



**Жуков В.Т., Новикова Н.Д.,  
Феодоритова О.Б.**

О применении  
многосеточного и явно-  
итерационного методов к  
решению параболических  
уравнений с анизотропными  
разрывными  
коэффициентами

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. О применении многосеточного и явно-итерационного методов к решению параболических уравнений с анизотропными разрывными коэффициентами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 85. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-85>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**В.Т. Жуков, Н.Д. Новикова, О.Б. Феодоритова**

**О применении многосеточного  
и явно-итерационного методов  
к решению параболических уравнений  
с анизотропными разрывными  
коэффициентами**

**Москва — 2014**

***Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б.***

**О применении многосеточного и явно-итерационного методов к решению параболических уравнений с анизотропными разрывными коэффициентами**

Проведено исследование и развитие многосеточного и явно-итерационного методов решения трехмерных прикладных задач в актуальных областях на основе оптимальных свойств чебышевских многочленов. Изучена неявная схема для параболического уравнения, основанная на многосеточном методе. Новыми элементами являются реализация операторов межсеточных переходов для разрывных коэффициентов уравнения и адаптация к границам высокочастотного спектра сеточных операторов. Адаптация выполняется в ходе многосеточных итераций и повышает эффективность метода. Явно-итерационная схема с чебышевскими параметрами рассмотрена как конкурент многосеточной схемы. Для этих схем приведены результаты сравнения на модельных задачах. Обе схемы обеспечивают высокую эффективность, хорошо масштабируются и позволяют преодолеть трудности, связанные с достижением эксафлопсных скоростей.

***Ключевые слова:*** трехмерные параболические уравнения, многосеточный метод, чебышевские итерации, параллельная реализация

***Victor Timofeevich Zhukov, Natalia Dmitrievna Novikova, Olga Borisovna Feodoritova***

**On application of multigrid and explicit-iterative methods to solution of the parabolic equations with anisotropic discontinuous coefficients**

The research and development of multigrid and explicit-iterative methods for solving actual 3D applied problems based on optimal properties of Chebyshev polynomials. The implicit scheme for parabolic equation based on the multigrid is studied. The new elements are construction of intergrid transfer operators for case of discontinuous coefficients and adaptation to the boundary of high frequency spectrum of the discrete operator. The adaptation is performed in the multigrid iterations and it increases the efficiency of the method. Explicit-iterative scheme with Chebyshev parameters is studied as a competitor of the multigrid scheme. For these schemes the results of comparison on the model problems are demonstrated. Both schemes provide a high performance; they scale well and allow overcoming difficulties in achieving exaflops performance.

***Key words:*** three-dimensional parabolic equations, multigrid, Chebyshev's iterations, parallel implementation

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

## Введение

Данная работа является продолжением серии работ [1–5] и посвящена вопросам совершенствования многосеточного алгоритма решения трехмерных параболических и эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами с большим перепадом величин на поверхности разрыва коэффициентов. Практическая необходимость в эффективном решении таких задач вызвана их широким распространением в математических моделях описания многомасштабных процессов в неоднородных областях. Заметим, что многие известные методы в современной парадигме экстремассивного параллелизма становятся трудными для применения.

Мы развиваем ультрапараллельный многосеточный метод, опираясь на классический метод Р.П. Федоренко [6], для суперкомпьютеров современных архитектур в целях обеспечить масштабируемое моделирование на расчетных сетках с миллиардом (и более) узлов с достижением в перспективе эксафлопсной производительности. Многосеточный метод является методом сквозного счета и не требует априорного выделения поверхностей разрыва коэффициентов и согласования с этими поверхностями координатных сеточных плоскостей.

В данной работе приводится алгоритм построения проблемно-зависимых операторов межсеточных переходов и показывается на примерах его работоспособность. Показано, что стандартные операторы межсеточных переходов, основанные на полилинейной интерполяции, приводят к появлению паразитических «пил» в решении и замедлению скорости сходимости многосеточных итераций.

В эволюционных нестационарных задачах новым элементом в отличие от эллиптических стационарных задач является наличие «фронтов» в решении, образующихся, например, в процессе распространения тепла в области, состоящей в начальный момент времени из разных частей: холодной низкотеплопроводной и горячей высокотеплопроводной. В стационарном решении таких явлений типа тепловых фронтов нет – за бесконечное время температура в областях выравнивается.

Другим новым элементом в эволюционных задачах является обеспечение точности интегрирования по времени. Ясно, что это проблема выбора шага по времени, само по себе применение неявной схемы не гарантирует высокой точности описания эволюции решения во времени. Именно поэтому в качестве конкурента многосеточного алгоритма в условиях экстремассивного параллелизма выступает явно-итерационная схема ЛИ-М [7], специально разработанная для решения параболических уравнений на основе [8]. Ее особенностью является учет свойства разностной аппроксимации параболических уравнений: нужен правильный расчет эволюции во времени низкочастотных компонент разностного решения, а для высокочастотных компонент достаточно обеспечить их ограниченность для устойчивости. В схеме ЛИ-М этот принцип выполнен. Расчет по схеме ЛИ-М решения на верхнем слое

по времени состоит в выполнении определенного числа явных итераций с параметрами, являющимися корнями многочленов Чебышева 1 рода. В схеме ЛИ-М в отличие от обычного чебышевского ускорения выбор числа итераций и итерационных параметров диктуется условиями аппроксимации и устойчивости, а не оптимизацией сходимости итераций к решению неявной схемы. Оказывается, что свойство схемы ЛИ-М уменьшать более сильно декременты затухания гармоник высокочастотной части спектра отвечает природе многосеточного метода и обеспечивает эффективность использования схемы ЛИ-М в качестве сглаживателя.

Для параболических уравнений с разрывными коэффициентами развитие многосеточного метода идет по следующему направлению. Используя один из методов пространственной дискретизации, например, стандартную 7-точечную конечно-объемную 3D дискретизацию, можно исходную задачу свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для такой задачи мы записываем неявную двухслойную по времени схему, разрешаемую относительно неизвестной функции на верхнем слое с помощью многосеточного алгоритма. Она обозначается ниже как схема ММ – схема на основе многосеточного метода. Отметим, что алгоритм ММ использует чебышевские итерации при решении уравнений на самой грубой сетке, а также на этапах сглаживания, на всех сеточных уровнях, кроме самого грубого. В качестве сглаживателя может использоваться и схема ЛИ-М в модификации, обеспечивающей сглаживание невязки в высокочастотной области спектра сеточного оператора, отвечающей негладким собственным функциям. Такое сглаживание обеспечивает правильный переход на более грубую сетку. Это означает, что правильно выбранные системно-алгоритмические решения, обеспечивающие эффективную параллельную реализацию схемы ЛИ-М, одновременно обеспечат и эффективность кода ММ.

В данной работе для схемы ММ изучен новый ресурс повышения эффективности схемы – при использовании режима с адаптацией можно взять полученное на первом шаге по времени значение границы раздела высокочастотной спектра в качестве постоянного значения на всех следующих шагах по времени. По-видимому, такой подход перспективен, если исходный дифференциальный оператор не зависит от времени.

Преимущества схемы ММ – это работоспособность в любом диапазоне параболических чисел Куранта и независимость числа итераций от измельчения сетки. Результаты расчетов показывают, что эти преимущества ярко проявляются при больших значениях числа Куранта, типичных при решении задач методом установления. При относительно небольших значениях числа Куранта становится конкурентоспособной схема ЛИ-М. Отличительной чертой схемы ЛИ-М, повышающей ее конкурентоспособность, является отсутствие настроечных параметров. В схеме ММ они есть: это точность итерационного решения неявной схемы, тип и параметры сглаживателя, число сеточных уровней, точность решения системы уравнений на самой грубой сетке.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу для параболического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} u) - a_0 \cdot u + f, & r \in G, \\ -(\kappa \operatorname{grad} u) \cdot n &= \alpha u + \gamma, & r \in \Gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $r = (t, x, y, z) \in G = [t_0; T] \times \Omega$ ,  $[t_0; T]$  – заданный интервал времени,  $\Omega$  – трехмерная область с границей  $\Gamma$ ,  $n$  – вектор внешней нормали к границе области. Функции  $\kappa(r)$ ,  $a_0(r)$ ,  $f(r)$ ,  $\alpha(r)$ ,  $\gamma(r)$  являются заданными, а функция  $u(r)$  – искомой. В общем случае  $\kappa$  – тензор диффузии; мы здесь ограничимся случаем, когда  $\kappa$  – скалярная функция. Задача (1) решается с краевыми условиями общего вида и начальными данными при  $t = t_0$ .

