



Рыков Ю.Г., Феодоритова О.Б.

О методологии
вариационного
представления обобщенных
решений для квазилинейных
гиперболических систем
двух уравнений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Рыков Ю.Г., Феодоритова О.Б. О методологии вариационного представления обобщенных решений для квазилинейных гиперболических систем двух уравнений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 84. 22 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-84>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Ю. Г.Рыков, О.Б.Феодоритова

**О методологии вариационного
представления обобщенных решений
для квазилинейных гиперболических
систем двух уравнений**

Москва — 2014

Рыков Ю.Г., Феодоритова О.Б.

О методологии вариационного представления обобщенных решений для квазилинейных гиперболических систем двух уравнений

В работе произведена дальнейшая конкретизация сформулированного ранее нового подхода к рассмотрению систем квазилинейных гиперболических уравнений на основе вариационных принципов. Конкретизация получена для систем двух уравнений. Показано, что каждое поле характеристик может быть представлено как решение задачи вариационного исчисления. При этом соотношения Гюгонио на изломах характеристик или при пересечении характеристик одного семейства будут выполнены автоматически. Также приведен опыт построения численной схемы на основе вариационного принципа в простейшем случае уравнения Хопфа. Работа написана на «физическом» уровне строгости.

Ключевые слова: гиперболическая система, характеристики, вариационная задача, разрывные решения, соотношения Гюгонио

Yuri Germanovich Rykov, Olga Borisovna Feodoritova

On the methodology of variational representation of generalized solutions to quasi-linear hyperbolic two-equations systems

The paper contains further detailing of earlier formulated new approach to the study of quasi-linear hyperbolic systems on the basis of variational approach. The elaboration is got for the systems of two equations. It is shown that each characteristic field can be represented as the solution of certain variation calculus problem. At this the Hugoniot relations at the characteristics' bents or when the characteristics of the same family intersect are fulfilled automatically. Also the paper describes the experience of numerical scheme construction on the basis of variational approach in the simplest case of Hopf equation. The work is written with "physical" level of rigor.

Key words: hyperbolic system, characteristics, variational problem, discontinuous solutions, Hugoniot relations

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

Вводные замечания

В работе [1] был предложен некоторый новый взгляд на природу обобщенных решений для квазилинейных гиперболических систем. Этот взгляд был сформулирован, исходя из некоторых достаточно общих соображений, которые в принципе справедливы для широкого круга задач теории законов сохранения. Указанный подход состоит в использовании так называемых **вариационных принципов** для конструирования обобщенных решений. Однако далее для получения более конструктивных форм вариационных принципов необходимо рассмотреть набор систем уравнений частного вида. В настоящем препринте сделана попытка большей конкретизации вариационного подхода для систем двух законов сохранения одной пространственной переменной. При этом такие системы пока рассмотрены в общем виде и при общих предположениях. Ранее вариационные принципы были построены для некоторых частных систем двух уравнений, исходя из индивидуальных в каждом конкретном случае соображений, см. [2], [3]. В дальнейшем предполагается, как рассматривать конкретные примеры систем двух уравнений (в частности тех, в которых возникают трудности при стандартном подходе, например, известная система Кейфитц-Кранзера [4]), так и увеличивать количество уравнений в системе. В последнем параграфе будет приведено численное исследование возможного алгоритма расчета решения, построенного на основе вариационного принципа. Это сделано в случае одного уравнения с выпуклой функцией потока (в препринте выбрано уравнение Хопфа, как типичный представитель этого класса уравнений), для которого форма вариационного принципа известна [5], [6]. Алгоритмы, построенные на основе вариационного принципа, отличаются высокой точностью расчета, однако имеют специфические особенности построения.

Поскольку проводимые исследования пока находятся на стадии формирования концепций, то все изложенные ниже теоретические результаты получены в предположении кусочной гладкости соответствующих функций, что неявно предполагается во всех последующих рассуждениях. Также предполагаются известными общепринятые определения и факты из теории гиперболических систем уравнений и вариационного исчисления. Настоящая работа продолжает отмеченную в [1] линию исследований, направленную на последовательный переход от общего взгляда к построению конкретных вариационных принципов.

Формулировка вариационного представления обобщенных решений для квазилинейных гиперболических систем двух уравнений

Рассмотрим задачу Коши для следующей системы квазилинейных уравнений, которая предполагается строго гиперболической

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad (1.1)$$

здесь $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $U(t, x) = (u(t, x), v(t, x))$, а $F = (f, g)$ – достаточно гладкая (по крайней мере, $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$) вектор-функция переменных (u, v) . Здесь и далее жирным шрифтом в формулах будут обозначаться векторные величины. Решения системы (1.1) понимаются в обобщенном смысле, то есть допускают разрывы. Будем также предполагать, что решение этой системы принимает (в некотором смысле, например, почти всюду или в смысле метрики пространства L_1) заданные начальные значения $U(0, x) = U_0(x)$.

Пусть также 2×2 матрица $F'(U)$ обладает собственными числами $\lambda_1(u, v) < \lambda_2(u, v)$, при этом обозначим через $r_1(u, v), r_2(u, v)$ правые собственные вектора, а через $l_1(u, v), l_2(u, v)$ левые собственные вектора, $r_i \cdot l_j = 0$ при $i \neq j$. Также для системы (1.1) всегда (это является общим свойством систем 2×2) можно определить инварианты Римана w, z (будем писать $W = (w, z)$), так что $\nabla w = l_1$, $\nabla z = l_2$ (будем писать $\nabla W = (l_1, l_2)$). Выбрав, таким образом, левые собственные вектора, можно теперь при необходимости считать, что правые собственные вектора удовлетворяют соотношению $r_i \cdot l_i = 1$, $i = 1, 2$.

В соответствии с общей идеей работы [1] будем рассматривать следующий вектор функционал $J = (I, J)$, построенный на множестве траекторий $\chi(\tau), U(\tau)$:

$$J \equiv \int_0^y U_0(s) ds + \int_0^t L(\dot{\chi}, U) d\tau; L(\dot{\chi}, U) \equiv U \dot{\chi} - F(U); \chi(0) = y, \chi(t) = x. \quad (1.2)$$

Конкретизируем допустимый вид траекторий пока не на уровне построения пространства функций, а на уровне выделения определенного класса. Пусть для каждой рассматриваемой пары $\chi(\tau), U(\tau)$ существует конечный набор точек $\{\tau_i\} \in (0, t), i = 1, N_S$ (набор точек является своим для каждой пары, но максимальное количество точек N_S для всех пар одинаково) такой, что $\chi(\tau), U(\tau) \in C^1((\tau_{i-1}, \tau_i)); i = 1, \dots, N_S + 1; \tau_0 = 0, \tau_{N_S+1} = t$ и $\chi(\tau) \in C([0, t])$. Пусть также существуют односторонние пределы $U(\tau_i \pm 0), i = 0, \dots, N_S + 1$. В дальнейшем при варьировании концов траекторий в точках $\{\tau_i\} \in (0, t), i = 1, N_S$ будем также предполагать, что эти концы локально варьируются вдоль некоторых неизвестных кривых $\chi = s_i(\tau)$ (на самом деле, это и будут линии разрыва). Таким образом, на данном этапе априорно фиксируется некоторая конкретная качественная структура решения.

