



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 89 за 2014 г.



Бойко А.В., [Клюшнев Н.В.](#),  
Нечепуренко Ю.М.

Об устойчивости течения  
Пуазейля в оребренном  
канале

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Бойко А.В., Клюшнев Н.В., Нечепуренко Ю.М. Об устойчивости течения Пуазейля в оребренном канале // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 89. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-89>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени. М. В. КЕЛДЫША  
Российской академии наук

А. В. Бойко, Н. В. Ключнев, Ю. М. Нечепуренко

Об устойчивости  
течения Пуазейля  
в оробренном канале

МОСКВА, 2014 г.

А. В. Бойко, Н. В. Ключнев, Ю. М. Нечепуренко

## Об устойчивости течения Пуазейля в оребренном канале

**Аннотация.** Численно исследована устойчивость течения Пуазейля в каналах с продольно оребренными стенками. В рамках выбранных физически обоснованных нормировок скорости и длины проанализированы зависимости энергетического и линейного критических чисел Рейнольдса от высоты ребер, их заостренности и периода оребрения в практически важном диапазоне этих параметров. Показано, что существуют такие значения параметров оребрения, при которых оба критических числа Рейнольдса становятся больше, чем в случае плоского канала.

**Ключевые слова:** монотонная устойчивость, линейная устойчивость, оребрение, критические числа Рейнольдса

A. V. Boiko, N. V. Klyushnev, Yu. M. Nечepurenko

## On stability of Poiseuille flow in a grooved channel

**Abstract.** The stability of Poiseuille flow in channels with walls grooved in the streamwise direction is investigated numerically. In the framework of physically-grounded scalings of velocity and length an analysis of energy and linear critical Reynolds numbers was carried out in a practically important range of rib heights, sharpness, and spacing. It was shown that there are such values of these parameters that both critical Reynolds numbers are higher than those for the plane channel.

**Key words:** monotonic stability, linear stability, grooves, critical Reynolds numbers

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00025). Расчеты выполнялись на кластерах МВС 100к МСЦ РАН и «Ломоносов» МГУ и кластере ИВЦ НГУ.

# 1. Введение

С увеличением числа Рейнольдса при достижении им критического значения, определяющего границу устойчивости к бесконечно малым возмущениям, сдвиговое ламинарное течение заведомо теряет устойчивость и происходит его турбулизация (естественный ламинарно-турбулентный переход). При этом основную роль играют наиболее неустойчивые моды (волны Толлмина–Шлихтинга). Однако ламинарно-турбулентный переход на практике часто происходит при докритических числах Рейнольдса, когда все моды устойчивы. Одним из основных факторов, вызывающих докритический ламинарно-турбулентный переход, является возможность существенного роста кинетической энергии возмущений на конечных временных интервалах [1]. Этот рост обеспечивают так называемые оптимальные возмущения, представляющие собой суперпозиции большого числа существенно взаимно неортогональных мод. Развитие малых оптимальных возмущений приводит в результате их роста к переходу основного течения в квазистационарное линейно неустойчивое состояние (полосчатая структура, см., напр., [2]), в котором начинает развиваться вторичная неустойчивость, приводящая к ламинарно-турбулентному переходу.

Существующие экспериментальные и расчетные данные по устойчивости сдвиговых течений (см., напр., обзор в [3]) показывают, что образование полосчатых структур, вызывающее ламинарно-турбулентный переход при малых числах Рейнольдса, можно сдерживать посредством продольного оребрения обтекаемой поверхности. Вместе с тем, принято считать, что такое оребрение усиливает неустойчивость волн Толлмина–Шлихтинга [4, 5], приводящих к переходу при больших числах Рейнольдса, что делает целесообразным его использование в основном в докритической (линейно устойчивой) области развития потока.

В данной работе на примере течения Пуазейля в продольно оребренном канале показано, что высоту и заостренность ребер и период оребрения можно выбрать такими, что энергетическое и линейное критические числа Рейнольдса (выше которых возможно соответственно образование полосчатых структур и неустойчивых волн Толлмина–Шлихтинга) увеличатся по сравнению с плоским каналом, т.е. в результате оребрения течение станет более устойчивым как при малых, так и при больших числах Рейнольдса.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим в канале

$$\{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, -\eta(z) < y < h, -\infty < z < \infty\},$$

где  $x, y, z$  — декартовы координаты в продольном, вертикальном и поперечном направлениях, соответственно,  $h$  — положительное число, а  $\eta$  — некоторая положительная периодическая достаточно гладкая функция с полупериодом  $l > 0$  и средним значением  $h$ , стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости с давлением  $p = \tau x$  ( $\tau < 0$ ), вектором скорости  $\mathbf{v} = (U, 0, 0)$  и профилем скорости  $U(y, z)$ , удовлетворяющем уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\tau}{\nu\rho} \quad (1)$$

в области поперечного сечения канала с нулевыми граничными условиями по  $y$  и условием периодичности по  $z$  (течение Пуазейля). Здесь  $\nu$  и  $\rho$  — коэффициент кинематической вязкости и плотность жидкости соответственно.

В качестве нормировок длины и скорости выберем соответственно средние полувысоту канала  $h$  и среднюю скорость течения Пуазейля  $U_m$ . Число Рейнольдса определим как  $\text{Re} = U_m h / \nu$ . Такая нормировка позволяет единообразно рассматривать устойчивость течений в каналах различных сечений и имеет ясный физический смысл: при ее использовании в каналах с одинаковыми числами Рейнольдса будут одинаковыми средние расходы жидкости, приходящиеся на единицу длины по  $z$ . Далее мы будем использовать обезразмеренные переменные, сохранив за ними старые обозначения.

В качестве возмущений основного течения будем рассматривать бездивергентные достаточно гладкие возмущения, удовлетворяющие условию прилипания на верхней и нижней стенках канала, периодические по  $x$  с произвольным полупериодом  $X > 0$  и периодические по  $z$  с полупериодом  $Z > 0$ , кратным полупериоду  $l$  течения Пуазейля. Говорят, что течение Пуазейля *монотонно устойчиво*, если средняя плотность кинетической энергии любого такого возмущения монотонно убывает с ростом времени  $t$  и *линейно устойчиво*, если средняя плотность кинетической энергии любого такого достаточно малого при  $t = 0$  возмущения ограничена при всех  $t > 0$  и стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . С увеличением числа Рейнольдса течение Пуазейля сначала теряет монотонную устойчивость, затем линейную. Точные нижние грани чисел Рейнольдса, при которых течение Пуазейля не является монотонно устойчивым и линейно устойчивым называют его *энергетическим* и *линейным критическими числами Рейнольдса* и обозначают

через  $\text{Re}_E$  и  $\text{Re}_L$ , соответственно. Непосредственно из этих определений следует, что  $\text{Re}_E \leq \text{Re}_L$ .