Считаем область  $\Omega$  для простоты 3-мерным прямым параллелепипедом. Возьмем в  $[t_0, T] \times \Omega$  сетку  $\Omega_{h,\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$ , где  $\Omega_\tau = \{t_j, 0 \leq j \leq J, t_J = T\}$  – разностная сетка по времени с переменным шагом  $\tau > 0$ :  $\tau_j = t_{j+1} - t_j$ ,  $\Omega_h = \{x_n \in \Omega, 0 \leq n \leq N\}$  – декартова неравномерная сетка в параллелепипеде, зависящая от параметра  $h$  (шага сетки), характеризующего средний размер ячеек.

Запишем дифференциально-разностную аппроксимацию задачи (1) в операторной форме (учитывая краевые условия в определении оператора  $L_h$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_h \cdot u = f. \quad (2)$$

По постановке задачи и принятой аппроксимации оператор  $L_h$  является самосопряженным и неотрицательно-определенным. Переход со слоя  $t_j$  на верхний слой  $t_{j+1} = t_j + \tau$  может быть реализован разными способами:

– по явной схеме

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\tau} + L_h \cdot u_j = f_j, \quad (3)$$

требующей жесткого ограничения на шаг по времени;

– по чисто неявной схеме

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\tau} + L_h \cdot u_{j+1} = f_j. \quad (4)$$

Неявная схема может быть записана в виде системы линейных уравнений

$$(I + \tau \cdot L_h) u_{j+1} = u_j + \tau f_j; \quad (5)$$

здесь  $I$  – тождественный сеточный оператор. Запишем эту систему в виде

$$A_h u_h = g_h, \quad (6)$$

где  $A_h = I + \tau \cdot L_h$  – разреженная  $N \times N$ – матрица,  $u_h, g_h$  – искомая и заданная сеточные функции. Считаем, что оценки границ спектра  $\lambda_{\min} \geq 0$  и  $\lambda_{\max}$  оператора  $A_h$  известны; в ряде случаев они могут быть вычислены, см. [2].

Систему (6) решаем многосеточным алгоритмом. Как уже говорилось выше, вопрос о согласовании точности итерационного решения такой системы с требуемой точностью интегрирования по времени является открытым и решается эмпирическим путем.

Расчет по схеме ЛИ-М решения на верхнем слое по времени состоит в выполнении определенного числа явных итераций с параметрами, являющимися корнями многочленов Чебышева 1 рода; схематично эта схема описана в следующем разделе.

## 2. Схема локальных итераций ЛИ-М

Для простоты запишем эту схему для однородного параболического уравнения, т.е. в (2)  $f \equiv 0$ . В этой схеме переход с нижнего слоя по времени  $t_j$  на верхний слой  $t_{j+1} = t_j + \tau$  делается с помощью  $\nu = 2p - 1$  явных шагов. В операторном виде этот переход можно записать как

$$u_{j+1} = W \cdot u_j, \quad (7)$$

где

$$W = (I - F_p^2) \cdot (I + \tau L_h)^{-1} \quad (8)$$

оператор послойного перехода, определяемый операторным многочленом Чебышева  $F_p(L_h)$  специальной конструкции [7] алгебраической степени

$$p = \left\lceil \frac{\pi}{4} \sqrt{\tau \lambda_{\max} + 1} \right\rceil. \quad (9)$$

Многочлен  $F_p$  есть оптимальный многочлен Чебышева 1-го рода, наименее уклоняющийся от 0 на отрезке  $[\lambda_0; \lambda_{\max}]$ . Здесь  $\lambda_{\max}$  оценка максимального собственного значения оператора  $L_h$ , а левый конец  $\lambda_0$  отрезка определяется двумя параметрами  $p, \lambda_{\max}$  по формулам [2]:

$$\lambda_0 = \lambda_{\max} \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} \in [-1/\tau, 0], \quad z_1 = \cos \frac{\pi}{2p}.$$

Вместо операторной записи (7) схему ЛИ-М удобно объяснить в терминах «декрементной» функции

$$\rho_{\text{ЛИ-М}}(\lambda) = \frac{1 - F_p^2(\lambda)}{1 + \tau\lambda}, \quad (10)$$

описывающей затухание гармоник на одном шаге по времени; в точках спектра оператора  $L_h$  значения этой функции являются собственными числами оператора перехода  $W$ ; здесь  $\lambda \in [0; \lambda_{\max}]$  – отрезок вещественной оси, содержащий спектр оператора  $L_h$ . Многочлен  $F_p$ , определяющий эту функцию, обладает свойством оптимальности (наименьшего уклонения от 0) на различных отрезках.

На начальном участке спектра функция  $\rho_{\text{ЛИ-М}}(\lambda)$  (10) аппроксимирует декрементную функцию точного оператора перехода  $\exp(-\tau L_h)$ . Заметим, что оператор перехода неявной схемы (4) имеет вид  $(I + \tau L_h)^{-1}$ , а вопрос о том, какая из двух аппроксимаций точного оператора  $\exp(-\tau L_h)$  является лучшей, остается открытым и зависит от шага по времени и конкретной задачи.

Схема ЛИ-М требует задания оценки максимального собственного значения  $\lambda_{\max}$  оператора  $L_h$ ; вычисление этой оценки не представляет труда и производится на основе теоремы Гершгорина.

По сравнению со схемой ЛИ-М, другая рассматриваемая здесь схема ММ обладает таким существенным достоинством как оптимальность при разрешении неявной схемы. Это означает, что при фиксированном шаге  $\tau$  и заданной точности решения системы уравнений (6) число многосеточных итераций при  $h \rightarrow 0$  не зависит от  $h$ . Схема ЛИ-М в этом смысле не является оптимальной: число  $\nu = 2p - 1$  явных итераций определяется согласно (9) как  $O(1/h)$ . Но у нее есть важное качество: при малых значениях шага по времени  $\tau < \tau_{\text{exp}}$ , удовлетворяющих условию устойчивости явной схемы  $\tau_{\text{exp}} \cdot \lambda_{\max} < 2$ , схема ЛИ-М автоматически переходит в явную схему, обеспечивающую на одном шаге минимум вычислительных затрат. Для иллюстрации на рис. 1 показаны декрементные функции схем на начальной части спектра, отвечающей гладким модам. По оси абсцисс отложен начальный участок  $[0; 0.25]$  нормированного спектрального отрезка  $[0; \lambda_{\max} \cdot h^2] = [0; 12]$ . Показаны графики декрементов: точной схемы  $\exp(-\tau \cdot \lambda)$  (пунктир), неявной схемы  $(1 + \tau\lambda)^{-1}$  (черная линия), схемы ЛИ-М для «стандартного» значения  $p = 10$  (красная линия) и для удвоенного числа  $p$  (кружки), явной схемы  $\rho = 1 - \tau \cdot \lambda$  – это касательная к графику функции  $\exp(-\tau \cdot \lambda)$  в начале координат (синяя линия); при  $\lambda = \lambda_{\max}$  (выходящем за пределы рисунка) этот множитель по модулю равен 150. Видим, что декрементные функции неявной схемы и ЛИ-М для удвоенного числа  $p$  практически совпадают.