Покажем теперь, как обобщенные решения системы (1.1) связаны с критическими точками вектор функционала J , см. (1.2). Для этого найдем выражение для первой δJ и второй $\delta^2 J$ вариации функционала (1.2). Фактически в рассмотренной постановке мы имеем дело с набором вариационных задач с подвижными концами на интервалах (τ_{i-1}, τ_i) при наличии определенных ограничений. Имеем,

$$J = \int_0^y U_0(s) ds + \sum_{i=1}^{N_S+1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} L(\dot{\chi}, U) d\tau \equiv J_0 + \sum_{i=1}^{N_S+1} J_i. \quad (1.3)$$

Пользуясь стандартными процедурами вариационного исчисления, см. рис. 1, проведем необходимые вычисления. Отметим, что на рис. 1 жирный пунктир обозначает достаточно гладкие продолжения функций $\chi(\tau)$ и $\bar{\chi}(\tau)$, от вида которых конечный результат не зависит.

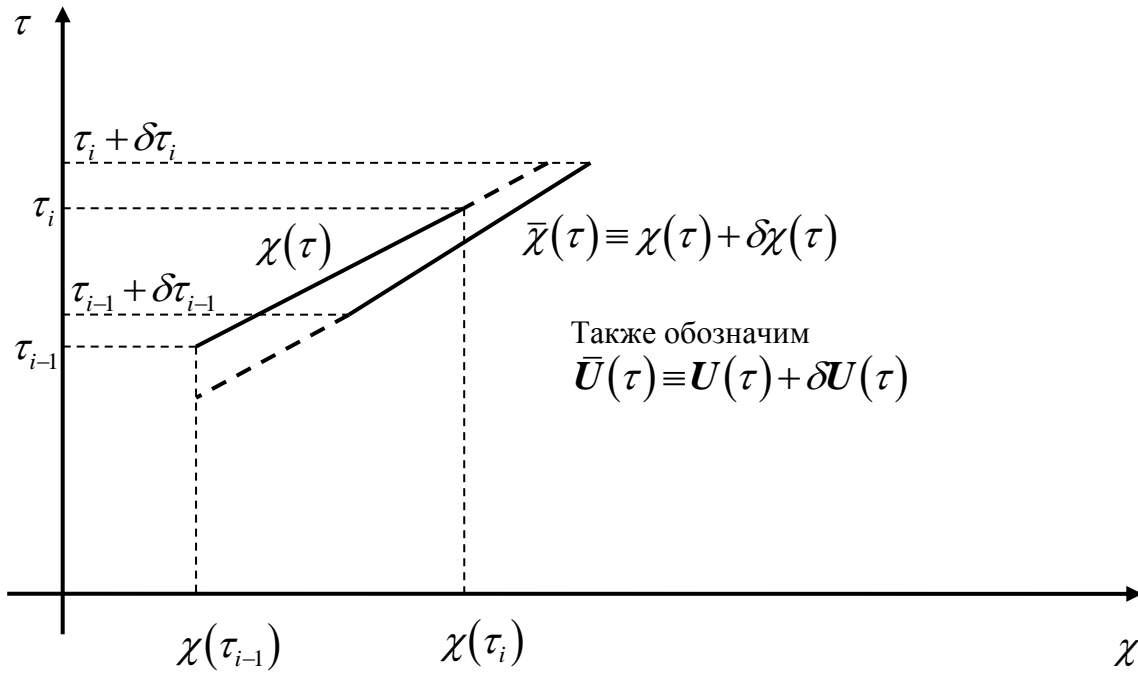


Рис. 1. Иллюстрация к вычислению приращения вектор функционала J при варьировании $\chi(\tau)$ (при варьировании $U(\tau)$ аналогично)

Вычислим δJ_i и $\delta^2 J_i$ для каждого $i=1, \dots, N_S+1$. Для этого рассмотрим соответствующие конечные приращения ΔJ_i . Имеем,

$$\begin{aligned} \Delta J_i &\equiv \int_{\tau_{i-1}+\delta\tau_{i-1}}^{\tau_i+\delta\tau_i} L(\dot{\chi}, \bar{U}) d\tau - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} L(\dot{\chi}, U) d\tau = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [L(\dot{\chi}, \bar{U}) - L(\dot{\chi}, U)] d\tau - \\ &\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_{i-1}+\delta\tau_{i-1}} L(\dot{\chi}, \bar{U}) d\tau + \int_{\tau_i}^{\tau_i+\delta\tau_i} L(\dot{\chi}, \bar{U}) d\tau \equiv \Delta J_i^{(0)} - \Delta J_i^{(1)} + \Delta J_i^{(2)} \end{aligned}$$

Далее, интегрируя при необходимости по частям и последовательно отбрасывая члены выше второго порядка малости, получаем (выражение типа $F''(U)(\delta U)^2$ понимается как следующий вектор $(\delta U \cdot D^2 f \cdot \delta U, \delta U \cdot D^2 g \cdot \delta U)$)

$$\begin{aligned} \Delta J_i^{(0)} &\approx \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left[U \delta \dot{\chi} + \dot{\chi} \delta U - F'(U) \delta U + \delta \dot{\chi} \delta U - \frac{1}{2} F''(U) (\delta U)^2 \right] d\tau = \\ &U \delta \dot{\chi} \Big|_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left\{ [(\dot{\chi} - F'(U)) \delta U - \dot{U} \delta \chi] + \left[\delta \dot{\chi} \delta U - \frac{1}{2} F''(U) (\delta U)^2 \right] \right\} d\tau ; \end{aligned}$$

далее для $k=1,2$

$$\begin{aligned} \Delta J_i^{(k)} &\approx \int_{\tau_{i+k-2}}^{\tau_{i+k-2}+\delta\tau_{i+k-2}} \left\{ [\dot{\chi} U - F(U)] + [U \delta \dot{\chi} + \dot{\chi} \delta U - F'(U) \delta U] \right\} d\tau \approx \\ &[\dot{\chi} U - F(U)] \Big|_{\tau_{i+k-2}}^{\tau_{i+k-2}+\delta\tau_{i+k-2}} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} [\dot{\chi} U - F(U)] \Big|_{\tau_{i+k-2}} \cdot (\delta\tau_{i+k-2})^2 + \\ &\delta\tau_{i+k-2} [U \delta \dot{\chi} + (\dot{\chi} - F'(U)) \delta U] \Big|_{\tau_{i+k-2}} \end{aligned}$$

Теперь, обращаясь к рис. 1, запишем

$$\delta\chi_{i+k-2} \equiv \bar{\chi}(\tau_{i+k-2} + \delta\tau_{i+k-2}) - \chi(\tau_{i+k-2}); \delta\chi(\tau_{i+k-2}) = \bar{\chi}(\tau_{i+k-2}) - \chi(\tau_{i+k-2})$$

и, пренебрегая членами порядка выше второго, получим

$$\begin{aligned} \delta\chi_{i+k-2} &\approx \bar{\chi}(\tau_{i+k-2}) + \dot{\bar{\chi}}(\tau_{i+k-2}) \delta\tau_{i+k-2} + \frac{1}{2} \ddot{\bar{\chi}}(\tau_{i+k-2}) (\delta\tau_{i+k-2})^2 - \chi(\tau_{i+k-2}) = \delta\chi(\tau_{i+k-2}) + \\ &\frac{d}{d\tau} (\chi(\tau_{i+k-2}) + \delta\chi(\tau_{i+k-2})) \delta\tau_{i+k-2} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} (\chi(\tau_{i+k-2}) + \delta\chi(\tau_{i+k-2})) (\delta\tau_{i+k-2})^2 \approx \\ &\delta\chi(\tau_{i+k-2}) + \dot{\chi}(\tau_{i+k-2}) \delta\tau_{i+k-2} + \delta\dot{\chi}(\tau_{i+k-2}) \delta\tau_{i+k-2} + \frac{1}{2} \ddot{\chi}(\tau_{i+k-2}) (\delta\tau_{i+k-2})^2 . \end{aligned}$$

Отсюда, записывая последовательно интегральные члены и члены, связанные с конечными точками интервалов (τ_{i-1}, τ_i) , выводим

$$\delta J_i = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [(\dot{\chi} - F'(U))\delta U - \dot{U}\delta\chi] d\tau + [U(\tau)(\delta\chi - \dot{\chi}(\tau)\delta\tau)]_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} -$$

$$[(\dot{\chi}U - F(U))\delta\tau]_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [(\dot{\chi} - F'(U))\delta U - \dot{U}\delta\chi] d\tau + [U\delta\chi - F(U)\delta\tau]_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}$$

Таким же образом можно найти и выражение для второй вариации $\delta^2 J_i$, однако в рамках текущего изложения это выражение нам не понадобится, и поэтому мы его опускаем.

