



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 108 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Страховская Л.Г.

Численная модель вязкого
газового диска

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Страховская Л.Г. Численная модель вязкого газового диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 108. 15 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-108>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Л.Г. Страховская

**Численная модель
вязкого газового диска**

Москва — 2015

Страховская Л.Г.

Численная модель вязкого газового диска

3D модель формирования протопланетного диска описывается уравнениями сжимаемого вязкого газа в цилиндрических координатах. Исследуется влияние вязкости газа и охлаждения на конфигурацию диска.

Ключевые слова: газовый диск, вязкость, охлаждение, конфигурация

Liudmila Glebovna Strakhovskaya

Numerical model of the viscous gas disk

3D model of the formation of proto-planet disk is described by the equations of the compressible viscous gas in the cylindrical coordinates. The viscosity effect of gas and cooling on the disk configuration is investigated.

Key words: gas disk, viscosity, cooling, fragmentation

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 15-01- 03085а

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи.....	3
2. Течение в трубе.....	5
3. Течение в диске	9
Библиографический список.....	11

Введение

Настоящая работа является продолжением работ [1,2,3] по моделированию эволюции протопланетного диска. Численно исследуется влияние вязкости на формирование конфигурации газового диска. Рассматривается система, состоящая из гравитирующего центра и вращающегося вокруг него газового облака.

В [1] рассматривались и тестировались в основном аналитические равновесные решения системы уравнений газовой динамики, известные для политропного газа в случае отсутствия самогравитации. Было показано, что в используемой постановке задачи эти решения являются квазистационарными.

В работе [2] использовались различные неравновесные начальные распределения плотности и вращательной скорости. В процессе эволюции газовое облако сжималось, наблюдалась фрагментация, но росли температура и давление, вследствие чего падала плотность, фрагменты сливались и формировалась типичная цилиндрически симметричная квазистационарная конфигурация диска. Во всех случаях вращательная скорость становилась близкой к кеплеровской. Под влиянием самогравитации процесс сжатия шел интенсивнее, значения плотности были более высокими. Диск становился более устойчивым и плотным в малой окрестности центрального сечения ($z=0$).

Чтобы не падала плотность, следует понижать температуру диска. В работе [3] моделировалось влияние простого закона охлаждения на формирование газового диска. В данной работе исследуется влияние вязкости газа и также охлаждения на эволюцию газового облака.

1. Постановка задачи

Численная модель диска описывается 3D нестационарными уравнениями сжимаемого вязкого газа в переменных Эйлера в цилиндрической системе координат r, φ, z с началом координат в гравитирующем центре. Уравнение Пуассона описывает поведение гравитационного потенциала диска. Область расчета Ω : $r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -h \leq z \leq h$ находится между двумя коаксиальными цилиндрами, малой высоты по сравнению с внешним

радиусом. В симметричном случае рассматривается половина высоты диска. Суммарная удельная сила, действующая на элементарный объем газа в диске, состоит из силы упругости, центробежной силы, силы гравитации центрального объекта, силы гравитации самого диска, объемного излучения и силы трения.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u r)}{r \partial r} + \frac{\partial(\rho v)}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 r + p r)}{r \partial r} + \frac{\partial(\rho u v)}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} = \frac{\rho v^2}{r} + \frac{p}{r} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} + (\text{div} \boldsymbol{\sigma})_r \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v u r)}{r \partial r} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial z} = -\frac{\rho v u}{r} + \rho \frac{\partial \Phi_d}{r \partial \varphi} + (\text{div} \boldsymbol{\sigma})_\varphi \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w u r)}{r \partial r} + \frac{\partial(\rho w v)}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial z} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} + (\text{div} \boldsymbol{\sigma})_z \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial(e+p)ur}{r \partial r} + \frac{\partial(e+p)v}{r \partial \varphi} + \frac{\partial(e+p)w}{\partial z} = \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \text{div}(\boldsymbol{\sigma \mathbf{v}}) - Q_{rad} \quad (1.5)$$

