



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 8 за 2015 г.



Абрашкин В.И., Воронов К.Е.,  
Пияков И.В., Пузин Ю.Я.,  
Сазонов В.В., Семкин Н.Д.,  
Чебуков С.Ю.

Определение  
вращательного движения  
спутника Фотон М-4

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Определение вращательного движения спутника Фотон М-4 / В.И.Абрашкин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 8. 40 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-8>

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В.Келдыша**

**В.И. Абрашкин, К.Е. Воронов, И.В. Пияков, Ю.Я. Пузин,  
В.В. Сазонов, Н.Д. Семкин, С.Ю. Чебуков**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА**

***ФОТОН М-4***

**Москва – 2015**

## Аннотация

Реконструировано фактическое управляемое вращательное движение спутника *Фотон М-4* в режиме одноосной солнечной ориентации. Реконструкция выполнена по данным бортовых измерений векторов угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли (МПЗ). Методика реконструкции основана на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела. В рамках этой методики данные измерений обоих типов, собранные на некотором отрезке времени, обрабатываются совместно. Измерения угловой скорости интерполируются кусочно-линейными функциями, которые подставляются в кинематические дифференциальные уравнения для кватерниона, задающего переход от приборной системы координат спутника к инерциальной системе координат. Полученные таким образом уравнения представляют собой кинематическую модель вращательного движения спутника. Решение этих уравнений, аппроксимирующее фактическое движение, находится из условия наилучшего (в смысле метода наименьших квадратов) согласования данных измерений вектора напряженности МПЗ с его расчетными значениями. Описанная методика позволяет реконструировать фактическое вращательное движение спутника одним решением кинематических уравнений на интервалах времени продолжительностью более 10 часов. Найденные реконструкции использованы для расчета остаточных микроускорений.

**V.I.Abrashkin, K.E.Voronov, I.V.Piyakov, Yu.Ya.Puzin, V.V.Sazonov, N.D.Semkin, S.Yu.Chebukov. Determining the spacecraft Foton M-4 attitude motion.** The paper presents the results of reconstruction of the spacecraft Foton M-4 attitude motion in the single-axis solar orientation mode. The reconstruction is based on processing the measurements of two vectors: the spacecraft angular rate and the strength of the Earth magnetic field. The processing technique uses kinematical equations of the attitude motion of a rigid body. In its framework, the measurement data of both types, collected on a time interval, are processed jointly. The angular rate data are interpolated by piecewise linear functions and those functions are substituted in kinematical equations for components of the quaternion, which defines a transformation of the spacecraft coupled coordinate system to the inertial one. The equations obtained present the kinematical model of a spacecraft attitude motion. The solution of the equations, which approximates the real motion, is found by the least squares method from the condition of the best agreement between measurement and calculation data of the magnetic strength. The technique allows to reconstruct the attitude motion on time intervals more than 10 hours. The found reconstructions are used for calculation of residual accelerations onboard the spacecraft.

**1. Задачи, решаемые с помощью АРМ аппаратуры КСКМ.** Автоматизированное рабочее место (АРМ) аппаратуры КСКМ (Контроль Состояния Квазистатических Микроускорений) является универсальным средством анализа микрогравитационной обстановки на искусственных спутниках Земли научного назначения, создаваемых в ОАО «РКЦ «Прогресс». Это АРМ обеспечивает как оперативный анализ во время полета спутника посредством обработки телеметрической информации, получаемой с борта, так и послеполетную обработку всех имеющихся данных, позволяющих реконструировать микрогравитационную обстановку во время полета. Аппаратура КСКМ является модификацией аппаратуры ГАВИТОН, применявшейся для анализа микрогравитационной обстановки на спутнике *Бион М-1* [1].

Спутник *Фотон М-4*, во многом аналогичный *Биону М-1*, не имел акселерометров для измерения остаточных ускорений в орбитальном полете. По этой причине анализ микрогравитационной обстановки на его борту выполнен только в области низких частот – менее 0.01 Гц. Следует отметить, что именно эта область наиболее важна для интерпретации большинства космических экспериментов в области микрогравитации. Микроускорения на борту *Фотона М-4* найдены расчетным путем на основании достаточно детальной реконструкции движения спутника по телеметрической информации.

Во время полета спутника *Фотон М-4* с помощью АРМ аппаратуры КСКМ оперативно обрабатывалась следующая информация: 1) измерения фазового вектора орбитального движения, выполняемые аппаратурой спутниковой навигации; 2) измерения угловой скорости спутника, получаемые от его системы управления движением; 3) измерения напряженности магнитного поля Земли (МПЗ), выполняемые бортовой частью аппаратуры КСКМ. Ниже приведены некоторые результаты этой обработки, дополненные результатами послеполетного анализа. Оперативная телеметрическая информация передавалась на Землю по радио. Она является выборочной, хотя и охватывает по несколько орбитальных витков в большей части полетных суток. Информация, используемая в послеполетном анализе, взята из памяти бортовых устройств и непрерывно покрывает практически весь полет.

**2. Обработка измерений АСН.** Аппаратура спутниковой навигации (АСН) выдавала измерения координат и компонент скорости спутника относительно гринвичской системы координат. Полученные данные имеют шаг по времени 12 с. Они обрабатывались методом наименьших квадратов с использованием двух математических моделей: приближенной аналитической модели SGP4 [2] и стандартной численной модели, основанной на дифференциальных уравнениях движения спутника в гринвичской системе координат (см., например, [3]). Во второй модели нецентральность гравитационного поля Земли учитывалась с точностью до членов порядка (36,36) включительно в разложении потенциала этого поля в ряд по шаровым функциям, плотность атмосферы рассчитывалась согласно модели ГОСТ Р 25645.116-2004. При формировании функционала метода наименьших квадратов ошибки в измерениях принимались некоррелированными с нулевыми математическими ожиданиями. Ошибки в координатах имели одинаковые стандартные отклонения  $\sigma$ , ошибки в компо-

нентах скорости – одинаковые стандартные отклонения  $w\sigma$ . Коэффициент  $w=1000c$  оставался неизменным, значение  $\sigma$  уточнялось при обработке.

Функционал минимизировался по 7 скалярным параметрам – значениям шестимерного фазового вектора спутника на левом конце обрабатываемого временного отрезка с измерениями и баллистическому коэффициенту. Поскольку орбита спутника была возмущенной (его ориентация поддерживалась реактивными двигателями), оценки баллистического коэффициента не были надежными. В данном случае этот коэффициент рассматривался как формальный параметр согласования. Как правило, при обработке данных измерений на отрезке времени 1 сут численная модель обеспечивала значения  $\sigma < 50m$ , модель SGP4 обеспечивала значения  $\sigma < 400m$ . С увеличением длины отрезка значения  $\sigma$  увеличивались, а с уменьшением – уменьшались.

Ошибки аппроксимации данных измерений АСН с помощью этих моделей иллюстрируются диаграммами остатков на рис 1 – 6. Диаграммы построены следующим образом. Радиус-вектор и скорость КА в гринвичской системе координат, измеренные в момент времени  $t_k$  ( $k=1,2,\dots; t_k < t_{k+1}$ ), обозначим  $\mathbf{r}_k$  и  $\mathbf{v}_k$ . Функции, аппроксимирующие эти измерения с помощью одной из принятых математических моделей, обозначим  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$ :  $\mathbf{r}(t_k) \approx \mathbf{r}_k$ ,  $\mathbf{v}(t_k) \approx \mathbf{v}_k$ . Пусть  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{v}(t) + \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}(t)$  – аппроксимация абсолютной геоцентрической скорости КА,  $\boldsymbol{\omega}_E$  – угловая скорость Земли. Введем ортонормированные векторы

$$\mathbf{e}_1(t) = \frac{\mathbf{V}(t)}{|\mathbf{V}(t)|}, \quad \mathbf{e}_2(t) = \frac{\mathbf{r}(t) \times \mathbf{V}(t)}{|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{V}(t)|}, \quad \mathbf{e}_3(t) = \mathbf{e}_1(t) \times \mathbf{e}_2(t) \approx \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|},$$

и каждую пару остатков  $\delta \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}(t_k)$ ,  $\delta \mathbf{V}_k = \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}_k - \mathbf{V}(t_k)$  будем рассматривать в ее собственном базисе с оортами  $\mathbf{e}_1(t_k)$ ,  $\mathbf{e}_2(t_k)$ ,  $\mathbf{e}_3(t_k)$ . Компоненты векторов  $\delta \mathbf{r}_k$  и  $\delta \mathbf{V}_k$  в этом базисе обозначим соответственно  $\xi_{1k}$ ,  $\xi_{2k}$ ,  $\xi_{3k}$  и  $\eta_{1k}$ ,  $\eta_{2k}$ ,  $\eta_{3k}$ . Графически компоненты остатков будем представлять ломаными, звенья которых соединяют соседние по времени точки  $(t_k, \xi_{1k})$ ,  $(t_k, \eta_{1k})$  и т. д. Приведенные рисунки построены для двух типичных телеметрических файлов. Рис. 1, 3 получены с помощью численной модели, рис. 2, 4 – с помощью модели SGP4. Найденные значения  $\sigma$ , а также средние значения величин  $|\delta \mathbf{r}_k|/\sqrt{3}$  и  $|\delta \mathbf{V}_k|/\sqrt{3}$ , обозначенные соответственно  $\sigma_r$  и  $\sigma_v$ , приведены в подписях к рисункам. Пары рисунков 3, 5 и 4, 6 иллюстрируют повышение точности аппроксимации измерений при уменьшении длины интервала обработки.

Сравнительно невысокая точность аппроксимации измерений АСН численной моделью обусловлена функционированием двигателей ориентации КА. Без такого функционирования ошибки аппроксимации были бы в несколько раз ниже. Модель SGP4 продемонстрировала свою обычную точность. Хотя эта модель почти на порядок менее точна, нежели численная, она более удобна и ее точности вполне хватает для обработки данных измерений напряженности МПЗ. Именно модель SGP4 использовалась при получении большинства представленных ниже результатов.

Если принятое выше допущение об ошибках измерений имело место, то с достаточно высокой точностью выполнялось бы соотношение  $\sigma_r = w\sigma_V$ . В рассмотренных примерах выполнение этого соотношения вполне приемлемо.

Сравнение результатов обработки данных измерений АСН на *Бионе М-1* [1] и *Фотоне М-4* показывает, что в случае *Фотона* погрешности аппроксимации измерений примерно в 2 раза хуже. Этот факт можно объяснить более низким перигеем орбиты второго спутника: аэродинамический момент возмущал его ориентированное вращательное движение сильнее – интенсивней работали двигатели ориентации – сильнее возмущалась орбита.

**3. Тестирование магнитных измерений.** Аппаратура КСКМ имела два трехкомпонентных магнитометра, установленных в разных частях спускаемого аппарата и занумерованных числами 1 и 2. Измерения проводились в течение всего орбитального полета. Оцифровка показаний обоих магнитометров выполнялась в единые моменты времени. В начале полета шаг измерений составлял 12 – 14с. В конце полета шаг уменьшился и стал более неравномерным. Иногда его значения доходили до 2с. Согласно проектным документам компоненты измеренных векторов напряженности магнитного поля выдавались в приборной системе координат спутника  $x_1x_2x_3$ . Ось  $x_1$  этой системы параллельна продольной оси спутника и направлена от приборного отсека к спускаемому аппарату; ось  $x_2$  перпендикулярна плоскости солнечных батарей и направлена в полупространство, к которому обращена рабочая сторона батарей; ось  $x_3$  дополняет систему до правой. Но на самом деле показания магнитометров относятся к их собственным системам координат, направления осей которых близки направлениям осей приборной системы, но не совпадают с ними.

Тестирование измерений магнитометров выполнялось двумя способами. Первый способ основан на следующих предположениях: 1) магнитометры измеряют одно и то же переменное поле, 2) постоянные составляющие поля в точках расположения магнитометров, вообще говоря, различны (измерения магнитометров могут содержать постоянные смещения). В случае точной реализации этих предположений измерения магнитометра 2, пересчитанные в систему координат магнитометра 1, отличались бы от измерений последнего на постоянный вектор смещения. Из-за разного рода ошибок точное постоянство вектора смещения не имело места, однако его вариации во времени предполагались малыми. Согласующие параметры – матрица перехода между системами координат магнитометров и постоянный вектор смещения – определялись методом наименьших квадратов. Методика определения этих параметров описана в [4] и состоит в следующем.

Результаты измерений обоих магнитометров, полученные на некотором интервале времени, обозначим

$$t_n, g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, g_3^{(n)}, h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, h_3^{(n)} \quad (n=1, 2, \dots, N). \quad (1)$$

Здесь  $g_i^{(n)}$  и  $h_i^{(n)}$  – результаты измерений  $i$ -ых компонент магнитного поля магнитометрами 1 и 2 в их собственных системах координат в момент времени  $t_n$ . С высокой точностью должны выполняться соотношения

$$g_i^{(n)} = d_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} h_j^{(n)} \quad (i=1, 2, 3; n=1, 2, \dots, N), \quad (2)$$

где  $d_i$  – компоненты постоянного вектора смещения в системе координат магнитометра 1,  $c_{ij}$  – элементы матрицы перехода  $C$  от системы координат магнитометра 2 к системе координат магнитометра 1. Если на отрезке  $t_1 \leq t \leq t_N$  поле в системе координат  $x_1 x_2 x_3$  менялось сложным образом, то для отыскания матрицы  $C$  и смещений  $d_i$  удобно воспользоваться методом наименьших квадратов. Применение этого метода означает принятие следующей гипотезы: ошибки в соотношениях (2) не коррелированы, имеют нулевые математические ожидания и одинаковые дисперсии.

Следуя методу наименьших квадратов, ищем минимум выражения

$$Z = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 [g_i^{(n)} - \tilde{g}_i^{(n)}]^2, \quad \tilde{g}_i^{(n)} = d_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} h_j^{(n)}$$

по величинам  $c_{ij}$  и  $d_i$  при условии, что матрица  $C$  ортогональна и  $\det C = 1$ . Эта задача решается с помощью стандартных процедур вычислительной линейной алгебры. Обозначим ее решение  $C^\circ$ ,  $d^\circ = (d_1^\circ, d_2^\circ, d_3^\circ)^\top$ . В линейном приближении окрестность решения параметризуется независимыми параметрами  $\xi_i, \theta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ):  $d_i = d_i^\circ + \xi_i$ ,  $C = E_\theta C^\circ$ , где

$$E_\theta = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Величины  $\theta_i$  представляют собой компоненты вектора бесконечно малого поворота, характеризующего отличие матрицы  $C$  от ее оценки  $C^\circ$ . Эти компоненты относятся к системе координат магнитометра 1. Согласно методу наименьших квадратов параметры  $\xi_i, \theta_i$  образуют случайный вектор  $\eta \in R^6$  с математическим ожиданием, равным нулю. Ковариационная матрица  $K_\eta$  этого вектора выражается через матрицу  $P$  системы нормальных уравнений, получающейся линеаризацией исходной задачи по  $\eta$  в точке минимума  $Z$ , и значение  $Z_{\min}$ :

$$K_\eta = \sigma_0^2 P^{-1}, \quad \sigma_0 = \sqrt{\frac{Z_{\min}}{3N-6}}.$$

Здесь  $\sigma_0$  – стандартное отклонение ошибок в соотношениях (2). Стандартные отклонения величин  $\xi_i, \theta_i$  – квадратные корни из соответствующих диагональных элементов матрицы  $K_\eta$  – обозначим  $\sigma_{d_i}$  и  $\sigma_{\theta_i}$ .

В качестве примера приведем результаты сопоставления данных измерений магнитометров описанным методом на двух интервалах времени. Первый интервал:  $N=15947$ ,  $t_1 = 22:03:20$  UTC 14.08.2014,  $t_N - t_1 = 70223$ с,

$$d^\circ = \begin{Bmatrix} -5712\gamma \\ -394\gamma \\ -3826\gamma \end{Bmatrix}, \quad C^\circ = \begin{Bmatrix} 0.997658 & 0.040476 & -0.055145 \\ -0.041879 & 0.998822 & -0.024525 \\ 0.054087 & 0.026777 & 0.998177 \end{Bmatrix},$$

$$\sigma_{d1} = 3.6\gamma, \quad \sigma_{d2} = 3.7\gamma, \quad \sigma_{d3} = 3.6\gamma,$$

$$\sigma_{\theta1} = 0.0077^\circ, \quad \sigma_{\theta2} = 0.0069^\circ, \quad \sigma_{\theta3} = 0.0068^\circ.$$

Второй интервал:  $N=12782$ ,  $t_1 = 05:55:01$  UTC 30.08.2014,  $t_N - t_1 = 86703$ с,

$$d^\circ = \begin{Bmatrix} -5813\gamma \\ -137\gamma \\ -4217\gamma \end{Bmatrix}, \quad C^\circ = \begin{Bmatrix} 0.997664 & 0.038588 & -0.056365 \\ -0.038657 & 0.999253 & -0.000136 \\ 0.056318 & 0.002315 & 0.998410 \end{Bmatrix},$$

$$\sigma_{d1} = 8.5\gamma, \quad \sigma_{d2} = 9.1\gamma, \quad \sigma_{d3} = 9.1\gamma,$$

$$\sigma_{\theta1} = 0.020^\circ, \quad \sigma_{\theta2} = 0.014^\circ, \quad \sigma_{\theta3} = 0.018^\circ.$$

Наглядное представление о полученных решениях дают рис. 7, 8. На рис. 7а, 8а в каждой системе координат изображены две ломаные. Звенья одной из них последовательно соединяют соседние по времени точки  $(t_n, g_i^{(n)})$ , другая проходит через точки  $(t_n, \tilde{g}_i^{(n)})$ ,  $n=1, 2, \dots, N$ . На вид эти ломаные очень близки. Чтобы наглядно показать их различие, на рис. 7б, 8б изображены ломаные, проходящие через точки  $(t_n, g_i^{(n)} - \tilde{g}_i^{(n)})$ . Анализ рисунков показывает, что различие между показаниями магнитометров достаточно близко. Амплитуды колебаний на рис. 7б, 8б можно уменьшить введением корректирующих множителей, на которые следует умножить данные измерений  $g_i^{(n)}$  или  $h_i^{(n)}$  в (1). В последующей обработке в качестве измерений компонент МПЗ в приборной системе координат использовались величины  $[g_i^{(n)} + h_i^{(n)}]/2$ . Это заметно улучшило согласование измерений и их расчетных аналогов по сравнению с использованием данных только одного из магнитометров – любого. Еще более хорошее согласование получалось при использовании в качестве измерений величин  $\chi[g_i^{(n)} + h_i^{(n)}]/2$ , где  $\chi=1 \div 1.05$ . Значение коэффициента  $\chi$  подбиралось на сетке с шагом 0.005 для каждого отрезка данных в рамках рассматриваемого ниже второго способа тестирования магнитных измерений. Чтобы не вводить новых обозначений, указанные величины будем обозначать  $h_i^{(n)}$ . Ниже под измерениями магнитного поля понимаются именно эти величины при подходящем значении  $\chi$ .



