. Нам будет достаточно следующих условий:

1) первая строка матрицы L_h состоит из диагонального элемента: $L_{00} = 1/\hbar_0$, $L_{0m} = 0$ при $m > 0$.

2) схема точна на константе:

$$\forall k \neq 0 \quad \sum_m L_{km} = 0;$$

3) при некотором ограничении $|\lambda| < \lambda_{\max}$ схема (4-5) устойчива. В частности, оператор L_h имеет обратный.

4) правая часть для системы с матрицей $L_h + \lambda$ задаётся вектором RHS , определяемым формулой (9).

Покажем, что при $|\lambda| < \lambda_{\max}$ относительную ошибку решения $(u_k - u(x_k))/u(x_k)$ можно представить в виде сходящегося ряда по степеням $(-\lambda)$, то есть компоненты u_k решения u_h задачи (4-5) представимы в виде

$$u_k = e^{-\lambda x_k} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \theta_k^{(p)} (-\lambda)^p \right) \quad (11)$$

Действительно, устойчивость схемы (4-5) подразумевает невырожденность матрицы $(L_h + \lambda)$ при указанном ограничении на λ . Таким образом, спектр матрицы L_h лежит вне внутренности круга радиуса λ_{\max} . Это говорит о том, что верно разложение

$$u_h = (L_h + \lambda)^{-1} RHS = L_h^{-1} (I + \lambda L_h^{-1}) RHS = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n (L_h^{-1})^{n+1} RHS$$

Величину, обратную к точному решению, также можно представить в виде ряда, причём с бесконечным радиусом сходимости:

$$u_{exact}^{-1} = e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{(-x)^n}{n!}$$

Произведение двух сходящихся рядов сходится, и его радиус сходимости равен минимальному из радиусов сходимости исходных рядов. Таким образом, ряд в выражении (11) действительно сходится, что и требовалось доказать.

Объясним смысл разложения (11). Так как домножение решения $u(x) = \exp(-\lambda x)$ на $-\lambda$ равносильно взятию от него производной, то разложение (11) переписывается в виде

$$u_k = \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \theta_k^{(p)} \frac{d^p}{dx^p} \right) e^{-\lambda x} \quad (12)$$

При подстановке p -ой частичной суммы ряда (12) в уравнение (4-5) невязка будет содержать только старшие степени λ , то есть только члены при производных порядка $p + 1$ или выше от решения. Таким образом, приближение решения частичной суммой ряда (11-12) зануляет члены при младших производных в ошибке аппроксимации.

Коэффициенты $\theta_k^{(p)}$ будем называть поправочными. Под $\theta^{(p)}$ далее будет подразумеваться сеточная функция с компонентами $\theta_k^{(p)}$.

Очевидно, при $k = 0$ все поправочные коэффициенты равны 0: $\theta_0^{(p)} = 0$. Подставим в систему уравнений (9) ряд (11):

$$(L_h + \lambda)e^{-\lambda x} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \theta^{(p)} (-\lambda)^p \right) = \left(\frac{1}{\hbar_0} + \lambda \right) r + \lambda e^{-\lambda x} s$$

Далее для простоты положим $\theta^{(0)} = 1$. Домножим на $\exp(\lambda x)$ и вынесем вонне знак суммы по p :

$$\sum_{p=0}^{\infty} e^{\lambda x} (-\lambda)^p L_h \left(e^{-\lambda x} \theta^{(p)} \right) - \sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda)^{p+1} \theta^{(p)} = \frac{r}{\hbar_0} + \lambda s + \lambda r \quad (13)$$

Здесь учтено, что $\exp(\lambda x)r = r$.

Разложим уравнение (13) по степеням $(-\lambda)$. Рассматривая члены при λ^0 , получим уравнение $0 = r/\hbar_0 - L_h 1$, которое выполняется в силу наложенных на оператор L_h условий 1) и 2).

Рассматривая члены при $-\lambda^1$, получим выражение для $\theta^{(1)}$:

$$\theta^{(1)} = L_h^{-1}(1 - (s + r) + xL_h 1 - L_h x)$$

Или, переписывая это равенство в покомпонентном виде,

$$\sum_m L_{km} \theta_m^{(1)} = 1 - (s_k + r_k) - \sum_m L_{km} (x_m - x_k), \quad (14)$$

Рассматривая члены при $(-\lambda)^n$, получим выражение для $\theta^{(n)}$:

$$\theta^{(n)} = L_h^{-1} \left[\theta^{(n-1)} - \delta_{n1}(s+r) - \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-p} \frac{1}{i!} \frac{1}{(n-p-i)!} (-x)^{n-p-i} L_h(x^i \theta^{(p)}) \right] \quad (15)$$

Преобразуя полученное равенство из операторного вида к виду с покомпонентным суммированием, его можно упростить. Например, для нахождения $\theta^{(2)}$ получается уравнение

$$\sum_m L_{km} \theta_m^{(2)} = \theta_k^{(1)} - \sum_m L_{km} \left(\frac{(x_m - x_k)^2}{2} + \theta_m^{(1)}(x_m - x_k) \right), \quad (16)$$

а для нахождения $\theta^{(3)}$ –

$$\sum_m L_{km} \theta_m^{(3)} = \theta_k^{(2)} - \sum_m L_{km} \left(\frac{(x_m - x_k)^3}{6} + \theta_m^{(1)} \frac{(x_m - x_k)^2}{2} + \theta_m^{(2)}(x_m - x_k) \right). \quad (17)$$

Цепочка равенств, начатая формулами (14) и (16), позволяет последовательно найти все поправочные коэффициенты, причём каждый набор коэффициентов находится из решения системы с матрицей L_h .

Формулы (14, 16 и 17) можно получить и другим способом, более удобным, но допускающим математическую нестрогость. Подставим в сеточное уравнение ряд (12):

$$L_h \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \theta^{(p)} \frac{d^p}{dx^p} \right) e^{-\lambda x} - \left(\frac{d}{dx} + \sum_{p=1}^{\infty} \theta^{(p)} \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} \right) e^{-\lambda x} = \left(\frac{1}{\hbar_0} + \lambda \right) r + \lambda e^{-\lambda x} s \quad (18)$$

Введём оператор P' , сопоставляющий аналитической функции $f(x)$ сеточную функцию с компонентами

$$f_k = f(x_k) + \sum_{p=1}^{\infty} \theta^{(p)} \frac{d^p f}{dx^p}(x_k).$$

Тогда уравнение (18) можно переписать в виде

$$\left(L_h P' - P' \frac{d}{dx} \right) e^{-\lambda x} = \left(\frac{1}{\hbar_0} + \lambda \right) r + \lambda e^{-\lambda x} s. \quad (19)$$

Таким образом, функция $\exp(-\lambda x)$ удовлетворяет операторному уравнению (19) с некоторой правой частью, зависящей от λ . Беря интеграл по λ с

произвольным весом, можно получить, что любая функция удовлетворяет уравнению с этим же оператором и правой частью, равной 0 за исключением нескольких узлов около границ, лежащих на объединении носителей r и s . Если отвлечься от трудностей около границ, получим, что нахождение коэффициентов $\theta^{(p)}$ можно проводить подстановкой любых гладких функций в уравнение (18), например, полиномиальных. Это быстро приводит к равенствам (14, 16, 17), избегая громоздких выражений вида (15).