Здесь r – радиус, φ – полярный угол, z – ось вращения, ρ – плотность газа, p – давление, \mathcal{E} – внутренняя энергия единицы массы газа. $e = \rho(\mathcal{E} + \frac{\mathbf{v}^2}{2})$ – полная энергия (сумма внутренней и кинетической) единицы объема газа, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ – вектор скорости, $\mathbf{v}^2 = u^2 + v^2 + w^2$. $\Phi = \Phi_s + \Phi_d$ – полный гравитационный потенциал, $\Phi_s = 1/R$ – гравитационный потенциал центрального объекта, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Гравитационный потенциал диска Φ_d удовлетворяет уравнению Пуассона, которое в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi_d}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi_d}{\partial z^2} = -\rho \quad (1.6)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ – тензор вязких напряжений в цилиндрических координатах [4], величина Q_{cool} описывает охлаждение диска. В расчетах был использован простой закон охлаждения:

$$Q_{cool} = \frac{p\omega}{\beta(\gamma-1)}, \quad (1.7)$$

использующийся также в [5], подробное описание его будет дано ниже.

Для замыкания системы используется уравнение состояния идеального газа

$$p = (\gamma-1)\rho\varepsilon . \quad (1.8)$$

Система (1.1)-(1.8) записана в безразмерных переменных, переход к безразмерным переменным описан в [1,2,3].

Решение системы уравнений (1.1)-(1.8) осуществляется методом расщепления по физическим процессам, для аппроксимации используется метод конечных объемов. Уравнения газовой динамики решаются по схеме Годунова [6]. Потоки на гранях ячеек вычисляются с помощью программы расчета плоского распада разрыва методом касательных Ньютона, который по скорости сходимости является итерационным процессом второго порядка. Система уравнений (1.1)-(1.5) дополняется граничными условиями первого или второго рода: условие непротекания, условие скольжения, условие симметрии, свободные краевые условия.

Уравнение Пуассона решается многосеточным методом Федоренко (Multigrid) [7], используются 2 — 4 вложенные сетки. Для гравитационного потенциала жесткие граничные значения Φ_d в каждой точке P вычисляются через интеграл Пуассона, который дает точное решение уравнения (1.6)

$$\Phi_d(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho(Q)}{PQ} dV, \quad Q \in \Omega, \quad P \in \partial\Omega, \quad (1.9)$$

на внешней поверхности используются и свободные краевые условия $\partial\Phi_d / \partial n = 0$. Гравитационный потенциал Φ_d внутри области находится численным решением уравнения (1.6), так как вычисление Φ_d во всей области по формуле (1.9) — очень дорогая операция.

2. Течение в трубе

В декартовой системе координат компоненты тензора вязких напряжений определяются как

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} = \mu \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \zeta \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$\mu > 0$ — коэффициент динамической вязкости, ζ — коэффициент второй вязкости, δ_{ik} — символ Кронекера [4].

В цилиндрической системе для компонент тензора вязких напряжений получаются выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\mu \frac{\partial v}{r\partial\varphi} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}, & \sigma_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}, & (2.2) \\ \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{r\partial\varphi} - \frac{v}{r} \right), & \sigma_{\varphi z} = \sigma_{z\varphi} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r\partial\varphi} \right), & \sigma_{rz} = \sigma_{zr} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

где $\lambda = \zeta - \frac{2}{3}\mu$. Если коэффициенты вязкости постоянны, то компоненты вектора $div\sigma$ выражаются как

$$\begin{aligned} (div\sigma)_r &= \mu(\Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2}) + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial r} (div\mathbf{v}) \\ (div\sigma)_\varphi &= \mu(\Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2}) + (\mu + \lambda) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (div\mathbf{v}) \\ (div\sigma)_z &= \mu\Delta w + (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial z} (div\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Аппроксимация компонент вектора $div\sigma$ делается методом конечных объемов, значения на гранях ячеек берутся с нижнего слоя. Запрограммированы два варианта: с постоянным значением μ по формулам (2.3) и по формулам (2.2).

Были сделаны расчеты течений только с учетом вязкости, без включения гравитации и охлаждения.

Известно точное аналитическое решение установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе постоянного сечения (течение Пуазейля), зависящее от перепада давления на входе и выходе трубы. Скорость вдоль трубы постоянна, а в сечении по радиусу имеет параболический профиль, в наших обозначениях это третья компонента скорости

$$w = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2), \quad (2.4)$$

здесь R – радиус трубы, L – длина трубы, $\eta = \frac{\mu}{\rho}$ – кинематическая вязкость.

Давление вдоль трубы изменяется линейно.