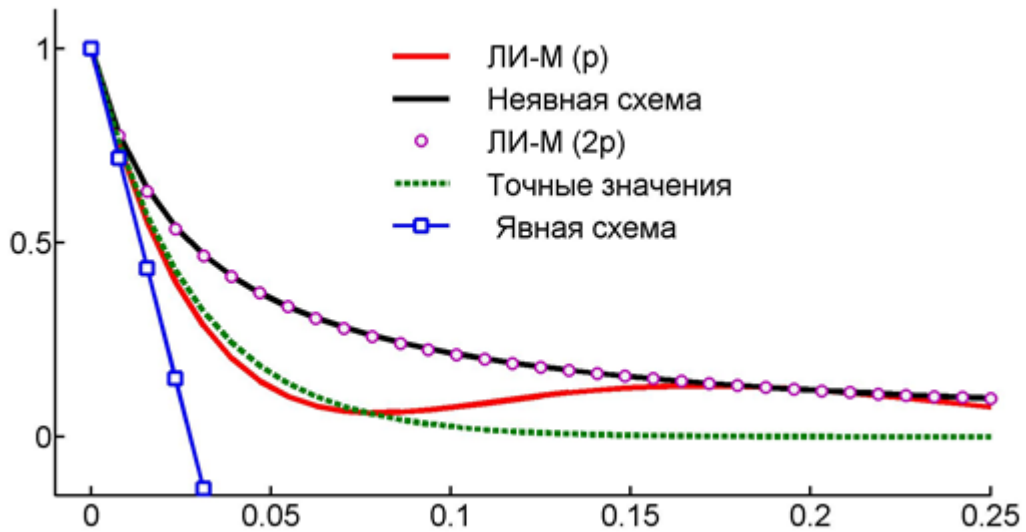


Рис. 1. Декрементные функции схем на начальном участке спектра

При стандартном значении  $p$  многочлен  $F_p$  достигает экстремальных значений, равных  $\pm 1$ . В этих точках функция  $\rho_{\text{ЛИ-M}}(\lambda)$  обращается в 0; это значение может быть ближе к точному значению  $\exp(-\tau \cdot \lambda)$ , чем значение  $(1 + \tau \lambda)^{-1}$  декрементной функции неявной схемы. Для удвоенного числа  $p$  многочлен  $F_p$  достигает экстремальных значений, равных  $\pm \pi/24$ , а значит, максимальное отличие функций  $\rho_{\text{ЛИ-M}}(\lambda)$  и  $(1 + \tau \lambda)^{-1}$  меньше, чем  $(\pi/24)^2 \approx 1.7 \cdot 10^{-2}$ , поэтому их графики неразличимы.

### 3. Схема на основе многосеточного метода

#### 3.1. Основные элементы алгоритма

Неявная схема, записанная в виде системы линейных уравнений (6), решается многосеточным алгоритмом [1–5]. Приведем формализацию этого метода в двухсеточном представлении, т.е. опишем переход с подробной сетки на другую сетку, называемую грубой. Объекты этих сеток будем отмечать символами  $h$  и  $H$  соответственно. В двухсеточном представлении итерирующий оператор многосеточного метода имеет вид

$$Q = S_p \cdot (I - P \cdot A_H^{-1} \cdot R \cdot A_h) \cdot S_p. \quad (11)$$

Здесь  $A_h, A_H$  – операторы на подробной и грубой сетках;  $P$  и  $R$  – операторы межсеточных переходов – с грубой сетки на подробную (интерполяции  $P$ ) и с подробной на грубую сетку (проектирования  $R$ );  $S_p$  – оператор сглаживания с числом  $p$  пред- и постсглаживающих шагов. В рассматриваемом алгоритме оператор  $A_H$  строится редискретизацией, то есть на грубой сетке записывается

аппроксимация исходного уравнения (5) (с однородными краевыми условиями), а в качестве правой части на грубой сетке берется невязка результата действия оператора проектирования  $R$  на невязку  $r_h = g_h - A_h u_h$ .

Стандартный оператор интерполяции  $P$  определяет переменные на подробной сетке с помощью трилинейной интерполяции грубосеточных переменных. Для решения задач с разрывными коэффициентами диффузии нами построен специальный оператор интерполяции  $P$  в так называемой операторно-зависимой форме. Этот оператор основан на приближенном учете непрерывности диффузионного потока на поверхности разрыва коэффициента диффузии. В качестве оператора сборки  $R$  всегда строится оператор, сопряженный к оператору интерполяции  $R = P^*$ .

Разрешающий оператор многосеточного метода после выполнения  $m$  итераций имеет вид  $C = (I - Q^m) \cdot A_h^{-1}$ ; с помощью этого оператора можно формально записать полученное приближенное решение как  $u_h = C \cdot f_h$ . Видим, что при  $Q^m \rightarrow 0$  разрешающий оператор многосеточного метода приближает обратный к  $A_h$ :  $C \rightarrow A_h^{-1}$ .

Будем предполагать, что на каждом сеточном уровне, включая самый грубый, известны оценки границ спектра  $\lambda_{min} \geq 0$  и  $\lambda_{max}$ . Верхняя граница легко и достаточно хорошо оценивается с помощью теоремы Гершгорина о кругах, а в качестве нижней границы  $\lambda_{min}$  на каждом сеточном уровне можно взять оценку, полученную на основной сетке, см. [2].

### 3.2. Операторы межсеточных переходов

Напомним стандартные требования к операторам межсеточных переходов  $P$  и  $R$ . Согласно [9] порядок  $m_P$  оператора интерполяции  $P$  равен  $k+1$ , если интерполяция точна на полиномах степени  $k$ ; порядок  $m_R$  оператора  $R$  равен порядку сопряженного оператора  $R^*$ . Для обеспечения достаточных условий сходимости многосеточного метода для дифференциального оператора порядка  $d$  требуется выполнение условия [9]

$$m_P + m_R > d. \quad (12)$$

Как правило, использование межсеточных операторов более высокого порядка не приводит к заметному ускорению сходимости метода, поэтому мы пользуемся оператором линейной интерполяции  $P$  и ему сопряженным оператором  $R = P^*$  (их порядки  $m_P = 2$  и  $m_R = 2$ ), или так называемыми операторами в проблемно-зависимой форме. Дело в том, что для разрывных коэффициентов диффузии операторы межсеточных переходов  $P$  и  $R$ , основанные на линейной интерполяции, могут приводить к медленной сходимости (и даже расходимости) многосеточных итераций, а, как будет

показано на примерах, операторы межсеточных переходов в проблемно-зависимой форме обеспечивают работоспособность многосеточного метода.

Оператор интерполяции  $P$  в проблемно-зависимой форме (см., например, [9, стр. 272]) основан на приближенном решении локальных краевых задач для исходного уравнения.

Покажем сначала, как строится такой оператор в простейшем одномерном случае. Пусть  $x_{2i}$ ,  $x_{2i+2}$  – два соседних узла грубой сетки, и между ними лежит один узел  $x_{2i+1}$  подробной  $h$ -сетки. Значения сеточной функции  $u_{2i}$ , и  $u_{2i+2}$  известны, и нам нужно определить значение  $u_{2i+1}^h$  сеточной функции в узле  $h$ -сетки. Положим  $h^- = x_{2i+1} - x_{2i}$ ,  $h^+ = x_{2i+2} - x_{2i+1}$ . Стандартная линейная интерполяция дает

$$u_{2i+1}^h = (1-d) \cdot u_{2i}^H + d \cdot u_{2i+2}^H, \quad d = h^- / (h^- + h^+).$$

Предположим, что одномерная задача имеет вид

$$(D(x) u_x(x))_x - a_0 \cdot u = 0$$

и коэффициент  $D(x)$  является разрывным; пусть для простоты он кусочно-постоянен:  $D(x) \equiv D^-$ ,  $x_{2i}^H < x < x_{2i+1}^h$ ,  $D(x) \equiv D^+$ ,  $x_{2i+1}^h < x < x_{2i+2}^H$ . Из разностного уравнения в узле  $x_{2i+1}^h$  находим

$$u_{2i+1}^h = (1-d) \cdot u_{2i}^H + d \cdot u_{2i+2}^H, \quad d = D^- h^- / (D^+ h^- + D^- h^+ + a_0). \quad (13)$$

Положим эту формулу в основу определения оператора интерполяции  $P$ . Тогда, несмотря на нарушение таким оператором условия (12), для одномерного уравнения диффузии сходимость многосеточного метода обоснована (при некоторых дополнительных предположениях, см. обсуждение проблемы разрывных коэффициентов диффузии в [9]).