Для оценки точности схемы не обязательно находить ряд (11) целиком. Зададимся произвольным натуральным числом p и представим сеточное решение в виде $u_h = u + \xi + \eta$, где

$$\xi = \sum_{p=1}^n \theta^{(p)} \frac{d^p u}{dx^p}$$

Подставляя это разложение в сеточное уравнение, получим выражение на η :

$$(L + \lambda)\eta = RHS - (L + \lambda)(u + \xi)$$

Отсюда следует оценка

$$\|u_h - u\| \leq \|\xi\| + \|(L + \lambda)^{-1}\| \|(L + \lambda)(u + \xi) - RHS\| \quad (20)$$

Таким образом, схемная ошибка складывается из величины частичной суммы ряда ξ и модифицированной аппроксимационной ошибки при этой подстановке этой частичной суммы в сеточное уравнение.

Поправочные коэффициенты для 2-точечной разности назад

Продemonстрируем описанный выше метод оценки точности решения на примере схемы, основанной на аппроксимации производной по 2 точкам на равномерной сетке. Покроем расчётную область равномерной сеткой $x_k = kh$, $k = 0..N$ и запишем разностную схему

$$u_0 = 1; \quad \frac{u_{k+1} - u_k}{h} + \lambda u_k = 0, k \geq 1 \quad (21)$$

Точное решение этой разностной системы имеет вид

$$u_k = (1 - \lambda h)^k = (1 - \lambda h)^{x/h}$$

Разложим отношение численного решения к точному $u_k/u(x_k)$ в ряд по степеням h при $h \rightarrow 0$ и перегруппируем слагаемые по степеням λ :

$$\frac{u_k}{u(x_k)} = \frac{(1 - \lambda h)^{x/h}}{\exp(-\lambda x)} = 1 - \frac{1}{2}xh\lambda^2 - \frac{1}{3}xh^2\lambda^3 + \left(\frac{1}{8}x^2h^2 - \frac{1}{4}xh^3\right)\lambda^4 + \dots \quad (22)$$

Порядок $O(h)$ имеет слагаемое, содержащее 2-ю степень λ , порядок $O(h^2)$ – слагаемые, содержащие 3-ю и 4-ю степени λ , порядок $O(h^3)$ – содержащие 4-ю, 5-ю и 6-ю степени λ и т. д.

Получим теперь разложение (22) по степеням λ путём нахождения поправочных коэффициентов. Схема (21) имеет вид (9), и $s = 0$. Поэтому для любой функции $\phi(x)$ выполняется равенство

$$\left(L_h P' - P \frac{d}{dx}\right) \phi(x) = a_\phi r \quad (23)$$

то есть выражение в левой части равенства (23) равно 0 за исключением нулевой компоненты вектора. Будем искать решение системы (21) в виде формального ряда (12).

Так как аппроксимационная ошибка не содержит членов при первой производной, $\theta^{(1)} = 0$.

Подставим в уравнение (23) функцию $\phi(x) = (x - x_k)^2/2$ (точнее говоря, подставим набор из N функций с разным k). Так как $\phi'(x) = x - x_k$, и $(P'\phi)_k = \phi'(x_k) + \theta_k^{(2)}\phi'''(x_k) = 0$, получим следующее условие на коэффициенты $\theta^{(2)}$:

$$\frac{1}{h} \left(\theta_k^{(2)} - \left(\theta_{k-1}^{(2)} + \frac{(-h)^2}{2} \right) \right) = 0$$

Так как граничное условие на левой границе задаётся точно, то $\theta_0^{(2)} = 0$. Отсюда, разрешая рекурсивное соотношение, получаем, что

$$\theta_k^{(2)} = -k \frac{h^2}{2}.$$

Выполним следующий шаг. Подставим в уравнение (23) функцию $\phi(x) = (x - x_k)^3/6$. Так как $\phi'(x) = (x - x_k)^2/2$, и $(P'\phi)_k = \phi'(x_k) + \theta_k^{(2)}\phi'''(x_k) + \theta_k^{(3)}\phi''''(x_k) = \theta_k^{(3)}$, получим следующее условие на коэффициенты $\theta^{(3)}$:

$$\frac{1}{h} \left(\theta_k^{(3)} - \left(\theta_{k-1}^{(3)} + \theta_{k-1}^{(2)}(-h) + \frac{(-h)^3}{6} \right) \right) = \theta_k^{(2)}$$

Дополняя граничным условием $\theta_0^{(3)} = 0$ и раскрывая рекуррентное соотношение, получим

$$\theta_k^{(3)} = k \frac{h^3}{3}.$$

Продолжая эту операцию дальше, мы получим, что решение в точке $x = kh$ по схеме (21) представимо в виде асимптотического ряда

$$u_k = u(x_k) + \theta_k^{(2)} u''(x_k) + \theta_k^{(3)} u'''(x_k) + \theta_k^{(4)} u^{(4)}(x_k) + \dots$$

который полностью совпадает (22).

Теперь, следуя работе [3], рассмотрим следующую схему на неравномерной сетке:

$$u_0 = 1; \quad \frac{u_k - u_{k-1}}{(x_{k+1} - x_{k-1})/2} + \lambda u_k = 0, k \geq 1 \quad (24)$$

Эта схема, очевидно, не обладает аппроксимацией, но при этом она обладает первым порядком точности. Покажем это, для чего найдём коэффициенты $\theta^{(1)}$. Запишем условие точности на линейной функции $f(x) = x - x_k$ в смысле (23):

$$\frac{1}{(x_{k+1} - x_{k-1})/2} \left(\theta_k^{(1)} - (\theta_{k-1}^{(1)} + x_{k-1} - x_k) \right) = 1,$$

откуда

$$\theta_k^{(1)} - \theta_{k-1}^{(1)} = \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2} - (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k) - \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1})$$

В силу того, что граничное условие выполняется точно, $\theta_0^{(1)} = 0$. Отсюда получаем

$$\theta_k^{(1)} = \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k) - \frac{1}{2}(x_1 - x_0)$$

Обратим внимание на тот факт, что $\theta_k^{(1)}$ зависит только от шага сетки, но является ограниченной величиной с ростом k .