В итоге для первой вариации вектор функционала \mathbf{J} , см. (1.3) получим

$$\delta \mathbf{J} = U_0(y)\delta y + \sum_{i=1}^{N_S+1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [(\dot{\chi} - F'(U))\delta U - \dot{U}\delta\chi] d\tau + \sum_{i=1}^{N_S+1} [U\delta\chi - F(U)\delta\tau]_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}. \quad (1.4)$$

В формуле (1.4) интегральный член не заменен на интеграл по отрезку $[0, t]$ ввиду того, что у функции U подразумевается наличие разрывов, по этой же причине вне интегральный член в (1.4), вообще говоря, не обращается в ноль тождественно.

Теперь рассмотрим ту форму приращения δU , которую ему можно придать, пользуясь наличием инвариантов Римана у системы из двух уравнений. Имеем

$$\delta U = \frac{\delta U \cdot l_1}{r_1 \cdot l_1} r_1 + \frac{\delta U \cdot l_2}{r_2 \cdot l_2} r_2 = \delta w \cdot r_1 + \delta z \cdot r_2$$

вследствие существования инвариантов Римана и выбранной нормировке для собственных векторов.

В соответствии с общей идеей работы [1] для формулировки вариационного принципа необходимо считать, что либо w , либо z являются функциями от (τ, χ) . Отметим, что таким образом можно построить не один, а два вариационных принципа для систем двух уравнений. Для определенности будем считать, что $z = z(\tau, \chi)$, тогда найдем

$$\delta U = \delta w \cdot r_1 + z_{,\chi} \delta \chi \cdot r_2, \quad (1.5)$$

где запись $z_{,\chi}$ обозначает частную производную $\partial / \partial \chi$ от функции z . Опять же в соответствии с [1] траектории, составляющие обобщенное решение системы (1.1), соответствуют критическим точкам вектор функционала \mathbf{J} , то есть на них $\delta \mathbf{J} = 0$. Проверим это.

Запишем каждое слагаемое интегральной части выражения (1.4) в виде

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [(\dot{\chi} - \mathbf{F}'(\mathbf{U}))\delta\mathbf{U} - \dot{\mathbf{U}}\delta\chi] d\tau = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [(\dot{\chi} - \mathbf{F}'(\mathbf{U}))(\delta w \cdot \mathbf{r}_1 + z_\chi \delta\chi \cdot \mathbf{r}_2) - \dot{\mathbf{U}}\delta\chi] d\tau =$$

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [(\dot{\chi} - \lambda_1(\mathbf{U}))\delta w \cdot \mathbf{r}_1 + (\dot{\chi} - \lambda_2(\mathbf{U}))z_\chi \delta\chi \cdot \mathbf{r}_2 - \dot{\mathbf{U}}\delta\chi] d\tau.$$

Поскольку приращения являются независимыми, то справедливы равенства

$$\dot{\chi} = \lambda_1(\mathbf{U}); (\dot{\chi} - \lambda_2(\mathbf{U}))z_\chi \mathbf{r}_2 - \dot{\mathbf{U}} = 0. \quad (1.6)$$

Инварианты Римана могут быть взяты за новые переменные, то есть справедливы следующие очевидные соотношения

$$(w_u, w_v) = \mathbf{l}_1; (z_u, z_v) = \mathbf{l}_2$$

$$\begin{pmatrix} w_u & w_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_w & u_z \\ v_w & v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{U}_w = 1 \quad \mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{U}_w = 0. \\ \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{U}_z = 0 \quad \mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{U}_z = 1$$

Далее $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{U}_w \dot{w} + \mathbf{U}_z \dot{z}$, подставляя это соотношение во второе уравнение (1.6), умножая последовательно на \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 , придем к равенствам

$$\dot{w} = 0; (\dot{\chi} - \lambda_2(\mathbf{U}))z_\chi - \dot{z} = 0. \quad (1.7)$$

Учитывая первое соотношение в (1.6) из второго соотношения в (1.7) выводим

$$z_\tau + \lambda_2 z_\chi = 0. \quad (1.8)$$

Полученные результаты означают, что гладкие части критических траекторий функционала \mathbf{J} удовлетворяют характеристическим соотношениям: $\dot{\chi} = \lambda_1$, $\dot{w} = 0$, $z_\tau + \lambda_2 z_\chi = 0$. Только для инварианта Римана w записаны соотношения вдоль характеристики, а для инварианта Римана z получилось соответствующее уравнение в частных производных, которое следует из характеристической формы системы (1.1).

Далее заметим, что обращение в ноль вне интегральных членов в (1.4) означает выполнение соотношений Гюгонио для введенных ранее кривых $\chi = s_i(\tau)$ (предполагаемых разрывов) и соответствует выполнению условий Вейерштрасса-Эрдмана для задачи вариационного исчисления. Также отметим, что при $i=1$ в не интегральном члене (1.4) произойдет компенсация с членом $\mathbf{U}_0(y)\delta y$ (удовлетворение начальных условий), а при $i=N_S+1$ соответствующий член обратится в ноль, поскольку конечная точка (t, x) не варьируется.

Теперь постараемся получить немного другую форму вариационного принципа, используя знание о характеристической форме системы.

Вариационное представление с использованием характеристической формы системы

Благодаря соотношениям (1.6) – (1.8) можно считать, что форма траектории, соединяющей точки $(0, y)$ и (t, x) известна. Таким образом, J превращается из функционала в функцию от переменных $\{y, \tau_i\}, i=1, \dots, N_S$. Эту функцию в данном параграфе мы также будем обозначать через J . Покажем, что, подобно формулировке вариационного принципа для одного уравнения, выполнение свойства $\nabla J = 0$ соответствует свойству $U(0, y) = U_0(y)$ (под выражением ∇J понимается операция градиента, примененная к каждой компоненте вектора J), кроме того, это свойство подразумевает выполнение соотношений Гюгонио на изломах траектории.