Прямого обобщения одномерной техники построения проблемно-зависимой интерполяции на многомерный случай нет, поэтому мы пользуемся приближенным подходом, рассматривая последовательно 4 случая.

1) Узел  $h$ -сетки совпадает с узлом  $H$ -сетки. Интерполяция является тождественным переносом сеточного значения из узла грубой сетки.

2) Узел  $h$ -сетки лежит на  $H$ -линии. Возьмем исходную разностную схему в этом узле, но потоки на гранях дуальной ячейки, параллельных  $H$ -линии, зададим нулевыми. Тогда интерполяция в силу этого приближенного разностного уравнения сводится к решению вида (13) локальной одномерной сеточной задачи с краевыми условиями Дирихле, полученными на этапе 1.

3) Узел  $h$ -сетки лежит на  $H$ -плоскости. Возьмем исходную разностную схему в этом узле и положим нулевыми потоки на гранях дуальной ячейки, параллельных  $H$ -плоскости. Тогда интерполяция в силу полученного

приближенного разностного уравнения сводится к решению локальной двумерной сеточной задачи с краевыми условиями Дирихле, полученными на этапах 1–2. Это решение легко выписывается в явном виде.

4) Узел  $h$ -сетки лежит строго внутри ячейки  $H$ -сетки. Интерполяция в это узел выписывается в явном виде как решение локальной трехмерной сеточной задачи с краевыми условиями Дирихле, полученными на этапах 1–3.

В случае прореживания через узел каждая локальная сеточная задача этапов 2–4 представляет собой линейное алгебраическое уравнение с одним неизвестным. В общем случае получаются системы линейных уравнений, не вызывающие трудностей при их решении ввиду малой размерности.

Проблемно-зависимые операторы  $P$  и  $R$  имеют порядки  $m_P=1$  и  $m_R=1$ , но в отличие от операторов линейной интерполяции именно они обеспечивают работоспособность многосеточного метода в случае решения задач с разрывными коэффициентами.

Автоматическое обеспечение условия ортогональности выполняется при выполнении равенства  $R=P^*$  в сеточном скалярном произведении. Действительно, пусть  $c = (1, \dots, 1)_h$  и  $C = (1, \dots, 1)_H$  – сеточные функции–константы на подробной и грубой сетках соответственно, и на  $h$ -сетке для невязки  $r$  выполнено условие ортогональности  $(r, c)_h = 0$ . Тогда в силу равенств

$$(R \cdot r, C)_H = (r, R^* \cdot C)_h = (r, P \cdot C)_h = (r, c)_h$$

выполнено условие ортогональности  $(R \cdot r, C)_H = 0$  и на грубой сетке. Последнее равенство в цепочке справедливо, так как оператор линейной интерполяции  $P$  точен на линейных функциях, а оператор в проблемно-зависимой форме для вырожденной задачи Неймана точен на функциях-константах. Поэтому положим условие сопряженности операторов интерполяции и проектирования, то есть равенство  $(Ru, W)_H = (u, PW)_h$ , в основу определения оператора проектирования. Именно с помощью этого равенства мы строим явное выражение для оператора  $R$ , причем техника построения оператора  $R$  локальна и не препятствует параллельной реализации, она повторяет структуру построения оператора  $R$ , когда оператор  $P$  определен с помощью формул линейной интерполяции. Явного транспонирования матричных операторов мы, конечно, избегаем.

### 3.3. Обращение грубосеточного оператора

Для решения на самой грубой сетке системы  $A_H \cdot y = g_H$  с невязкой  $g_H$  в правой части используем стандартный чебышевский итерационный метод [10]

$$y^k = y^{k-1} - \omega_k (A_H \cdot y^{k-1} - g_H), \quad k = 1, \dots, p \quad (14)$$

с итерационными параметрами  $\omega_k$ ; здесь  $y^0$  – начальное приближение. Число итераций  $p$  выбирается из условия достижения заданной точности  $\varepsilon$  (уменьшения невязки в  $\varepsilon^{-1}$  раз):  $\|r_p\| < \varepsilon \|r_0\|$ , где  $r_0, r_p$  – начальная и конечная невязки,  $r_0 = g_H, r_p = g_H - A_H \cdot y^p$ . Оценка для числа итераций  $p = p(\varepsilon, \eta)$  имеет вид [10]:

$$p(\varepsilon, \eta) \approx \ln(\varepsilon^{-1} + \sqrt{\varepsilon^{-2} - 1}) / \ln \rho, \quad \rho = \frac{1 + \sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}}, \quad \eta = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}, \quad (15)$$

здесь  $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$  – нижняя и верхняя границы оператора  $A_H$ .

### 3.4. Сглаживающая процедура ЛИ-М

Сглаживающий оператор  $S_p$  в (11) задает переход от текущего приближения к новому «гладкому» приближению на сетке каждого уровня, кроме самого грубого. В этой работе мы ограничимся использованием сглаживателя на основе схемы ЛИ-М. Этот сглаживатель является рациональной функцией  $S_p = S_p(A_h)$  и качество сглаживания невязки характеризуется поведением декрементной функции  $\rho(\lambda) = S_p(\lambda)$  затухания высокочастотных гармоник. Конструкция сглаживателя (см. [2]–[5]) связана с многочленом Чебышева степени  $p$ , наименее уклоняющимся от нуля на заданном отрезке. Эффективность сглаживания зависит от выбора границы  $\lambda_{\min}^*$ , разделяющей спектр на низкочастотную  $[\lambda_{\min}; \lambda_{\min}^*)$  и высокочастотную  $[\lambda_{\min}^*; \lambda_{\max}]$  части. Число шагов сглаживания и набор чебышевских параметров мы выбираем так, чтобы погасить высокочастотную компоненту невязки в  $\varepsilon_{smooth}^{-1}$  раз, что контролируется по норме полной невязки итерационного приближения. В изотропных задачах при задании фактора сглаживания  $\varepsilon_{smooth} = 0.5$  степень  $p$  получается небольшой, 2–3. Для анизотропных задач число шагов может быть большим, например,  $p \approx 100$ , и это отвечает существу дела.

Оператор сглаживания ЛИ-М при заданной степени чебышевского многочлена  $p$  требует  $\nu = 2p - 1$  шагов и является рациональной функцией

$$S_\nu = (I - G_p^2) \cdot (I + \tau A_h)^{-1}, \quad (16)$$

где  $\tau = 16p^2 / \pi^2$ . Оператор (16) совпадает по внешнему виду с оператором (8), но степень многочлена  $p$  выбирается из соображений погашения невязки на высокочастотной части спектра в заданное число раз. Здесь  $G_p$  – оптимальный

многочлен Чебышева на отрезке  $[\lambda_0; \lambda_{max}]$ , левый конец  $\lambda_0$  которого определяется двумя параметрами  $p, \lambda_{max}$  по формулам:

$$\lambda_0 = \lambda_{max} \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} \in \left[ -\frac{\lambda_{max}}{16p^2/\pi^2 - 1}; 0 \right], \quad z_1 = \cos \frac{\pi}{2p}. \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что спектр оператора сглаживания (16) удовлетворяет неравенству

$$\rho_{ЛИМ}(\lambda) = \frac{1 - G_p^2(\lambda)}{1 + \tau\lambda} \leq \frac{1}{1 + \tau\lambda}. \quad (18)$$

Используя соотношения (17) – (18) получаем, что для погашения невязки на отрезке  $[\lambda_{min}^*; \lambda_{max}]$  в заданное число  $\varepsilon_{smooth}^{-1}$  раз нужно задать степень  $p$  формулой:

$$p = \left\lceil \frac{\pi}{4} \sqrt{(\varepsilon_{smooth}^{-1} - 1)/\eta + 1} \right\rceil, \quad (19)$$

где  $\eta = \lambda_{min}^*/\lambda_{max}$  – относительная граница раздела спектра. Алгоритмическая реализация оператора сглаживания ЛИ-М (16) очень проста и требует  $\nu = 2p - 1$  явных шагов.