### 3. Метод вычисления критических чисел Рейнольдса

Известно [6], что энергетическое и линейное критические числа Рейнольдса для течения Пуазейля в канале с  $2l$ -периодическим продольным оребрением можно вычислить на основе линеаризованных уравнений эволюции возмущений

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}' - (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}' - \nabla p', \quad \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (2)$$

рассматривая комплексные решения вида

$$\mathbf{v}'(x, y, z, t) = \mathbf{v}''(y, z, t) \exp\{i(\alpha x + \beta z)\}, \quad (3)$$

$$p'(x, y, z, t) = p''(y, z, t) \exp\{i(\alpha x + \beta z)\},$$

где  $\alpha$  — вещественный параметр,  $\mathbf{v}''(y, z, t)$ ,  $p''(y, z, t)$  — функции, периодические по  $z$  с полупериодом  $l$ , а  $\beta \in [0, \pi/l)$  — параметр расстройки Флоке. Средняя плотность кинетической энергии возмущения (3) выражается через амплитуду его скорости следующим образом:

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}') = \frac{1}{8l} \int_{\Sigma} \mathbf{v}''(y, z) \cdot \overline{\mathbf{v}''(y, z)} dy dz,$$

где

$$\Sigma = \{(y, z) : -\eta(z) < y < 1, -l < z < l\}.$$

Подставляя (3) в (2), приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}''}{\partial t} = J_{\alpha} \mathbf{v}'' + \frac{1}{\text{Re}} L_{\alpha\beta} \mathbf{v}'' + G_{\alpha\beta} p'', \quad F_{\alpha\beta} \mathbf{v}'' = 0, \quad (4)$$

где

$$J_{\alpha} = - \begin{bmatrix} i\alpha U & \partial U / \partial y & \partial U / \partial z \\ 0 & i\alpha U & 0 \\ 0 & 0 & i\alpha U \end{bmatrix}, \quad G_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -i\alpha \\ -\partial / \partial y \\ -\partial / \partial z - i\beta \end{bmatrix},$$

$$F_{\alpha\beta} = [i\alpha, \partial / \partial y, \partial / \partial z + i\beta], \quad L_{\alpha\beta} = -\alpha^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2 + 2i\beta \partial / \partial z - \beta^2.$$

Уравнения (4) рассматриваются в области  $\Sigma$  с нулевыми граничными условиями для  $\mathbf{v}''$  по  $y$  и условиями периодичности по  $z$ . Они позволяют находить энергетическое  $\text{Re}_E^{\alpha\beta}$  и линейное  $\text{Re}_L^{\alpha\beta}$  критические числа Рейнольдса

для конкретных пар  $(\alpha, \beta)$ , а определенные выше глобальные критические числа Рейнольдса как

$$\text{Re}_E = \inf_{\alpha, \beta} \text{Re}_E^{\alpha\beta}, \quad \text{Re}_L = \inf_{\alpha, \beta} \text{Re}_L^{\alpha\beta}.$$

Аппроксимация уравнений (1) и (4) выполнялась методом Галеркина-коллокаций. Расчетные сетки и базисные функции строились с помощью отображения Гордона–Холла

$$y = \frac{1 + r + (r - 1)\eta(z)}{2}, \quad z = ls$$

квадрата  $\{(r, s) : -1 < r < 1, -1 < s < 1\}$  в область  $\Sigma$ . В качестве базисных функций использовались образы элементарных интерполяционных многочленов, построенных в этом квадрате на прямоугольной сетке. По направлению  $r$  применялись сетки с узлами Гаусса (корни многочлена Лежандра) для давления и Гаусса-Лобатто (корни производной многочлена Лежандра и точки  $\pm 1$ ) для компонент скорости и интерполяционные многочлены Лагранжа, а по направлению  $s$  — равномерная сетка и тригонометрические многочлены. Такая аппроксимация приводит к системе дифференциально-алгебраических уравнений вида

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = J_\alpha \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}} L_{\alpha\beta} \mathbf{v} + G_{\alpha\beta} p, \quad F_{\alpha\beta} \mathbf{v} = 0,$$

где  $J_\alpha$ ,  $L_{\alpha\beta}$ ,  $G_{\alpha\beta}$  и  $F_{\alpha\beta}$  — конечномерные аналоги соответствующих операторов в (4), а  $\mathbf{v}$  и  $p$  — конечномерные аналоги амплитуд скорости  $\mathbf{v}''$  и давления  $p''$  из (3).

Критические числа Рейнольдса вычислялись матричными методами, предложенными в [6, 7]. Для параметрических расчетов использовалась кластерная реализация этих методов, описанная в [8]. Все обсуждаемые далее результаты были получены с использованием сетки размера  $140 \times 17$ , кроме расчетов при  $l < 0.5$ , где для обеспечения достаточной точности использовалась сетка размера  $140 \times 35$ . Эти сетки приводят к матрицам, размеры которых позволяют эффективно использовать вычислительные кластеры. Увеличение пространственного разрешения привело бы к существенному снижению загрузки процессоров из-за недостаточного объема оперативной памяти.

Для плоского течения Пуазейля справедлива теорема Сквайра [9], которая утверждает, что глобальное линейное критическое число Рейнольдса достигается при равном нулю поперечном волновом числе и неравном нулю продольном волновом числе. Наши предварительные расчеты показали,

что в случае течения Пуазейля в оребренном канале, по крайней мере в исследованных диапазонах параметров оребрения, справедлив аналог этого утверждения, а именно — глобальное линейное критическое число Рейнольдса достигается при равном нулю параметре расстройки Флоке  $\beta$ , играющем в данном случае роль поперечного волнового числа, и неравном нулю продольном волновом числе  $\alpha$ . Напротив, глобальное энергетическое критическое число Рейнольдса  $Re_E$  достигается при  $\alpha = 0$  и  $\beta \neq 0$ . Учитывая это, при дальнейших расчетах критических чисел Рейнольдса мы ограничивались варьированием одного волнового числа, зафиксировав нулевое значение второго, что значительно уменьшало вычислительные затраты.

## 4. Результаты расчетов

Основные расчеты выполнялись для трехпараметрического семейства волнистых оребрений следующего вида:

$$\eta(z) = 1 - \varepsilon \left( \left| \cos \frac{\pi z}{L} \right|^\gamma - d_\gamma \right),$$

где  $L = 2l$  — период оребрения,  $0 \leq \varepsilon < 1$  — высота ребер,  $\gamma > 0$  — параметр, определяющий их «заостренность», а  $d_\gamma$  — неотрицательное число, однозначно зависящее от  $\gamma$  и выбираемое так, чтобы обеспечить единичную среднюю полувысоту канала. При варьировании  $z$  полувысота канала меняется от  $h_{\min}(\varepsilon, \gamma) = 1 + \varepsilon(d_\gamma - 1)/2$  до  $h_{\max}(\varepsilon, \gamma) = 1 + \varepsilon d_\gamma/2$ . В случае  $\varepsilon = 0$  канал является плоским (величина  $\gamma$  при этом роли не играет), а в случае  $\varepsilon > 0$  — оребренным. При  $\gamma \rightarrow \infty$  величина  $d_\gamma$  монотонно убывает до 0, а оребрение стремится к бесконечно тонким вертикальным разрезам высоты  $\varepsilon$ , расположенным на расстоянии  $L$  друг от друга.

На рис. 1 и 2 слева представлены нормированные профили скорости основного течения в плоском и оребренных каналах при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\gamma = 2$  и нескольких значениях периода оребрения. Справа изображены сечения профилей плоскостью, перпендикулярной поперечному направлению, при нескольких характерных значениях  $z$ . Видно, что с ростом периода оребрения скорость основного течения увеличивается в межреберной области, что приводит к уменьшению средней скорости в надреберной части канала. При небольших периодах оребрения профили имеют значительную перегибность по  $y$ , а при больших — по  $z$ , перегибность по  $y$  при этом исчезает.