Итак, на каждом интервале $\tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i), i=1, \dots, N_S+1; \tau_0=0, \tau_{N_S+1}=t$ функции χ, U являются функциями переменной τ и параметров $\{\tau_{i-1}, \tau_i\}, i=1, \dots, N_S+1$ (при $i=1$ величина τ_0 заменяется на y). Вычислим частную производную $\partial J / \partial \tau_i$. В соответствии с формулой (1.3) для этого достаточно рассмотреть сумму $J_i + J_{i+1}$. Имеем,

$$\frac{\partial J}{\partial \tau_i} = -\left[L(\dot{\chi}, U) \right]_{\tau_i-0}^{\tau_i+0} + \sum_{k=i, i+1} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left[(\dot{\chi} - F'(U)) U'(W) W_{\tau_i} + U \dot{\chi}_{\tau_i} \right] d\tau. \quad (2.1)$$

Далее, интегрируя (2.1) по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \tau_i} = & \left[(\dot{\chi} + \chi_{\tau_i}) U - F(U) \right]_{\tau_i+0}^{\tau_i-0} + U \chi_{\tau_i} \Big|_{\tau_{i-1}}^{\tau_{i+1}} + \\ & \sum_{k=i, i+1} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left[(\dot{\chi} - F'(U)) U'(W) W_{\tau_i} - U'(W) \dot{W} \chi_{\tau_i} \right] d\tau \equiv I_0 + \sum_{k=i, i+1} I_k \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рассмотрим отдельно интегральный член в (2.2) и, учитывая (1.6) – (1.8), получим (обозначим через $(A; B)$ матрицу, составленную из векторов A и B)

$$\begin{aligned} I_k = & \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left[((\lambda_1 - F'(U)) U_w; (\lambda_1 - F'(U)) U_z) W_{\tau_i} - (U_w; U_z) \dot{W} \chi_{\tau_i} \right] d\tau = \\ & \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left[(0; (\lambda_1 - \lambda_2) U_z) W_{\tau_i} - (U_w; U_z) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{z} \end{pmatrix} \chi_{\tau_i} \right] d\tau = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left[(\lambda_1 - \lambda_2) U_z z_{\tau_i} - z_{\tau_i} \chi_{\tau_i} U_z \right] d\tau = \\ & \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left[((\lambda_1 - \lambda_2) z_{\chi} - z_t - \lambda_1 z_{\chi}) \chi_{\tau_i} U_z \right] d\tau = 0 \end{aligned}$$

То есть интегральные члены I_k в (2.2) обращаются в ноль. На рассматриваемых интервалах функция $\chi = \chi(\tau; \tau_{i-1}, \tau_i)$, при этом $\chi(\tau_{i-1}; \tau_{i-1}, \tau_i) = \chi_{i-1}(\tau_{i-1})$ и $\chi(\tau_i; \tau_{i-1}, \tau_i) = \chi_i(\tau_i)$, то есть второй член в I_0 обращается в ноль и

$$\frac{\partial J}{\partial \tau_i} = \left[\frac{d\chi_i}{d\tau_i} U - F(U) \right]_{\tau_i+0}^{\tau_i-0}, \quad i \neq 0. \quad (2.3)$$

При $i=0$ в соответствии с формулой (1.3) и после соответствующего интегрирования по частям имеем

$$\frac{\partial J}{\partial y} = U_0(y) - U(0, y). \quad (2.4)$$

То есть критические точки функции J (понимаемые покомпонентно) обеспечивают удовлетворение начальным данным и выполнение соотношений Гюгонио в точках излома траектории, то есть на разрывах неизвестных функций.

Теперь рассмотрим случай пересечения характеристик одного семейства, т.е. тот случай, когда в данную точку могут приходить две или более критические (т.е. удовлетворяющие соотношениям (1.6) – (1.8)) траектории. Без ограничения общности будем считать, что траектории характеристик не содержат изломов. Точки возможного пересечения характеристик образуют некоторую область в пространстве (t, x) . В случае вариационного принципа для одного уравнения кривая разрыва определяется тем, что на ней значения минимизирующего функционала на каждой из приходящих траекторий совпадают. Покажем, что это свойство сохраняется и для рассматриваемых нами систем.

Пусть существуют (опять без ограничения общности) две траектории $\chi_k(\tau, y_k; t, x), k=1,2$, такие что $\chi_k(0, y_k; t, x) = y_k, \chi_k(t, y_k; t, x) = x$. При этом фиксированные значения (t, x) определяют точку $y_k(t, x)$ при $\tau=0$. По аналогии с вариационным принципом для одного уравнения мы хотим определить кривую, на которой происходит разрыв, из равенства

$$\int_0^{y_1} U_0(s) ds + \int_0^t \{U_1 \dot{\chi}_1 - F(U_1)\} d\tau = \int_0^{y_2} U_0(s) ds + \int_0^t \{U_2 \dot{\chi}_2 - F(U_2)\} d\tau, \quad (2.5)$$

здесь $\chi_k(\tau, y_k)$ и $U_k(\tau, y_k)$ – соответственно характеристические кривые одного семейства, приходящие с разных сторон разрыва, и значения U на этих кривых. Уравнение (2.5) определяет некоторую кривую $X(t)$ такую, что $X(t) = \chi_k(t, y_k(t, X(t)))$.

Продифференцируем соотношение (2.5) по переменной t .

$$U_0(y_1) \frac{dy_1}{dt} + [U_1 \dot{\chi}_1 - F(U_1)] + \int_0^t \left\{ \frac{dU_1}{dt} \dot{\chi}_1 + U_1 \frac{d\dot{\chi}_1}{dt} - F'(U_1) \frac{dU_1}{dt} \right\} d\tau =$$

$$U_0(y_2) \frac{dy_2}{dt} + [U_2 \dot{\chi}_2 - F(U_2)] + \int_0^t \left\{ \frac{dU_2}{dt} \dot{\chi}_2 + U_2 \frac{d\dot{\chi}_2}{dt} - F'(U_2) \frac{dU_2}{dt} \right\} d\tau. \quad (2.6)$$

Интегрируя по частям, получим выражения для правой и левой стороны равенства (2.6), $k=1,2$

$$U_0(y_k) \frac{dy_k}{dt} + [U_k \dot{\chi}_k - F(U_k)] + U_k \frac{d\chi_k}{dt} \Big|_0^t + \int_0^t \left\{ (\dot{\chi}_k - F'(U_k)) \frac{dU_k}{dt} - \dot{U}_k \frac{d\chi_k}{dt} \right\} d\tau. \quad (2.7)$$

Заметим, что $\frac{dX}{dt} = \dot{\chi}_k \Big|_{\tau=t} + \frac{d\chi_k}{dt}$, то есть вместо (2.7) имеем

$$\left[U_k \frac{dX}{dt} - F(U_k) \right] + \int_0^t \left\{ (\dot{\chi}_k - F'(U_k)) \frac{dU_k}{dt} - \dot{U}_k \frac{d\chi_k}{dt} \right\} d\tau. \quad (2.8)$$

Далее интегральный член в (2.8) обратится в ноль аналогично тому, как это было показано для (2.2). Тогда соотношение (2.6) превратится в выражение для условий Гюгонио, то есть разрыв $X(t)$, задаваемый равенствами (2.5), удовлетворяет соотношениям Гюгонио. Таким образом, построенный нами вариационный принцип удовлетворяет основным свойствам вариационного принципа, построенного для одного уравнения, см. [5]. То есть он соответствует концепции слабого решения, основной проблемой, однако, остается поиск более конструктивного его варианта. Но здесь, по-видимому, необходимо вначале исследовать конкретные системы уравнений.

О контурах новых вычислительных стратегий на основе вариационных принципов.

Пример уравнения Хопфа

В известной работе Хопфа [6] сформулирован следующий метод (вариационный принцип) нахождения обобщенного решения простейшего уравнения $u_t + (u^2/2)_x = 0$ для функции $u(t, x)$. В этом параграфе будет рассмотрена возможность организовать численные расчеты на основе вариационного представления. При этом можно сказать получаются алгоритмы нового типа, которые заметно отличаются от тех, которые использовались ранее. Целью этого параграфа является простая демонстрация возможности расчетов, основанных на других принципах, на примере простейшего

квазилинейного уравнения. При этом намеренно использовались простейшие вычислительные процедуры. Здесь пока не идет речь о преимуществах или недостатках такого вида алгоритмов или о способах распространения подхода на системы квазилинейных уравнений.