Второй способ тестирования основан на предположении, что магнитометры должны измерять в основном МПЗ. С учетом большого числа электрических цепей на борту спутника это предположение выглядит несколько наивным, однако опыт магнитных измерений на трех предыдущих *Фотонах* [5 – 7] и *Бионе М-1* [1] позволял надеяться, что оно окажется адекватным. Этот способ состоял в сравнении модуля напряженности измеренного поля с модулем напряженности МПЗ, рассчитанной с помощью модели IGRF. Сравнение модулей не требует знания ориентации магнитометра, надо знать только орбитальное движение спутника. Такой подход позволяет проверить данные измерений каждого магнитометра, используя минимальную дополнительную информацию. В случае достаточно точных данных в рамках второго способа можно уточнить их временную привязку и постоянную систематическую ошибку (смещение нуля или, в другой интерпретации, постоянную постороннюю составляющую поля). Как оказалось, привязка ко времени данных магнитных измерений не вполне верна, и моменты времени, указанные в файле с магнитными измерениями, содержат некоторый сдвиг. Этот сдвиг, обозначим его  $\tau$ , прибавлялся ко времени привязки измерения и принимался постоянным на всем временном интервале сравнения. Постоянную систематическую ошибку в измерениях компоненты поля вдоль оси магнитометра с номером  $i$  обозначим  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Эти величины вычитались из соответствующих измерений и также принимались постоянными на интервале сравнения. Значения величин  $\tau$  и  $\Delta_i$  определялись методом наименьших квадратов из условия наилучшего согласования на этом интервале модулей измеренного и расчетного векторов напряженности [5 – 7].

Детали состоят в следующем. Коэффициент  $\chi$  пока считаем фиксированным. Введем функцию

$$\Psi(\tau, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) = \sum_{n=1}^N \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^3 [h_i^{(n)} - \Delta_i]^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^3 H_i^2(t_n + \tau)} \right\}^2,$$

где  $H_i(t)$  – расчетные значения компонент напряженности МПЗ в гринвичской системе координат в момент времени  $t$ . Функции  $H_i(t)$  строятся с использованием модели орбитального движения SGP4 и аналитической модели МПЗ IGRF. Положим

$$\Psi_1(\tau) = \min_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3} \Psi(\tau, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3).$$

Функция  $\Psi_1(\tau)$  вычислялась на равномерной сетке с шагом 1с. Минимизация  $\Psi$  по  $\Delta_i$  на каждом шаге выполнялась методом Гаусса-Ньютона [8]. Значение  $\tau^*$ , доставляющее минимум функции  $\Psi_1$  на этой сетке, принималось в качестве сдвига времени, а соответствующие экстремальные значения  $\Delta_i$  служили оценками смещений в измерениях компонент поля.

Стандартное отклонение  $\sigma_H$  ошибок согласования измеренных и расчетных модулей напряженности МПЗ и стандартное отклонение  $\sigma_\tau$  сдвига  $\tau^*$  рассчитывались в рамках метода наименьших квадратов по формулам

$$\sigma_H^2 = \frac{\Psi_1(\tau^*)}{N-4}, \quad \sigma_\tau^2 = 2\sigma_H^2 \left[ \frac{d^2\Psi_1(\tau)}{d\tau^2} \right]^{-1}.$$

Вторая производная здесь вычислялась по сеточным значениям  $\Psi_1$  разностным способом. Расчеты такого рода проводились для нескольких значений  $\chi$  (см. выше), из которых затем выбиралось значение с наименьшей величиной  $\sigma_H$ . После того как оценка  $\tau$  получена, в дальнейшей обработке вместо величин  $t_n$  (см. (1)) используются величины  $t_n + \tau$ , причем  $\tau$  может уточняться. Однако ниже в подписях к рисункам, связанным с магнитными измерениями, указывается нескорректированное время. Это сделано ради удобства работы с данными. Приведем примеры.

Для двух рассмотренных выше временных интервалов с магнитными измерениями были получены следующие оценки. Первый интервал:  $\sigma_H = 43 \mu\text{y}$ ,  $\tau^* = 64\text{c}$ ,  $\sigma_\tau = 0.38\text{c}$ ,  $\Delta_1 = 456 \mu\text{y}$ ,  $\Delta_2 = -672 \mu\text{y}$ ,  $\Delta_3 = 212 \mu\text{y}$ ,  $\chi = 1.025$ . Второй интервал:  $\sigma_H = 673 \mu\text{y}$ ,  $\tau^* = 75\text{c}$ ,  $\sigma_\tau = 0.72\text{c}$ ,  $\Delta_1 = 4986 \mu\text{y}$ ,  $\Delta_2 = -763 \mu\text{y}$ ,  $\Delta_3 = 114 \mu\text{y}$ ,  $\chi = 1.035$ . Результаты согласования на этих интервалах данных измерений поля и расчетных значений МПЗ иллюстрируются графиками на рис. 7в и 8в. В верхней части этих рисунков приведены графики функции

$$h_{\text{calc}}(t) = \sqrt{H_1^2(t) + H_2^2(t) + H_3^2(t)} \quad (t_1 + \tau \leq t \leq t_N + \tau),$$

и ломаная, проходящая через точки  $(t_n + \tau, h_{\text{mes},n})$ , где

$$h_{\text{mes},n} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 [h_i^{(n)} - \Delta_i]^2} \quad (n=1, 2, \dots, N).$$

Поскольку указанные график и ломаная практически сливаются, в нижней части рис. 7в и 8в изображена ломаная, звенья которой соединяют соседние точки  $(t_n + \tau, h_{\text{mes},n} - h_{\text{calc}}(t_n + \tau))$ . В этих примерах согласие данных измерений поля со значениями МПЗ из модели IGRF оказалось не хуже, чем на *Фотоне М-2* и *Бионе М-1*.

При обработке магнитных измерений, выполненных на *Бионе М-1* [1] и трех предыдущих *Фотонах*, использовался еще один способ проверки полученных данных. Он применялся к измерениям, выполненным в режиме орбитальной ориентации спутника. Этот способ наиболее детальный. Он позволял проверить правильность измерения каждой компоненты МПЗ, пользуясь тем, что в указанном режиме оси приборной системы координат спутника и орбитальной системы координат с достаточно высокой точностью совпадали. В частности, проверялась правильность задания матриц перехода от собственных

систем координат магнитометров к приборной системе. Возможность такого тестирования была обусловлена применением этого режима на продолжительных интервалах времени в самом начале полета указанных спутников – в течение примерно орбитального витка. В начале полета *Биона М-1* было три таких интервала продолжительностью 59, 63 и 183 мин. В полете *Фотона М-4* продолжительный интервал орбитальной ориентации был только перед спуском возвращаемой капсулы с орбиты, и описываемая проверка была выполнена только после полета. Она уже не была актуальной, поскольку два рассмотренных выше способа проверки обеспечили оперативную обработку данных. Тем не менее, приведем ее результаты.

Для интервала орбитальной ориентации  $N=1204$ ,  $t_1=06:38:29$  UTC 01.09.2014,  $t_N - t_1 = 7317$ с. В рамках второго способа тестирования (рис. 9а) было найдено  $\sigma_H = 243\gamma$ ,  $\tau^* = 69$ с,  $\sigma_\tau = 0.72$ с,  $\Delta_1 = 4089\gamma$ ,  $\Delta_2 = -1377\gamma$ ,  $\Delta_3 = 4728\gamma$ ,  $\chi = 1.085$ . Сопоставление данных измерений с расчетными аналогами, полученными в предположении идеальной орбитальной ориентации спутника, приведено на рис. 9б,в. На рис. 9б в каждой системе координат изображены две ломаные. Вершины одной из них – соответствуют измеренным значениям компонент поля в системе  $x_1x_2x_3$ , вершины другой отвечают их расчетным аналогам. Ломаные обоих видов очень близки, поэтому на рис. 9в приведены их разности (измерение минус расчетный аналог). Перед построением рис. 9б,в значения смещений  $\Delta_i$  были уточнены отдельно для каждой компоненты измерений:  $\Delta_1 = 4873\gamma$ ,  $\Delta_2 = -666\gamma$ ,  $\Delta_3 = 1588\gamma$ . Они отличаются от значений, полученных при тестировании вторым способом, и близки к значениям, полученным для интервала на рис. 8. Ниже при реконструкции движения в орбитальной ориентации (рис. 19) принято значение  $\chi = 1.05$ , которое позволило точнее аппроксимировать измерения, чем  $\chi = 1.085$ .

**4. Реконструкция вращательного движения спутника. Методика реконструкции.** Реконструкция вращательного движения *Фотона М-4* выполнялась по измерениям его угловой скорости и напряженности МПЗ. Методика реконструкции основана на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела. Опишем математические модели и приведем основные соотношения, используемые в этой методике.

Для описания вращательного движения спутника используются две правые декартовы системы координат: введенная в предыдущем разделе приборная система и система  $Y_1Y_2Y_3$ , в которой задаются двухстрочные элементы. Последняя переводится в гринвичскую систему координат поворотом по часовой стрелке вокруг оси  $Y_3$  на угол, равный среднему звездному времени. Таким образом, система  $Y_1Y_2Y_3$  весьма близка ко второй геоэквиаториальной системе координат эпохи даты. В частности, плоскость  $Y_1Y_2$  совпадает с плоскостью экватора, ось  $Y_3$  – ось вращения Земли. Систему  $Y_1Y_2Y_3$  считаем инерциальной.

Положение приборной системы  $x_1x_2x_3$  относительно системы  $Y_1Y_2Y_3$  зададим нормированным кватернионом  $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ ,  $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ .

Кватернионная формула перехода между этими системами координат имеет вид

$$(0, Y_1, Y_2, Y_3) = Q \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ Q^{-1}.$$

Матрицу перехода от приборной системы к системе  $Y_1 Y_2 Y_3$  обозначим  $A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^3$ , где  $a_{ij}$  – косинус угла между осями  $Y_i$  и  $x_j$ . Элементы этой матрицы выражаются через компоненты  $Q$  с помощью формул

$$\begin{aligned} a_{11} &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2, & a_{12} &= 2(q_1 q_2 - q_0 q_3), & a_{13} &= 2(q_1 q_3 + q_0 q_2), \\ a_{21} &= 2(q_2 q_1 + q_0 q_3), & a_{22} &= q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2, & a_{23} &= 2(q_2 q_3 - q_0 q_1), \\ a_{31} &= 2(q_3 q_1 - q_0 q_2), & a_{32} &= 2(q_3 q_2 + q_0 q_1), & a_{33} &= q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2. \end{aligned}$$

Орбитальное движение спутника на представляющем интерес временном интервале описывается с помощью модели SGP4. Параметры модели определяются по данным измерений АСН (см. раздел 2). Математическая модель вращательного движения спутника построена на основе кинематических уравнений, которым удовлетворяет кватернион  $Q$ . Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} 2\dot{q}_0 &= -q_1 \omega_1 - q_2 \omega_2 - q_3 \omega_3, \\ 2\dot{q}_1 &= q_0 \omega_1 + q_2 \omega_3 - q_3 \omega_2, \\ 2\dot{q}_2 &= q_0 \omega_2 + q_3 \omega_1 - q_1 \omega_3, \\ 2\dot{q}_3 &= q_0 \omega_3 + q_1 \omega_2 - q_2 \omega_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по времени,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  – компоненты абсолютной угловой скорости спутника в приборной системе координат.

Измерения величин  $\omega_i$  выполнялись непрерывно в течение практически всего полета. Данные этих измерений представлены в цифровом виде на единой временной сетке с постоянным шагом 12с. По этим данным построены непрерывные кусочно-линейные функции  $\Omega_i(t)$  ( $i=1, 2, 3$ ), которые в узлах сетки совпадают с данными измерений величин  $\omega_i$ , а в промежутках между узлами линейны. Однако в уравнения (1) подставлялись не эти функции, а выражения

$$\omega_i = \Omega_i(t) + \chi_i \quad (i=1, 2, 3), \quad (4)$$

где  $\chi_i$  – постоянные смещения в измерениях. Уравнения (3), (4) использовались на интервалах времени не более 12 часов, причем смещения  $\chi_i$  служили уточняемыми параметрами. В такой ситуации предположение о постоянстве этих величин оказалось вполне адекватным.

Опишем применение уравнений (3), (4) для обработки магнитных измерений, выполненных на отрезке  $I = \{t: t_a \leq t \leq t_b\}$ . Эти измерения также заданы на временной сетке, но неравномерной. Ее узлы, как правило, не совпадают с узлами сетки, на которой заданы функции  $\Omega_i(t)$ . К тому же (см. раздел 3), сет-

ку магнитных измерений приходилось смещать относительно шкалы времени АСН, используемой и для привязки измерений угловой скорости, чтобы достичь наилучшего согласования с расчетным магнитным полем. Магнитные измерения обозначим

$$t_k, h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, h_3^{(k)} \quad (k = \dots, 0, 1, 2, \dots).$$

Величины  $h_i^{(k)}$  представляют собой компоненты вектора измерений магнитного поля в приборной системе координат, привязанные в файле с магнитными данными к моменту времени  $t_k$ . Фактический момент времени, к которому следует привязать измерения  $h_i^{(k)}$ , обозначим  $t_k + \tau$ . Полагаем, что на отрезке  $I$  сдвиг  $\tau$  остается неизменным, причем  $\tau \ll t_b - t_a$ . Предварительная оценка сдвига известна (см. предыдущий раздел).

Следуя методу наименьших квадратов, реконструкцией фактического движения спутника на отрезке  $I$  будем считать решение уравнений (3), (4), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_{k \in U(\tau)} [h_i^{(k)} - \hat{h}_i(t_k + \tau)]^2 - N_\tau \Delta_i^2 \right\}, \quad (5)$$

$$\Delta_i = \frac{1}{N_\tau} \sum_{k \in U(\tau)} [h_i^{(k)} - \hat{h}_i(t_k + \tau)], \quad U(\tau) = \{k: t_k + \tau \in I\},$$

$$\hat{h}_i(t) = \sum_{j=1}^3 H_j(t) a_{ji}(t).$$

Здесь  $\Delta_i$  – постоянные смещения в измерениях МПЗ,  $H_i(t)$  – расчетные значения компонент напряженности МПЗ в системе координат  $Y_1 Y_2 Y_3$  в момент времени  $t$ ,  $N_\tau$  – число элементов множества  $U(\tau)$ . Функции  $H_i(t)$  строятся с использованием модели орбитального движения SGP4 и аналитической модели МПЗ IGRF. Функционал (5) получен преобразованием функционала метода наименьших квадратов, возникающего при уравнивании соотношений  $h_i^{(k)} \approx \hat{h}_i(t_k + \tau) + \Delta_i$  ( $i=1, 2, 3; k \in U(\tau)$ ). Минимизация  $\Phi$  выполняется по начальным условиям решения  $q_j(t_a)$  ( $j=0, 1, 2, 3$ ) и параметрам  $\chi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ),  $\tau$ . При этом учитывается условие нормировки

$$q_0^2(t_a) + q_1^2(t_a) + q_2^2(t_a) + q_3^2(t_a) = 1. \quad (6)$$

Для простоты письма объединим величины  $q_j(t_a)$  и  $\chi_i$  в один семимерный вектор  $z$  и будем рассматривать функционал (5) как функцию  $\Phi(z, \tau)$ . Минимизация  $\Phi$  по  $z$  и  $\tau$  сводилась к вычислению функции

$$\Phi_1(\tau) = \max_z \Phi(z, \tau)$$

в последовательности точек  $\tau_n$ , сходящейся к пределу  $\tau_* = \operatorname{argmin} \Phi_1(\tau)$ . Минимизация  $\Phi$  по  $z$  при фиксированном значении  $\tau$  выполнялась в несколько этапов разными методами. Некоторые детали этой минимизации описаны ниже. Выделение переменной  $\tau$  из полного набора аргументов  $\Phi$  вызвано ее особой ролью (в частности, зависимость  $\Phi_1(\tau)$  от  $\tau$  в окрестности точки  $\tau_*$  – довольно слабая) и желанием упростить вычисления. Для упрощения программного кода временной отрезок  $I$  и обрабатываемый отрезок магнитных измерений выбирались таким образом, чтобы множество  $U(\tau)$  не менялось в окрестности точки  $\tau_*$ . Оценка этой окрестности вместе и предварительная оценка  $\tau_*$  находились при проверке согласованности модуля напряженности измеренного магнитного поля с модулем напряженности МПЗ (см. раздел 3).

Описание минимизации функции  $\Phi$  по  $z$  начнем с заключительного этапа, на котором применялся метод Гаусса – Ньютона [8]. На каждой итерации этого метода поправки  $\Delta q_j(t_a)$  к имеющимся значениям  $q_j(t_a)$  ищутся в виде (ср. уравнения (3))

$$\begin{aligned}\Delta q_0(t_a) &= -\frac{1}{2}[\theta_1 q_1(t_a) + \theta_2 q_2(t_a) + \theta_3 q_3(t_a)], \\ \Delta q_1(t_a) &= \frac{1}{2}[\theta_1 q_0(t_a) + \theta_3 q_2(t_a) - \theta_2 q_3(t_a)], \\ \Delta q_2(t_a) &= \frac{1}{2}[\theta_2 q_0(t_a) + \theta_1 q_3(t_a) - \theta_3 q_1(t_a)], \\ \Delta q_3(t_a) &= \frac{1}{2}[\theta_3 q_0(t_a) + \theta_2 q_1(t_a) - \theta_1 q_2(t_a)].\end{aligned}\tag{7}$$

Параметры  $\theta_i$  суть компоненты вектора бесконечно малого поворота, задающего изменение ориентации спутника в окрестности положения  $Q(t_a)$ . Эти параметры и поправки  $\Delta \chi_i$  находятся из системы нормальных уравнений с матрицей  $\|C_{ij}\|_{i,j=1}^6$  и правой частью  $\|D_i\|_{i=1}^6$ :

$$\begin{aligned}C_{ij} &= \sum_{k \in U(\tau)} \sum_{l=1}^3 A_{li}(t_k + \tau) A_{lj}(t_k + \tau) - \frac{1}{N_\tau} \sum_{l=1}^3 B_{li} B_{lj}, \\ D_i &= \sum_{k \in U(\tau)} \sum_{l=1}^3 [h_l^{(k)} - \hat{h}_l(t_k + \tau)] A_{li}(t_k + \tau) - \frac{1}{N_\tau} \sum_{l=1}^3 \Delta_l B_{li}, \\ A_{11}(t) &= \hat{h}_2(t) \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_i} - \hat{h}_3(t) \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_i}, \\ A_{12}(t) &= \hat{h}_3(t) \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_i} - \hat{h}_1(t) \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial p_i}, \\ A_{13}(t) &= \hat{h}_1(t) \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial p_i} - \hat{h}_2(t) \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial p_i},\end{aligned}$$

$$B_{li} = \sum_{k \in U(\tau)} A_{li}(t_k + \tau) \quad (l=1, 2, 3; i, j=1, 2, \dots, 6).$$

Здесь  $p_1, p_2, \dots, p_6$  – обозначения величин  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3$  в указанном порядке,  $\partial\varphi_l(t)/\partial p_i$  – псевдопроизводные, служащие для представления истинных производных. В частности, в предыдущих формулах  $A_{li}(t) = \partial\hat{h}_l(t)/\partial p_i$ ; частные производные компонент кватерниона можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0(t)}{\partial p_i} &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial p_i} q_1(t) + \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial p_i} q_2(t) + \frac{\partial\varphi_3(t)}{\partial p_i} q_3(t) \right], \\ \frac{\partial q_1(t)}{\partial p_i} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial p_i} q_0(t) + \frac{\partial\varphi_3(t)}{\partial p_i} q_2(t) - \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial p_i} q_3(t) \right], \\ \frac{\partial q_2(t)}{\partial p_i} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial p_i} q_0(t) + \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial p_i} q_3(t) - \frac{\partial\varphi_3(t)}{\partial p_i} q_1(t) \right], \\ \frac{\partial q_3(t)}{\partial p_i} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial\varphi_3(t)}{\partial p_i} q_0(t) + \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial p_i} q_1(t) - \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial p_i} q_2(t) \right] \end{aligned}$$

и т. д. Псевдопроизводная – это не частная производная некоторой функции по какому-то параметру. Запись ее в виде частной производной используется лишь для удобства. Такую запись следует воспринимать как единый символ с двумя индексами. Псевдопроизводная – это вектор, являющийся аналогом угловой скорости. В кинематике твердого тела угловая скорость служит для расчета производных по времени, а псевдопроизводная используется для расчета производных по параметру (ср. выписанные выражения для  $\partial q_j / \partial p_i$  с уравнениями (3) и формулами (7)). В обозначении  $\partial\varphi_l(t)/\partial p_i$  индекс  $l$  указывает векторную компоненту, индекс  $i$  – номер параметра, по которому выполняется дифференцирование. Значения псевдопроизводных определяются в процессе интегрирования уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial\varphi_1}{\partial p_i} &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i} \omega_3 - \frac{\partial\varphi_3}{\partial p_i} \omega_2 + \frac{\partial\omega_1}{\partial p_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i} &= \frac{\partial\varphi_3}{\partial p_i} \omega_1 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial p_i} \omega_3 + \frac{\partial\omega_2}{\partial p_i}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial\varphi_3}{\partial p_i} &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial p_i} \omega_2 - \frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i} \omega_1 + \frac{\partial\omega_3}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad (8)$$

совместно с уравнениями (3), (4). Согласно (4) производные  $\partial\omega_l / \partial p_i$  равны 1 при  $p_i = \chi_l$  и равны 0 в остальных случаях. Начальные условия для  $\partial\varphi_l / \partial p_i$  в точке  $t_a$  равны 1 при  $p_i = \theta_l$  и равны 0 в остальных случаях.