Пример 1. В области $\Omega: 0 \leq r \leq 0.01, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1$ задаются начальные данные: $\rho(r, \varphi, z) \equiv 1, \mu = 0.05, u = v = w = 0$, давление на входе $p_{in} = 1$, давление на выходе $p_{out} = 0.8$, внутри области давление изменяется по параболе, чтобы оно не совпадало с точным решением. Граничные условия:

$$\begin{aligned} r=0: \quad u=v=0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad z=0: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad p = p_{in}, \\ r=R: \quad u=v=w=0, \quad z=L: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad p = p_{out}. \end{aligned}$$

Для всех остальных необходимых величин $\frac{\partial}{\partial n} = 0$.

С этими начальными данными и краевыми условиями рассчитывается динамика диска на сетке $20 \times 4 \times 100$ без влияния гравитации и охлаждения. На рис. 1а представлена скорость $w(r)$ вдоль диаметра трубы в сечении $z=0.01$ на два момента времени.

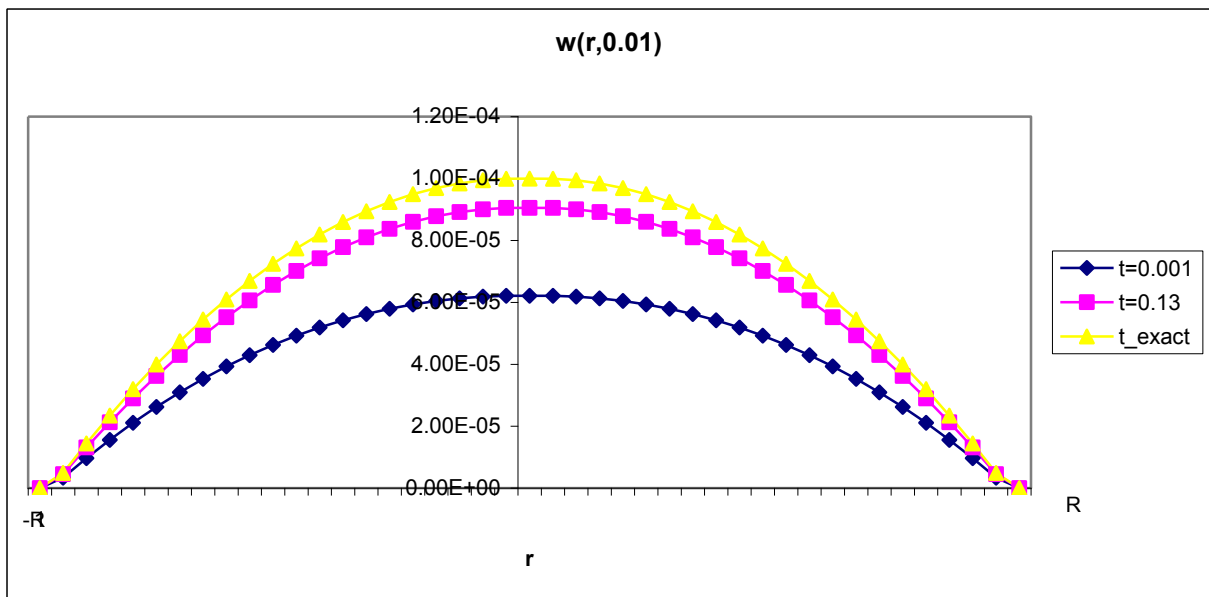


Рис. 1а. Значения скорости $w(r)$ в сечении $z=0.01$ на 2 момента времени $t=0.001, 0.13$ и точное решение