Сглаживающие свойства схемы ЛИ-М хорошо демонстрирует рис. 1, где для простейшего одномерного параболического уравнения на начальной части спектра показаны графики декрементных функций схем. Видим, что график функции  $\rho_{ЛИМ}(\lambda)$  для ЛИ-М( $p$ ) лежит в верхней полуплоскости, но ограничен сверху графиком декрементной функции неявной схемы. Такой характер поведения декрементов на высокочастотной части спектра отвечает природе многосеточного метода и обеспечивает эффективность использования схемы ЛИ-М в качестве сглаживателя.

### 3.5. Уточнение границы раздела спектра

В ряде случаев можно указать оценку границы  $\lambda_{min}^*$ , см [1 – 4], но здесь мы приведем алгоритм уточнения этой границы в процессе многосеточных итераций. Возьмем в качестве начальной относительной границы число, характерное для изотропного трехмерного случая:  $\eta = 1/6$ . Тогда

$$\lambda_{min}^* = \eta \cdot \lambda_{max}. \quad (20)$$

Задание  $\eta = 1/6$ , не требующее анализа спектра оператора, назовем «стандартной настройкой».

Пусть в ходе многосеточных итераций на любом этапе сглаживания с помощью ЛИ-М после  $\nu = 2p - 1$  шагов сглаживания для начальной и конечной невязок получено соотношение  $\delta = \|r_\nu\| / \|r_0\|$ . Если  $\delta < 1$ , то для сглаживателя ЛИ-М, используя (18)–(19), находим левую границу спектра, соответствующую погашению невязки в  $\delta^{-1}$  раз:

$$\lambda_{min}^* = \frac{\pi^2}{16p^2} \cdot (\delta^{-1} - 1) \cdot \lambda_{max}. \quad (21)$$

Если  $\delta > 1$ , то есть невязка возрастает, то мы расширяем отрезок сглаживания по эмпирическому правилу, взяв  $\lambda_{min}^* = 0.1 \cdot \lambda_{max}$ .

Получив уточненное значение  $\lambda_{min}^*$ , продолжаем многосеточные итерации с этим новым значением, повторяя процедуру адаптации. В расчетах с адаптацией после нескольких многосеточных итераций значение  $\lambda_{min}^*$  перестает изменяться. Поэтому в эволюционных задачах можно найденное на первом шаге по времени значение  $\lambda_{min}^*$  использовать на всех последующих временных шагах, если только оператор задачи не зависит от времени.

#### 4. Численные эксперименты

Рассмотрим модельные задачи для исходного уравнения с разрывными коэффициентами. Число Куранта мы определяем как  $coi = 0.5 \cdot \tau \cdot \lambda_{max}$ ; для модельных задач с оператором Лапласа в единичном кубе оно равно  $6\tau N_d^2$  в случае сетки с одинаковым числом узлов  $N_d$  по каждому направлению.

Напомним, что исследуются две схемы – основанная на многосеточном методе схема ММ и явно-итерационная схема ЛИ-М. Эффективность и точность схемы ММ зависит в определенной степени от задания некоторых настроечных параметров. Такими параметрами являются: максимальное число сеточных уровней  $l$ , выбираемое в зависимости от числа узлов сетки  $N_d$  по каждому направлению, относительная точность многосеточных итераций  $\varepsilon_{MG}$ , относительная точность решения на самой грубой сетке  $\varepsilon_C$ , начальная граница раздела спектра, режим адаптации, фактор сглаживания  $\varepsilon_{smooth}$ , характеризующий желаемое убывание нормы невязки на этапе сглаживания, тип оператора интерполяции (трилинейная или проблемно-зависимая интерполяция). Если не сказано противное, то в качестве стандартных опций используются:  $l = 5$ , если число шагов по каждому направлению  $N_d < 1024$ , в противном случае  $l = 6$ ,  $\varepsilon_{MG} = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_C = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_{smooth} = 0.5$ , сглаживатель ЛИ-М без адаптации со стандартной настройкой, проблемно-зависимые операторы межсеточных переходов. Выбранные значения  $\varepsilon_C$ ,  $\varepsilon_{smooth}$  можно по

умолчанию использовать для широкого круга задач. При расчете на каждом шаге по времени опции не меняются. При применении режима с адаптацией нами исследуется эффективность использования уточненной границы раздела спектра на всех последующих шагах по времени.

**Задача 1.** Возьмем задачу (1) в единичном кубе с краевыми условиями Дирихле и постоянным коэффициентом  $a_0 = 0$ . Введем коэффициент диффузии  $\kappa(x, y, z)$  как разрывную функцию координаты  $x$ :

$$\kappa(t, x, y, z) = \begin{cases} k_1, & x < 0.5 \\ k_2, & x \geq 0.5. \end{cases} \quad (22)$$

На примере этой задачи обсудим качественные особенности схем, поэтому зададим небольшой скачок в коэффициенте диффузии, взяв  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 10^{-3}$ . В качестве начальной функции возьмем

$$u(0, x, y, z) = \begin{cases} 0, & x < 0.5 \\ 1, & x \geq 0.5. \end{cases} \quad (23)$$

По этой начальной функции определяем краевые условия на всем отрезке интегрирования по времени  $0 \leq t \leq T = 1$ . Рассмотрим задачу на сетке с числом узлов  $128^3$ . Зададим отрезок интегрирования  $0 = t_0 \leq t \leq T = 1$  и возьмем  $\tau = 0.0625, 0.125, 0.25$ , то есть выполним 16, 8 и 4 шага интегрирования. Даже наименьшее значение  $\tau = 0.0625$  нельзя считать малым, так как на сетке с числом узлов  $128^3$  этому шагу соответствует большое число Куранта  $\sim 6000$ .

Профили  $y = 0.75$  вдоль оси  $Ox$  приближенных решений на конечный момент времени приведены на рис. 2. Графики, отвечающие расчетам по схеме ЛИ-М, практически неразличимы, поэтому показан график для  $\tau = 0.125$ . Расчет по схеме ЛИ-М со значением  $\tau = 0.25$  выполняется за 1396 шагов, что в 45 быстрее расчета по явной схеме, требующей 65536 шагов. Графики для схемы ММ показаны для шагов  $\tau = 0.0625, 0.25$ ; при увеличении точности многосеточного метода они не меняются, что означает фактический выход на точность чисто неявной двухслойной схемы. Как видно на рис. 2, точность схемы ЛИ-М оказывается выше, чем точность чисто неявной схемы. Причина известна: декрементная функция схемы ЛИ-М на начальной части спектра практически совпадает с точной, а на оставшейся части близка к декрементной функции неявной схемы.

Расчет на каждом шаге по времени многосеточным методом с точностью  $\varepsilon_{MG} = 10^{-5}$  требует 6–11 многосеточных итераций, а полное число шагов (каждый из которых примерно эквивалентен одному шагу явной схемы) составляет 12976 и 2720 для  $\tau = 0.0625$  и  $0.25$  соответственно. В этом расчете использован режим с адаптацией, причем граница раздела спектра  $\lambda_{min}^*$ ,



найденная на первом шаге по времени, используется на всех последующих шагах по времени. Такой режим приводит к сокращению числа многосеточных итераций (в данном случае с 11 на первом шаге до 5–6 на следующих шагах по времени).