Рассмотрев невязку при подстановке функции u_h с компонентами $u_k = u(x_k) + \theta_k^{(1)} u'(x_k)$, мы получим, что она имеет порядок $O(h_{\max})$. Добавляя к этому факту утверждение, что $\theta_k^{(1)} = O(h_{\max})$, получаем, что схема (24) имеет первый порядок точности.

Оценка коэффициентов $\alpha = \theta^{(2)}$ для схемы общего вида

Точность схемы на линейной функции обеспечивает равенство нулю коэффициентов $\theta^{(1)}$. Как было показано выше, выбранная аппроксимация производных вблизи границы обеспечивает зануление членов при $(-\lambda)^1$ в ошибке аппроксимации (грубо говоря, точность на линейной функции) вплоть до границы. Поэтому старшим членом разложения является член при $(-\lambda)^2$. Проведём его анализ.

Займёмся оценкой негативной нормы правой части для уравнения (16) на поправочные коэффициенты $\alpha = \theta^{(2)}$. Так как $\theta^{(1)} = 0$, то это уравнение переписется в виде

$$\sum_m L_{im} \theta_i^{(2)} = - \sum_m L_{im} \frac{(x_m - x_i)^2}{2}$$

Обозначим правую часть этого уравнения за $-R_i^{(\alpha)}$ и оценим её негативную норму. Очевидно, что $R_i^{(\alpha)}$ есть i -ая компонента аппроксимационной ошибки схемы на функции $(x - x_i)^2/2$. Тогда, пользуясь формулой (8), получаем, что при $i \neq 0$, $i \neq 1$ и $i \neq N$

$$\begin{aligned} R_i^{(\alpha)} &= \frac{1}{\hbar_i} \left(\left(F_{i+1/2} \Big|_{(x-x_{i+1/2})^2/2} + \frac{1}{8} h_{i+1/2}^2 \right) - \left(F_{i-1/2} \Big|_{(x-x_{i-1/2})^2/2} + \frac{1}{8} h_{i-1/2}^2 \right) \right) = \\ &= \frac{\phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}}{\hbar_i}, \end{aligned}$$

где

$$\phi_{i+1/2} = F_{i+1/2} \Big|_{(x-x_{i+1/2})^2/2} + \frac{1}{8} h_{i+1/2}^2. \quad (25)$$

При $i = 0$ выполнено $R_i^{(\alpha)} = 0$.

При $i = 1$ и $i = N$, проводя выкладки, аналогичные доказательству формулы (8), получаем

$$R_1^{(\alpha)} = \frac{\phi_{3/2} - \phi_{1/2}}{\hbar_i}, \quad \phi_{1/2} = \frac{h_{1/2}^2}{2},$$

$$R_N^{(\alpha)} = -\frac{\phi_{N-1/2}}{\hbar_i},$$

где $\phi_{N-1/2}$ определено формулой (25).

Таким образом,

$$\|R^{(\alpha)}\|_{-1} = \max_j \left| \sum_{i=0}^j \hbar_i R_i^{(\alpha)} \right| = \max_j |\phi_{j+1/2} - \phi_{1/2}| = O(h^2).$$

Поэтому, используя неравенство (6), получаем, что поправочные коэффициенты α имеют порядок $O(h^2)$ и мажорируются константой, не зависящей от L .

Оценка коэффициентов $\alpha = \theta^{(2)}$ для схемы R3

Выше были даны оценки коэффициентов $\theta^{(2)}$ для схемы общего вида, удовлетворяющей условиям (Б1-Б5). Повторим рассуждения для схемы R3 и получим количественную оценку.

Всюду далее предполагается, что отношение соседних шагов сетки ограничено.

Введём обозначение для отношения соседних шагов $\Lambda_i = h_{i+1/2}/h_{i-1/2} = (x_{i+1} - x_i)/(x_i - x_{i-1})$ и перепишем схему (1) в следующем виде:

$$\left[\frac{du}{dx} \right]_i = \frac{1}{\hbar_i} \left(\frac{\Lambda_{i-1}}{6} u_{i-2} + \left(-\frac{\Lambda_{i-1} + \Lambda_i}{6} - \frac{2}{3} \right) u_{i-1} + \left(\frac{\Lambda_i}{6} + \frac{1}{3} \right) u_i + \frac{1}{3} u_{i+1} \right)$$

Прямой подстановкой потока

$$F_{i+1/2} = -\frac{\Lambda_i}{6} u_{i-1} + \left(\frac{2}{3} + \frac{\Lambda_i}{6} \right) u_i + \frac{1}{3} u_{i+1}$$

в формулу (25) можно получить

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{6} h_{i+1/2}^2 - \frac{1}{12} h_{i+1/2} h_{i-1/2}, \quad i \neq 0. \quad (26)$$

Для $i = 0$ в силу специального способа аппроксимации потока в приграничной полуцелой точке получается

$$\phi_{1/2} = \frac{5}{8} h_{1/2}^2, \quad (27)$$

а при $i = N$ формула (25) неприменима, и нужно писать

$$\phi_{N+1/2} = 0. \quad (28)$$

Теперь используем выписанное выше дивергентное представление аппроксимационной ошибки для определения поправочных коэффициентов

α . Для простоты записи домножим k -ую строку системы уравнений на \hbar_k . Матрица HL_h полученной системы уравнений будет иметь следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 - \frac{\Lambda_1}{6} & \frac{2}{3} + \frac{\Lambda_1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Lambda_1}{6} & -\frac{2}{3} - \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{6} & \frac{1}{3} + \frac{\Lambda_2}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Lambda_2}{6} & -\frac{2}{3} - \frac{\Lambda_2 + \Lambda_3}{6} & \frac{1}{3} + \frac{\Lambda_3}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Lambda_3}{6} & -\frac{2}{3} - \frac{\Lambda_3 + \Lambda_4}{6} & \frac{1}{3} + \frac{\Lambda_4}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Lambda_{N-2}}{6} & -\frac{2}{3} - \frac{\Lambda_{N-2} + \Lambda_{N-1}}{6} & \frac{1}{3} + \frac{\Lambda_{N-1}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Lambda_{N-1}}{6} & -\frac{2}{3} - \frac{\Lambda_{N-1}}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right\|$$

В правой части системы уравнений находится ошибка аппроксимации квадратичной функции, умноженная на шаг сетки и взятая со знаком минус: $-e_i |(x-x_i)^2/2| \hbar_i$.