В соответствии с [6] рассмотрим следующую функцию

$$F(t, x) = \text{global min}_{y \in R^1} \left(\int_0^y u_0(s) ds + \frac{(x-y)^2}{2t} \right), \quad (3.1)$$

где $u(0, x) = u_0(x)$ и решение уравнения Хопфа $u(t, x)$ определяется по формуле

$$u(t, x) = \frac{x - y(t, x)}{t}, \quad (3.2)$$

где $y(t, x)$ является точкой (таких точек может быть несколько) достижения глобального минимума в выражении (3.1). Отметим, что существование нескольких значений $y(t, x)$ сигнализирует о том, что в точке (t, x) имеет место разрыв с той или иной структурой.

Опишем вытекающий из представления (3.2) алгоритм. Пусть необходимо найти решение уравнения Хопфа на отрезке $[X_0, X_1]$ в некоторые моменты времени $t = t_n, n = 1, \dots, N$. Введем в рассмотрение две сетки. Первая сетка (в дальнейшем будем называть ее базовой) представляет собой набор точек $x_i \in [X_0, X_1], i = 1, \dots, I$, в которых необходимо получить решение $u(t, x)$.

Дополнительно рассчитываем две таблицы: значения функции $\varphi(\xi) = \int_0^\xi u_0(s) ds$ и ее производной $\psi(\xi) = u_0(\xi)$ на одном и том же наборе точек $\xi_j \in [K_0, K_1], j = 1, \dots, J$. Этот набор точек ξ_j назовем оптимизационной сеткой. Границы изменения K_0, K_1 переменной ξ найдем, зная границу базовой сетки X_0, X_1 и опираясь на тот факт, что характеристики исходного уравнения представляют собой прямые линии $x = y + u_0(y) t$. При заполнении таблицы для $\varphi(\xi)$ использовалась квадратурная формула трапеций.

Тогда решение $u_i^n = u(t_n, x_i)$ в точке x_i в момент времени t_n можно найти следующим образом.

- Сформировав на оптимизационной сетке таблицу значений $\Psi(\xi) = \psi(\xi) - (x_i - \xi) / t_n$, находим все интервалы (ξ_p, ξ_{p+1}) , на которых функция $\Psi(\xi)$ меняет знак.

- На каждом найденном интервале (ξ_p, ξ_{p+1}) методом деления пополам находим точку минимума функции $\Phi(\xi) = \varphi(\xi) + (x_i - \xi)^2 / (2t_n)$. Значение функции $\varphi(\xi)$ в произвольной точке ξ интервала (ξ_p, ξ_{p+1}) рассчитываем, предполагая линейное восполнение внутри интервала.
- После обработки всех интервалов, на которых функция $\Psi(\xi)$ меняет знак, находим интересующую нас точку глобального минимума ξ^* . Глобальный минимум может достигаться в нескольких точках. В этом случае пренебрегаем кратностью и выбираем одну из них, например, первую, встретившуюся при вычислениях. Наличие нескольких точек глобального минимума означает существование сильного разрыва решения в точке t_n, x_i .
- Вычисляем искомое решение по формуле $u_i^n = u(t_n, x_i) = (x_i - \xi^*) / t_n$.

Заметим, что с помощью приведенного алгоритма можно напрямую вычислить значение искомой функции в любой точке (t, x) . Введенные выше базовая и оптимизационная сетки могут быть совершенно произвольными. Более того, для представляемого здесь подхода понятие сетки в привычном смысле не имеет принципиального значения. Уместнее говорить просто о наборе точек-представителей. Но поскольку ниже мы проведем сравнение с традиционными разностными схемами, то будем придерживаться привычной в этом случае терминологии.

Все приводимые ниже примеры сравнивают решения уравнения Хопфа на равномерной сетке с шагом h при различных начальных функциях, полученные в результате применения различных вычислительных схем. Для сравнения были взяты две схемы: классическая схема Годунова первого порядка [7]. Результаты, полученные по этой схеме, будем обозначать как GOD. Вторая схема – второго порядка – схема Тадмора [8] (имеет аббревиатуру FD2 – full discrete 2nd order). Схема FD2 реализована в открытом пакете CentPack [9]. Программами этого пакета мы и воспользовались, включив их в собственный код и изменив интерфейс. Схема, основанная на решении минимизационной задачи и описанная выше, будет фигурировать под кодом MinExa. Как уже было отмечено, для этой вычислительной схемы вводится дополнительная оптимизационная сетка. Во всех приводимых тестах эта сетка предполагается равномерной с шагом h_{opt} .

Для сравнения численного решения и точного использовались дискретные аналоги L_1, L_2 норм локально для момента времени t_n

$$\|err\|_{L_1} = \Delta x \sum_{i=0}^I |err_i^n|; \|err\|_{L_2} = \left(\Delta x \sum_{i=0}^I (err_i^n)^2 \right)^{1/2}; err_i^n = |(u - u_{\text{exact}})_i^n|. \quad (3.3)$$

Теперь опишем проведенные вычислительные эксперименты и отметим особенности расчета в соответствии с описанным методом.

Тест 1. На отрезке $x \in [-1, 4]$ зададим начальную функцию $u_0(x) = \begin{cases} u_L = 1, & x \leq 0 \\ u_R = 0, & x \geq 0 \end{cases}$, которая определяет ударную волну, двигающуюся

направо со скоростью $s = (u_L + u_R) / 2 = 0.5$. Отметим, что для получения хороших результатов при вычислении $\psi(\xi)$ необходимо указать значение начальной функции в точке разрыва $x = 0$ так $u_0(0) = 0.5$, см. ниже табл. 1. Эта особенность связана с тем, что, вообще говоря, вариационный принцип может предоставить более детальную информацию о решении, чем стандартный подход, использующий пространства интегрируемых функций.

В табл. 1 на момент времени $t = 4$ показано, как меняется точность решения в зависимости от шага базовой сетки h . Видно, что точность схемы MinExa не зависит от шага h , что ожидаемо в силу тех принципов, которые положены в основу построения этой схемы. Для того чтобы получить хорошую точность, не нужно брать сетку все большей подробности, достаточно выбрать убедительный набор точек.

Таблица 1

**Зависимость точности решения (ударная волна) от шага базовой сетки h .
Время $t = 4$**

	MinExa Вариант 1 $h(\text{opt})=0.4$	MinExa Вариант 2 $h(\text{opt})=0.02$	GOD	FD2
$I=512, h=0.0098$ $\ err\ _{L_1}$ $\ err\ _{L_2}$	7.8×10^{-11} 5.5×10^{-11}	0.0098 0.099	0.00479 0.03339	0.00346 0.03180
$I=1024, h=0.0049$ $\ err\ _{L_1}$ $\ err\ _{L_2}$	7.8×10^{-11} 5.5×10^{-11}	0.0098 0.099	0.00274 0.02970	0.00216 0.02922
$I=2048, h=0.0024$ $\ err\ _{L_1}$ $\ err\ _{L_2}$	7.8×10^{-11} 5.5×10^{-11}	0.0098 0.099	0.00127 0.01850	0.00093 0.01471

В соответствии с отмеченной выше особенностью результаты по схеме MinExa представлены в двух вариантах: вариант 1 соответствует заданию на разрыве значения $u_0(0) = 0.5$, как и было сказано выше; в случае варианта 2 значение в точке разрыва $u_0(0) = 0$. Предпочтительность первого варианта

очевидна. При вычислении $\psi(\xi)$ в точке разрыва вносится ошибка порядка $O(h)$ и величина этой ошибки зависит от выбранного значения $u_0(0)$.