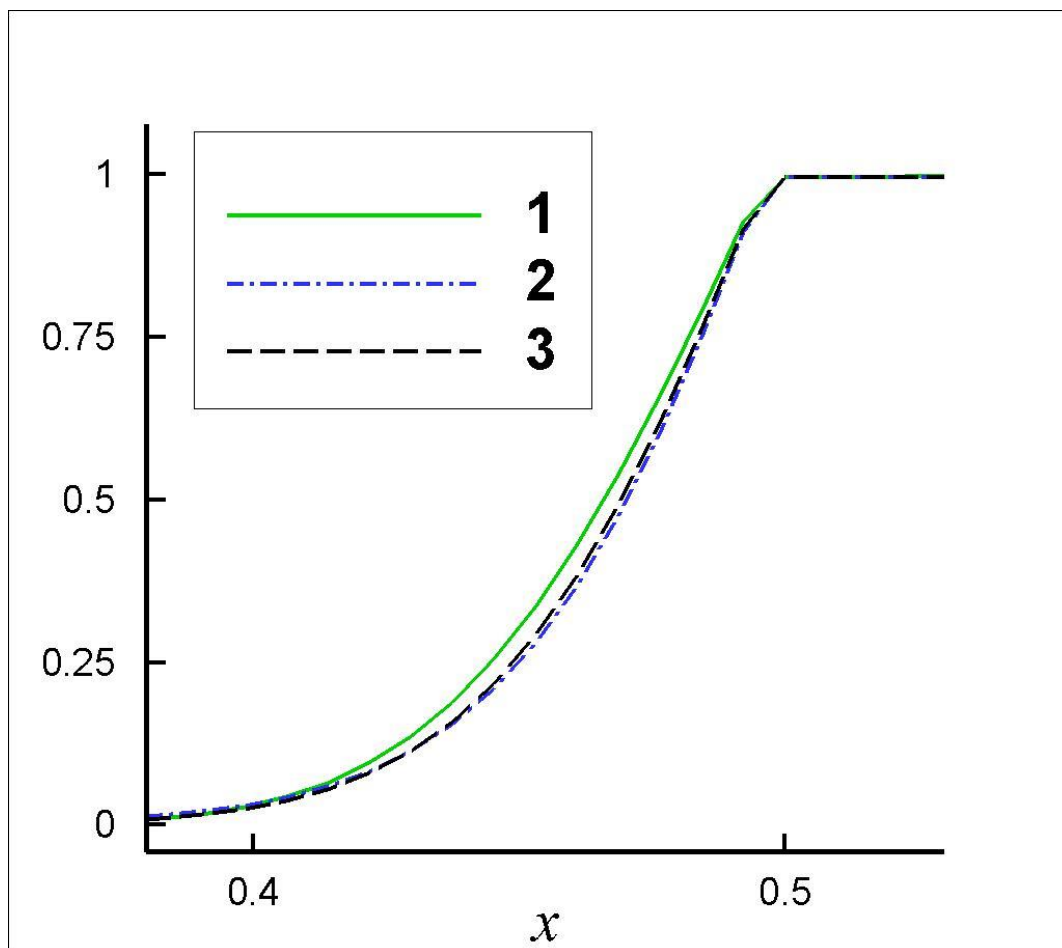


Рис. 2. Задача 1. Профили приближенных решений: 1 – схема ЛИ-М с  $\tau=0.125$  (зеленая линия); 2 – схема ММ с  $\tau=0.25$  (синяя линия); 3 – схема ММ с  $\tau=0.0625$  (черная линия)

Задание меньшей точности многосеточного метода  $\varepsilon_{MG}=10^{-3}$  при  $\tau=0.0625$  значительно ускоряет расчет, затраты становятся эквивалентны 480 шагам явной схемы, но недопустимо ухудшается точность. Причина состоит в том, что на первых 2-3 многосеточных итерациях погрешность убывает гораздо быстрее, чем в асимптотическом режиме, поэтому граница раздела спектра  $\lambda_{min}^*$  находится очень грубо, в погрешности остаются компоненты, отвечающие окрестности границы раздела спектра.

При величине шаге  $\tau=0.25$  схема ЛИ-М требует примерно в два раза меньше времени, чем схема ММ. Но уже на сетке с числом узлов  $256^3$  это преимущество исчезает. При применении схемы ММ число многосеточных итераций не растет при измельчении сетки (в силу оптимальности

многосеточного метода), поэтому время счета при переходе к более подробной сетке увеличивается примерно в 8 раз. Для параболической схемы ЛИ-М согласно теории число итераций растет как  $\sqrt{\tau \cdot \lambda_{max}}$ , т.е. в данном случае наблюдается линейный рост относительно числа узлов сетки  $N$  по одному направлению (так как  $\lambda_{max} = O(N^2)$ ) и время счета при переходе к более подробной сетке увеличивается примерно в 16 раз. Поэтому в перспективе эксмасштабных вычислений преимущество имеет схема ММ.

**Задача 2.** Возьмем задачу (1) в прямом параллелепипеде  $\Omega = ((x, y, z): 0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq z \leq 10)$  с краевыми условиями Дирихле (определяемыми по начальной функции) на левой и передней гранях  $\Omega$  и однородными условиями Неймана на остальных гранях. Возьмем постоянный коэффициент  $a_0 = 0$ , разрывные коэффициент диффузии, правую часть и начальные данные:

$$\kappa(t, x, y, z) = \begin{cases} k_1, & x < 0.5 \text{ или } y < 0.5 \\ k_2, & x \geq 0.5 \text{ и } y \geq 0.5 \end{cases} \quad (24)$$

$$u(0, x, y, z) \equiv f(t, x, y, z) = \begin{cases} 0, & x < 0.5 \text{ или } y < 0.5 \\ 1, & x \geq 0.5 \text{ и } y \geq 0.5. \end{cases}$$

В (24)  $k_1 = 10^{-6}$ ,  $k_2 = 10^3$ . Сетка для проведения предварительного анализа взята небольшая:  $64 \times 64 \times 16$ . Шаг по времени  $\tau = 0.05$ . Условия расчета такие же, как и в задаче 1, точность многосеточного метода  $\varepsilon_{MG} = 10^{-4}$ .

Если грани  $x=1$  и  $y=1$  параллелепипеда интерпретировать как плоскости симметрии в силу краевого условия на них, то можно считать, что нагреваемая высокотеплопроводная среда окружена нетеплопроводной холодной средой (изолятором). Изолятор прогревается, но медленно. Задачи такого рода возникают в качестве составных частей при моделировании ядерных реакторов.

Эта задача трудна для схемы ММ. Во-первых, есть заметная анизотропия: оценка максимальных собственных значений по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  дает  $\lambda_{max}^x = \lambda_{max}^y \approx 4 \cdot 10^6$ ,  $\lambda_{max}^z = 2.5 \cdot 10^3$ . Такая анизотропия в случае простых сглаживателей типа Гаусса-Зейделя (точечного или линейного) приводит к стагнации многосеточных итераций, поэтому требуются, например, блочные сглаживатели с объединением в группы неизвестных, отвечающих горизонтальным плоскостям. Во-вторых, коэффициент диффузии имеет разрыв с большим скачком на границе раздела двух сред.

Данная дискретная задача характеризуется большим значением числа Куранта  $\approx 10^6$ . Но в данном случае расчет эволюции решения с таким шагом является осмысленным: в зоне резкого изменения решения локальное значение числа Куранта близко к 1. Поэтому для схемы ЛИ-М эта задача оказывается не слишком трудной.

Профиль приближенного решения в окрестности границы раздела сред через два шага по времени показаны на рис. 3. Для схем ЛИ-М и ММ, в которой использована проблемно-зависимая интерполяция, они совпадают.

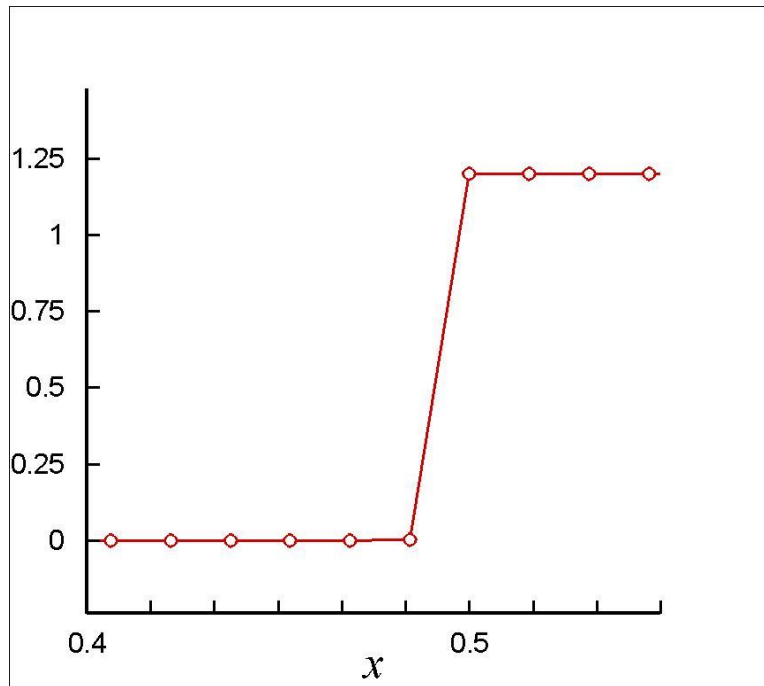


Рис. 3. Задача 2. Профили приближенного решения в окрестности границы раздела сред