Домножим эту системы уравнений на матрицу D^{-1} с элементами $(D^{-1})_{ij} = \{1, i \leq j \text{ or } i \neq N; 0, i > j \text{ or } i = N\}$. Тогда в правой части окажутся величины $-(\phi_{i+1/2} - \phi_{1/2})$; все они, как показано выше, порядка $O(h_{\max}^2)$. Сама же матрица $F = D^{-1}HL_h$ домноженной системы будет иметь вид

$$F = \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\Lambda_1}{6} & \frac{2}{3} + \frac{\Lambda_1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Lambda_2}{6} & \frac{2}{3} + \frac{\Lambda_2}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Lambda_3}{6} & \frac{2}{3} + \frac{\Lambda_3}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\Lambda_4}{6} & \frac{2}{3} + \frac{\Lambda_4}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\Lambda_{N-1}}{6} & \frac{2}{3} + \frac{\Lambda_{N-1}}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Матрица F получилась трёхдиагональной со строгим диагональным преобладанием при любом наборе Λ . Вычислим ε для такой матрицы.

$$\varepsilon = 1 - \max_i \left\{ \frac{\frac{1}{3} + \frac{\Lambda_i}{6}}{\frac{2}{3} + \frac{\Lambda_i}{6}} \right\} = \left(1 + \frac{1}{2} \max \Lambda_i \right)^{-1},$$

а C_ε оценивается величиной

$$C_\varepsilon = \frac{3}{2\varepsilon} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \max \Lambda_i.$$

Отсюда с учётом (26-28) непосредственно следует оценка на поправочные коэффициенты

$$\|\alpha\| \leq \frac{7}{8} \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{4} \max \Lambda_i \right) h_{\max}^2.$$

Отметим, что в численных экспериментах линейный рост коэффициентов α с увеличением степени неравномерности сетки не наблюдается.

Так как на равномерной сетке схема R3 имеет 3-й порядок аппроксимации, то её ошибка порядка $O(h^2)$ обусловлена только неточной аппроксимацией вблизи границы; при этом разность соседних поправочных коэффициентов удовлетворяет оценке $\|\Delta\theta^{(2)}\| = O(h\Delta h)$. Этот факт можно показать и формальными вычислениями, опираясь на то, что вектор, все компоненты которого равны 1, является собственным для матрицы F .

Оценка коэффициентов $\beta = \theta^{(3)}$ для схемы R3

Запишем теперь условие на нахождение коэффициентов β .

$$\sum_m L_{km}\beta_m = R_k^{(\beta)} = \alpha_k - \sum_m L_{km} \left(\frac{(x_m - x_k)^3}{6} + \alpha_m(x_m - x_k) \right) \quad (29)$$

Представим правую часть этой системы $R_k^{(\beta)}$ в виде суммы двух слагаемых: $R_k^{(\beta)} = p_k - E_k^3$, причём в p_k отнесём члены, содержащие поправочные коэффициенты α , а в E_k^3 – не содержащие. Величина E_k^3 была выписана выше (10), и для неё была получена оценка негативной нормы как $O(h_{\max}^3 + (\Delta h)_{\max}^2 L)$.

Теперь рассмотрим слагаемое p_k :

$$p_k = \alpha_k - \sum_m L_{km}\alpha_m(x_m - x_k) = \frac{1}{\hbar_k} \left[\alpha_k \hbar_k - \sum_m (F_{km} - F_{k-1,m})\alpha_m(x_m - x_k) \right]$$

Вначале преобразуем p_k следующим образом:

$$p_k = \frac{\eta_{k+1/2}^{(0)} - \eta_{k-1/2}^{(0)}}{\hbar_k} + \frac{1}{\hbar_k} \left[\alpha_k \hbar_k - (x_{k+1} - x_k) \sum_m F_{km}\alpha_m \right],$$

где

$$\eta_{k+1/2}^{(0)} = - \sum_m F_{km}\alpha_m(x_m - x_{k+1})$$

Теперь займёмся выражением в квадратных скобках. Распишем его, зная коэффициенты F_{km} для схемы R3:

$$\alpha_k \hbar_k - (x_{k+1} - x_k) \sum_m F_{km}\alpha_m = \alpha_k \hbar_k - h_{k+1/2} \left(-\frac{\Lambda_k}{6}\alpha_{k-1} + \left(\frac{2}{3} + \frac{\Lambda_k}{6} \right) \alpha_k + \frac{1}{3}\alpha_{k+1} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\alpha_k h_{k+1/2} + \frac{1}{2}\alpha_k h_{k-1/2} - \frac{1}{6} \frac{h_{k+1/2}^2}{h_{k-1/2}} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) - \frac{2}{3} h_{k+1/2} \alpha_k - \frac{1}{3} h_{k+1/2} \alpha_{k+1} = \\
&= \frac{1}{6} \frac{h_{k-1/2}^2 - h_{k+1/2}^2}{h_{k-1/2}} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) - \frac{1}{6} (\alpha_k h_{k+1/2} - \alpha_{k-1} h_{k-1/2}) - \frac{1}{3} (\alpha_{k+1} h_{k+1/2} - \alpha_k h_{k-1/2})
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$p_k = \frac{\eta_{k+1/2} - \eta_{k-1/2}}{\hbar_k} + \frac{1}{3} \frac{h_{k-1/2} - h_{k+1/2}}{h_{k-1/2}} (\alpha_k - \alpha_{k-1})$$

где

$$\eta_{k+1/2} = - \sum_m F_{km} \alpha_m (x_m - x_{k+1}) - \frac{1}{6} \alpha_k h_{k+1/2} - \frac{1}{3} \alpha_{k+1} h_{k+1/2}$$

Как было показано выше, разность соседних коэффициентов α имеет порядок $h_{\max}(\Delta h)_{\max}$. Таким образом, негативная норма p_k имеет следующую оценку:

$$\|p_k\|_{-1} = O\left(\frac{(\Delta h)_{\max}}{h_{\min}} \|\Delta\alpha\| + h_{\max}^3\right) = O\left((\Delta h)_{\max}^2 + h_{\max}^3\right) \quad (30)$$

Дополнительно можно показать, что при $h_{k-1/2} \rightarrow 0$ величина $\alpha_k - \alpha_{k-1}$ также стремится к 0, и отношение $(\alpha_k - \alpha_{k-1})/h_{k-1/2}$ ограничено.

Как мы видели выше, величина коэффициентов β_k определяется негативной нормой $R^{(\beta)} = \{p_k - E_k^3\}$, и максимальным отношением соседних шагов. Таким образом,

$$\|\beta\| = O\left(\left((\Delta h)_{\max}^2 + h_{\max}^3\right) L\right).$$

Проверим полученный результат в частном случае, когда сетка состоит из чередующихся шагов $h_{1/2}$ и $h_{3/2}$, то есть для всех i выполнено $h_{i+2+1/2} = h_{i+1/2}$. Тогда

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i = \pm \frac{(h_{3/2} - h_{1/2})h_{1/2}h_{3/2}}{h_{1/2} + h_{3/2}}$$

где знак плюс берётся для нечётных i и минус для чётных, и наклон величины β определяется формулой

$$S_\beta = \frac{\beta_{i+1} - \beta_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{(h_{1/2} - h_{3/2})^2}{12}$$

При этом $\beta_i = S_\beta x_i + O(h_{\max}^3)$.