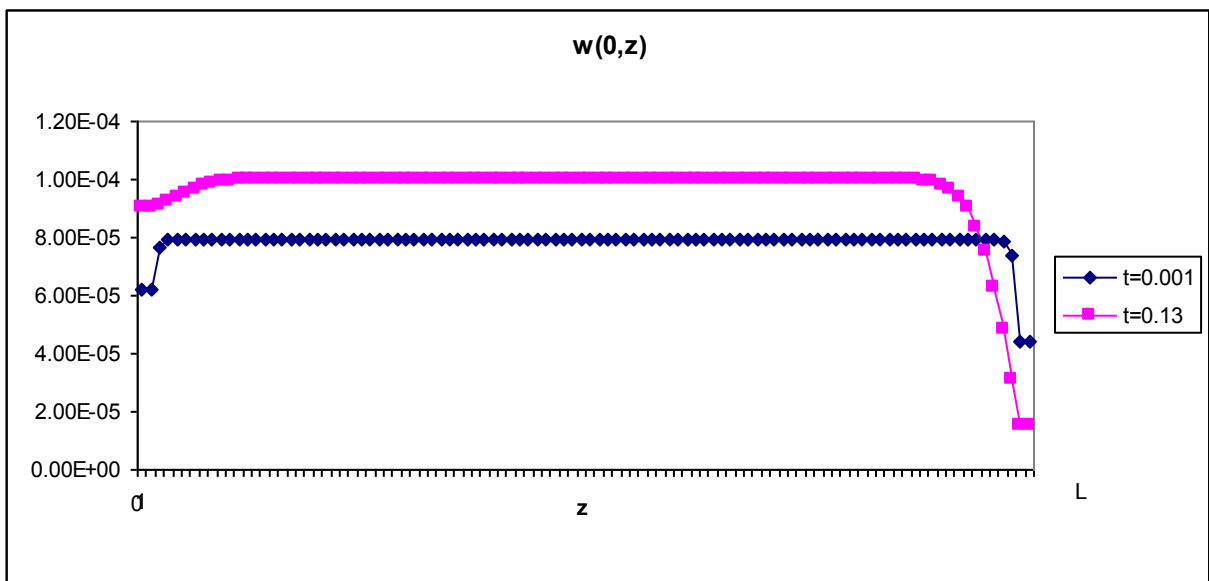


Рис. 1б. Значения скорости $w(0, z)$ на 2 момента времени $t=0.001, 0.13$

Первая кривая представляет численное решение на момент времени $t=0.001$, вторая кривая – на момент $t=0.13$, $\tau \sim 6 \cdot 10^{-7}$ третья кривая – это точное решение (2.4). На рис. 1б представлена скорость $w(0, z)$ вдоль оси трубы на те же моменты времени, точное значение $w_{exa}(0, z) = 10^{-4}$. Решение еще не установилось, пузелейлевское распределение скорости установилось на некотором расстоянии от входа трубы.

Сделаны два расчета с другими значениями коэффициента динамической вязкости. На рис. 2а представлена скорость $w(r)$ для вязкого течения с $\mu=7\cdot 10^{-5}$, вдоль диаметра трубы в сечении $z=0.01$, на момент времени $t=0.13$, ее распределение уже сильно отличается от параболического закона. На рис. 2б представлено течение для $\mu=10^{-7}$ на сетке $40\times 4\times 100$ с ярко выраженным пограничным слоем.

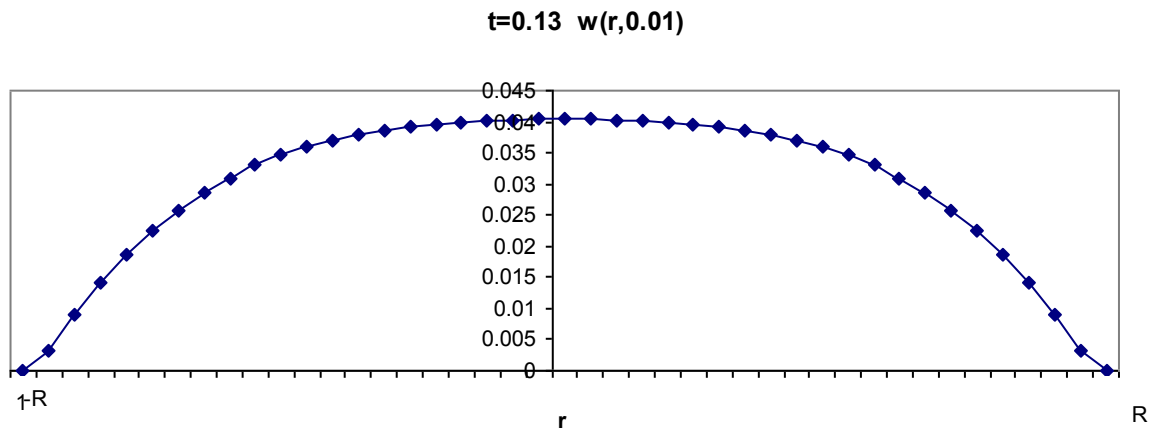


Рис. 2а. Значения скорости $w(r)$ в сечении $z=0.01$ на момент времени $t=0.13$, $\mu=7\cdot 10^{-5}$