Результаты расчетов  $Re_E(L)$  и  $Re_L(L)$  в интервале  $0 < L \leq 4$  изображены на Рис. 3 для  $\varepsilon = 0.2$  (а) и  $0.4$  (б) при  $\gamma = 2$  и 4 (сплошные и штриховые линии соответственно). Для сравнения энергетическое и линейное критическое числа Рейнольдса плоского течения Пуазейля (далее мы

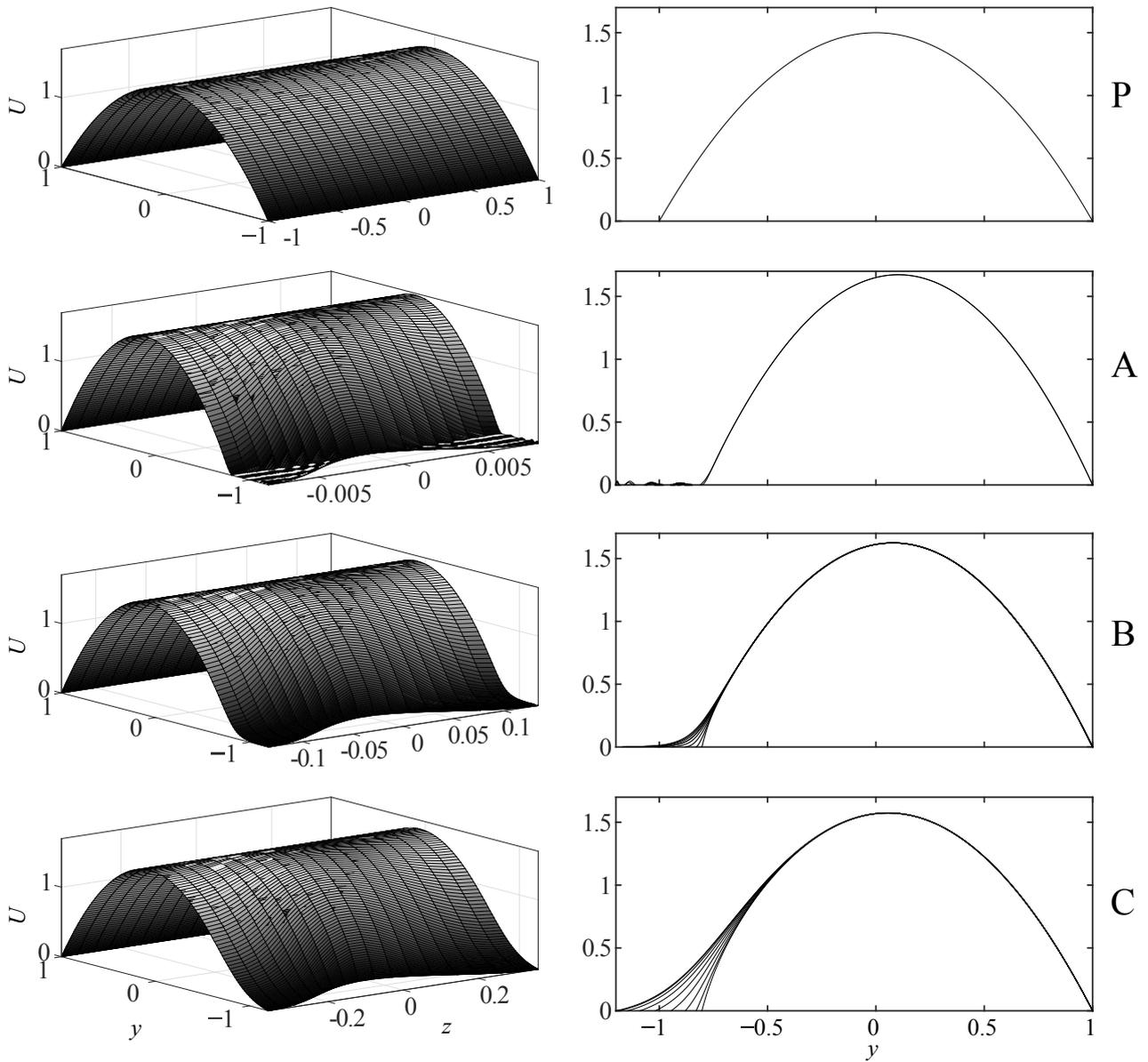


Рис. 1: Профили основного течения в плоском (P) и оребренных каналах при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\gamma = 2$  и  $L = 0.016, 0.268$  и  $0.716$  (A, B и C, соответственно).

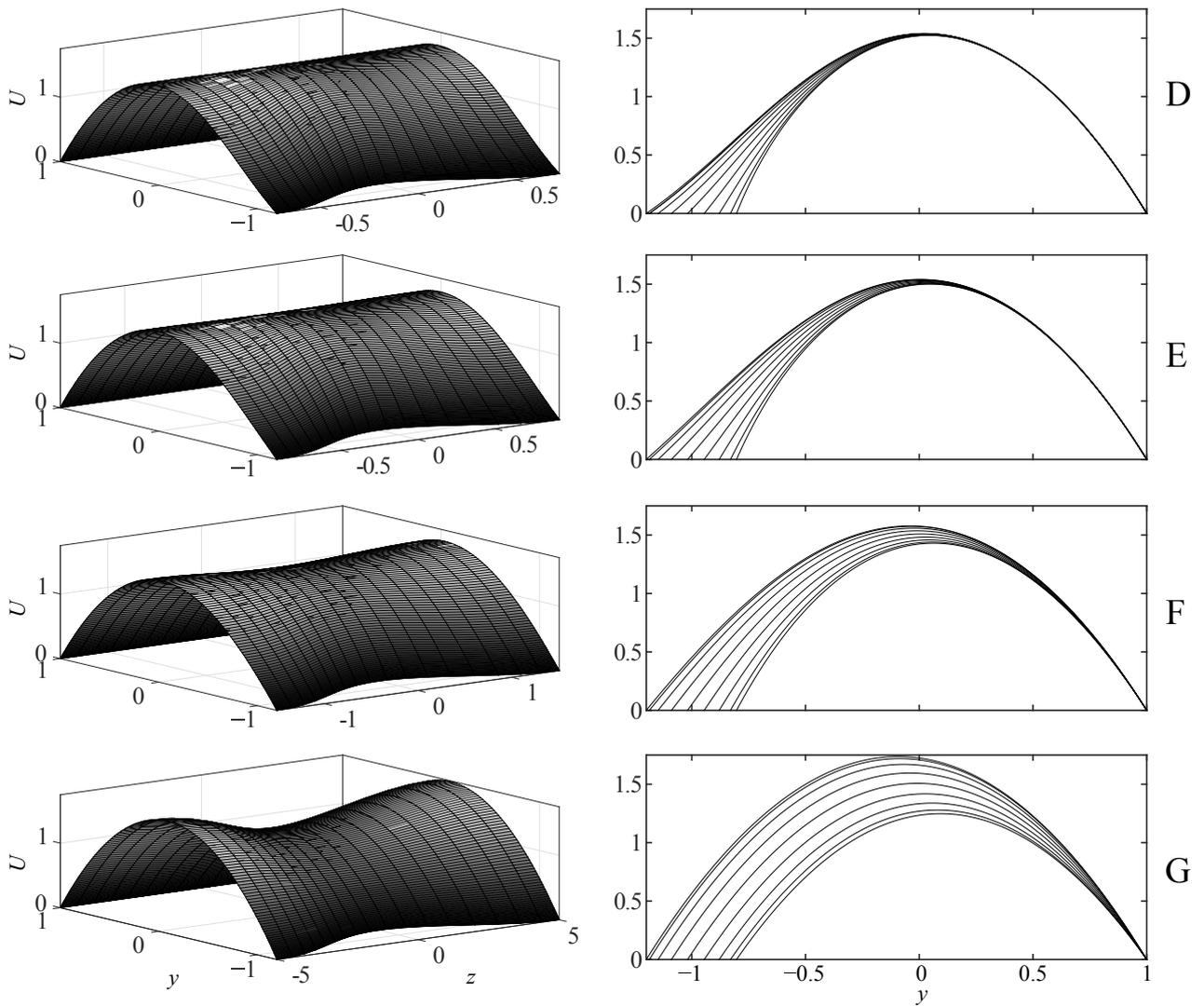


Рис. 2: Профили основного течения в оребренных каналах при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\gamma = 2$  и  $L = 1.444$ ,  $1.836$ ,  $3.012$  и  $10$  (D, E, G и F, соответственно).