Численные эксперименты показывают, что оценка

$$\|\beta\| \leq \frac{1}{12}(\Delta h)_{\max}^2 L + O(h_{\max}^3) \quad (31)$$

верна для произвольной сетки, причём она достигается только на равномерной сетке и на сетке с чередующимся шагом.

Оценка следующих поправочных коэффициентов для схемы R3

Сделаем дополнительное предположение, что отношение соседних шагов сетки не превышает $K < 3$.

Рассмотрим систему $L_h \beta = R$. Введём новую искомую переменную

$$\tilde{D}\beta = \left(\frac{\beta_0}{h_{1/2}}, \frac{\beta_1 - \beta_0}{h_{1/2}}, \frac{\beta_2 - \beta_1}{h_{3/2}}, \dots, \frac{\beta_N - \beta_{N-1}}{h_{N-1/2}} \right)^T.$$

Тогда система $L_h \beta = R$ переписется в виде $(L_h \tilde{D}^{-1})(\tilde{D}\beta) = R$. Выпишем матрицу $HL_h \tilde{D}^{-1}$ для схемы R3:

$$HL_h \tilde{D}^{-1} = \left\| \begin{array}{cccccc} h_{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \frac{\Lambda_1}{6}) h_{1/2} & \frac{1}{3} h_{3/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\Lambda_1}{6} h_{1/2} & (\frac{2}{3} + \frac{\Lambda_2}{6}) h_{3/2} & \frac{1}{3} h_{5/2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\Lambda_{N-2}}{6} h_{N-5/2} & (\frac{2}{3} + \frac{\Lambda_{N-1}}{6}) h_{N-3/2} & \frac{1}{3} h_{N-1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\Lambda_{N-1}}{6} h_{N-3/2} & \frac{2}{3} h_{N-1/2} \end{array} \right\|$$

Рассмотрим вопрос, при каких условиях она имеет строгое диагональное преобладание. В нулевой и последней строке диагональное преобладание выполняется. Первая строка даёт условие $\Lambda_1 < 6$, а все остальные – условие

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{\Lambda_k}{6} \right) h_{k-1/2} > \frac{\Lambda_{k-1}}{6} h_{k-3/2} + \frac{1}{3} h_{k+1/2}$$

Или, подставляя определение $\Lambda_k = h_{k+1/2}/h_{k-1/2}$ и упрощая,

$$\Lambda_k < 3$$

Таким образом, при отношении соседних шагов менее, чем в 3 раза, матрица $HL_h \tilde{D}^{-1}$ имеет диагональное преобладание. А так как диагональные элементы у неё имеют порядок $O(h)$, то $\|\tilde{D}\beta\| = O(\|R\|/h)$, а, следовательно, разность соседних коэффициентов β имеет порядок $O(\|R\|h_{\max}/h_{\min})$.

Таким образом, имеются два правила для оценки поправочных коэффициентов. Ранее было показано, что порядок $O(h^n)$ правой части в негативной норме даёт порядок $O(h^n)$ для соответствующих поправочных коэффициентов. Теперь показано, что порядок $O(h^n)$ правой части в С-норме даёт порядок $O(h^n)$ для разностей соседних коэффициентов.

Вначале, рассматривая правую часть в уравнении (16), мы пришли к выводу, что она имеет порядок $O(h^2)$ в негативной норме, что гарантирует $\alpha = \theta^{(2)} = O(h^2)$.

Правая часть R_β системы для нахождения $\beta = \theta^{(3)}$ (приведённая в уравнении (29)), очевидно, имеет порядок $O(h^3)$. Отсюда можно заключить, разность соседних коэффициентов $\Delta\beta = O(h^3)$. Таким образом, график поправочных коэффициентов $\beta = \theta^{(3)}$, отложенный от x , на неравномерной сетке со случайным шагом представляет собой линейный наклон порядка $O(h^2)$ (зависящий от степени неравномерности сетки), на который накладываются случайные осцилляции порядка $O(h^3)$, обусловленные расположением конкретных сеточных узлов.

Рассмотрим теперь правую часть для нахождения коэффициентов $\gamma = \theta^{(4)}$ и оценим её негативную норму.

$$\sum_m L_{km} \gamma_m = R_k^{(\gamma)} = \beta_k - \sum_m L_{km} \left(\frac{(x_m - x_k)^4}{24} + \alpha_m \frac{(x_m - x_k)^2}{2} + \beta_m (x_m - x_k) \right).$$

Очевидно, что

$$R_k^{(\gamma)} = \beta_k - \sum_m L_{km} \beta_m (x_m - x_k) + O(h^3)$$

Выражение такого вида мы уже анализировали выше при оценке величины p_k . По аналогии можно записать

$$\|\gamma\| = O(\|R^{(\gamma)}\|_{-1}) = O\left(\frac{(\Delta h)_{\max}}{h_{\min}} \|\Delta\beta\| + h_{\max}^3\right) = O\left(\frac{(\Delta h)_{\max}^4}{h_{\min}} + h_{\max}^3\right) \quad (32)$$

Таким образом, $\gamma = O(h^3)$. $\Delta\gamma$ также остаётся порядка $O(h^3)$.

Продолжая эти рассуждения дальше, можно получить общую оценку для поправочных коэффициентов любого порядка:

$$\|\theta^{(2p)}\| = \|\theta^{(2p+1)}\| = O(h^p) \quad (33)$$

$$\|\Delta\theta^{(2p-1)}\| = \|\Delta\theta^{(2p)}\| = O(h^p)$$

Таким образом p -ый член ряда (11) имеет оценку

$$u_k^{(p)} = e^{-\lambda x_k} O\left(\lambda^p h^{\lfloor p/2 \rfloor} L^{p-\lfloor p/2 \rfloor}\right)$$

Более точными рассуждениями можно показать, что константа в этой оценке растёт не слишком быстро: $|u_k^{(p)}|/e^{-\lambda x_k} \leq \lambda^p C^p h^{\lfloor p/2 \rfloor} L^{p-\lfloor p/2 \rfloor}$, где C – некоторая константа.

Таким образом, оценка радиуса сходимости ряда (11) $\lambda_{\max} = \|L_h^{-1}\|^{-1} = O(1)$ является грубой, и верна более точная оценка $\lambda_{\max} = O(1/\sqrt{hL})$. Приведённый же на рисунках 1-3 спектр матрицы L_h даёт основание полагать, что и эта оценка является грубой, и верна более точная оценка $\lambda_{\max} = O(1/h_{\max})$. Но последнее для доказательства не требуется.