На рис. 2 (левая панель) показано, как решение зависит от значения $u_0(0)$. Положение ударной волны смещается в ту или иную сторону от истинного. На рис. 2 (правая панель) показаны профили решения, полученные по разным схемам. Параметры схемы MinExa соответствуют варианту 1, описанному выше. Видно, что схема MinExa наименее размывает разрыв.

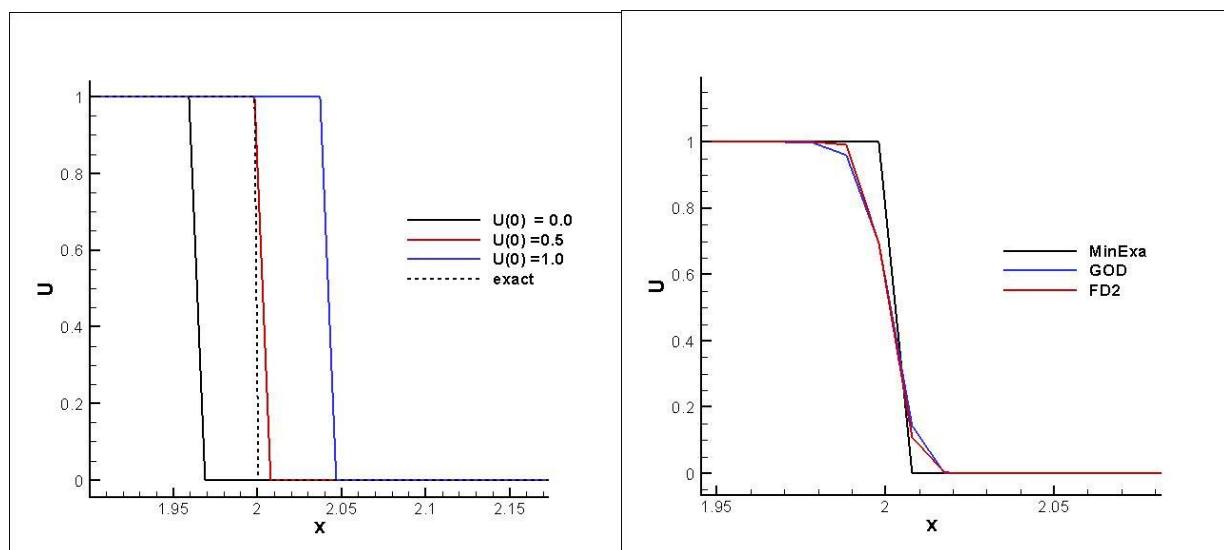


Рис.2. Зависимость решения от задания $u_0(0)$, $t = 4$, $h_{\text{opt}} = 0.08$, $h = 0.0049$ (левая панель); Профиль решения, полученный по разным вычислительным схемам, $t = 4$, $h_{\text{opt}} = 0.4$, $h = 0.0098$, $u_0(0) = 0$ (правая панель)

Отметим еще одну особенность предложенной вычислительной схемы, а именно остановимся дополнительно на вопросе зависимости точности получаемого решения от точности решения задачи минимизации. На рис. 3 приведены профили решения по схеме MinExa в двух случаях: в первом случае точность решения оптимизационной задачи была задана $\text{eps} = 10^{-3}$, а во втором задача решалась более точно $\text{eps} = 10^{-5}$. В случае невысокой точности решения задачи минимизации, на профиле решения появляются осцилляции, поскольку искомый минимум находится на плоском плато. Пример таких осцилляций также показан на рис. 3.

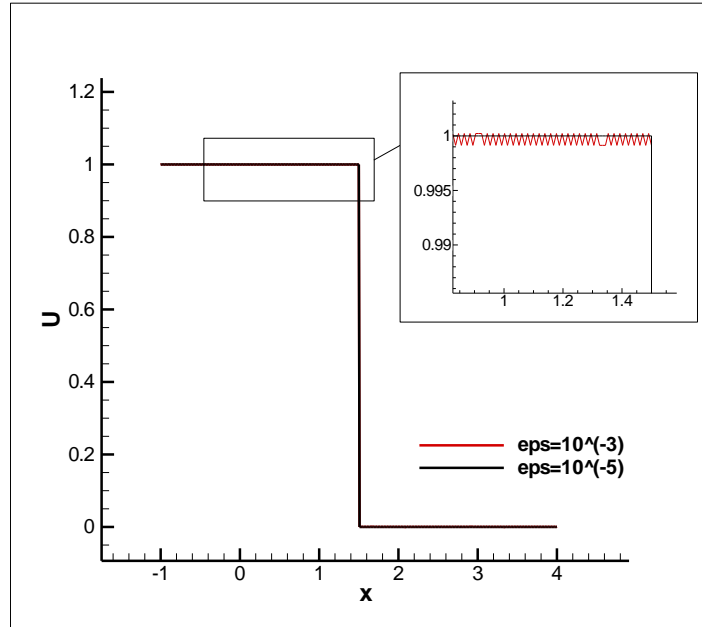


Рис.3. Зависимость решения от точности eps решения задачи оптимизации,
 $t=4$, $h_{opt}=0.4$, $h=0.0098$, $u_0(0)=0$

Тест 2. Теперь рассмотрим случай волны разрежения $u_0(x) = \begin{cases} u_L=0, & x \leq 0 \\ u_R=1, & x \geq 0 \end{cases}$. Задачу будем решать на отрезке $x \in [-1, 5]$ на момент времени $t=4$. Точное решение имеет вид волны разрежения $u=x/t$ при $0 \leq x \leq t$. В данном тесте значение $u_0(0)$ не важно, поскольку решение непрерывно. В табл. 2 и на рис. 4 приведены числовые параметры и иллюстрация точности решения по схеме MinExa и по другим схемам. Снова отметим более высокую точность решения по новой схеме.

Таблица 2

**Зависимость точности решения (волна разрежения)
от шага базовой сетки h . Время $t=4$**

	MinExa $h(opt)=1$	GOD	FD2
$I=64, h=0.0094$			
$\ err\ _{L_1}$	5.9×10^{-11}	0.22989	0.03981
$\ err\ _{L_2}$	2.9×10^{-11}	0.31429	0.02338
$I=128, h=0.0047$			
$\ err\ _{L_1}$	5.8×10^{-11}	0.12291	0.02118
$\ err\ _{L_2}$	2.9×10^{-11}	0.22078	0.01280

$I=256, h=0.0023$			
$\ err\ _{L_1}$	5.8×10^{-11}	0.07115	0.00997
$\ err\ _{L_2}$	2.9×10^{-11}	0.15555	0.00645

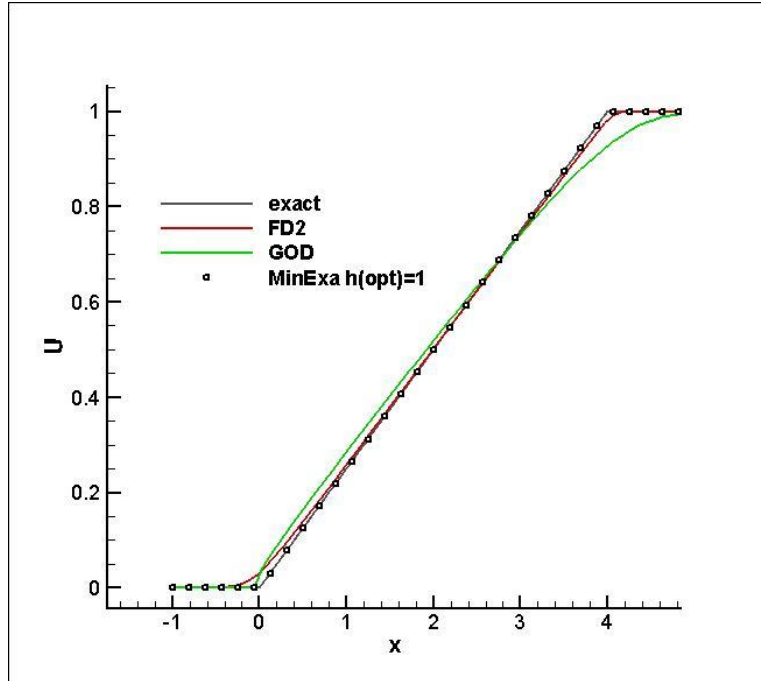


Рис.4. Профиль волны разрежения, полученный по разным вычислительным схемам, $t=4$, $h_{opt}=1$, $h=0.0094$