Прибавление найденных поправок  $\Delta q_j(t_a)$  к имеющимся значениям  $q_j(t_a)$  нарушает условие (6), поэтому новый кватернион ориентации нормиру-

ется. Внесенные нормировкой изменения уточненных компонент кватерниона являются величинами второго порядка относительно  $\Delta q_j(t_a)$ .

Интегрирование уравнений (3), (4) и уравнений в вариациях (8) выполнялось методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Интегрирование выполнялось с локальным контролем точности, причем узлы сетки, на которой были построены кусочно-линейные функции  $\Omega_i(t)$ , входили в число граничных точек шагов интегрирования. Вычисление решения в точках  $t_k + \tau$  (они практически всегда оказывались внутри шагов интегрирования) выполнялось с помощью интерполяционного полинома 3-го порядка. Этот полином строился по результатам вычислений на шаге правых частей уравнений (3), (4), (8), необходимых в методе Рунге-Кутты.

Использование интерполяционного полинома и возросшее быстродействие персональных компьютеров позволили осуществлять совместную обработку всех собранных данных измерений, не проводя их предварительную обработку. Это – одно из отличий описываемой методики от методик, использованных в [9 – 11]. Другое отличие заключается в использовании компонент кватерниона  $Q$  в качестве кинематических переменных уравнений движения спутника и в способе уточнения начальных условий этих переменных при реализации метода Гаусса – Ньютона. В [9 – 11] кинематическими переменными служили две строки матрицы перехода от приборной системы к базовой системе координат, начальные условия которых параметризовались тремя углами.

Вернемся к описанию методики. Чтобы обеспечить надежную сходимость описанного процесса, надо предусмотреть возможность его регуляризации и иметь достаточно точное начальное приближение точки минимума. Регуляризация сводилась к предварительному использованию метода Левенберга – Марквардта [8] перед переходом к методу Гаусса – Ньютона. Почти всегда метод Левенберга – Марквардта плавно трансформировался в метод Гаусса – Ньютона, но иногда по окончании его работы метод Гаусса – Ньютона расходился. В таком случае в качестве  $z_*$  принимался результат, полученный методом Левенберга – Марквардта; он вполне обеспечивал требуемую точность реконструкции.

Поиск начального приближения точки минимума функции  $\Phi(z, \tau)$  при обработке измерений, полученных в режиме солнечной ориентации, выполнялся так. Начальное значение  $\tau$  находилось посредством согласования модуля напряженности измеренного магнитного поля с модулем напряженности МПЗ (см. раздел 3). При таком значении  $\tau$  и  $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 0$  вычислялось решение уравнений (3), (4) с начальным условием

$$Q(t_a) = Q_2(\varphi) \circ Q_1, \quad Q_2(\varphi) = \left( \cos \frac{\varphi}{2}, S_1 \sin \frac{\varphi}{2}, S_2 \sin \frac{\varphi}{2}, S_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$Q_1 = \left( \sqrt{\frac{1+S_2}{2}}, \frac{S_3}{\sqrt{2(1+S_2)}}, 0, -\frac{S_1}{\sqrt{2(1+S_2)}} \right).$$



Здесь  $S_1, S_2, S_3$  – компоненты орта  $\mathbf{s}$  «Земля – Солнце» в момент  $t_a$  в системе координат  $Y_1Y_2Y_3$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . При подходящем выборе угла  $\varphi$  кватернион  $Q = Q_2(\varphi) \circ Q_1$  описывает любое положение спутника, в котором его ось  $x_2$  (нормаль к плоскости солнечных батарей) направлена по орту  $\mathbf{s}$ . Значение функционала (5) на таком решении обозначим  $F(\varphi)$ . Функция  $F(\varphi)$  вычислялась на сетке с постоянным шагом  $5^\circ$ . Кватернион  $Q(t_a)$ , отвечающий минимальному значению  $F$ , а также использованные при вычислении  $F$  значения  $\tau$  и  $\chi_i$  определяли начальную точку для метода Левенберга – Марквардта.

Точность оценки  $(z_*, \tau_*) = \operatorname{argmin} \Phi(z, \tau)$  и ошибки аппроксимации магнитных измерений будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Последние вычисляются в предположении, что ошибки в измерениях некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в измерениях одной и той же векторной компоненты напряженности МПЗ равны. Такой подход выбран из соображений удобства и вида функционала (5). Стандартные отклонения оценки  $z_*$  вычислялись в предположении, что значение  $\tau = \tau_*$  известно. Это – так называемые условные стандартные отклонения. Вследствие соотношения (6) оценка  $z_*$  имеет вырожденную ковариационную матрицу. Чтобы избежать вырождения и сделать характеристику ошибок более наглядной, ошибки  $\Delta q_j(t_a)$  в задании компонент  $q_j(t_a)$  вектора  $z_*$  представим в виде (7), где теперь  $\theta_i$  образуют случайный вектор бесконечно малого поворота. Величины  $\theta_i$  имеют нулевые математические ожидания и вместе с ошибками остальных компонент  $z_*$  описываются ковариационной матрицей

$$K_z = \sigma_H^2 C_*^{-1} = \| K_{ij} \|_{i,j=1}^6, \quad \sigma_H^2 = \frac{\Phi(z_*, \tau_*)}{3N_{\tau_*} - 6}.$$

Здесь  $\sigma_H^2$  – оценка условной дисперсии ошибок в магнитных измерениях,  $C_*$  – матрица  $\| C_{ij} \|$ , вычисленная в точке  $(z_*, \tau_*)$ . Точность аппроксимации измерений будем характеризовать стандартным отклонением  $\sigma_H$ , точность оценки  $z_*$  – условными стандартными отклонениями  $\sqrt{K_{ii}}$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Условные стандартные отклонения величин  $\theta_i$  и  $\chi_i$  будем обозначать  $\sigma_{\theta_i}$ ,  $\sigma_{\chi_i}$ . Безусловное стандартное отклонение  $\sigma_\tau$  оценки  $\tau_*$  вычислялось по формуле

$$\sigma_\tau^2 = 2\Phi(z_*, \tau_*) \left[ (3N_{\tau_*} - 7) \frac{d^2\Phi_1(\tau_*)}{d\tau^2} \right]^{-1}.$$

Вторая производная здесь вычислялась разностным способом.

*Примеры реконструкции* приведены на рис. 10 – 18. На рисунках (а) изображены графики углов, характеризующих ориентацию спутника. Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  – углы отклонения оси  $x_2$  от направления на Солнце – от орта  $\mathbf{s}$ . Они вычисляются по формулам

$$\alpha = \arcsin \frac{a_{22}S_1 - a_{12}S_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}, \quad \beta = \arcsin \left[ a_{32} \sqrt{S_1^2 + S_2^2} - \frac{S_3(a_{12}S_1 + a_{22}S_2)}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}} \right].$$

Эти углы отсчитываются в перпендикулярных плоскостях, пересекающихся по прямой «Земля – Солнце». Плоскость отсчета угла  $\beta$  содержит ось  $Y_3$ . Направление отсчета этого угла – на север, направление отсчета угла  $\alpha$  – на восток. Угол  $\gamma$  – это угол между осью  $x_1$  приборной системы и плоскостью орбиты; при  $0 < \gamma < \pi$  эта ось лежит в полупространстве, в которое направлен кинетический момент орбитального движения спутника. Функция  $\zeta(t)$  (нижний график) характеризует тень Земли: в тени  $\zeta < 0$ , на свету  $\zeta > 0$ . Эта функция рассчитывается по формуле

$$\zeta(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s} + \sqrt{|\mathbf{r}(t)|^2 - R_E^2},$$

где  $R_E = 637814$  км – радиус Земли, принятой шаром. Для удобства анализа на рисунках, построенных для интервалов с заходами спутника в тень Земли, рядом с графиком функции  $\zeta(t)$  проведена прямая  $\zeta = 0$ . Как видно из графиков углов  $\alpha$  и  $\beta$ , ошибка солнечной ориентации КА на представленных отрезках данных была допустимой.

Рис. 10 – 18 (б) содержат графики функций (4). Рис. 10 – 18 (в) и (г) характеризуют построенную аппроксимацию магнитных измерений. На рисунках (в) в каждой системе координат изображены две линии, которые практически сливаются. Одна из них является графиком функции  $\hat{h}_i(t)$  (см. (5)), а вторая представляет собой ломаную, звенья которой соединяют соседние по времени точки  $(t_k + \tau, h_i^{(k)} - \Delta_i)$ ,  $k \in U(\tau_*)$ . На рисунках (г) изображены аналогичные ломаные, проходящие через точки  $(t_k + \tau, h_i^{(k)} - \hat{h}_i(t_k + \tau) - \Delta_i)$ . Рис. 10 – 14 построены по телеметрическим данным, рис. 15 – 18 – по данным, полученным после полета.

Приведем некоторые числовые характеристики двух реконструкций. В реконструкции на рис. 11

$$\begin{aligned} \sigma_H &= 321\gamma, \quad \tau = 47.5\text{с}, \quad \Delta_1 = 4463\gamma, \quad \Delta_2 = -1236\gamma, \quad \Delta_3 = 605\gamma, \\ \chi_1 &= 2.83 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \quad \chi_2 = 2.02 \cdot 10^{-6} \text{с}^{-1}, \quad \chi_3 = -2.04 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \\ \sigma_\tau &= 0.85\text{с}, \quad \sigma_{\theta_1} = 0.0011, \quad \sigma_{\theta_2} = 0.0008\epsilon, \quad \sigma_{\theta_3} = 0.0011, \\ \sigma_{\chi_1} &= 1.9 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\chi_2} = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\chi_3} = 1.8 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}. \end{aligned}$$

В реконструкции на рис. 14

$$\begin{aligned} \sigma_H &= 202\gamma, \quad \tau = 51.9\text{с}, \quad \Delta_1 = 4166\gamma, \quad \Delta_2 = -1248\gamma, \quad \Delta_3 = 548\gamma, \\ \chi_1 &= -9.88 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \quad \chi_2 = 7.51 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \quad \chi_3 = -8.30 \cdot 10^{-7} \text{с}^{-1}, \\ \sigma_\tau &= 0.46\text{с}, \quad \sigma_{\theta_1} = 0.00062, \quad \sigma_{\theta_2} = 0.00052, \quad \sigma_{\theta_3} = 0.00067, \\ \sigma_{\chi_1} &= 7.1 \cdot 10^{-8} \text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\chi_2} = 6.1 \cdot 10^{-8} \text{с}^{-1}, \quad \sigma_{\chi_3} = 8.1 \cdot 10^{-8} \text{с}^{-1}. \end{aligned}$$

Для остальных примеров некоторые характеристики приведены в подписях к рисункам. Там указаны  $\tau$ ,  $\sigma_H$  и  $\Delta_i$ . Характеристики всех обработанных интервалов примерно одинаковы. Следует отметить малость смещений в показаниях угловой скорости. Вообще, движение КА в режиме солнечной ориентации было довольно однообразным.

Рис.19 иллюстрирует реконструкцию движения спутника в режиме орбитальной ориентации. Рис. 19 (б), (в) и (г) аналогичны рисункам (б), (в) и (г) в предыдущих реконструкциях, рис. 19 (а) содержит графики компонент вектора бесконечно малого поворота, характеризующего отклонение системы  $x_1x_2x_3$  от ее номинального положения в этом режиме. Компоненты имеют следующий смысл:  $\alpha_1$  – угол крена,  $\alpha_2$  – угол рысканья,  $\alpha_3$  – угол тангажа.

**5. Расчет микроускорений.** После того как движение КА найдено, можно рассчитать микроускорение в любой заданной точке борта в функции времени. Результаты такого расчета для некоторых реконструированных движений представлены на рис. 20, 21. Микроускорения рассчитаны в точке, задаваемой радиусом-вектором  $(1.5м, -0.9м, 0.2м)$  относительно центра масс КА. Компоненты этого вектора и компоненты микроускорений на рисунках относятся к приборной системе координат спутника. Строго говоря, приведенные результаты являются не полными. Методически правильные результаты получены только для плавных участков графиков на рис. 20, 21. В точках пиков рассчитанных функций значения последних далеки от реальных. Во-первых, при расчете микроускорений не учтен вклад силы, создаваемой двигателями ориентации; во-вторых, создаваемое соответствующим моментом угловое ускорение спутника «размазано» на несколько больший промежуток времени, чем это было в действительности. Такое размазывание – следствие задания измерений угловой скорости на временной сетке с достаточно редкими узлами (напомним, шаг сетки 12с). Аккуратное моделирование показывает, что реальные пики микроускорений имеют продолжительность нескольких десятых долей секунды и величины порядка  $10^{-3} м/с^2$ .

Первоначально солнечную ориентацию спутника *Фотон М-4* планировалось поддерживать двигателями-маховиками. На таких КА причин для указанных несоответствий не существует (точнее, они могут иметь место только при разгрузке маховиков реактивными двигателями). При необходимости расчет пиковых значений микроускорений на *Фотоне М-4* может быть выполнен корректно, если получить информацию о работе системы ориентации.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00423).

## Литература

1. Абрашкин В.И., Воронов К.Е., Пияков И.В., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Определение движения спутника *Бион М-1* средствами аппаратуры ГРАВИТОН // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2014. № 2.

2. Hoots F.R., Roehrich R.L. Models for propagation of NORAD element sets. Spacetrack report No. 3. 1988.
3. Петров Б.Н., Бажинов И.К. (ред.). Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6» – «Союз» – Прогресс». М., Наука, 1985.
4. Панкратов В.А., Сазонов В.В. Проверка согласованности данных измерений магнитометров, установленных на борту ИСЗ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2010. № 42.
5. Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В., Воронов К.Е., Зайцев А.С., Иванов В.В., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон-12* и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 1. С. 45-56.
6. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое вращательное движение спутника «Фотон М-2» и квазистатические микроускорения на его боту // Космические исследования. 2007. Т. 45. № 5. С. 450-470.
7. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Сазонов В.В. Определение вращательного движения спутника «Фотон М-3» по данным бортовых измерений магнитного поля Земли // Космические исследования. 2010. Т. 48. № 3. С. 252-265.
8. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
9. Абрашкин В.И., Волков М.В., Воронов К.Е., Егоров А.В., Казакова А.Е., Панкратов В.А., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Определение вращательного движения спутника по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли с использованием кинематической модели движения // Космические исследования. 2005. Т. 43. № 4. С. 295-305.
10. Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Панкратов В.А., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Стратилатов Н.Р. Определение вращательного движения спутника «Фотон М-2» по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли с использованием кинематической модели движения // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. № 60.
11. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Панкратов В.А., Сазонов В.В. Определение вращательного движения спутника «Фотон М-3» по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2009. № 70.