будем обозначать их соответственно через  $\text{Re}_E^p$  и  $\text{Re}_L^p$ ) также представлены на этих рисунках пунктирными линиями. Выбор интервала периодов оребрения был обусловлен тем, что при  $L \sim 1$ , можно было предполагать наличие нетривиальных существенно трехмерных эффектов. Высоты ребер были выбраны достаточно большими с тем, чтобы соответствовать по порядку величины использованным в предшествующих работах (см. напр. [10, 2]). Заостренность ребер была ограничена доступным пространственным разрешением, поскольку с увеличением  $\gamma$  основное течение и критические возмущения становятся менее гладким, что приводит к необходимости увеличивать число узлов по  $y$  и  $z$  для достижения сходимости по шагу сетки. Тем не менее, выполненные нами отдельные расчеты для  $\gamma = 10$  и  $\gamma = \infty$  (в первом случае мы использовали более высокое пространственное разрешение, а во втором — вместо отображения Гордона–Холла использовали конформное отображение [11]) не привели к качественно новым результатам.

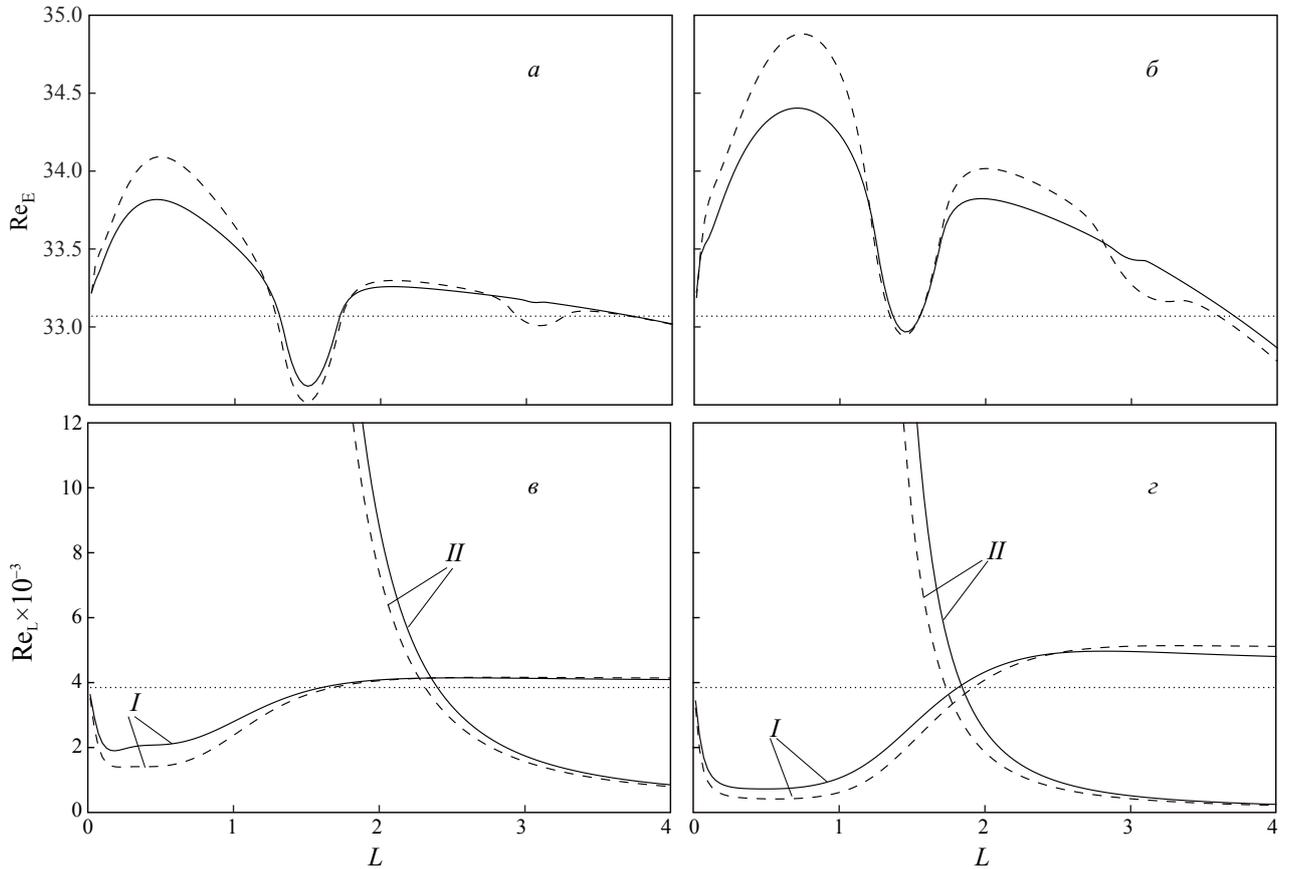


Рис. 3: Зависимости  $\text{Re}_E$  (сверху) и  $\text{Re}_L$  (снизу) от периода оребрения для  $\varepsilon = 0.2$  (слева) и  $0.4$  (справа) при  $\gamma = 2$  (—) и  $4$  (- -);  $\text{Re}_E^p \approx 33.07$ ,  $\text{Re}_L^p \approx 3.848 \times 10^3$  ( $\cdots$ ).

## 5. Анализ зависимости $\text{Re}_E$ от параметров оребрения

Как можно видеть из рис. 3, в большей части рассмотренного ин-

тервала периодов оребрения энергетическое критическое число Рейнольдса  $\text{Re}_E$  оребренного канала в соответствии с данными предшествующих работ [12, 13, 14, 15] превосходит энергетическое критическое число Рейнольдса  $\text{Re}_E^p$  плоского канала. Кривые  $\text{Re}_E(L)$  имеют в этом интервале глобальный (слева) и локальный (справа) максимумы и локальный минимум между ними. Увеличение высоты  $\varepsilon$  приводит к увеличению  $\text{Re}_E$  в целом, а увеличение параметра  $\gamma$  заостренности ребер — к увеличению разброса значений  $\text{Re}_E$ . Величина глобального максимума существенно зависит как от  $\varepsilon$ , так и от  $\gamma$ , а его положение существенно зависит лишь от  $\varepsilon$ . Максимальное значение  $\text{Re}_E$  отличается от  $\text{Re}_E^p$  примерно на 5.5% при  $\varepsilon = 0.4$  и  $\gamma = 4$ . Положение локального максимума слабо зависит как от  $\varepsilon$ , так и от  $\gamma$ , и находится вблизи  $L = 1.8$ . Максимальное значение  $\text{Re}_E$  отличается в данном случае от  $\text{Re}_E^p$  примерно на 3.4%. Положение локального минимума  $L_{\min} \approx 1.5$ , причем  $\text{Re}_E < \text{Re}_E^p$  в окрестности  $L_{\min}$ . Минимальное значение довольно слабо зависит от  $\gamma$ , но с увеличением  $\varepsilon$  оно заметно увеличивается и, как следствие, уменьшается интервал периодов, при которых  $\text{Re}_E < \text{Re}_E^p$ . Минимальное значение  $\text{Re}_E$  отличается от  $\text{Re}_E^p$  примерно на 1.7% при  $\varepsilon = 0.2$  и  $\gamma = 4$ .