Таким образом, для каждого фиксированного λ ряд (11) сходится на достаточно мелкой сетке. Отсюда легко показать, что при подстановке конечного числа p членов ряда невязка будет имеет величину порядка $\max \|\theta^q\|$ по всем $q > p$. То есть ряд (11) является асимптотическим по h .

Таким образом, можно записать окончательное выражение для ошибки схемы, если отношение соседних шагов не больше 3:

$$\left| \frac{u_k - \exp(-\lambda x_k)}{\exp(-\lambda x_k)} \right| \leq C_1 \lambda^2 h_{\max}^2 + C_2 \lambda^3 (\Delta h)_{\max}^2 L + O(h_{\max}^3 L), \quad (34)$$

где L – размер расчётной области, а константы C_1 и C_2 определяются структурой сетки. Строгие оценки, которые получены на C_1 и C_2 , неограниченно растут с ростом отношения h_{\max}/h_{\min} , чего не наблюдается в вычислительном эксперименте.

Отметим, что старший член (порядка h_{\max}^2) аппроксимационной ошибки не растёт с увеличением размера расчётной области. Если расчётная область достаточно большая, то наибольшим по величине является или член $\lambda^3 (\Delta h)_{\max}^2 L$, или, на достаточно гладкой сетке, следующий член разложения, имеющий величину порядка $\lambda^4 h_{\max}^3 L$.

Численное исследование

Рассмотрим сеточное решение задачи (2) по схеме R3 (1). В подтверждение возможности разложения его в асимптотический ряд (11) по степеням $(-\lambda)$ представим на рис. 4-6 графики остаточной ошибки. Под остаточной ошибкой здесь будем понимать максимальную норму ошибки решения за

вычетом частичной суммы ряда (11):

$$e_n = \max_k \left| u_k - \exp(-\lambda x_k) \left(1 + \sum_{p=2}^n \theta^{(p)} (-\lambda)^p \right) \right|$$

По горизонтальной оси отложен средний шаг сетки, по вертикальной оси — остаточная ошибка, разные кривые соответствуют разному числу n , то есть разному числу членов в используемой частичной сумме. Результаты, представленные на рис. 4-6, проводились с восьмерной точностью.

На рис. 4 использована равномерная сетка, на рис. 5 — шахматная с отношением соседних шагов $K = 1.8$, на рис. 6 — сетка со случайным шагом и тем же отношением максимального шага к минимальному. Длина расчётной области $L = 2$, $\lambda = 1$.

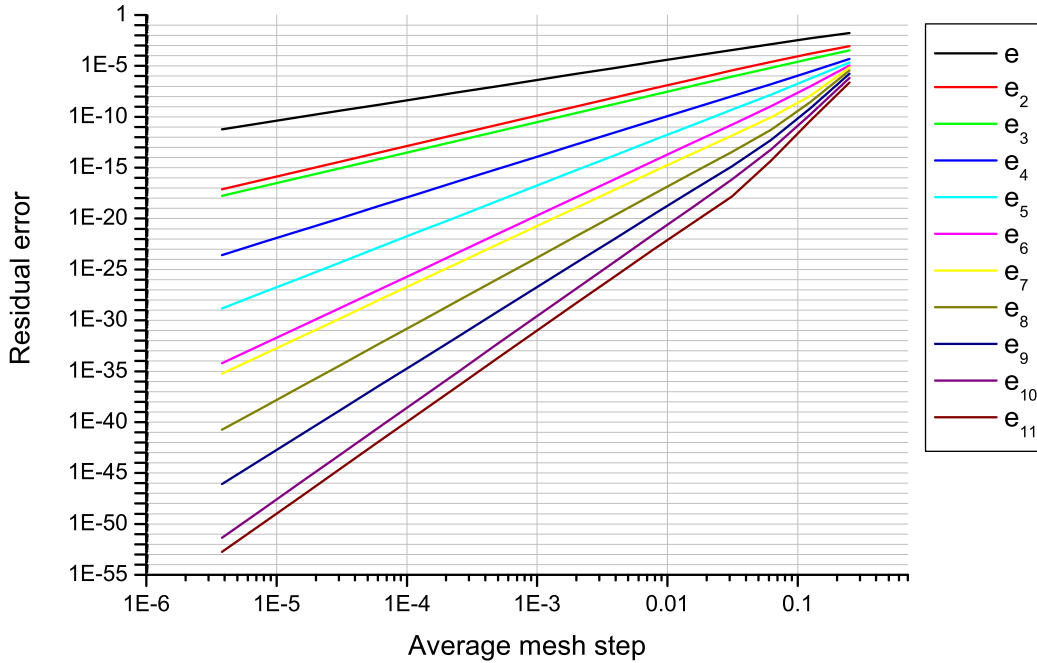


Рис. 4: Остаточная ошибка решения на равномерной сетке

Анализ наклонов кривых остаточной ошибки на графиках 4-6 позволяет сделать следующий вывод относительно поведения величины остаточной ошибки (равно как и поправочных коэффициентов, так как ими определяется величина остаточной ошибки) при $h \rightarrow 0$. Оценка (33) оказывается неточной; графики 4-6 предсказывают более точную оценку $\theta^{(2)} = O(h^2)$, $\theta^{(3)} = O(h^2)$, $\theta^{(4)} = O(h^3)$, $\theta^{(5)} = O(h^4)$, $\theta^{(6)} = O(h^4)$, $\theta^{(7)} = O(h^5)$ и т. д.

Теперь займёмся вопросом, как зависят поправочные коэффициенты $\theta^{(3)}$ от степени неравномерности сетки. Величина поправочных коэффициентов $\theta^{(3)}$ имеет важное значение, поскольку коэффициенты $\theta^{(2)}$ не зависят от L , и при больших L член, в который входит $\theta^{(3)}$, становится старшим по