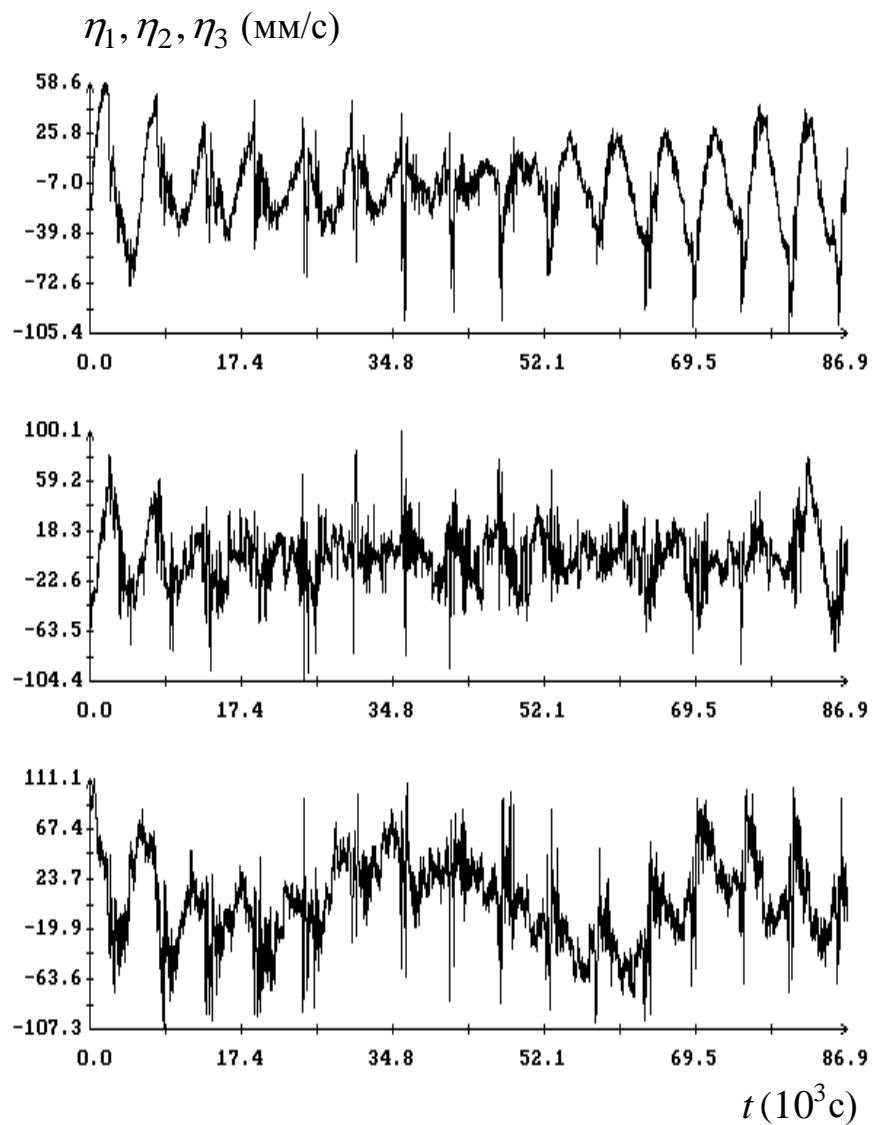
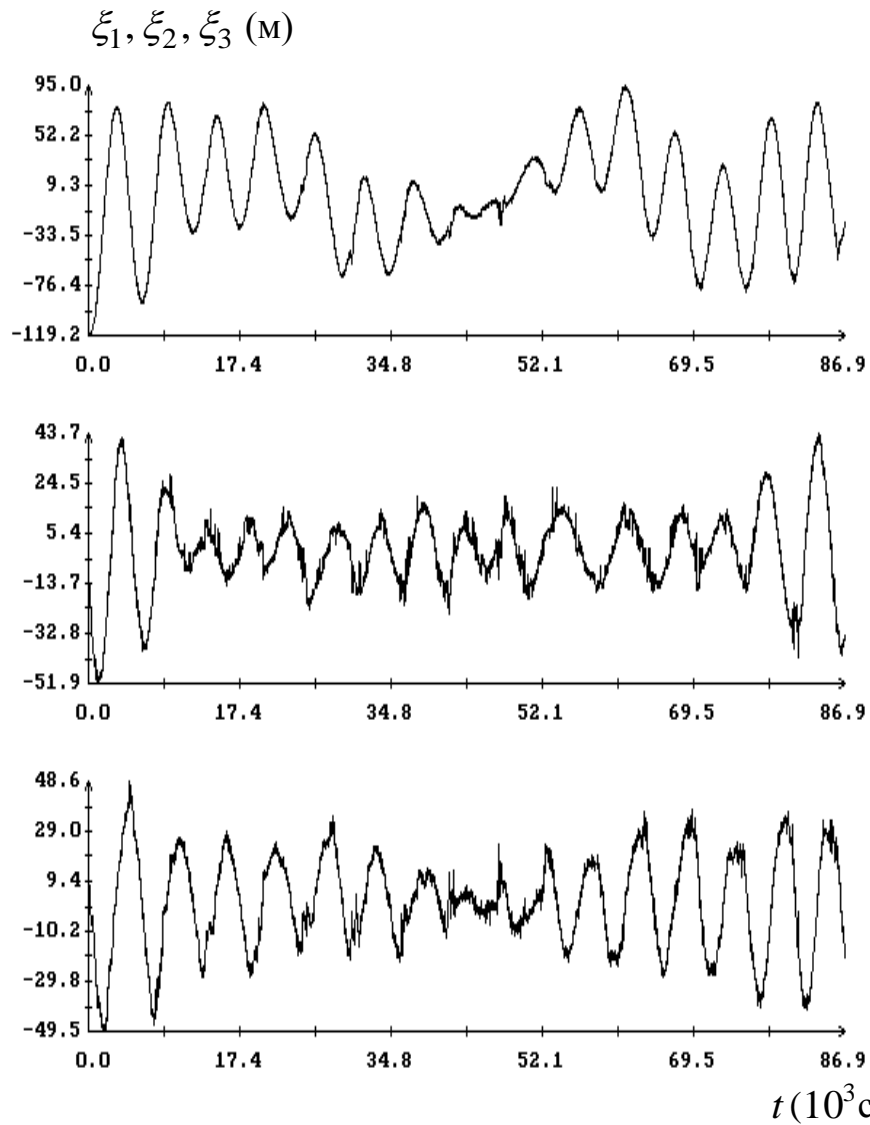


Рис. 1. Диаграммы остатков для сглаживающего решения дифференциальных уравнений движения спутника. Момент  $t=0$  соответствует 20:37:53 UTC 06.08.2014,  $\sigma = 29.2\text{м}$ ,  $\sigma_r = 28.8\text{м}$ ,  $\sigma_V = 29.2\text{мм/с}$ .

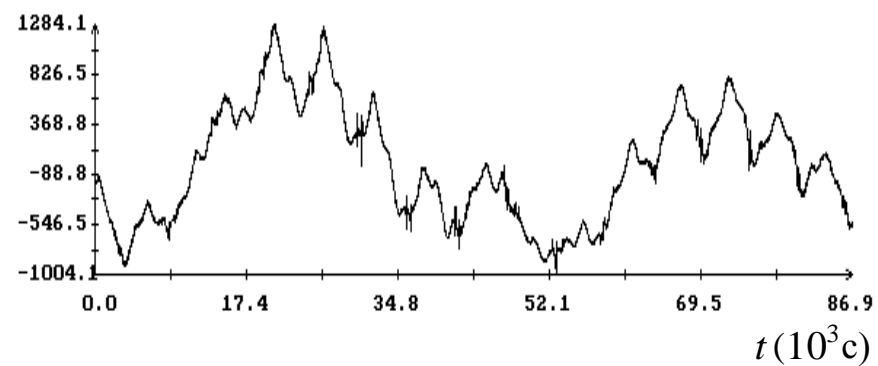
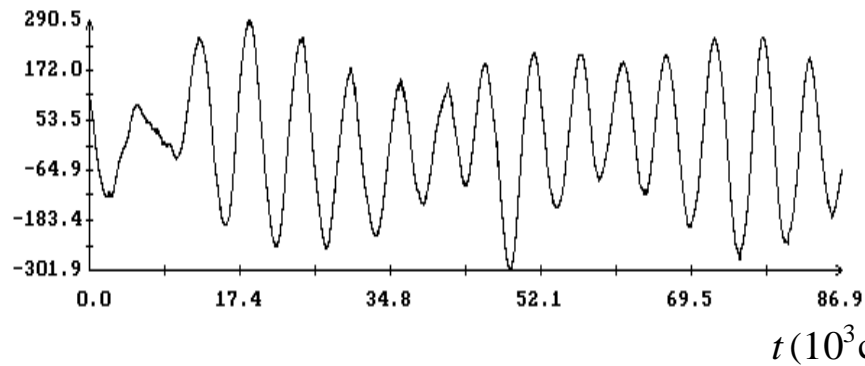
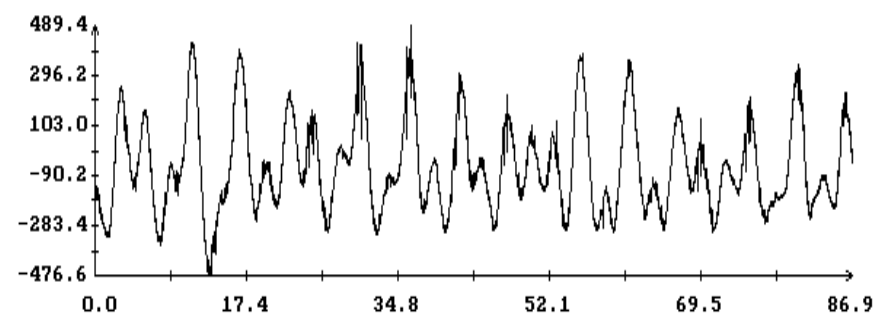
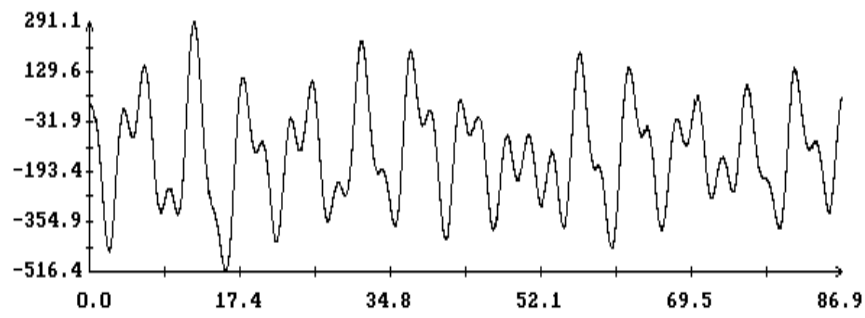
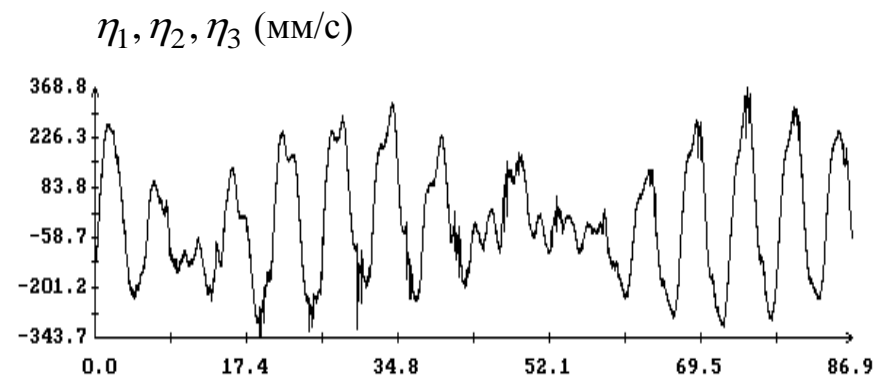
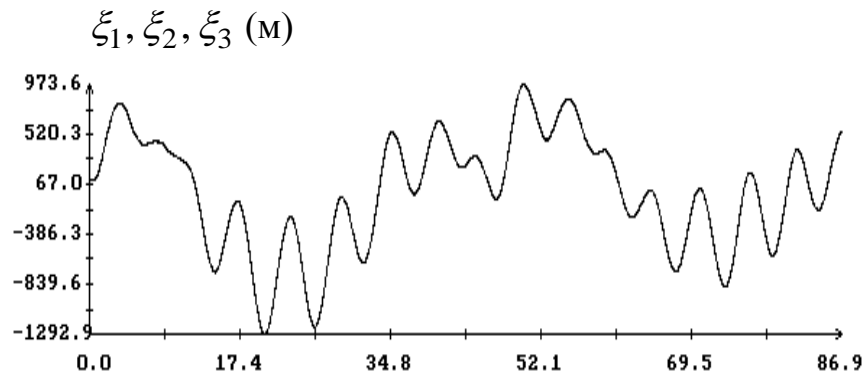


Рис. 2. Диаграммы остатков для сглаживающего выражения модели SGP4. Момент  $t=0$  соответствует 20:37:53 UTC 06.08.2014,  $\sigma = 329\text{м}$ ,  $\sigma_r = 330\text{м}$ ,  $\sigma_V = 329\text{мм/с}$ .

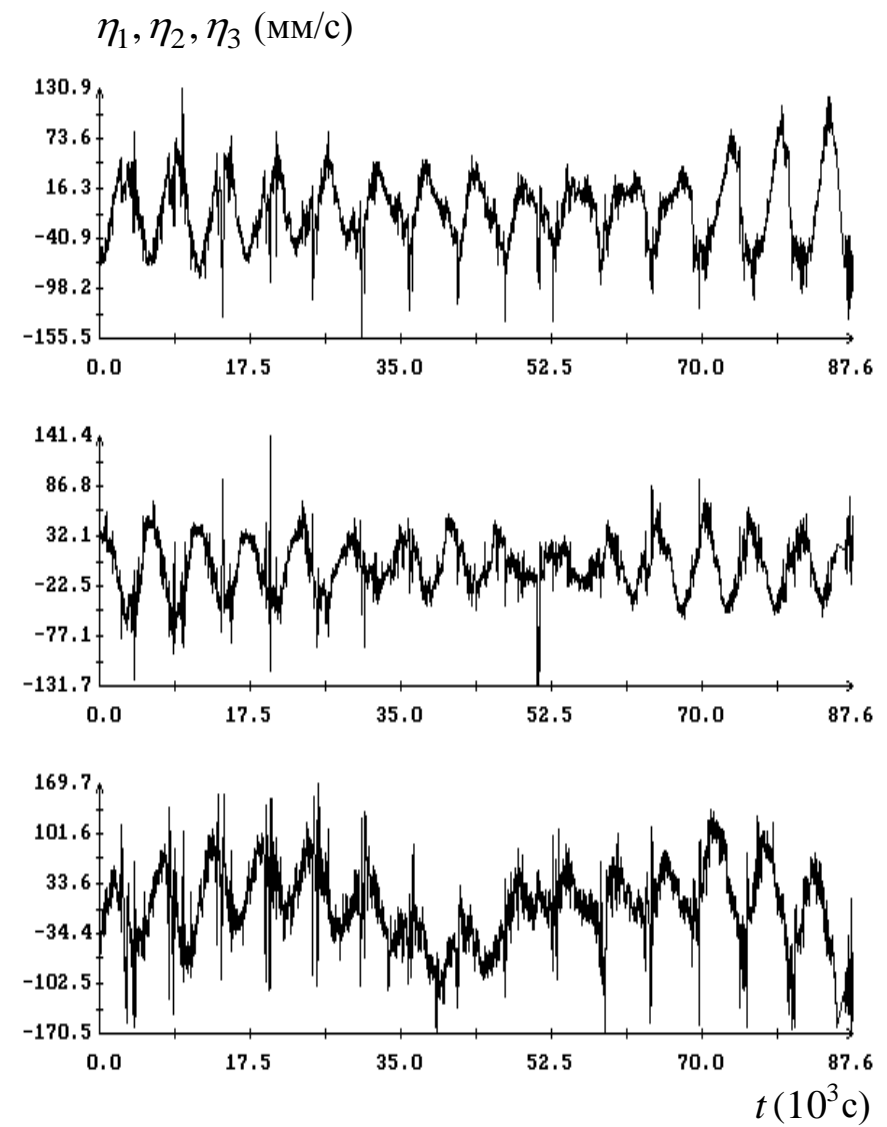
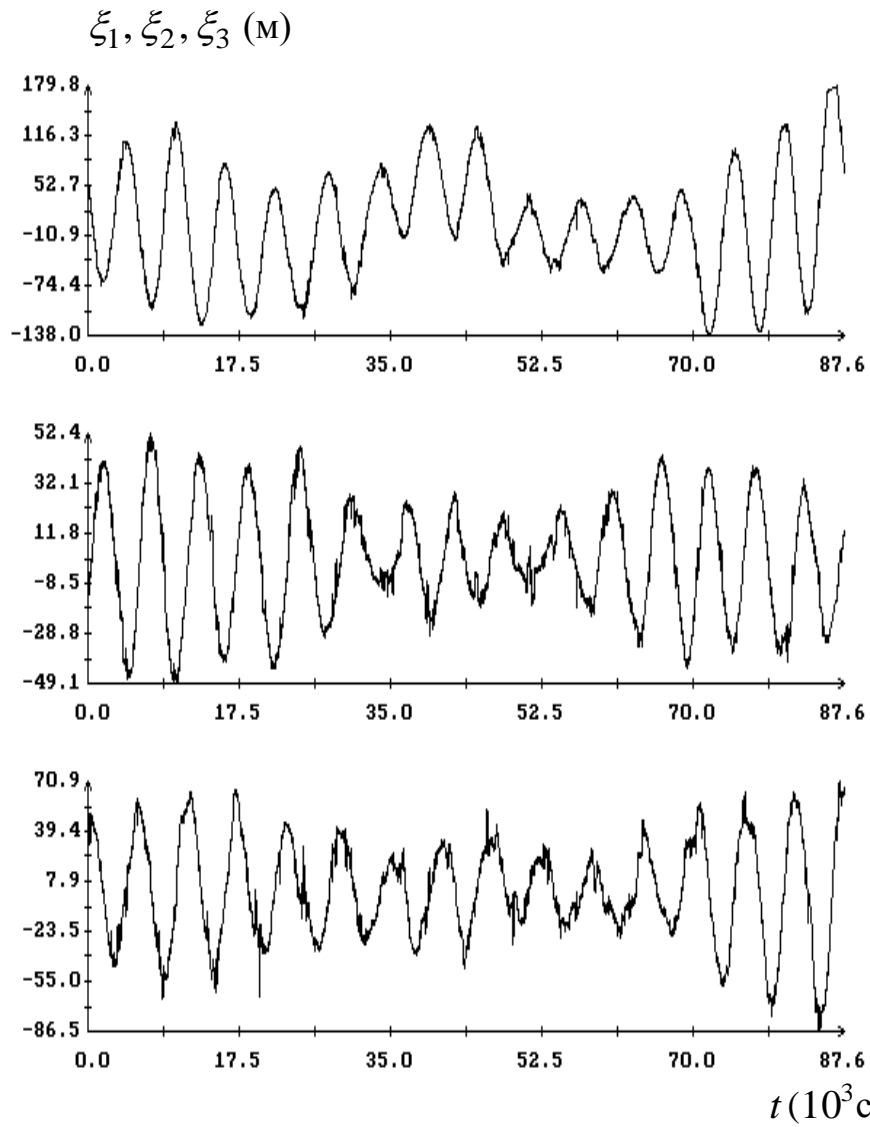


Рис. 3. Диаграммы остатков для сглаживающего решения дифференциальных уравнений движения спутника. Момент  $t=0$  соответствует 23:15:05.0 UTC 17.08.2014,  $\sigma = 43.2\text{м.}$ ,  $\sigma_r = 44.8\text{м.}$ ,  $\sigma_v = 42.0\text{мм/с.}$