Таблица 1: Параметры критических возмущений для плоского (P) и оребренных каналов при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\gamma = 2$  и значениях периода оребрения  $L = 0.016, 0.268, 0.716, 1.444, 1.836$  и  $3.012$  (A, B, C, D, E и F, соответственно).

	P	A	B	C	D	E	F
$\text{Re}_E$	33.069	33.134	34.069	34.404	32.968	33.793	33.431
$\beta_E$	2.0437	2.2805	2.2440	2.2064	2.1755	1.3210	$1.81 \times 10^{-4}$
$\Lambda$	3.0000	2.7549	2.7956	2.8218	2.8880	3.1320	3.0120
$\mathcal{E}(u')/\mathcal{E}(\mathbf{v}')$	0.3457	0.4067	0.4222	0.4164	0.2986	0.3490	0.3392
$\mathcal{E}(v')/\mathcal{E}(\mathbf{v}')$	0.2350	0.1547	0.1527	0.1432	0.1508	0.1557	0.1511
$\mathcal{E}(w')/\mathcal{E}(\mathbf{v}')$	0.4193	0.4385	0.4252	0.4404	0.5506	0.4953	0.5097

В табл. 1 для плоского и оребренного каналов при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\gamma = 2$  и нескольких значениях периода оребрения приведены значения  $\text{Re}_E$  и параметры критических возмущений, на которых достигается  $\text{Re}_E$  (скорость убывания плотности кинетической энергии таких возмущений  $\partial\mathcal{E}/\partial t = 0$  при  $t = 0$ ). На рис. 4 и 5 изображены вещественные части этих возмущений в плоскости сечения канала. Видно, что критические возмущения представляют собой противовращающиеся в плоскости сечения канала продольные вихревые пары, поперечный период  $\Lambda$  которых слабо зависит от параметров оребрения и составляет 2.7–3.2 (в случае плоского канала  $\Lambda \approx 3.0$ ). Минимум  $\text{Re}_E$  достигается, когда размер одного такого вихря из пары близок к периоду оребрения, т.е. наиболее «благоприятный» по отношению к

критическим возмущениям период оребрения  $L_{\min} \approx \Lambda/2$ .

В этом случае каждый вихрь расположен между выступающими в поток гребнями ребер и граница канала «охватывает» нижнюю пристенную часть вихрей, поэтому «кажущаяся» или эффективная полувысота канала по отношению к вихрям примерно равна  $h_{\max}(\varepsilon, \gamma)$ , что несколько больше полувысоты плоского канала, равной единице. Это влечет за собой увеличение эффективного числа Рейнольдса, поскольку средняя скорость основного течения в сравниваемых каналах одинаковая. Поэтому течение в оребренном канале при  $L = L_{\min}$  перестает быть монотонно устойчивым при меньшем числе Рейнольдса. Увеличение  $\gamma$  с 2 до 4 при  $\varepsilon = 0.2$  этот эффект усиливает, поскольку хотя и уменьшает  $h_{\max}(\varepsilon, \gamma)$ , но делает межреберное пространство более свободным для вихревого движения. Однако, при достаточно большом  $\gamma$  его дальнейший рост, по-видимому, напротив, будет приводить к увеличению  $Re_E$ . При фиксированном  $\gamma$  и  $\varepsilon = 0.2$  дальнейшее увеличение  $\varepsilon$  приводит к выталкиванию вихрей из межреберного пространства, что уменьшает эффективную полувысоту канала и также приводит к увеличению  $Re_E$ .

Масштаб вихревой структуры в поперечном направлении слабо зависит от периода оребрения и остается примерно таким же, как и в плоском канале, поэтому при значениях  $L$ , отличных от  $L_{\min}$ , возникает расстройка между размерами вихрей, обеспечивающих  $Re_E$ , и периодом оребрения.

При  $L < L_{\min}$  с уменьшением  $L$  вихри выталкиваются из межреберной области и эффективная средняя полувысота канала уменьшается вплоть до  $h_{\min}(\varepsilon, \gamma)$ , что приводит к уменьшению эффективного числа Рейнольдса и, как следствие, увеличению  $Re_E$ . С ростом  $\gamma$  величина  $h_{\min}(\varepsilon, \gamma)$  уменьшается, что усиливает этот эффект. Вместе с тем, при достаточно малых  $L$  основное течение между ребрами начинает замедляться, поэтому его средняя скорость в области над ребрами увеличивается, что снова приводит к увеличению эффективного числа Рейнольдса и уменьшению  $Re_E$ . При  $L \rightarrow 0$  эффективная полувысота канала стремится к  $h_{\min}(\varepsilon, \gamma)$ , а средняя скорость основного течения в надреберной части канала — к  $1/h_{\min}(\varepsilon, \gamma)$ . Вследствие этого  $Re_E \rightarrow Re_E^p$ .

При  $L > L_{\min}$  для каждой вихревой пары эффективное число Рейнольдса, вообще говоря, свое и зависит от локальных (определяемых по локальным по  $z$  полувысоте канала и средней скорости основного течения) чисел Рейнольдса в области локализации этой пары. Глобальное эффективное число Рейнольдса близко к максимальному из этих эффективных чисел Рейнольдса. При умеренных значениях  $L$  основную роль играет расстройка между периодами ребер и вихрей. Максимальное эффективное число