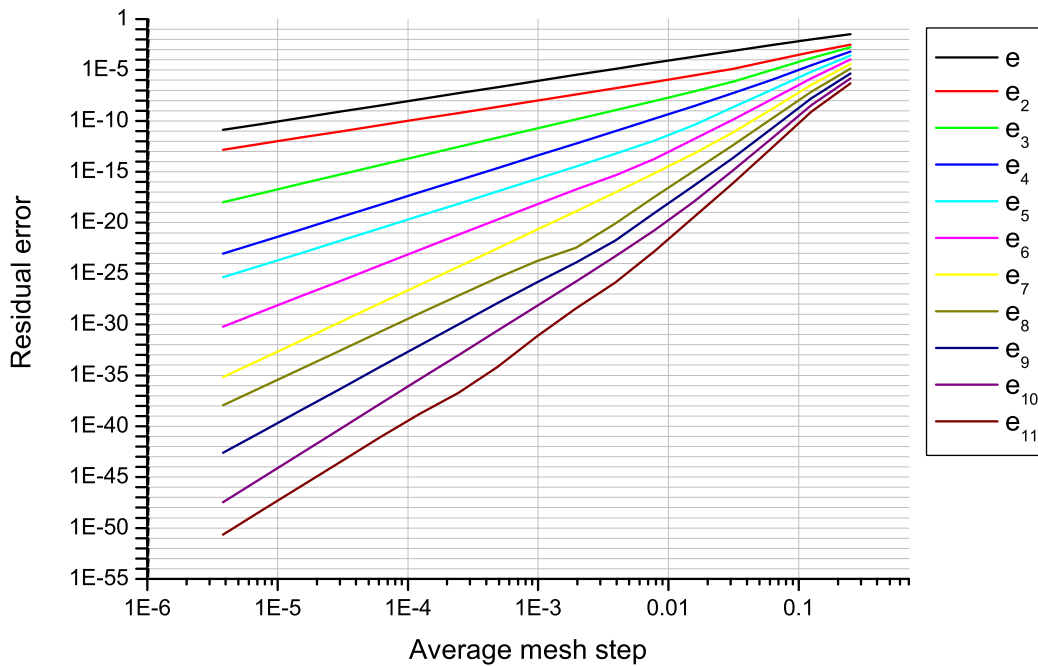


Рис. 5: Остаточная ошибка решения на шахматной сетке

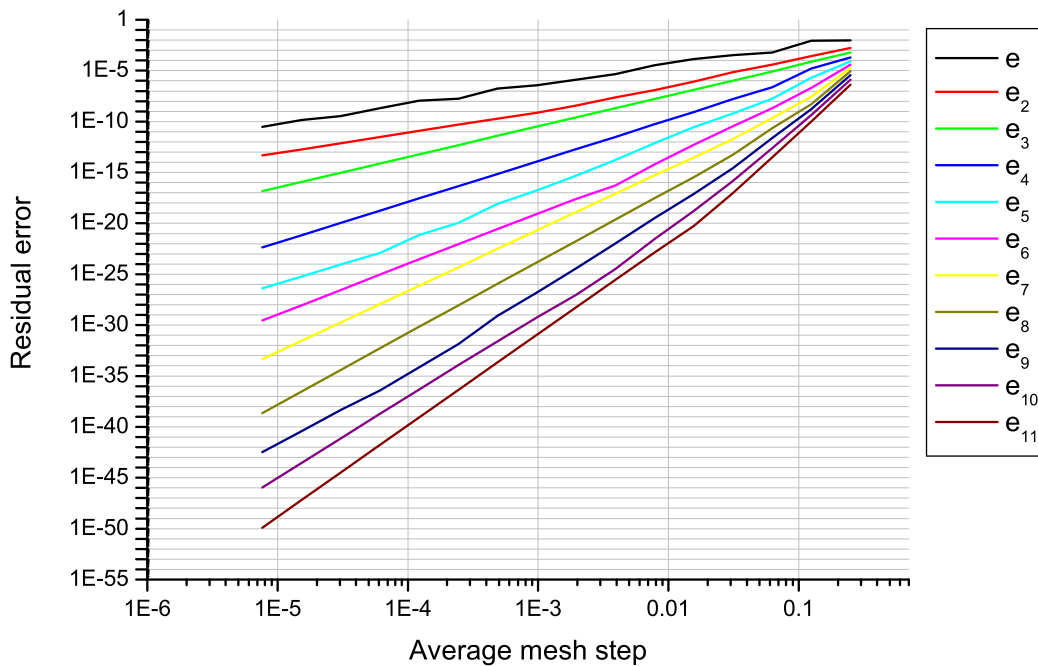


Рис. 6: Остаточная ошибка решения на сетке со случайным шагом

порядку членом схемной ошибки. Чтобы избежать вклада ошибки порядка $\theta^{(2)}$, играющей высокую роль в силу малости L и из-за дополнительной ошибки от границы, будем измерять остаточную ошибку e_2 , то есть за вычетом члена с $\theta^{(2)}$. Графики остаточной ошибки e_2 представлены на рис. 7-8. По горизонтали отложен средний шаг сетки.

На равномерной сетке (чёрная линия на обоих графиках) в силу свойств схемы R3 наличие коэффициента $\theta^{(3)}$ обусловлено только приграничными