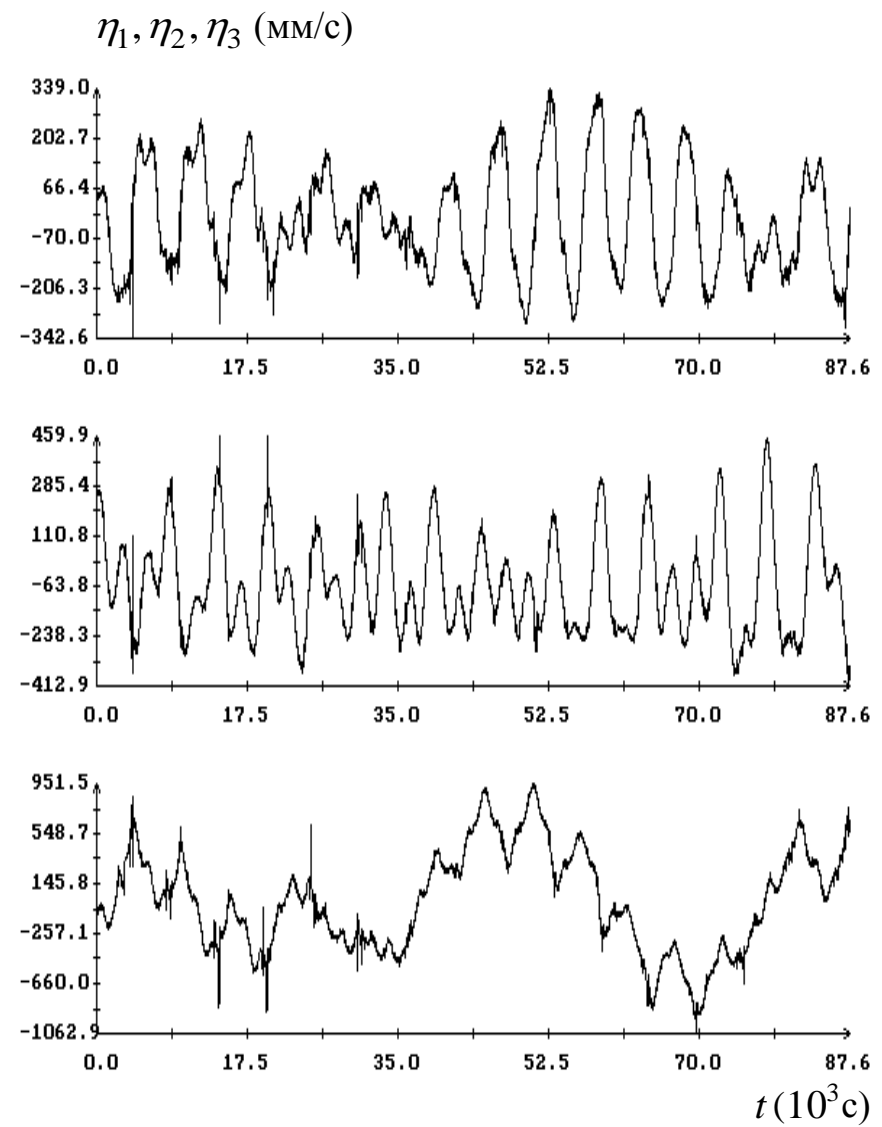
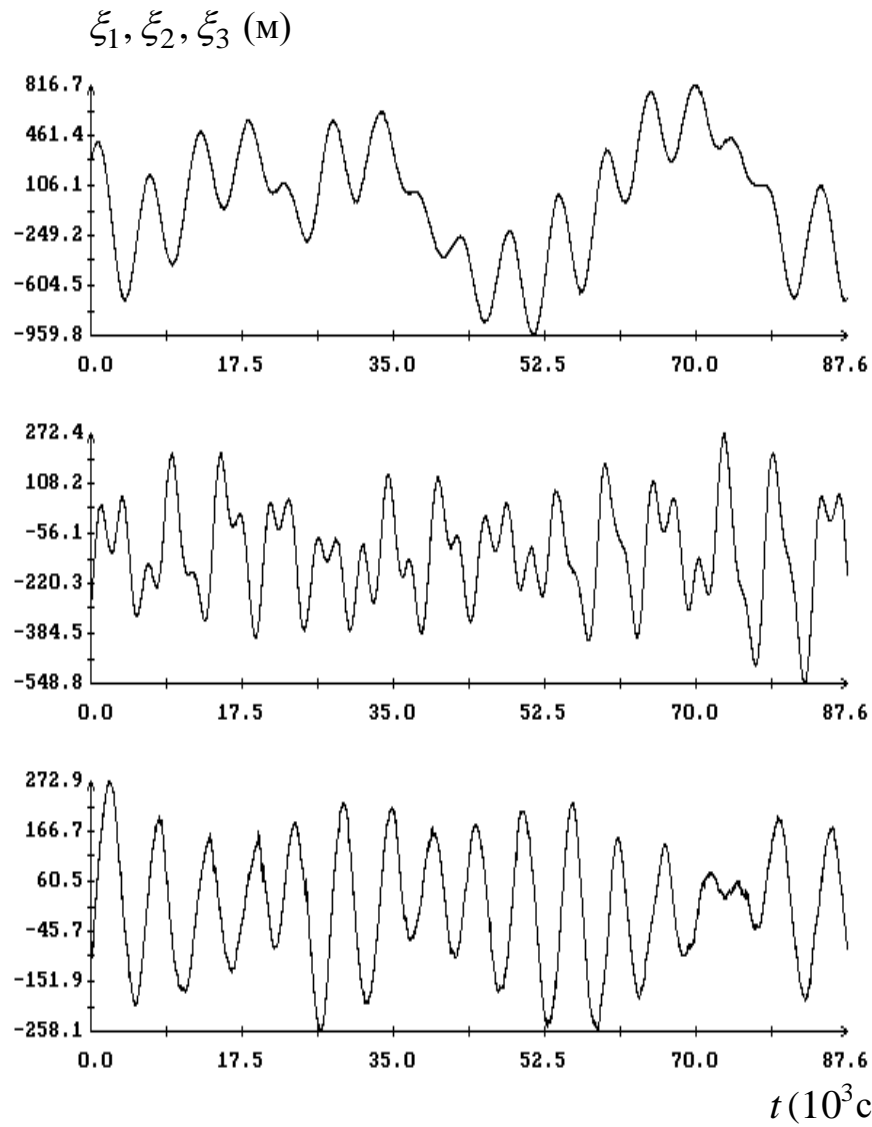


Рис. 4. Диаграммы остатков для сглаживающего выражения модели SGP4. Момент  $t=0$  соответствует 23:15:05.0 UTC 17.08.2014,  $\sigma = 274\text{M}$ ,  $\sigma_r = 275\text{M}$ ,  $\sigma_V = 272\text{MM/C}$ .



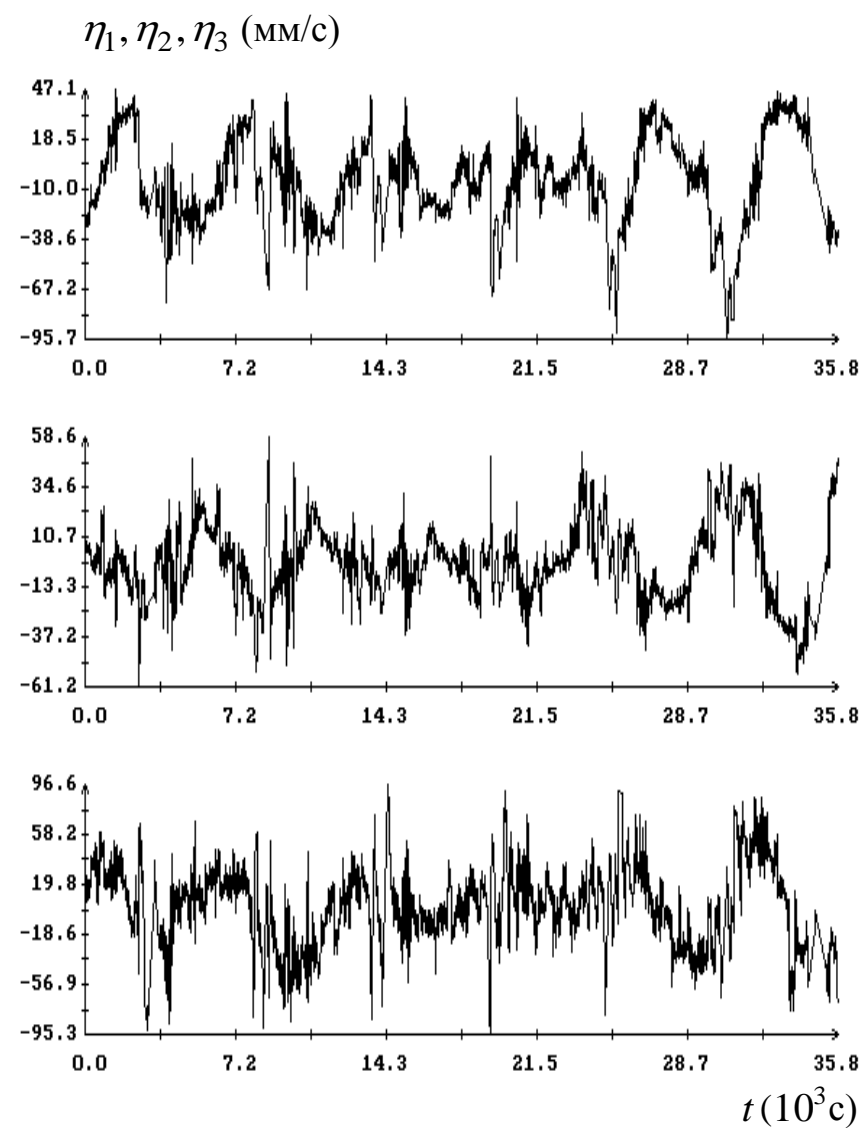
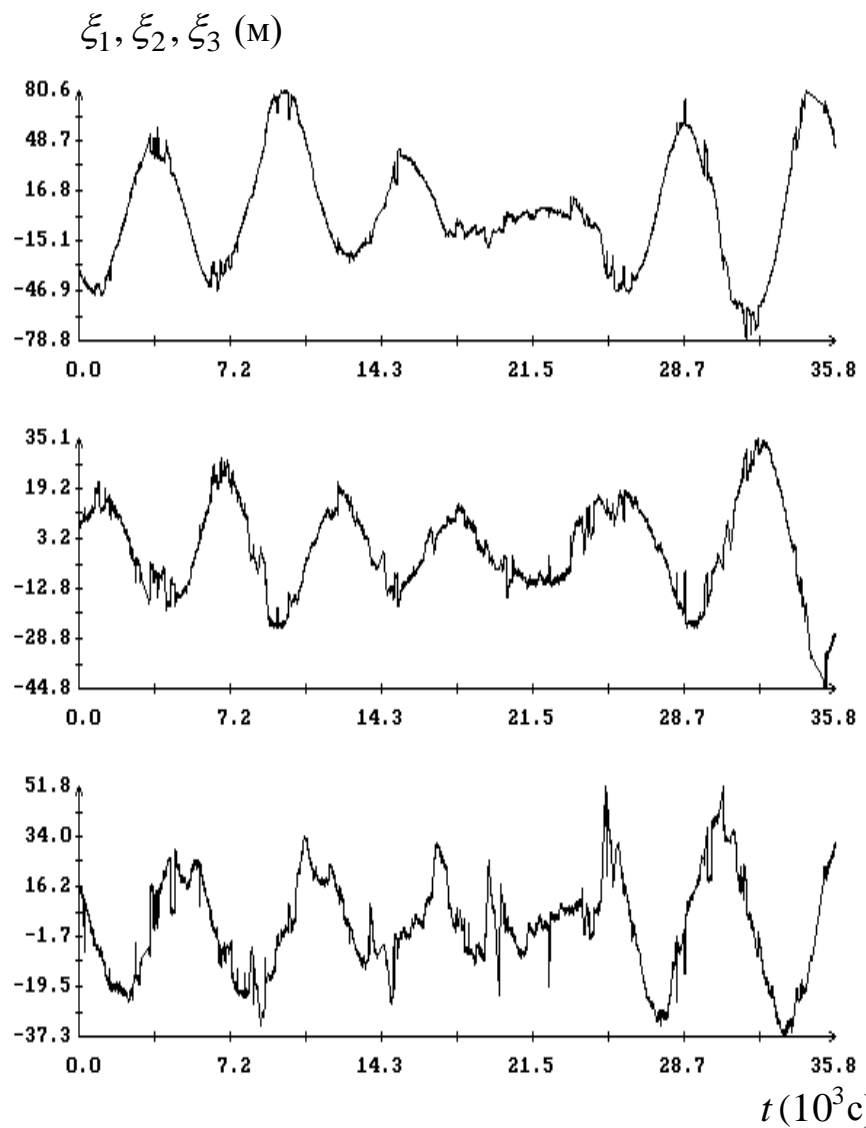


Рис. 5. Диаграммы остатков для сглаживающего решения дифференциальных уравнений движения спутника. Момент  $t=0$  соответствует 23:15:05.0 UTC 17.08.2014,  $\sigma=24.7\text{м}$ ,  $\sigma_r=24.2\text{м}$ ,  $\sigma_V=25.0\text{мм/с}$ .

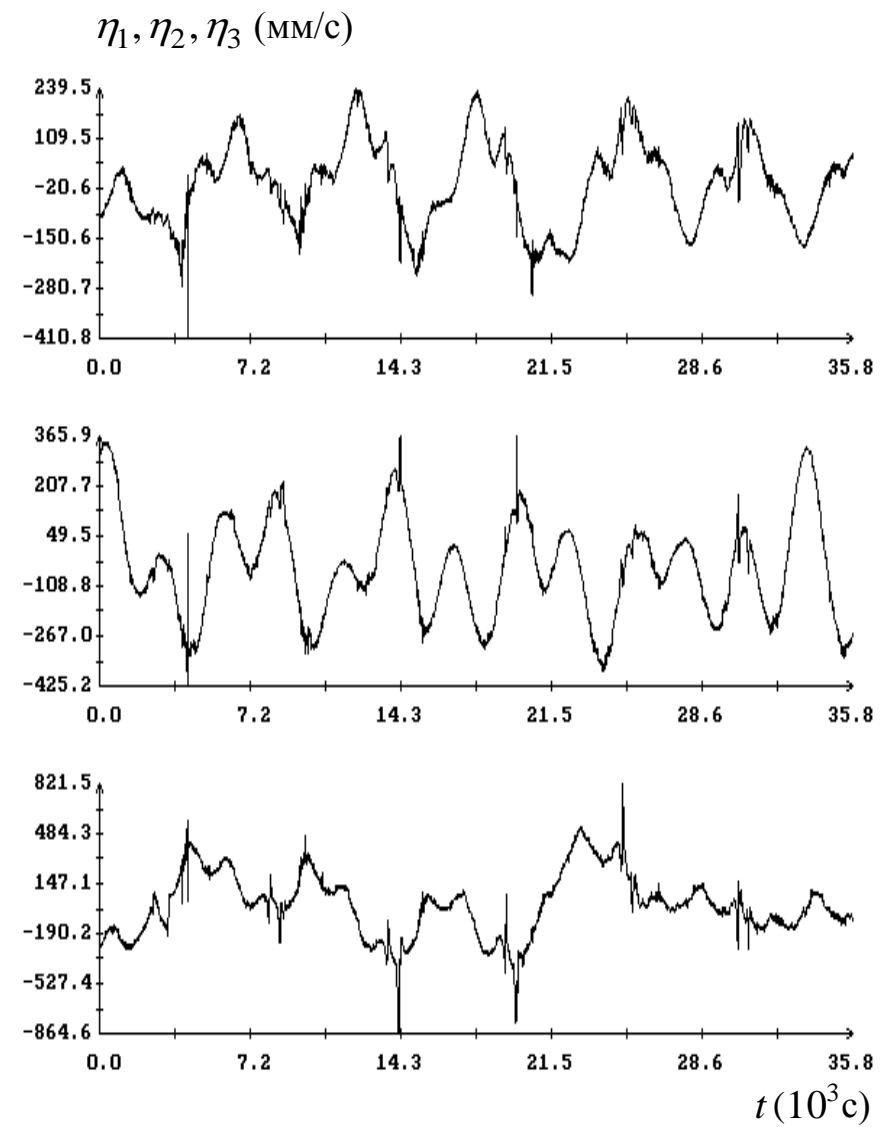
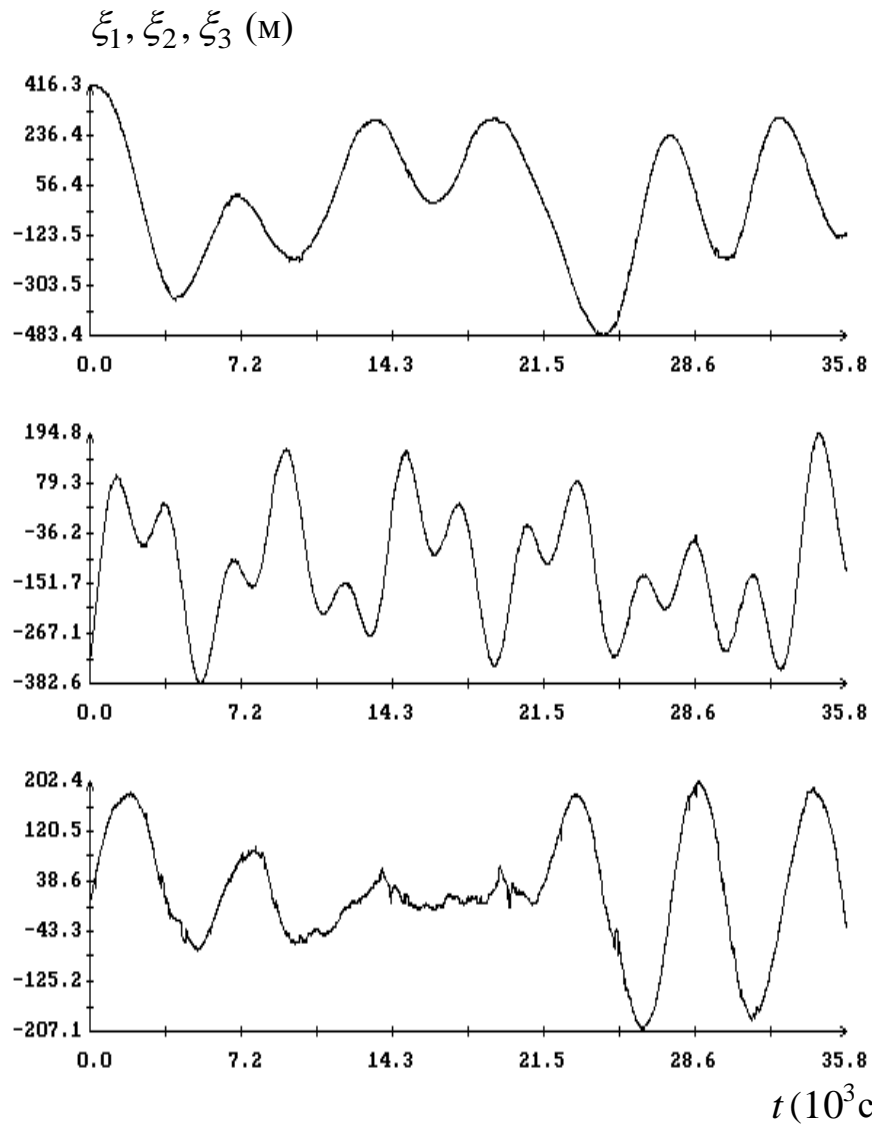


Рис. 6. Диаграммы остатков для сглаживающего выражения модели SGP4. Момент  $t=0$  соответствует 23:15:05.0 UTC 17.08.2014,  $\sigma=170\text{M}$ .,  $\sigma_r=172\text{M}$ ,  $\sigma_V=169\text{MM/C}$ .

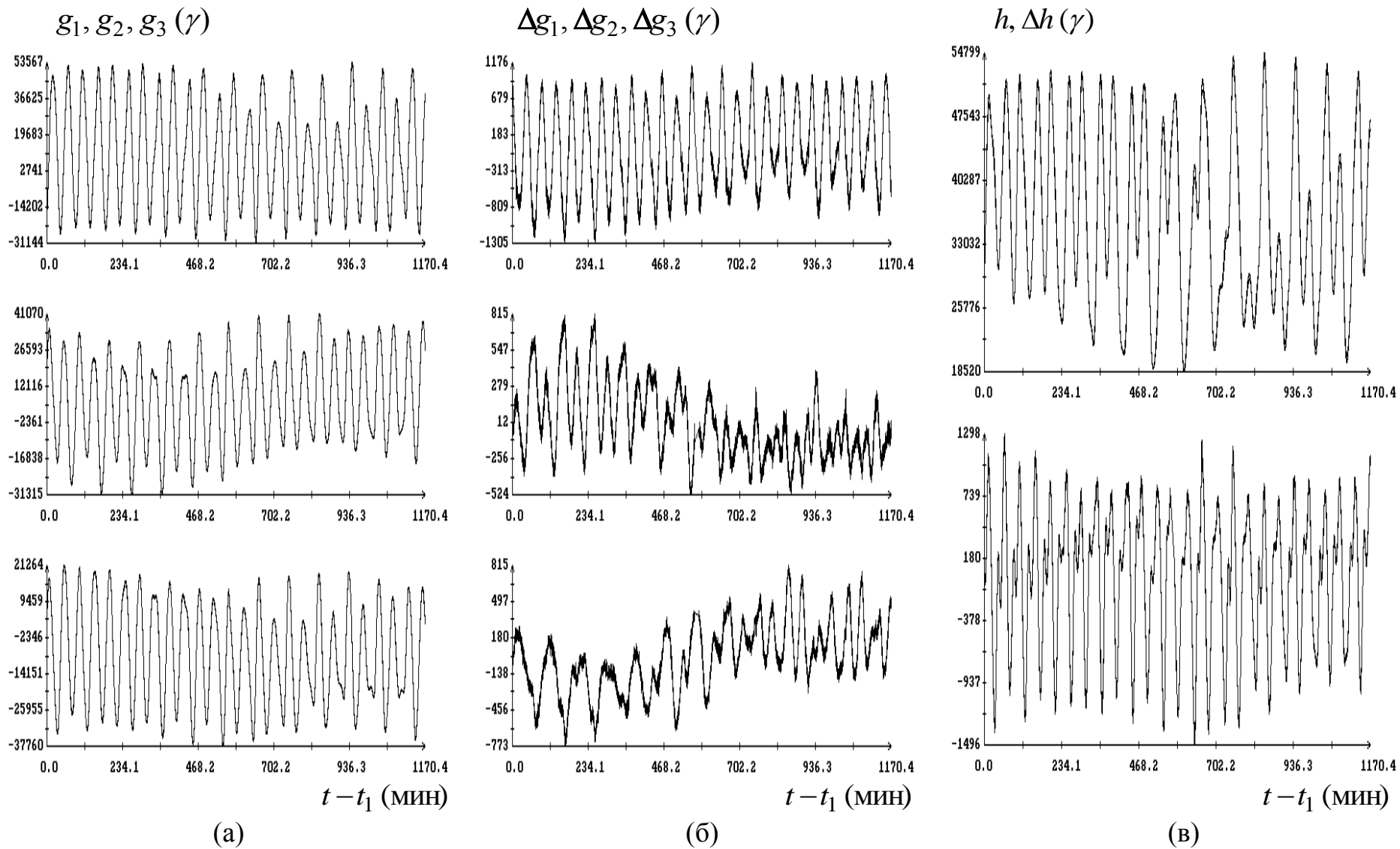


Рис. 7. Интервал 1; (а), (б) – сравнение данных измерений магнитометров 1 и 2; (в) – сравнение модуля приведенных измерений модулем напряженности МПЗ (модель IGRF).