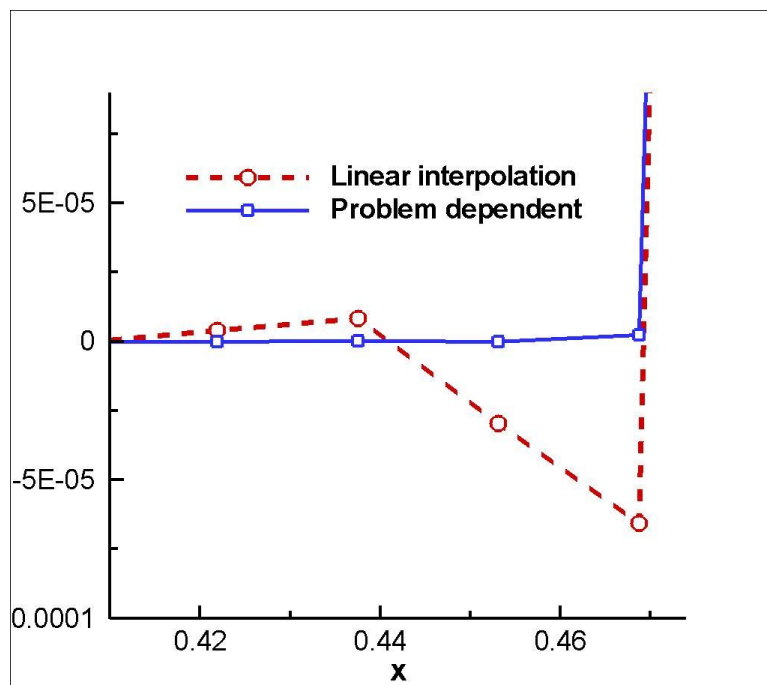


Рис. 4. Задача 2. Профили приближенных решений у границы раздела сред для проблемно-зависимой (сплошная линия) и трилинейной интерполяций (пунктир)

Итак, мы видим, что в эволюционных задачах новым элементом является наличие «фронтов» в решении. В стационарных расчетах таких явлений нет – за бесконечное время температура в областях выравнивается.

В табл. 1 приведены характеристики расчета на первых двух шагах по времени для схемы ММ с адаптацией. На первом шаге по времени в ходе первых 5-6 итераций определяется согласно (21) граница раздела спектра и скорость сходимости выходит на асимптотический режим  $\rho \approx 0.25$  в соответствии с заданным фактором сглаживания  $\varepsilon_{smooth} = 0.5$ . На следующем шаге по времени используется найденная граница раздела спектра, поэтому число итераций ММ сокращается.

Таблица 1

**Неявная схема на основе многосеточного метода**

| Тип операторов межсеточных переходов | Первый шаг по времени |                         | Второй шаг по времени |                         |
|--------------------------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|
|                                      | Число итераций ММ     | Число шагов сглаживания | Число итераций ММ     | Число шагов сглаживания |
| Трилинейная интерполяция             | 11                    | 18294                   | 4                     | 13288                   |
| Проблемно-зависимая интерполяция     | 11                    | 12318                   | 2                     | 6660                    |

Из таблицы следует, например, что схема ММ затрачивает на один временной шаг (начиная со второго) 6660 шагов сглаживания. Явная схема потребовала бы в этом случае почти 2 миллиона шагов. Схема ЛИ-М затрачивает 2843 шагов на данной небольшой сетке (на вдвое более мелкой сетке затрачивается 4021 шаг) и сравнима по эффективности со схемой ММ.

Заметим, использование трилинейной интерполяции для построения операторов межсеточных переходов часто приводит в задачах с разрывными коэффициентами к негативным явлениям (расходимости, осцилляциям). В данном случае за счет хорошей адаптации сглаживателя обеспечивается сходимость многосеточных итераций, но за большее число шагов сглаживания. Однако в данной задаче операторы на основе трилинейной интерполяции приводят к нефизическим осцилляциям решения (см. рис. 4). При использовании проблемно-зависимых операторов, адаптации сглаживателя и разумном выборе управляющих параметров схема ММ работает достаточно надежно. Масштабируемость (параллельная эффективность) схем ЛИ-М и ММ проверялась в расчетах уже неоднократно.

**Задача 3.** Возьмем задачу (1) в единичном кубе с краевыми условиями Дирихле (определяемыми по начальной функции). Возьмем  $a_0 \equiv 0$ ,  $f \equiv 0$ , разрывные коэффициент диффузии и начальные данные:

$$\kappa(t, x, y, z) = \begin{cases} k_1, & x < 0.5 \text{ или } y < 0.5 \\ k_2, & x \geq 0.5 \text{ и } y \geq 0.5 \end{cases} \quad u(t, x, y, z) = \begin{cases} 0, & x < 0.5 \text{ или } y < 0.5 \\ 1, & x \geq 0.5 \text{ и } y \geq 0.5. \end{cases}$$

Здесь  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 10^2$ . Для анализа задачи рассмотрим сетку с числом узлов  $64^3$ . Зададим отрезок интегрирования  $0 = t_0 \leq t \leq T = 0.001$  и проведем расчеты с шагами  $\tau = T/8$  и  $\tau = T$ . Значение  $\tau = T = 0.001$  нельзя считать малым, так как на данной сетке этому шагу соответствует достаточно большое число Куранта  $\sim 1600$ . Условия расчета такие же, как и в задаче 1, точность многосеточного метода  $\varepsilon_{MG} = 10^{-5}$ . Профили приближенных решений показаны на рис. 5. Здесь заметна зависимость точности от шага интегрирования  $\tau$ .