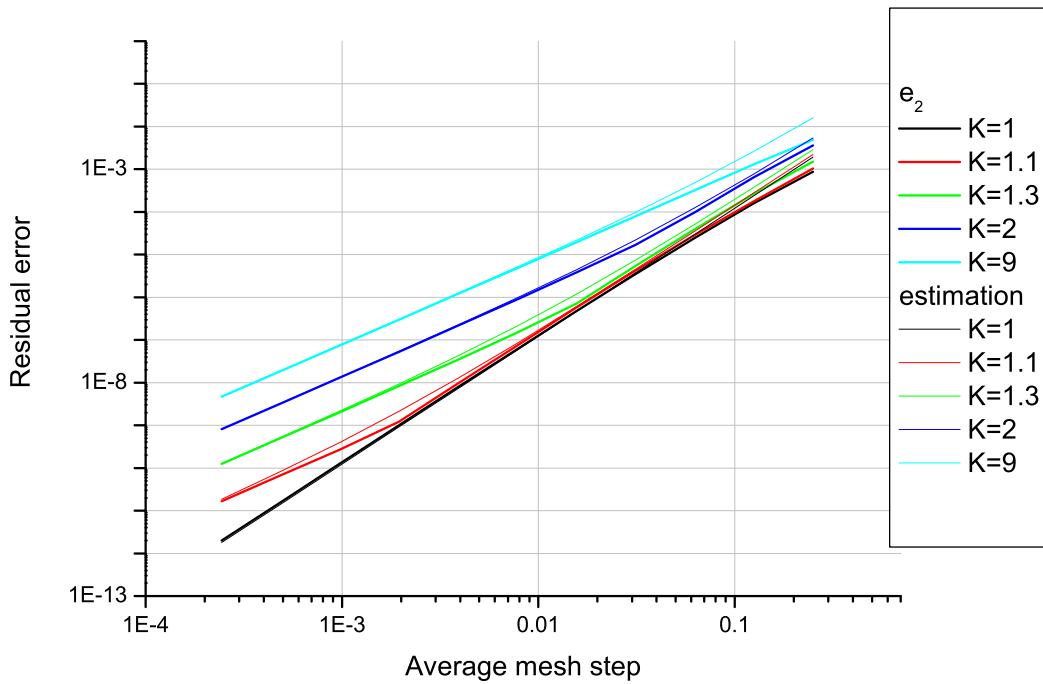


Рис. 7: Остаточная ошибка решения на шахматной сетке

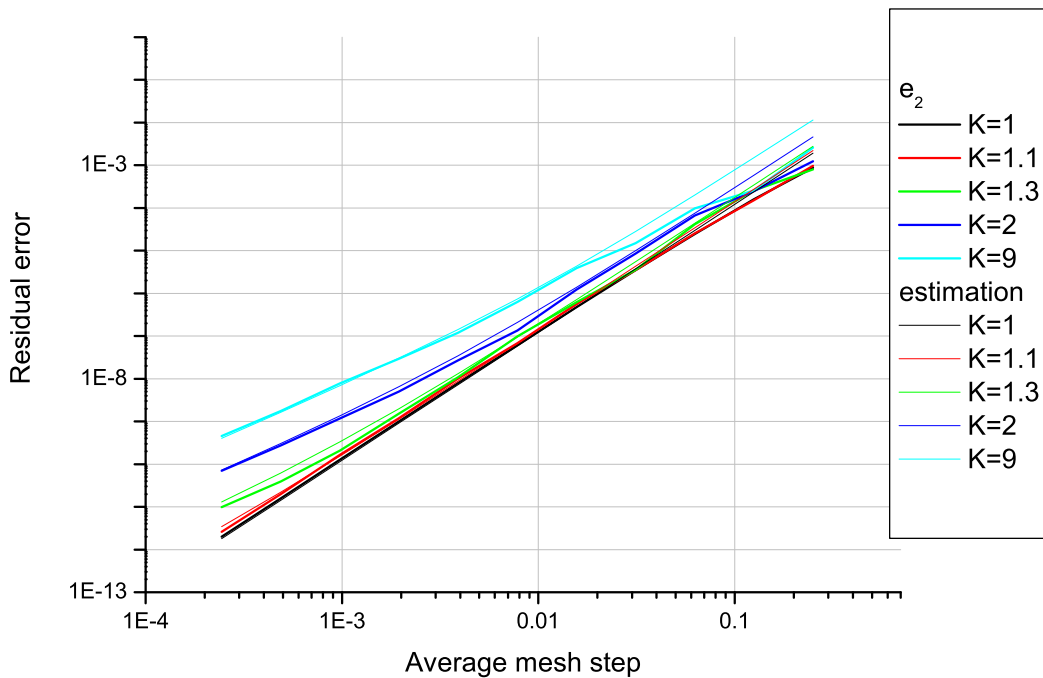


Рис. 8: Остаточная ошибка решения на сетке со случайным шагом

узлами, где порядок аппроксимации понижается, поэтому старшим членом остаточной ошибки e_2 является член $\theta^{(4)}(-\lambda)^4$. Этот член ошибки мы видим и на шахматной сетке и сетке со случайным шагом, он имеет наклон $O(h^3)$. Но, по сравнению с равномерной сеткой, на них появляется дополнительное слагаемое $O((\Delta h)^2)$, предсказанное аналитическими оценками. На грубых сетках доминирует слагаемое $O(h^3)$, на мелких – $O((\Delta h)^2)$.

Выше было сказано, что на шахматной сетке для коэффициентов $\theta^{(3)}$ справедлива неулущаемая оценка

$$|\theta_k^{(3)}| \leq \frac{1}{12}(\Delta h)^2 x_k + O(h^3)$$

Из соображений размерности очевидно, что слагаемое порядка $O(h^3)$ в этой формуле не растёт с x . Таким образом, норму слагаемого с $(-\lambda)^3$ можно оценить как

$$\|\theta_k^{(3)}(-\lambda)^3 e^{-\lambda x_k}\| \sim |\lambda|^3 \frac{1}{12}(\Delta h)^2 \|x_k e^{-\lambda x_k}\| \sim |\lambda|^2 \frac{1}{12e}(\Delta h)^2$$

Чтобы показать правильность этой оценки, на рис. 7 тонкими линиями нанесена величина

$$\tilde{e}_2 = |\lambda|^2 \frac{1}{12e}(\Delta h)^2 + |\lambda|^3 \frac{1}{3e} h_{\max}^3 \quad (35)$$

Из графиков видно, что такая величина достаточно точно совпадает с действительной остаточной погрешностью e_2 . Коэффициент $1/3e$ вместо $1/12e$ при h_{\max}^3 приблизительно отражает дополнительную ошибку, вызванную пониженной точностью аппроксимации около границ. Этим, а также неучтёнными членами более высокого порядка по h , обусловлены отличия на грубой сетке. А в месте излома графика (т. е. где величины при λ^3 и λ^4 примерно совпадают по величине) отличия связаны с тем, что соответствующие члены погрешности частично уничтожают друг из друга.

На рис. 8 также нанесены оценки остаточной ошибки по формуле (35), причём под $(\Delta h)^2$ понимается математическое ожидание этой величины, равное $(h_{\max} - h_{\min})^2/6$. Видно, что реальная точность примерно в 2 раза лучше, чем предсказывается этой оценкой. Таким образом, при одном и том же отношении h_{\max}/h_{\min} на сетке со случайным шагом остаточная погрешность оказывается в 12 раз меньше, чем на шахматной сетке.

Заклучение

В работе была исследована схема R3 на основе разделённых разностей на примере модельной задачи Коши $u' + \lambda u = 0$, $u(0) = 1$. Получено разложение отношения численного решения к точному в виде ряда по степеням λ . Доказано, что этот ряд сходится при на достаточно мелкой сетке и является асимптотическим по h . Показано, что относительная ошибка решения разбивается на слагаемое порядка h_{\max}^2 , не зависящее от расстояния до левой границы, а также на линейно растущие с удалением от левой границы слагаемые порядка $(\Delta h)_{\max}^2$ и h_{\max}^3 .

Литература

1. Ilya Abalakin, Pavel Bakhvalov and Tatiana Kozubskaya. Edge-based reconstruction schemes for prediction of near field flow region in complex aeroacoustic problems, International Journal of Aeroacoustics, Vol.13, N 3&4, 2014, p. 207-234.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках, Журнал вычислительной математики и математической физики, 1962, Т. 2., С. 812–832.
3. Pascal F. On SUPRA-convergence of the finite volume method for the linear advection equation // ESAIM: proceedings. — 2007. — Vol. 18.— P. 38–47.

Оглавление

Введение	3
Консервативные схемы с потоками, точными на линейной функции.....	4
Оценка негативной нормы аппроксимационной ошибки	10
Выражение погрешности решения через производные от точного решения	14
Поправочные коэффициенты для 2-точечной разности назад	17
Оценка коэффициентов $\alpha = \theta^2$ для схемы общего вида	20
Оценка коэффициентов $\alpha = \theta^2$ для схемы R3	21
Оценка коэффициентов $\beta = \theta^3$ для схемы R3.....	23
Оценка следующих поправочных коэффициентов для схемы R3	25
Численное исследование	27
Заклучение	32