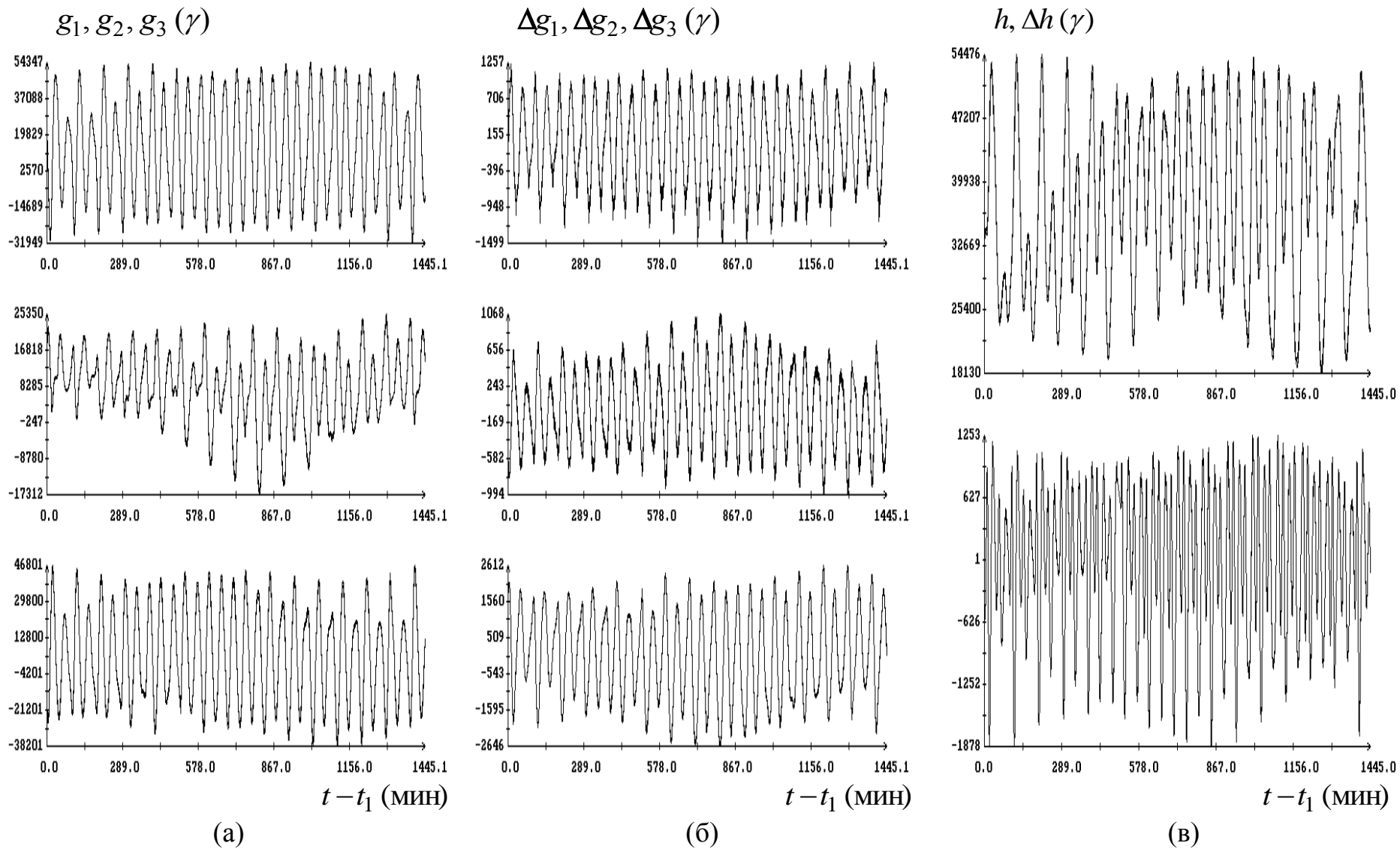


Рис. 8. Интервал 2; (а), (б) – сравнение данных измерений магнитометров 1 и 2; (в) – сравнение модуля приведенных измерений модулем напряженности МПЗ (модель IGRF).

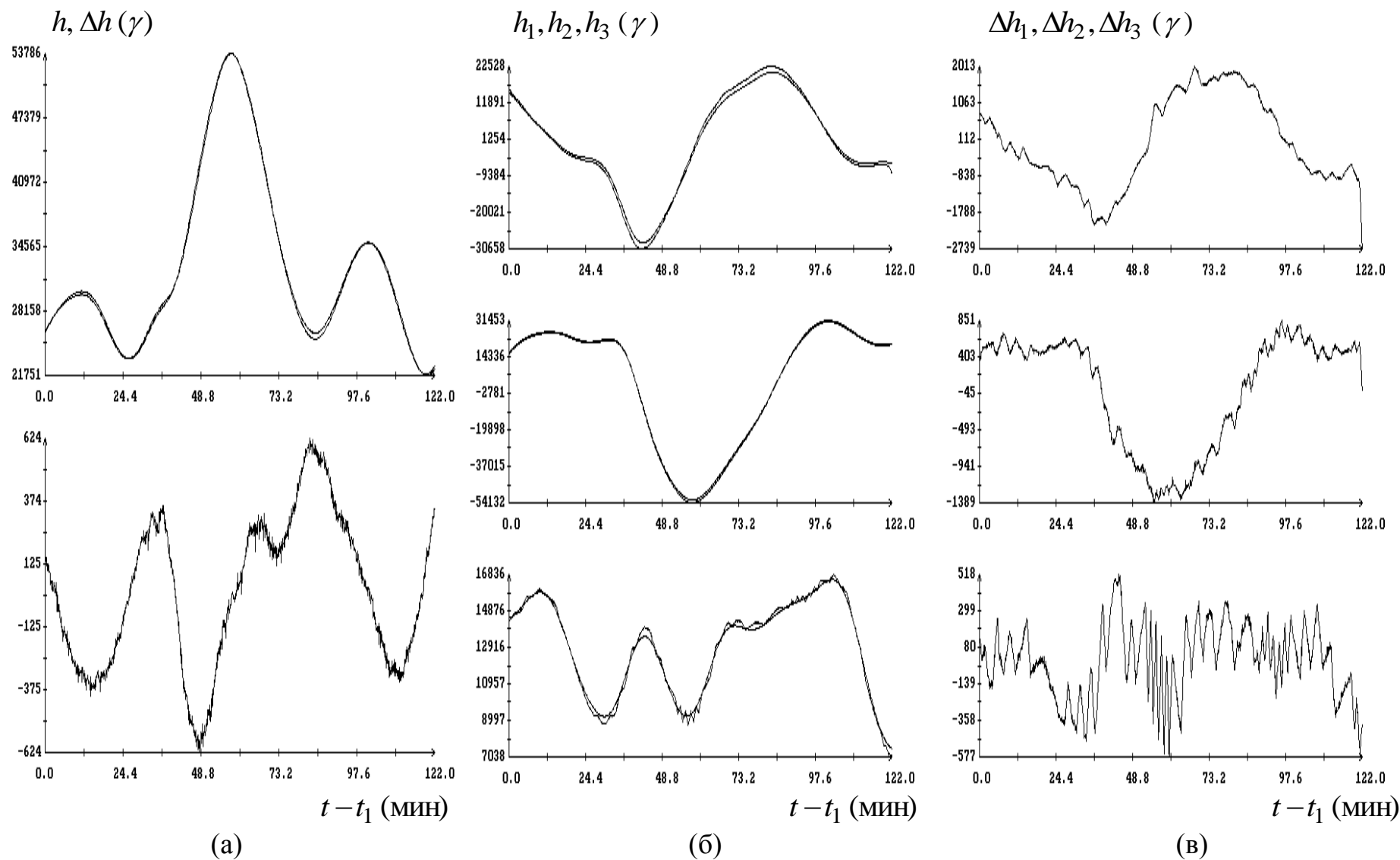


Рис. 9. Магнитные измерения в орбитальной ориентации спутника ; (а) – сравнение модуля измерений с модулем напряженности МПЗ (модель IGRF), (б) – сравнение компонент измерений с расчетными аналогами; (в) – рассогласование модулей и расчетных аналогов.

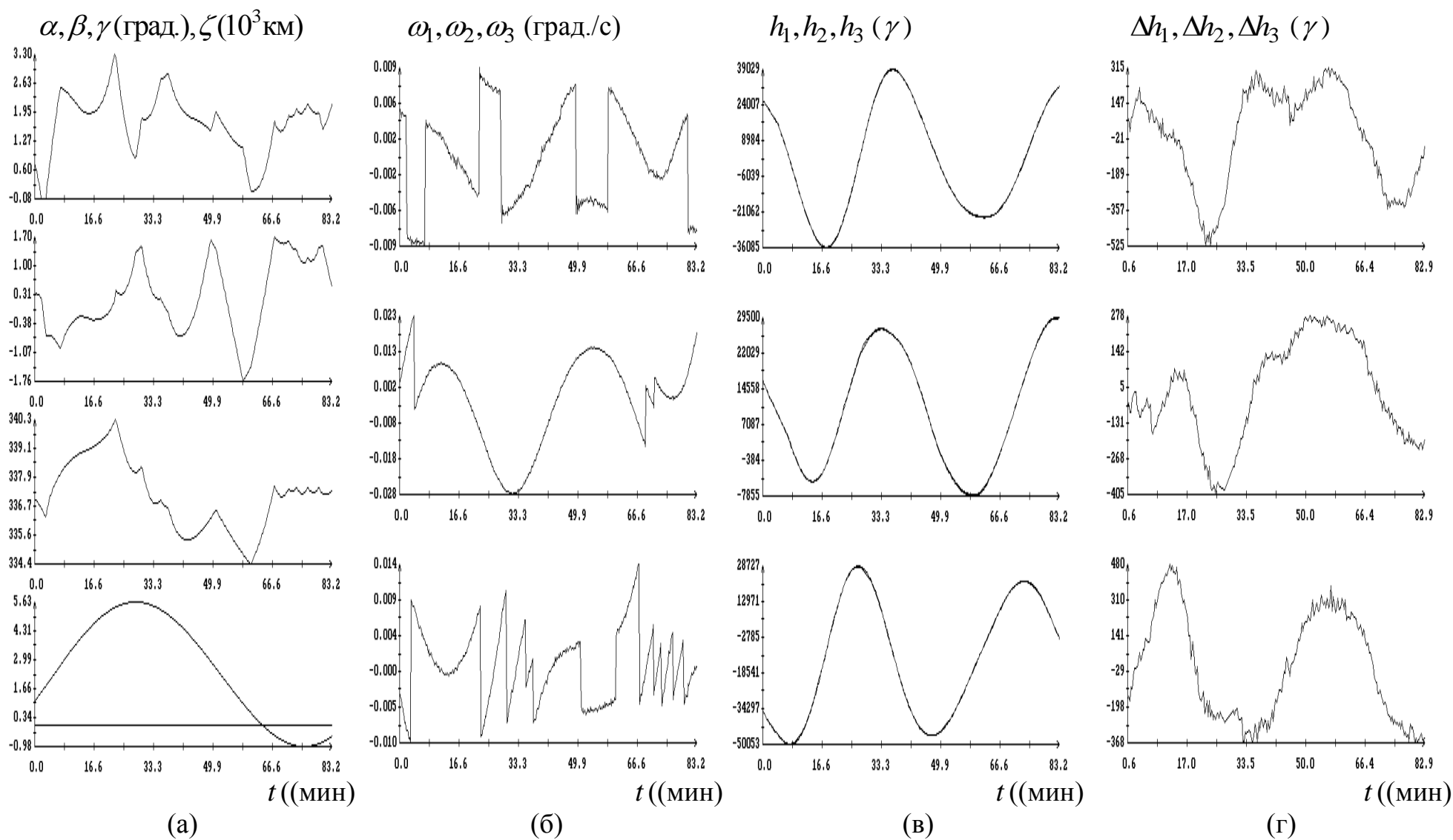


Рис. 10. Движение КА в солнечной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 1047581 с (23:59: 41 UTC 29.07.2014), сдвиг времени магнитных измерений 40.6с, смещения магнитных измерений ( $\gamma$ ): 4302,  $-941$ , 706;  $\sigma_H = 224\gamma$ .

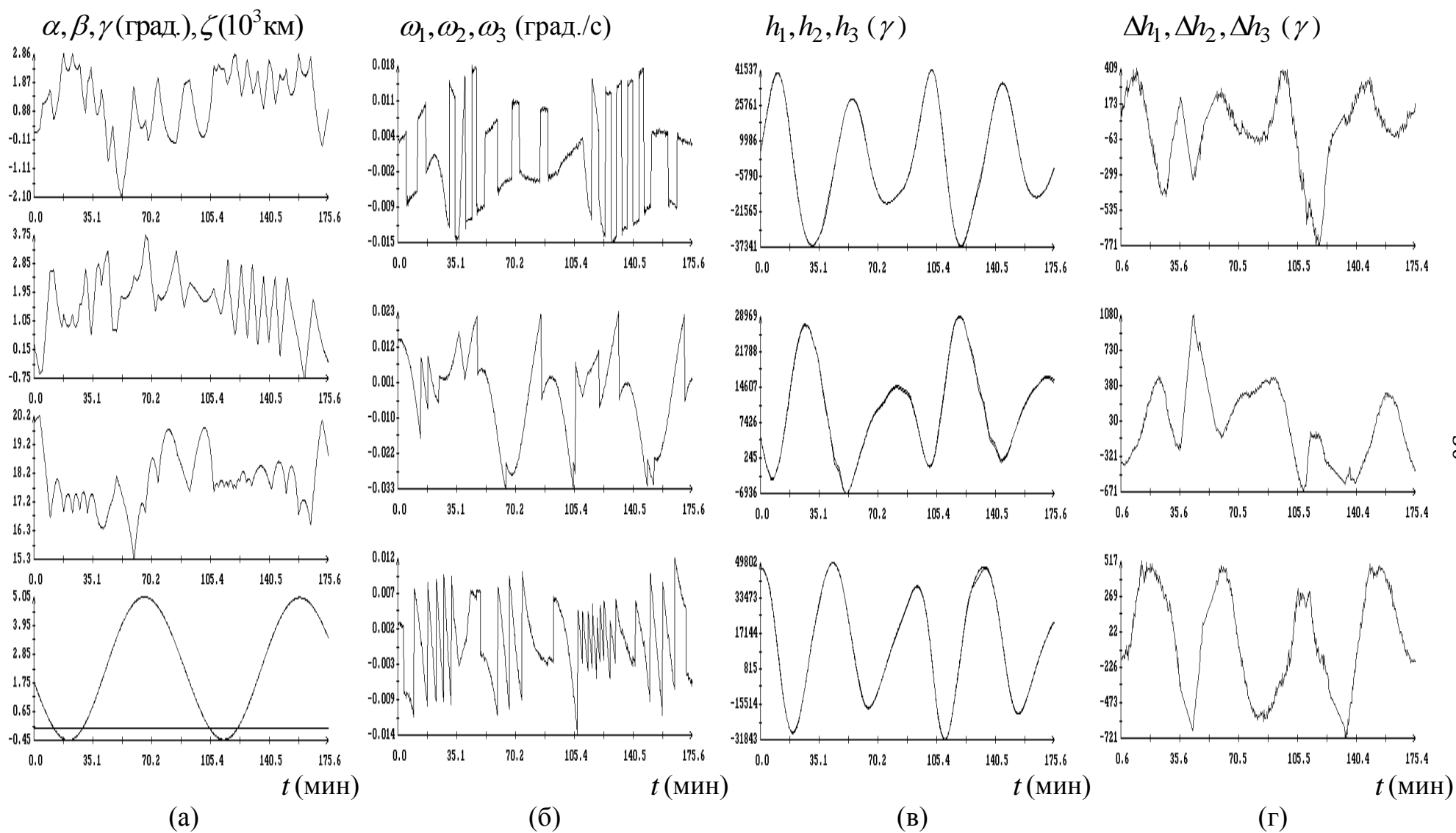


Рис. 11. Движение КА в солнечной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 1173149с (10:52:29 UTC 31.07.2014), сдвиг времени магнитных измерений 47.5с, смещения магнитных измерений ( $\gamma$ ): 4463, -1236, 605;  $\sigma_H = 321\gamma$ .