Тест 3. Теперь рассмотрим несколько более сложную начальную функцию $u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [X_L, X_R] \\ 0, & x \notin [X_L, X_R] \end{cases}$ при $X_L = -X_R = -0.1$. Точное обобщенное решение соответствующей задачи Коши имеет вид [10]

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{x - X_L}{t}, & x \in [X_L, X_L + t], & t \in (0, 2(X_R - X_L)] \\ 1, & x \in (X_L + t, X_R + 0.5t], & t \in (0, 2(X_R - X_L)] \\ 0, & x \notin [X_L, X_R + 0.5t], & t \in (0, 2(X_R - X_L)]. \\ \frac{x - X_L}{t}, & x \in [X_L, X_L + \sqrt{2(X_R - X_L)t}], & t > 2(X_R - X_L) \\ 0, & x \notin [X_L, X_L + \sqrt{2(X_R - X_L)t}], & t > 2(X_R - X_L) \end{cases}$$

В табл. 3 приведены числовые параметры точности решения в соответствии с различными схемами, которые подтверждают свойства схемы MinExa.

Таблица 3

**Зависимость точности решения (ударная волна и волна разрежения)
от шага базовой сетки h . Время $t=0.5$**

	MinExa $h(\text{opt})= 5 \times 10^{-3}$	MinExa $h(\text{opt})= 7 \times 10^{-3}$	GOD	FD2
$I=256, h=0.012$				
$\ err\ _{L_1}$	5.7×10^{-5}	5×10^{-5}	0.0061	0.0027
$\ err\ _{L_2}$	6.8×10^{-5}	7×10^{-5}	0.0302	0.0153
$I=512, h=0.006$				
$\ err\ _{L_1}$	5.7×10^{-5}	0.0018	0.0049	0.0017
$\ err\ _{L_2}$	6.8×10^{-5}	0.0390	0.0411	0.0226
$I=1024, h=0.003$				
$\ err\ _{L_1}$	5.7×10^{-5}	0.0018	0.0024	0.0008
$\ err\ _{L_2}$	6.8×10^{-5}	0.0390	0.0216	0.0122

На рис. 5 также представлена иллюстрация вида решения, рассчитанного в соответствии с различными схемами на два момента времени.

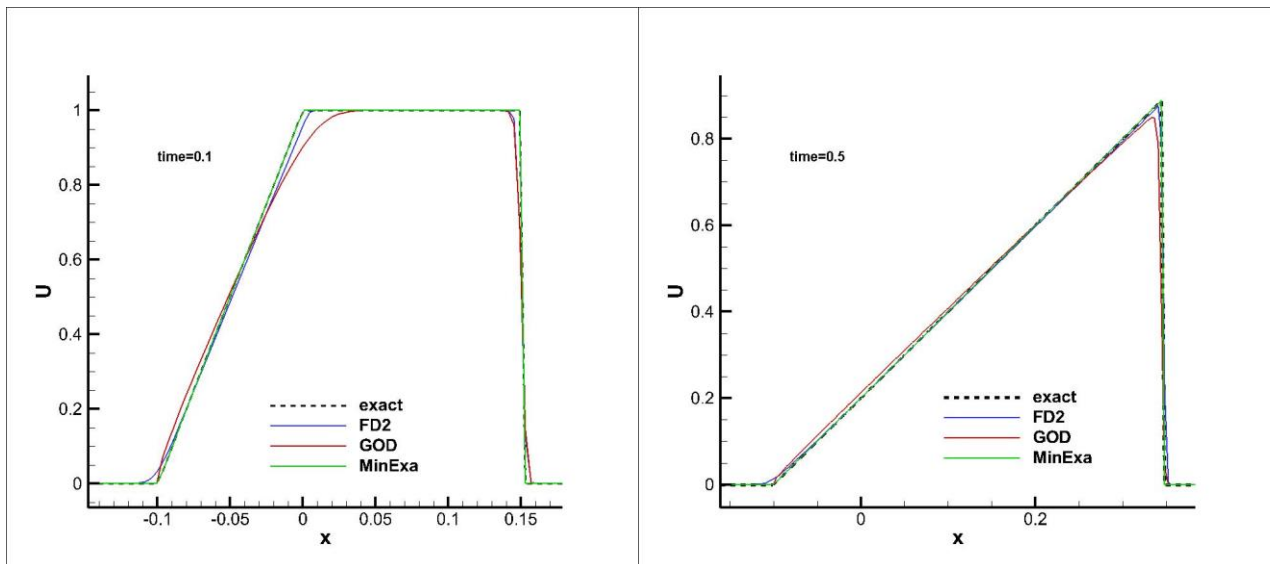


Рис.5. Профили решения, полученные по разным вычислительным схемам,
 $t=0.1, h_{\text{opt}}=0.004, h=0.012$ (левая панель);
 $t=0.5, h_{\text{opt}}=0.004, h=0.012$ (правая панель)

Тест 4. На отрезке $x \in [0, 2\pi]$ в начальный момент времени задается функция $u_0(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Рассмотрим ее эволюцию на временном интервале $t \in [0, 5]$ в предположении периодических краевых условий. Общий вид эволюции решения представлен на рис. 6.

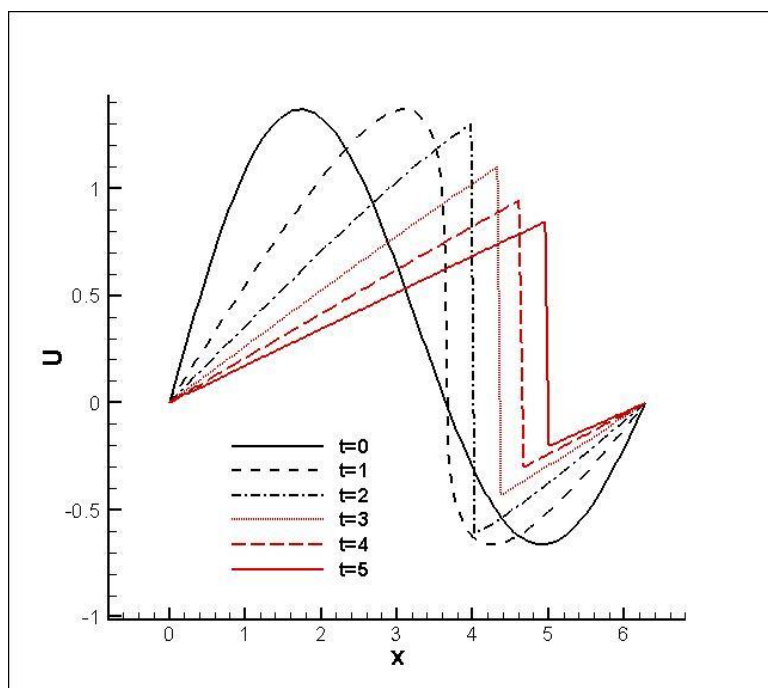


Рис.6. Профили решения в различные моменты времени

На рис. 7 приведено графическое сравнение решений, рассчитанных по разным разностным схемам.