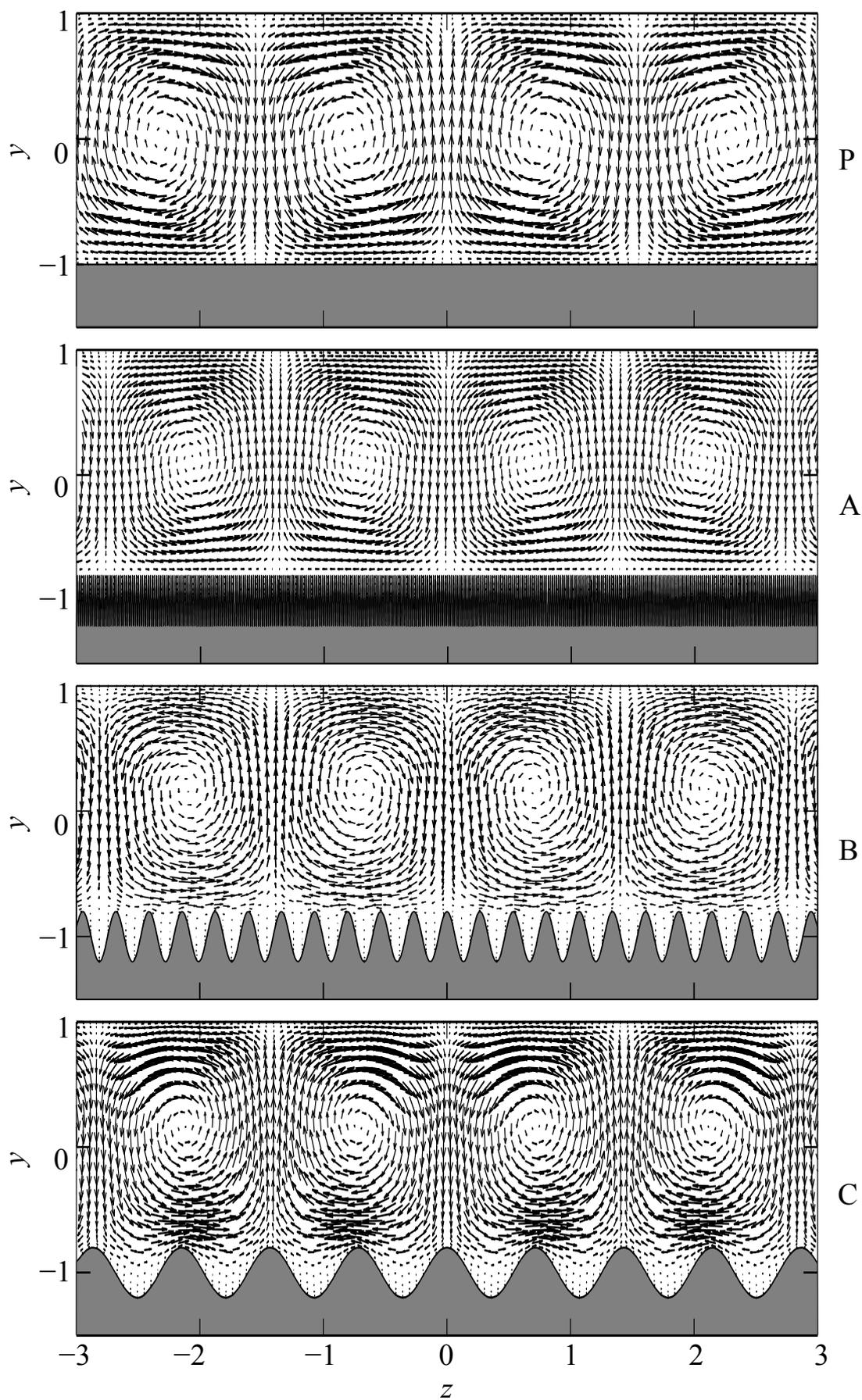


Рис. 4: Критические возмущения в плоском (P) и оребренных каналах при  $\gamma = 2$ ,  $\varepsilon = 0.4$  и периодах оребрения  $L = 0.016$ ,  $0.268$  и  $0.716$  (A, B и C, соответственно).

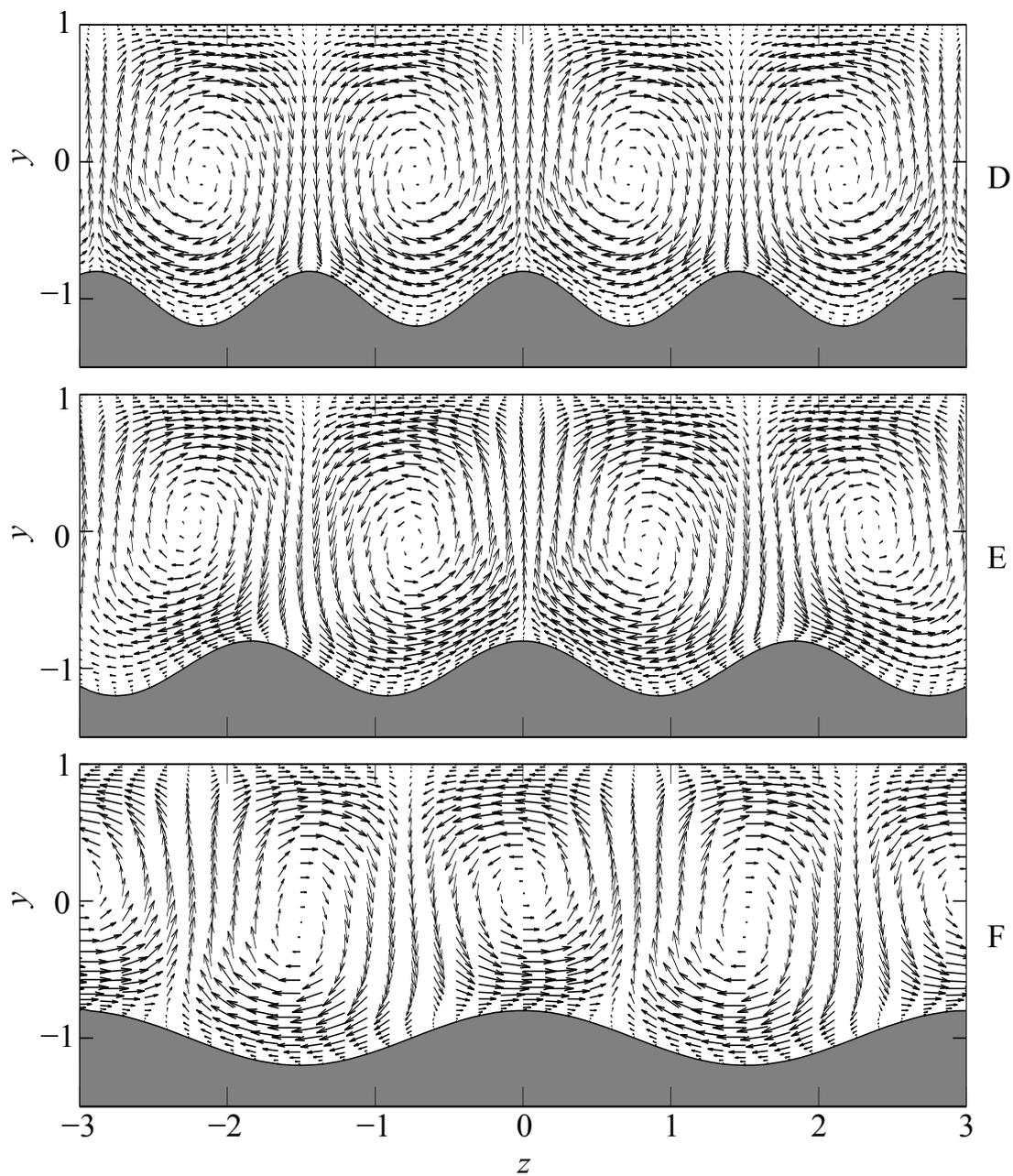


Рис. 5: Критические возмущения в оребренных каналах при  $\gamma = 2$ ,  $\varepsilon = 0.4$  и периодах оребрения  $L = 1.444$ ,  $1.836$  и  $3.012$  (D, E и F, соответственно).

Рейнольдса сначала уменьшается до величины, меньшей  $Re$ , а затем начинает расти (как следствие, сначала растет, а потом уменьшается  $Re_E$ ). При  $L \gg 1$  не приведенные здесь результаты расчетов показывают, что в кинетической энергии критического возмущения существенно доминирует энергия вихревых пар, расположенных в самых широких частях канала. Поэтому в этом случае максимальное эффективное число Рейнольдса близко к  $h_{\max}(\varepsilon, \gamma)^2 Re$ , а  $Re_E \approx Re_E^p / h_{\max}(\varepsilon, \gamma)^2$ .