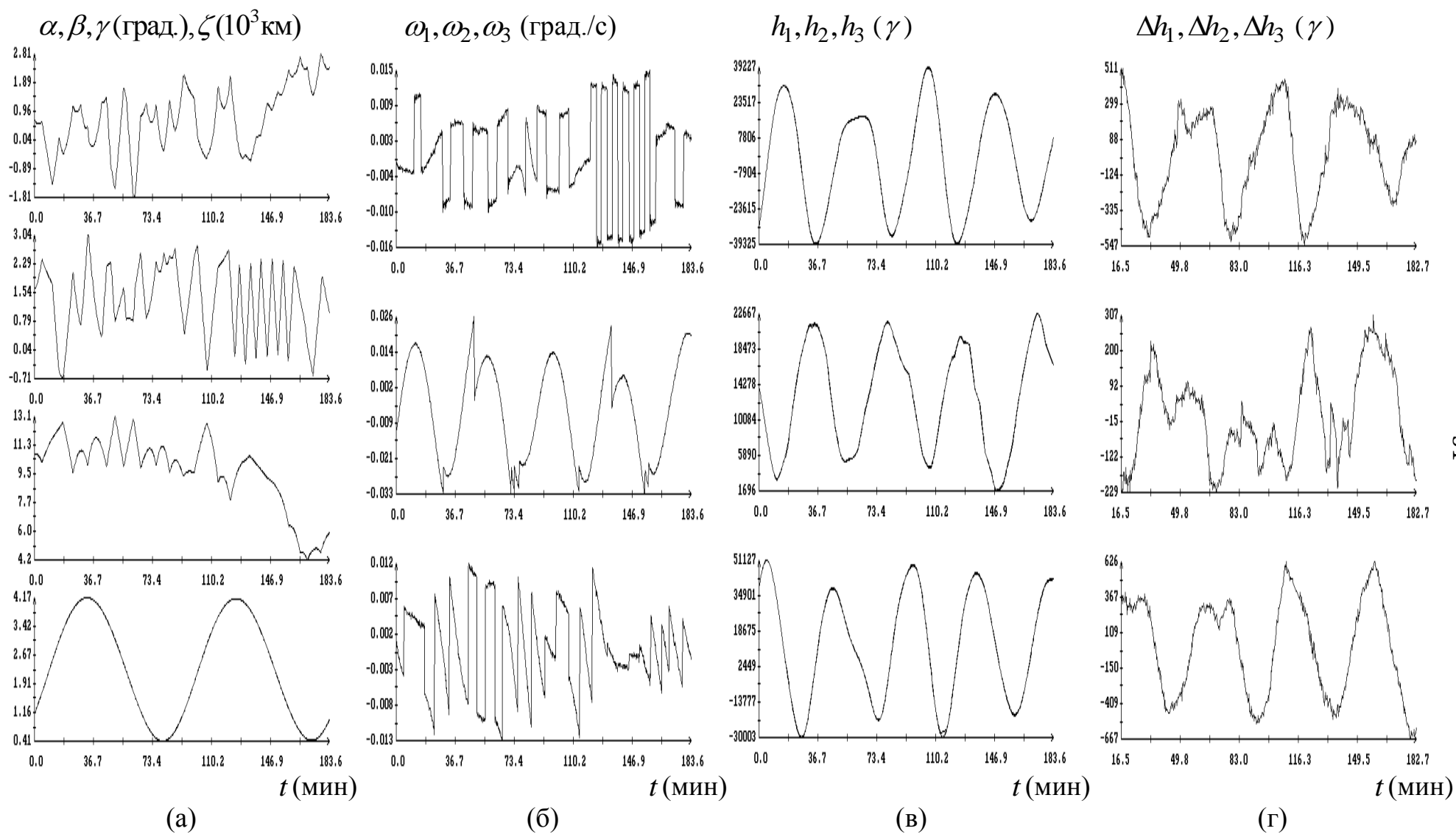


Рис. 12. Движение КА в солнечной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 1380881с (20:34:41 UTC 02.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 42.4с, смещения магнитных измерений ( $\gamma$ ): 4372, -1305, 454;  $\sigma_H = 270\gamma$ .



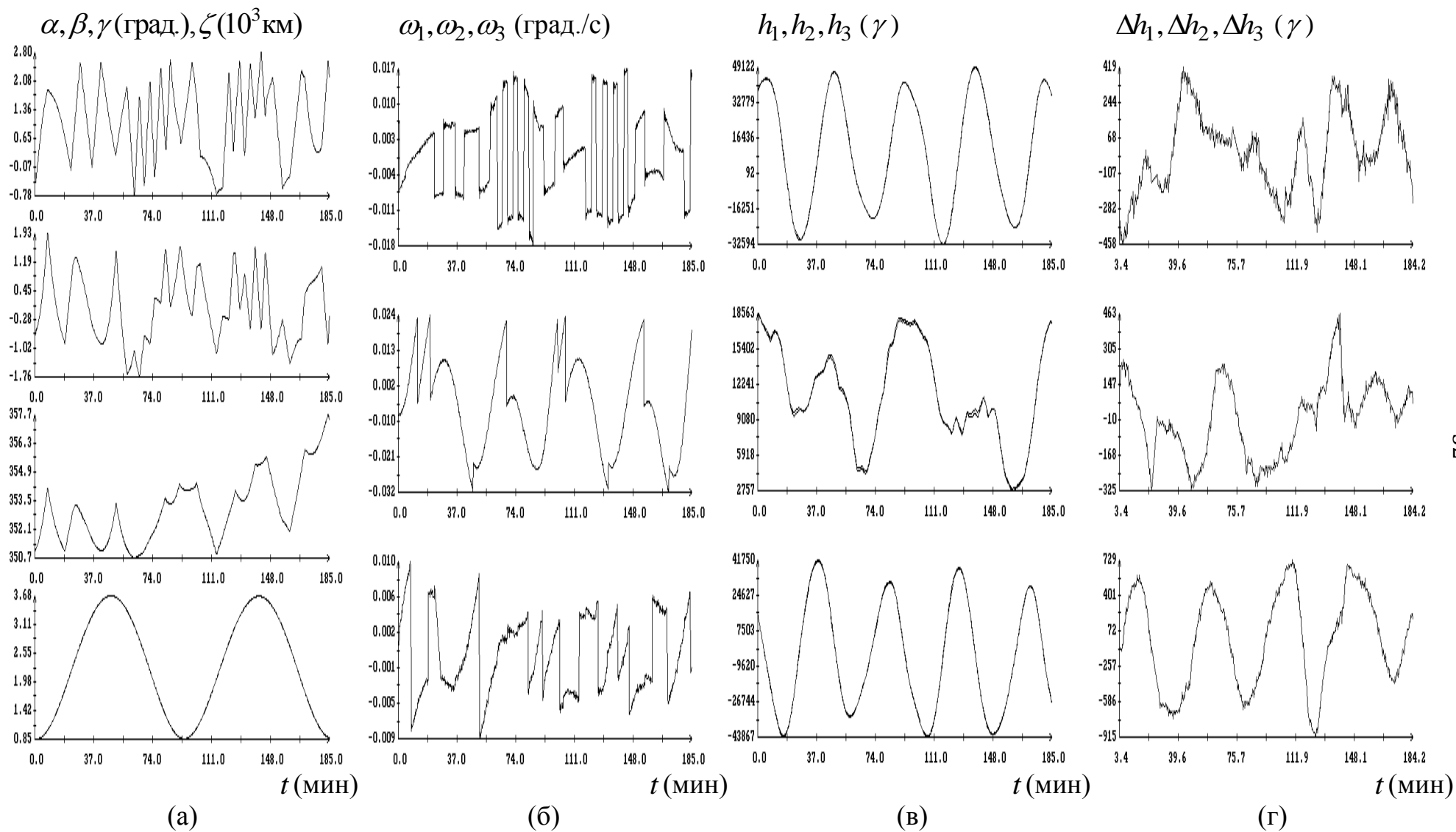


Рис. 13. Движение КА в солнечной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 1558157с (00:49:17 UTC 05.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 50.1с, смещения в измерениях компонент поля:  $4388\gamma, -1257\gamma, 743\gamma; \sigma_H = 287\gamma$ .

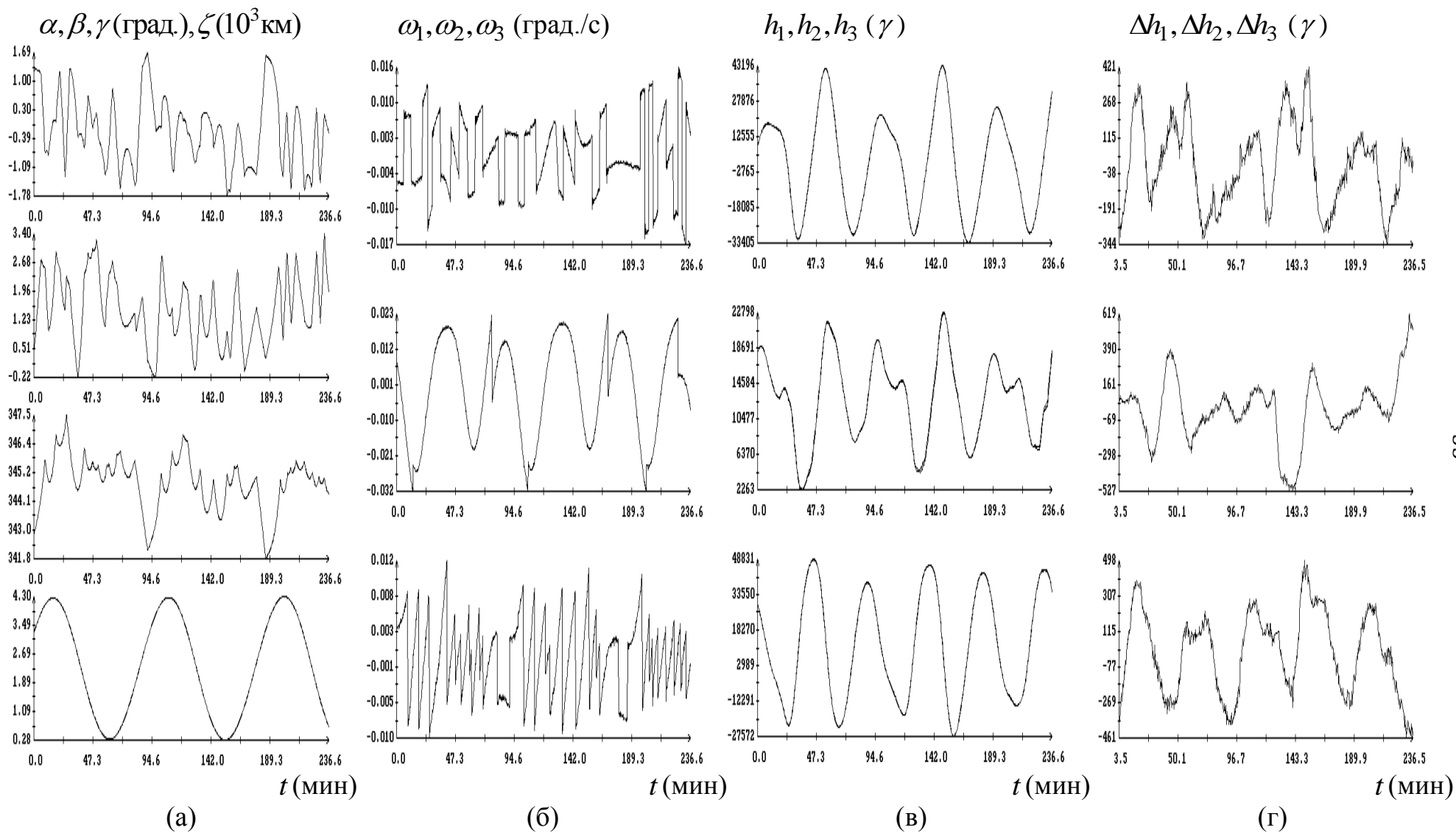


Рис. 14. Движение КА в солнечной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 1883057с (16:04:17 UTC 08.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 51.9с, смещения в измерениях компонент поля: 4166 $\gamma$ , -1248 $\gamma$ , 548 $\gamma$ ;  $\sigma_H = 202\gamma$ .

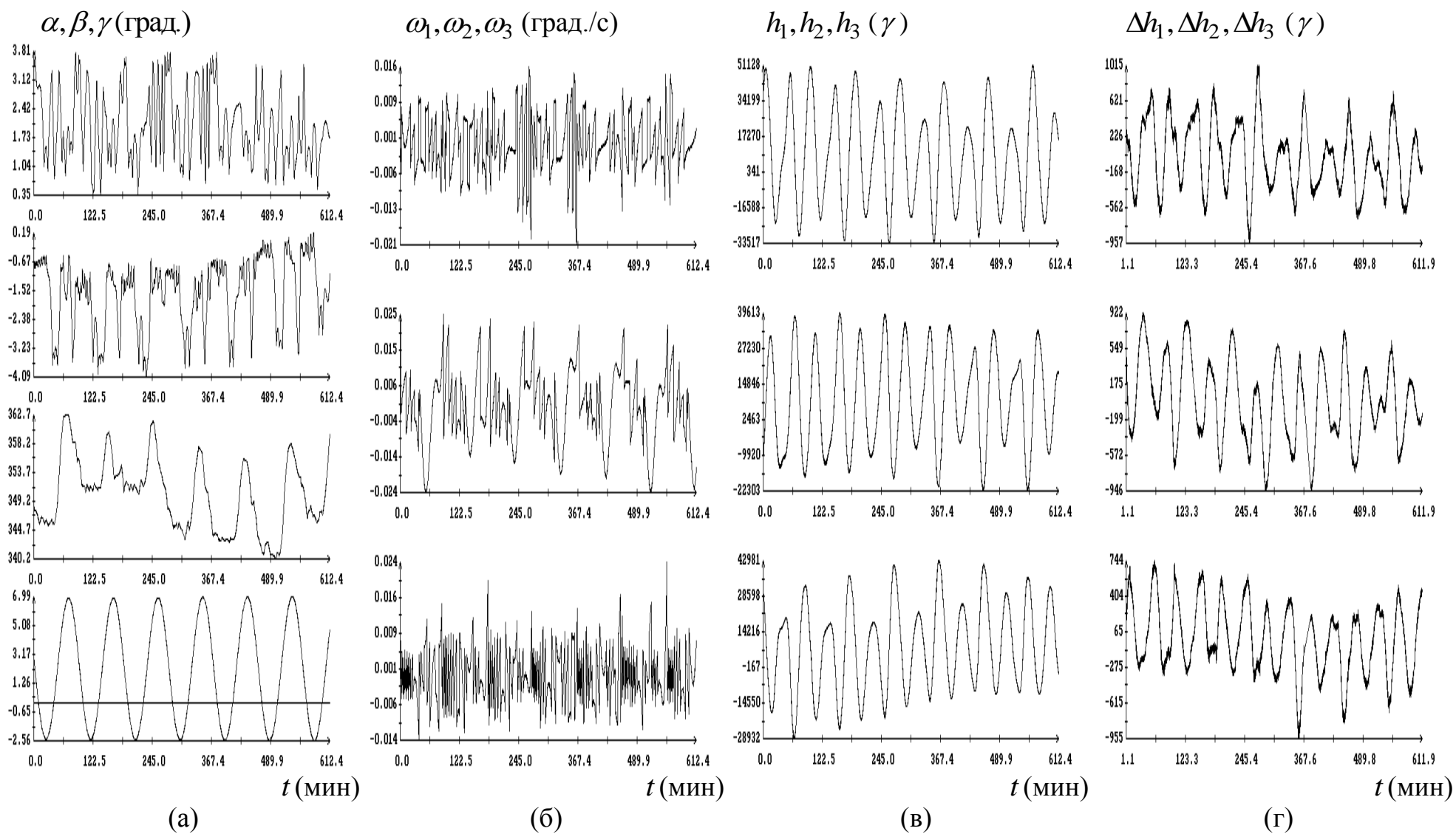


Рис. 15. Движение КА в солнечной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 2529426 с (03:37:06 UTC 16.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 65.0с, смещения магнитных измерений ( $\gamma$ ): 4438, -1273, 893;  $\sigma_H = 378\gamma$ .

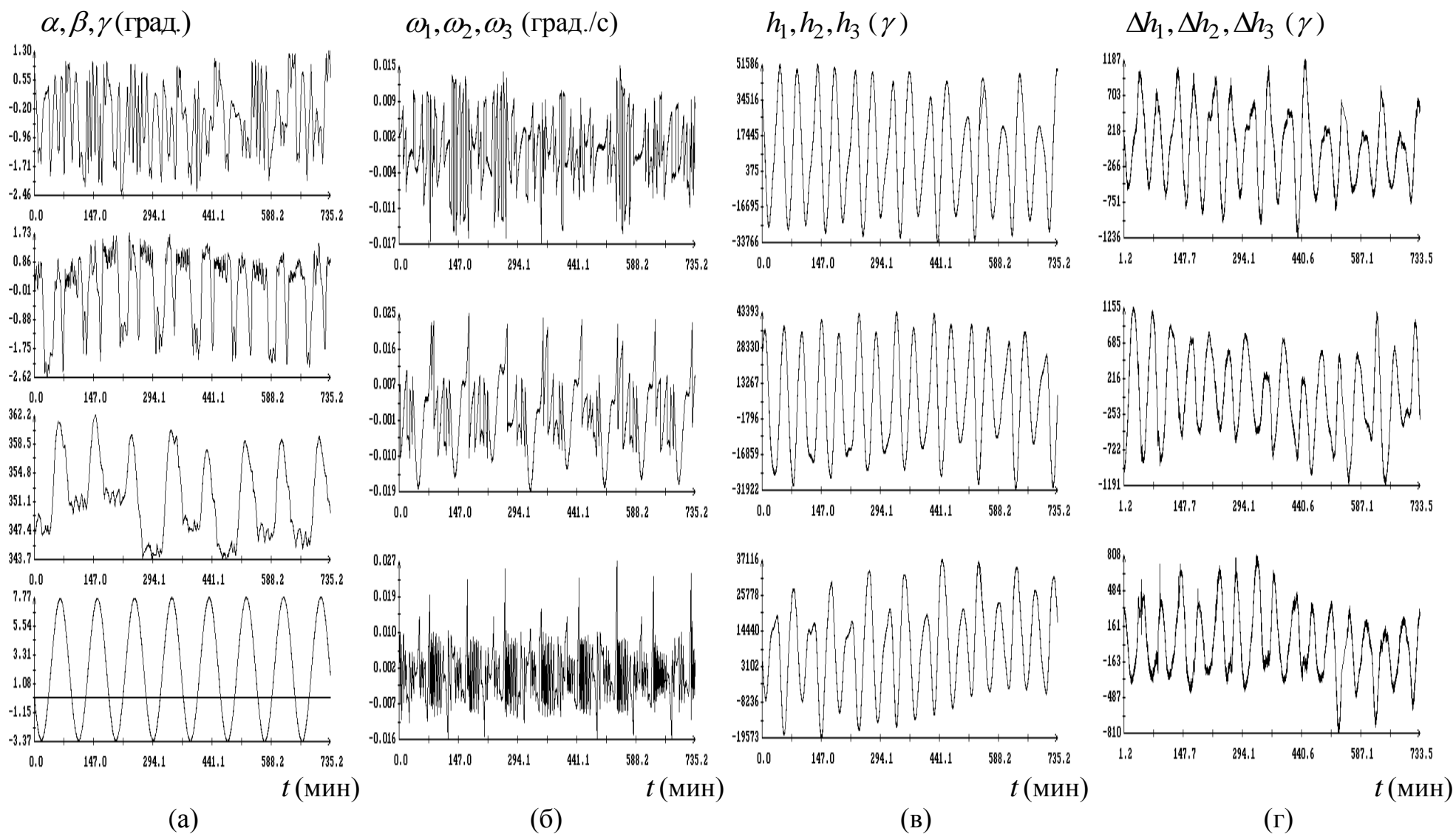


Рис. 16. Движение КА в солнечной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 2774058 с (23:34:18 UTC 18.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 70с, смещения магнитных измерений ( $\gamma$ ): 4553, -1176, 930;  $\sigma_H = 468\gamma$ .