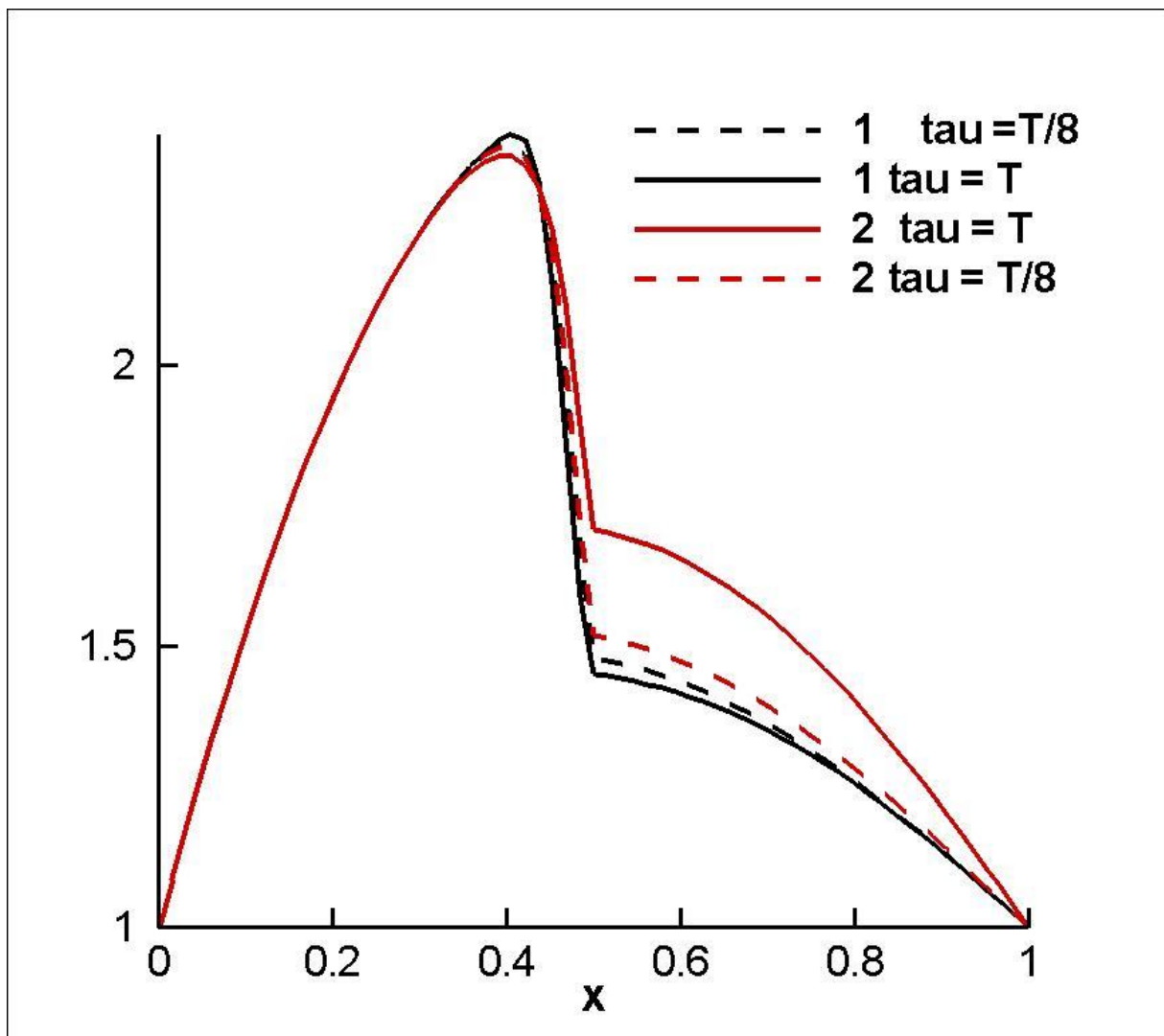


Рис. 5. Задача 3. Профили приближенных решений на момент времени  $T = 0.001$  с шагом  $\tau = T/8$  и  $\tau = T$ : 1 – схема ЛИ-М, 2 – схема ММ

Видно, что схема ЛИ-М обеспечивает лучшую точность, чем схема ММ, так как в данной задаче точность решения зависит от описания основных гладких мод присутствующих в решении.

Поэтому расчеты с вариациями шага по пространству и величины скачка  $\delta = k_2/k_1$  (увеличиваем  $k_2$  при  $k_1=1$ ) проведем при  $\tau = T/8 = 0.000125$ . Выполняем один шаг по времени при  $\varepsilon_{MG} = 10^{-7}$ .

В табл. 2 приведены характеристики вычислительных затрат при величине скачка коэффициента диффузии  $\delta = 100$  в зависимости от числа узлов по одному направлению  $N_d$  на сетке с числом узлов  $N_d^3$ . Заметим, что в этой задаче есть анизотропия спектра: относительная граница раздела высокочастотной части при двукратном измельчении сетки уменьшается в 4 раза. В процессе нескольких первых многосеточных итераций эта граница определяется, и скорость сходимости достигает своего асимптотического значения  $\rho = 0.25$ .

Таблица 2

**Характеристики схемы ММ: зависимость от шага сетки**

| Сетка, $N_d$ | Число итераций ММ | Число шагов сглаживания |
|--------------|-------------------|-------------------------|
| 64           | 6                 | 444                     |
| 128          | 10                | 777                     |
| 256          | 10                | 880                     |
| 512          | 11                | 966                     |

Зависимость границы раздела спектра от шага сетки  $h$  приводит к зависимости (но слабой) вычислительных затрат от  $h$ . В отсутствии скачков на разрыве такой зависимости нет.

В табл. 3 приведены характеристики вычислительных затрат на сетке с числом узлов  $128^3$  в зависимости от величины скачка коэффициента диффузии  $\delta$ . Как обычно, в процессе нескольких первых многосеточных итераций определяется граница раздела спектра, затем скорость сходимости достигает своего асимптотического значения  $\rho = 0.25$ . Видим, что адаптация границы высокочастотной области к анизотропии спектра сеточных операторов, требует определенных вычислительных затрат. В итоге объем вычислений растет, но не быстрее, чем прогнозируемая скорость роста (в расчетах изотропных задач без адаптации рост затрат прямо пропорционален  $\sqrt{\delta}$ ).

Таблица 3

**Характеристики схемы ММ: зависимость от скачка  $\delta = k_2 / k_1$**

| $\delta = k_2 / k_1$ | Число итераций ММ | Число шагов сглаживания |
|----------------------|-------------------|-------------------------|
| 1                    | 11                | 90                      |
| 100                  | 10                | 777                     |
| $10^3$               | 9                 | 2150                    |
| $10^4$               | 8                 | 6132                    |
| $10^6$               | 5                 | 38530                   |

## 5. Заключение

Проведено исследование и развитие многосеточного и явно-итерационного методов решения трехмерных прикладных задач в актуальных областях на основе оптимальных свойств чебышевских многочленов с адаптацией методов в условиях анизотропных разрывных коэффициентов. Исследована неявная схема для параболического уравнения, построенная на основе многосеточного метода. Новыми или модифицированными элементами являются реализация операторов межсеточных переходов для случая разрывных коэффициентов уравнения и адаптация границы высокочастотной области к спектру сеточных операторов на каждом сеточном уровне. Адаптация производится в ходе многосеточных итераций и повышает эффективность метода, что особенно проявляется в случае эволюционных задач. Явно-итерационная схема с чебышевскими параметрами изучена как конкурент многосеточной схемы. Из анализа схем следует вывод: при больших значениях параболического числа Куранта следует использовать схему ММ, а при относительно небольших значениях числа Куранта конкурентоспособной становится схема ЛИ-М. Эта схема для эволюционных задач может составить конкуренцию схеме ММ и при больших значениях числа Куранта, если в областях больших градиентов решения локальное число Куранта близко к единице.

Расчеты показывают, что схемы ММ и ЛИ-М обеспечивают высокую работоспособность для задач с анизотропными и/или разрывными коэффициентами. Опыт их использования показывает, что они хорошо масштабируются и позволяют преодолеть трудности, связанные с достижением в перспективе эксафлопсных скоростей.

## Библиографический список

1. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Параллельный многосеточный метод для разностных эллиптических уравнений. Часть I. Основные элементы алгоритма // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2012. — № 30. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-30>
2. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Параллельный многосеточный метод для разностных эллиптических уравнений. Анизотропная диффузия // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2012. — № 76. — 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-76>
3. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. О многосеточном и явно-итерационном методах решения параболических уравнений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2014. — №28. — 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-76>
4. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Параллельный многосеточный метод для разностных эллиптических уравнений // Матем. моделирование. 2014. Т.26, № 1. С. 55–68.
5. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Многосеточный метод для анизотропных уравнений диффузии на основе адаптации чебышевских сглаживателей // Матем. моделирование. 2014. В печати.
6. Федоренко Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1, № 5. С. 922–927.
7. Жуков В.Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Матем. моделирование. 2010. Т.22, № 10. С. 127–158.
8. Локуциевский В.О., Локуциевский О.В. О численном решении краевых задач для уравнений параболического типа // ДАН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 540 – 544.
9. Trottenberg U., Oosterlee C.W., Schuller A. Multigrid. 2001. ACADEMIC PRESS, 631 p.
10. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978, 592 с.



## Оглавление

|  |    |
|--|----|
| Введение .....                                 | 3  |
| 1. Постановка задачи.....                      | 5  |
| 2. Схема локальных итераций ЛИ-М .....         | 6  |
| 3. Схема на основе многосеточного метода ..... | 8  |
| 3.1. Основные элементы алгоритма .....         | 8  |
| 3.2. Операторы межсеточных переходов.....      | 9  |
| 3.3. Обращение грубосеточного оператора .....  | 11 |
| 3.4. Сглаживающая процедура ЛИ-М.....          | 12 |
| 3.5. Уточнение границы раздела спектра.....    | 13 |
| 4. Численные эксперименты.....                 | 14 |
| 5. Заключение.....                             | 22 |
| Библиографический список.....                  | 23 |