## 6. Анализ зависимости $Re_L$ от параметров оребрения

В отличие от плоского канала в рассмотренном диапазоне параметров оребрения  $Re_L$  в оребренном канале может достигаться на ведущих модах двух классов. При  $\varepsilon \rightarrow 0$  одна из этих мод (ей соответствует кривая, обозначенная цифрой *I* на рис. 3) переходит в волну Толлмина–Шлихтинга, вызывающую неустойчивость течения в плоском канале при числе Рейнольдса большем  $Re_L^p$ . Другая мода (ей соответствует кривая, обозначенная цифрой *II* на рис. 3) переходит в волну Сквайра с поперечным волновым числом равным  $\pi/l$ , устойчивую при любом числе Рейнольдса.

В большей части рассмотренного диапазона периодов оребрения  $L$ , вне зависимости от класса ведущей моды в соответствии с данными предшествующих работ [10, 2],  $Re_L$  значительно меньше  $Re_L^p$ . Это связано с перегибностью профиля скорости основного течения. Как видно из рис. 1 и 2, при небольших периодах оребрения профиль скорости имеет значительную перегибность по  $y$ , а при больших — по  $z$ , перегибность по  $y$  при этом исчезает. Такая структура основного течения является причиной неустойчивости и ряда других пространственно модулированных сдвиговых течений, рассмотренных ранее как экспериментально, так и теоретически (см. напр. [16, 17]).

Напомним, что в соответствии с существующими представлениями об устойчивости плоских течений наличие точки перегиба

$$y_s : \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y_s) = 0$$

профиля скорости является необходимым условием возникновения неустойчивости при пренебрежимо малой вязкости. При этом в случае нейтральной устойчивости ( $Re = Re_L$ ) точка перегиба должна совпадать с «критической» точкой  $y_c$ , в которой скорость основного течения равна фазовой скорости  $c$  ведущей моды:  $U(y_c) = c$  [9]. В работах [16, 17] основное течение имеет более сложную структуру, в частности зависит от  $z$ . Однако было показано, что если зависимость от одной из координат слабая по сравнению

с зависимостью от другой координаты, то приведенные выше соображения позволяют дать качественное объяснение наблюдаемого поведения возмущений.

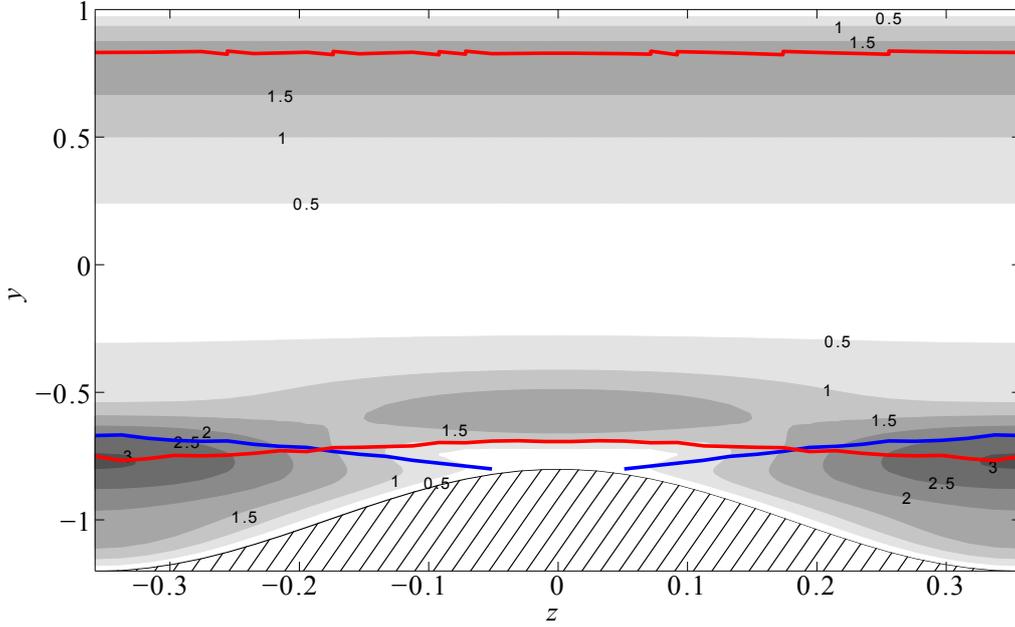


Рис. 6: Линии уровня модуля продольной компоненты скорости ведущей моды и точки, в которых  $\partial^2 U / \partial y^2 = 0$  (синие линии) и  $U = c$  (красные линии), при  $L = 0.716$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\gamma = 2$  и  $\text{Re} = \text{Re}_L$ .

Возвращаясь к рассматриваемому течению, прежде всего отметим, что  $\text{Re}_L \rightarrow \text{Re}_L^p$  при  $L \rightarrow 0$  по той же причине, по которой  $\text{Re}_E \rightarrow \text{Re}_E^p$ : оребренный канал становится эквивалентен плоскому с меньшей полувысотой и во столько же большей средней скоростью основного течения. Уже при  $L \approx 0.016$  перенормированная с учетом этого мода  $I$  с хорошей точностью совпадает в надреберной части канала с волной Толлмина–Шлихтинга плоского канала, а ее перенормированная фазовая скорость  $\tilde{c} \approx 0.3972$  практически совпадает с фазовой скоростью  $c \approx 0.3959$  волны Толлмина–Шлихтинга.

С ростом  $L$  механизм невязкой неустойчивости начинает проявлять себя резким уменьшением величин  $\text{Re}_L$ . Анализ распределений  $U$ ,  $\partial^2 U / \partial y^2$  и модуля  $|u'|$  продольной компоненты скорости ведущей моды при  $\text{Re} = \text{Re}_L$  (см. рис. 6) показывает, что в этом случае имеются точки  $(y, z)$ , в которых

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(y, z) = 0, \quad U(y, z) = c.$$

Эти точки расположены в области наибольших значений  $|u'|$ , что согласуется с данными для пограничных слоев [16, 17]. При дальнейшем увеличении  $L$  перегибы по  $y$  постепенно исчезают, а  $\text{Re}_L$  для моды  $I$  при  $L \gtrsim 2.5$  выходит на постоянный уровень, который несколько выше величины  $\text{Re}_L^p$ .

Вместе с тем, при  $L \gtrsim 1.8\text{--}2.4$  (в зависимости от параметров оребрения) глобальное  $\text{Re}_E$  обеспечивается модой  $II$ . Как уже упоминалось она соответствует волне Сквайра плоского канала, для которой можно аналитически показать, что она всегда устойчива [3]. Мода  $II$  имеет большую фазовую скорость, чем мода  $I$ , примерно равную средней скорости основного течения в центре канала. Она становится неустойчивой при малых числах Рейнольдса когда возникает перегиб по  $z$  в центре канала. Максимум модуля продольной компоненты скорости моды  $II$  также располагается в центре канала (см. рис. 7). При дальнейшем увеличении  $L$  перегибы по  $z$  в центре канала не исчезают, поэтому эти соображения продолжают оставаться актуальными.