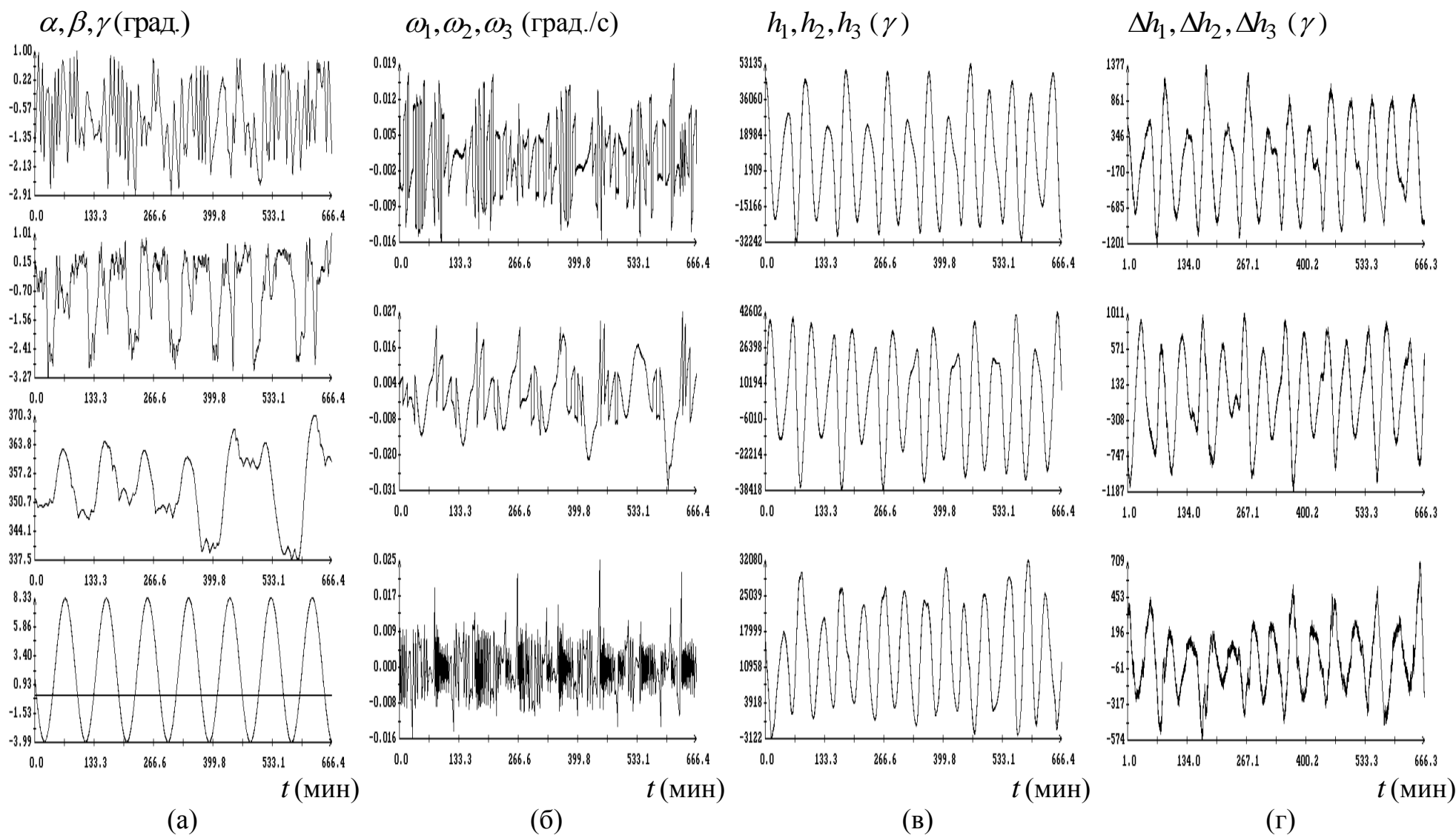


Рис. 17. Движение КА в солнечной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 3056694 с (06:04:54 UTC 22.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 59с, смещения магнитных измерений ( $\gamma$ ): 4710, -1335, 923;  $\sigma_H = 472\gamma$ .

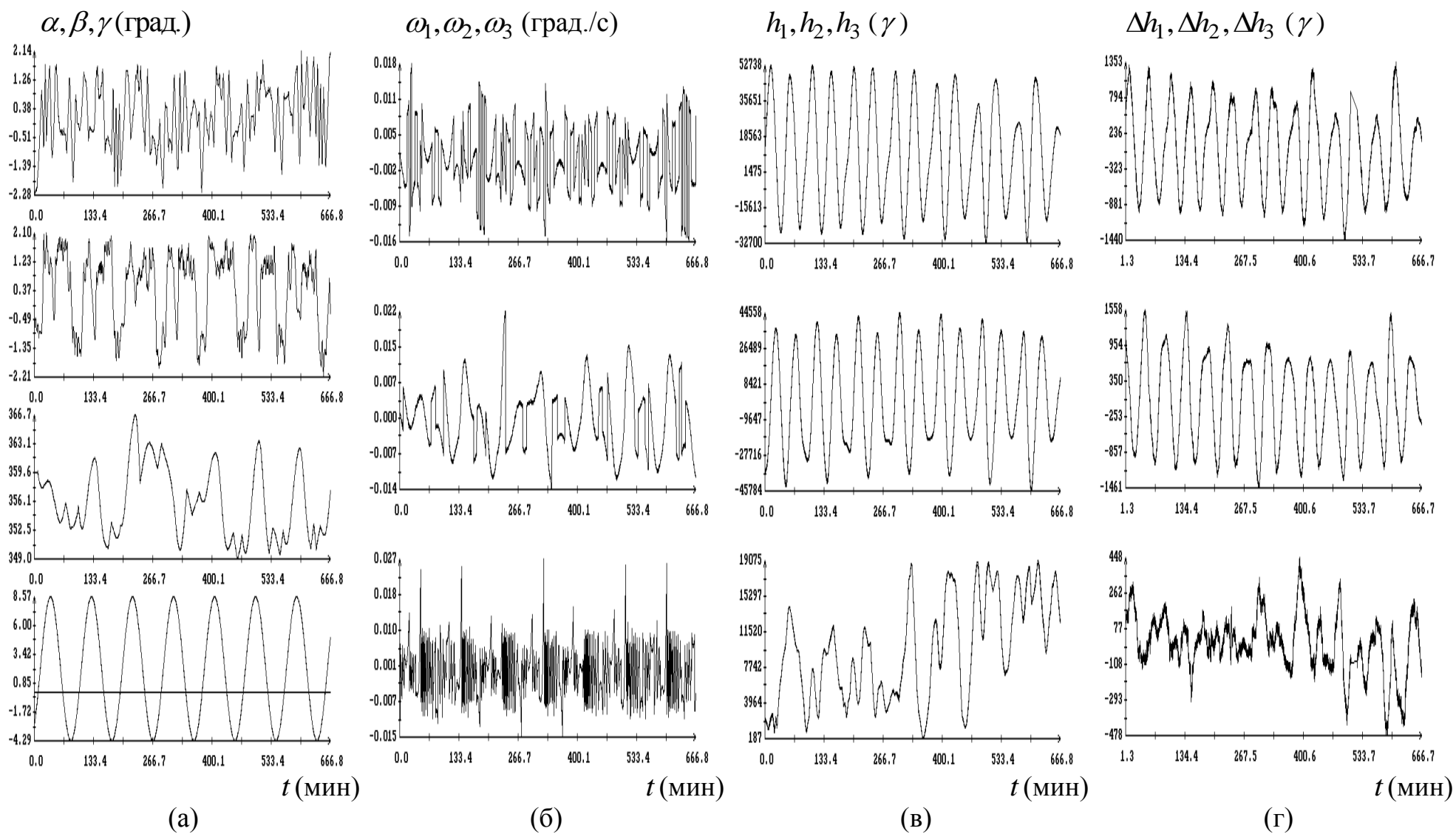


Рис. 18. Движение КА в солнечной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 3369102 с (20:51:42 UTC 25.08.2014), сдвиг времени магнитных измерений 75с, смещения магнитных измерений ( $\gamma$ ): 4849, -821, 864;  $\sigma_H$  586γ.

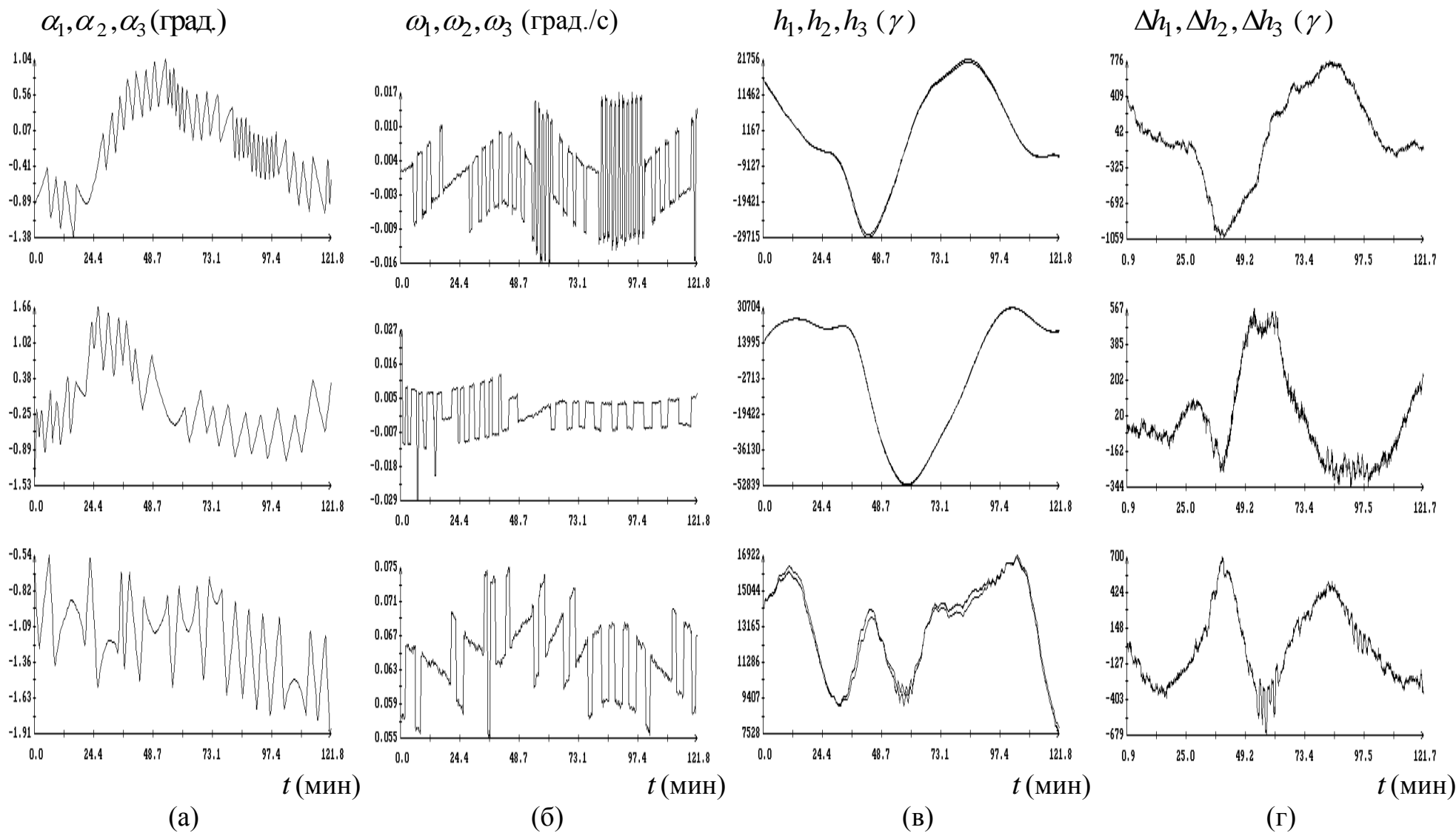


Рис. 19. Движение КА в орбитальной ориентации. Момент  $t = 0$  на графиках отвечает 3922709с (06:38:42 UTC 01.09.2014), смещения магнитных измерений ( $\gamma$ ): 4762, -681, 998;  $\sigma_H = 324\gamma$ , сдвиг времени 65.289 с.

$b_1, b_2, b_3 (10^{-6} \text{ м/с}^2)$

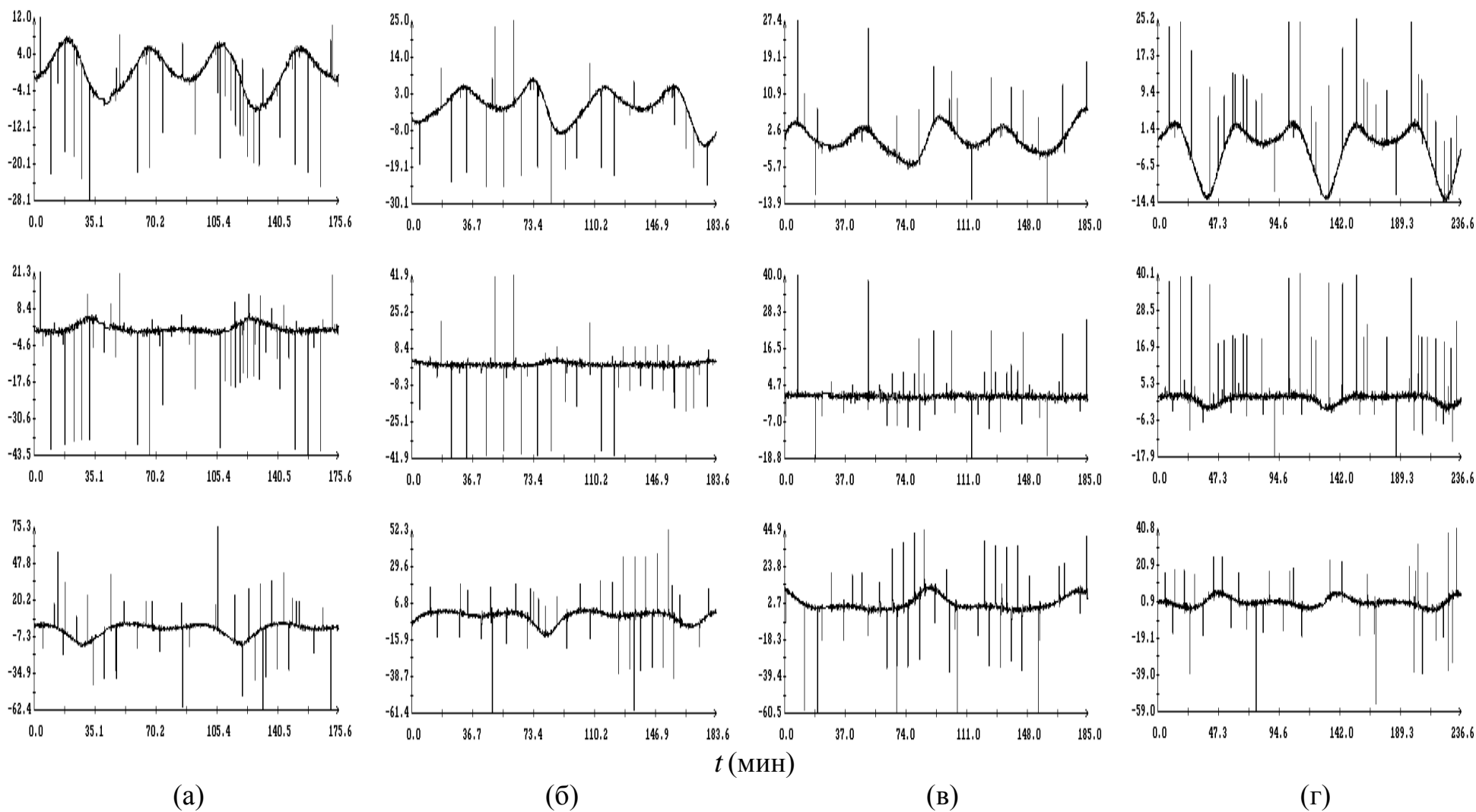


Рис. 20. Микроускорения в точке с координатами (1.5м, -0.9м, 0.2м) в приборной системе координат на отрезках времени, представленных: (а) – на рис. 11, (б) – на рис. 12, (в) – на рис. 13, (г) – на рис. 14.



$b_1, b_2, b_3 (10^{-6} \text{ м/с}^2)$

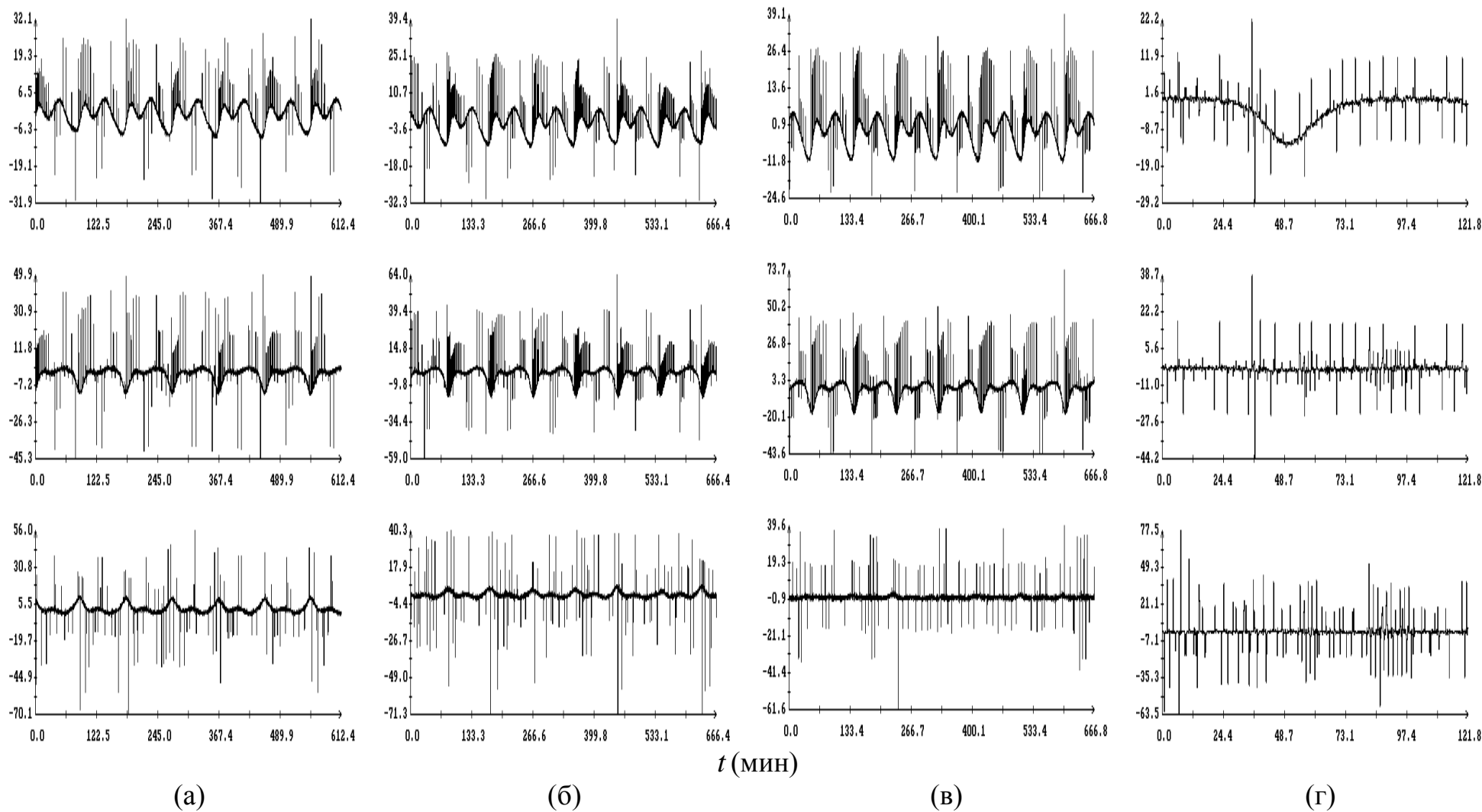


Рис. 21. Микроускорения в точке с координатами (1.5м, -0.9м, 0.2м) в приборной системе координат на отрезках времени, представленных: (а) – на рис. 15, (б) – на рис. 17, (в) – на рис. 18, (г) – на рис. 19.