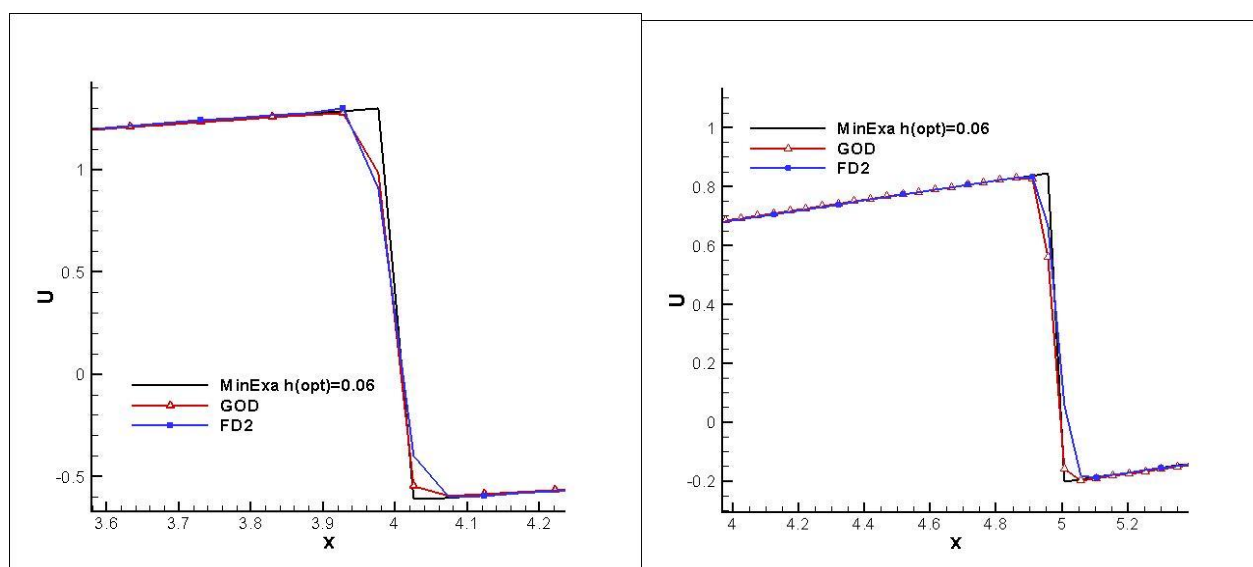


Рис.7. Сравнение решений, полученных по разным разностным схемам, $t = 2$ (левая панель); $t = 5$ (правая панель)

В заключение описания численной процедуры, основанной на вариационном принципе, отметим, что предлагаемый подход предоставляет возможность полного распараллеливания, как по времени, так и по пространству. Причем выбор базовой сетки на интересующем нас временном слое может быть уникальным, т.е. независимым от сетки на других контрольных временах. Отметим также гибкость в выборе "сеточных" представителей. Вопросы вычислительной емкости алгоритма на текущем этапе рассматривать преждевременно. Описанная процедура соответствует общей линии построения возможных алгоритмов на основе вариационных принципов, намеченной в [1]. Показанная в настоящем препринте возможность более конструктивного обобщения вариационного принципа на системы двух уравнений предоставляет возможность задуматься и о построении соответствующих алгоритмов.

Например, рассмотрим в качестве ближайшего обобщения одного квазилинейного закона сохранения, типичным частным случаем которого является уравнение Хопфа, систему уравнений изоэнтропической газовой динамики при $P = K\rho^3$. При таком выборе функции давления характеристики оказываются прямыми линиями, что и определяет близость (с точки зрения вариационного описания) указанных объектов. Напомним, что имеется принципиальная разница между одним уравнением и системой уравнений, которая состоит в том, что в случае системы характеристики, приходящие на разрыв, могут по пути пересекать другие разрывы с возникновением изломов. Однако в иллюстративных целях останавливаться на этом моменте сейчас не будем. Для первого характеристического поля указанной системы (при условии наличия только одного разрыва) вектор функционал $\mathbf{J} = (J_1, J_2)$ имеет вид

$$J_1 = \int_0^y \frac{z_0(s) - w_0(s)}{2\sqrt{3K}} ds - \frac{1}{4\sqrt{3K}} \int_0^t \left[z\left(\tau, y + \frac{x-y}{t}\tau\right) - \frac{x-y}{t} \right]^2 d\tau$$

$$J_2 = \int_0^y \frac{z_0^2(s) - w_0^2(s)}{4\sqrt{3K}} ds -$$

$$\frac{1}{4\sqrt{3K}} \cdot \frac{1}{3} \int_0^t \left[z\left(\tau, y + \frac{x-y}{t}\tau\right) - \frac{x-y}{t} \right]^2 \left[2z\left(\tau, y + \frac{x-y}{t}\tau\right) + \frac{x-y}{t} \right] d\tau$$

Здесь функция $z(\tau, \chi)$ предполагается известной, а функция $w(\tau, \chi)$ определяется. Однако для второго характеристического поля может быть определен аналогичный функционал, в котором переопределяется $z(\tau, \chi)$ на основе известной $w(\tau, \chi)$. Таким образом, возникает естественная итерационная процедура. Это является возможным путем построения соответствующего алгоритма, но требует дальнейшей модификации вариационного подхода с точки зрения увеличения его конструктивности.

Впрочем, также могут возникнуть и другие подходы к построению алгоритмов на основе вариационных принципов, см., например, [3].

Библиографический список

- [1] Рыков Ю.Г. Вариационное представление обобщенных решений квазилинейных гиперболических систем и возможные алгоритмы для гибридных вычислительных комплексов // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 2011. — № 62. — 9 с. — URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-62>
- [2] E Weinan, Rykov Yu.G. & Sinai Ya.G. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics // Comm.Math.Phys. — 1996. — V. 177. — p. 349 – 380
- [3] Aptekarev A.I., Rykov Yu.G. On the variational representation of solutions to some quasilinear equations and systems of hyperbolic type on the basis of potential theory // Russian Journal of Math. Phys. — 2006. — V. 13. — № 1. — p. 4 – 12
- [4] Keyfitz B. L., Kranzer H. C. A viscous approximation to a system of conservation laws with no classical Riemann solution // in C. Carasso et al., (eds), Nonlinear Hyperbolic problems. Lecture Notes in Math. — 1989. — V. 1402. — p. 185 – 197
- [5] Олейник О.А. Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями // Труды Моск. Мат. Об-ва. — 1956. — Т. 5. — с. 433 – 454
- [6] Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. — 1950. — V. 3. — p. 201 – 230
- [7] Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов [и др.] // Наука, Москва. — 1976. — 400 с.
- [8] Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory Central Differencing for Hyperbolic Conservation Laws // J. Comput. Phys. — 1990. — V. 87. — № 2. — p. 408 – 463
- [9] CentPack: A package of high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws. <http://www.cscamm.umd.edu/centpack>
- [10] Александрикова Т.А., Галанин М. П. Нелинейная монотонизация схемы К. И. Бабенко для численного решения квазилинейного уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2003. — № 62. — 35 с. — URL: http://keldysh.ru/papers/2003/rep62/rep2003_62.html

Оглавление

Вводные замечания	3
Формулировка вариационного представления обобщенных решений для квазилинейных гиперболических систем двух уравнений	3
Вариационное представление с использованием характеристической формы системы.....	9
О контурах новых вычислительных стратегий на основе вариационных принципов. Пример уравнения Хопфа.....	11