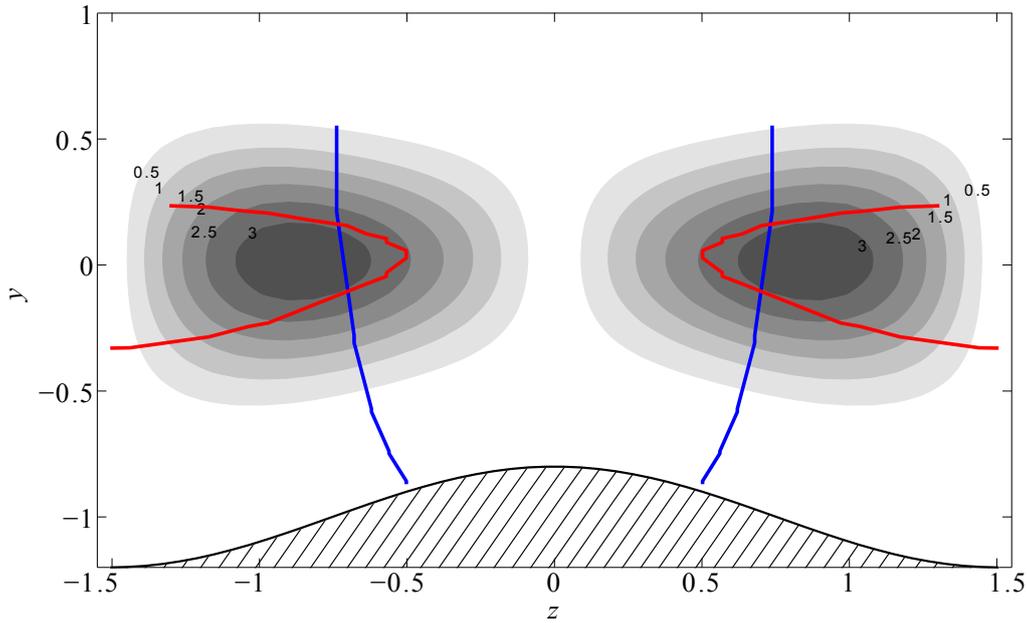


Рис. 7: Линии уровня модуля продольной компоненты скорости ведущей моды и точки, в которых  $\partial^2 U / \partial z^2 = 0$  (синие линии) и  $U = c$  (красные линии), при  $L = 3.012$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ,  $\gamma = 2$  и  $\text{Re} = \text{Re}_E$ .

## 7. Заключение

В работе численно исследована устойчивость течения Пуазейля в продольно оребренном канале. Установлено, что линейная неустойчивость реализуется при небольших периодах оребрения на ведущей моде, которой соответствует волна Толлмина-Шлихтинга плоского канала, а при больших периодах оребрения — на ведущей моде, которой соответствует волна Сквайра плоского канала. Получены и объяснены зависимости энергетического  $\text{Re}_E$  и линейного  $\text{Re}_L$  критических чисел Рейнольдса от высоты  $\varepsilon$  и заостренности  $\gamma$  ребер и периода оребрения  $L$ . Сравнение с энергетическим  $\text{Re}_E^p$

и линейным  $\text{Re}_L^p$  критическими числами Рейнольдса плоского течения Пуазейля показывает (рис. 3), что при  $\varepsilon = 0.2$  и  $\gamma = 2$  существует достаточно протяженный интервал значений  $L$ , в котором  $\text{Re}_L > \text{Re}_L^p$ . С увеличением  $\varepsilon$  и  $\gamma$  этот интервал постепенно сужается и исчезает, что свидетельствует о существовании оптимальных значений  $\varepsilon$  и  $\gamma$ , при которых достигается максимальная величина  $\text{Re}_L$ . Кроме того, при всех рассмотренных значениях  $\varepsilon$  и  $\gamma$  в максимуме  $\text{Re}_L$  по  $L$  имеем  $\text{Re}_E > \text{Re}_E^p$ .

Таким образом, впервые показано, что существует продольное оребрение, увеличивающее по сравнению с плоским каналом оба критических числа Рейнольдса, отдаляя тем самым как естественный, так и докритический ламинарно-турбулентный переход. Практическое значение полученных результатов состоит, в частности, в том, что такое оребрение канала позволяет прокачивать больше жидкости при сохранении ламинарности течения.

## Список литературы

- [1] *Schmid P. J., Henningson D.S.* Stability and transition in shear flows. Springer. 2001. 556 p.
- [2] *Boiko A. V., Kozlov V. V., Syzrantsev V. V., Scherbakov V. A.* Transition control by riblets in a swept wing boundary layer with embedded streamwise vortex. Eur. J. Mech. B/Fluids. 1997. Vol. 16. № 4. P. 465–482.
- [3] *Boiko A. V., Dougal A. V., Grek G. R., Kozlov V. V.* Physics of transitional shear flows. Springer–Verlag. 2011. 271 p.
- [4] *Luchini P., Trombetta G.* Effects of riblets upon stability. Appl. Sci. Res. 1995. Vol. 54. P. 313–321.
- [5] *Grek G. R., Kozlov V. V., Titarenko S. V.* An experimental study on the influence of riblets on transition. J. Fluid Mech. 1996. Vol. 315. P. 31–49.
- [6] *Бойко А. В., Нечепуренко Ю. М.* Технология численного анализа влияния оребрения на временную устойчивость плоских течений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 6. С. 1109–1125.
- [7] *Нечепуренко Ю. М.* О редукции линейных дифференциально-алгебраических систем управления. Доклады АН. 2012. Т. 445. С. 17–19.
- [8] *Клюшнев Н. В.* Высокопроизводительный анализ устойчивости поперечно-периодических течений жидкости и газа. Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 11. С. 111–120.

- [9] *Criminale W. O., Jackson T. L., Joslin R. D.* Theory and computation of hydrodynamic stability. Cambridge University Press. 2003. 463 p.
- [10] *Ehrenstein U.* On the linear stability of channel flow over riblets. *Phys. Fluids*. 1996. Vol. 8. № 11. P. 3194–3196.
- [11] *Григорьев О. А., Ключнев Н. В.* Применение численно-аналитического метода конформного отображения для построения сетки в оребренном канале. *Вычислительные методы и программирование*. 2014. Т. 15. С. 487–498.
- [12] *Бойко А. В., Нечепуренко Ю. М.* Влияние оребрения на временную устойчивость плоского течения Пуазейля. *Модели и методы аэродинамики*. МЦНМО, 2008. С. 22–23.
- [13] *Boiko A. V., Nечepurenko Yu. M.* Temporal stability of ribbed duct flow. *Abstracts of 15th International Conference on the Methods of Aerophysical Research*. Parallel, 2010. Vol. 1. P. 194–195.
- [14] *Бойко А. В., Ключнев Н. В., Нечепуренко Ю. М.* Влияние волнистого оребрения на устойчивость сдвиговых течений. *Модели и методы аэродинамики*. МЦНМО, 2013. С. 35–36.
- [15] *Нечепуренко Ю. М., Boiko A. V., Klyushnev N. V.* Effect of wavy grooves on stability of shear flows. *Abstracts of 15th International Conference on the Methods of Aerophysical Research*. Avtograf, 2014. Vol. 1. P. 161–162.
- [16] *Hall P., Horseman N. J.* The linear inviscid secondary instability of longitudinal vortex structures in boundary layers. *J. Fluid Mech.* 1991. Vol. 232. P. 357–375.
- [17] *Бойко А. В., Козлов В. В., Сызранцев В. В., Щербаков В. А.* Исследование влияния внутренней структуры продольного вихря на развитие бегущих возмущений в нем. *Теплофизика и аэромеханика*. 1997. Т. 4. №4. С. 1–13.

## Содержание

1. Введение . . . . .	3
2. Постановка задачи . . . . .	4
3. Метод вычисления критических чисел Рейнольдса . . . . .	5
4. Результаты расчетов . . . . .	7
5. Анализ зависимости $Re_E$ от параметров оребрения . . . . .	10
6. Анализ зависимости $Re_L$ от параметров оребрения . . . . .	15
7. Заключение . . . . .	17
Список литературы . . . . .	18