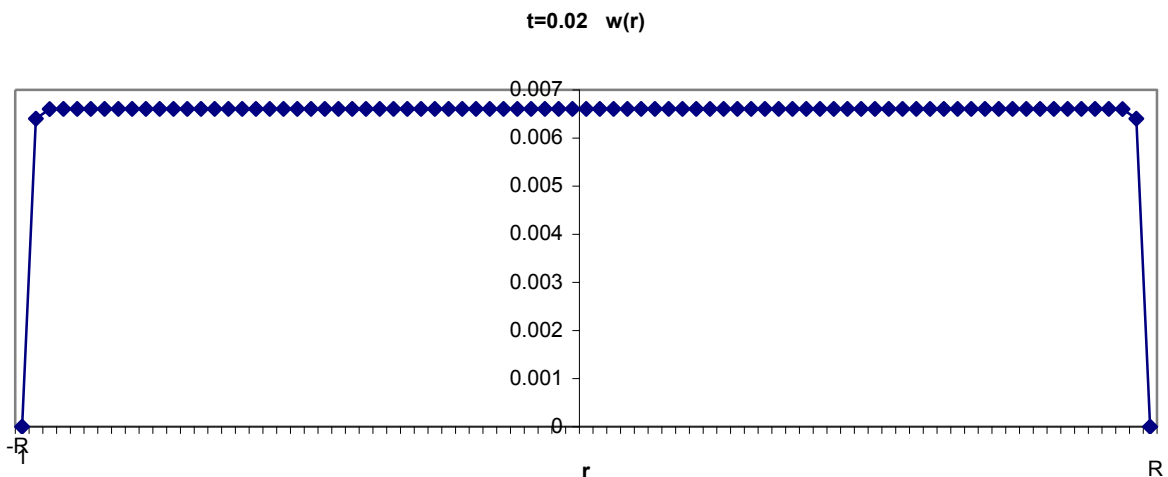


Рис. 2б. Значения скорости $w(r)$ в сечении $z=0.01$ на момент времени $t=0.02$, пограничный слой, $\mu=10^{-7}$

Напомним, что уравнения (1.1)-(1.8) записаны в безразмерных переменных, переход к ним описан в [1,2,3]. В качестве масштабных единиц

взята масса солнца M_s , радиус диска R , гравитационная постоянная G . В этих единицах масштабный множитель для плотности равен $\rho_0 = M_s / (4\pi R^3)$, для скорости – $v_0^2 = GM_s / R$ и для коэффициента вязкости – $\mu_0 = \rho_0 v_0 R$, то есть безразмерный коэффициент вязкости равен $\mu = \frac{\mu_{разм.}}{\rho_0 v_0 R}$. Каждый тип течения характеризуется безразмерной величиной, числом Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho v L}{\mu_{разм.}} = \frac{v L}{\eta_{разм.}}, \quad (2.5)$$

где v, L – характерные значения скорости и линейного размера, и в нашей нормировке $\text{Re} = \frac{1}{\mu}$. Результаты трех расчетов течения в трубе с разными значениями числа Рейнольдса: 20, $1.4 \cdot 10^4$, 10^7 – находятся в полном соответствии с теорией [4].

3. Течение в диске

Рассматривался цилиндрически симметричный вариант полного диска. Проведены расчеты динамики диска: 1) под влиянием гравитации центральной звезды Φ_s ; 2) под влиянием гравитации Φ_s и самогравитации Φ_d ; 3) под влиянием гравитации Φ_s, Φ_d и охлаждения Q_{cool} ; 4) под влиянием Φ_s, Q_{cool} и вязкости σ .

В работе [3] использовался простой закон охлаждения [5], в уравнение энергии (1.5) вводилось охлаждение по формуле

$$Q_{cool} = \frac{p\omega}{\beta(\gamma-1)}. \quad (3.1)$$

Здесь p – давление, ω – угловая скорость, $\beta = t_{cool}\omega$ – безразмерный параметр, $t_{cool} = \varepsilon (de_{cool}/dt)^{-1}$ – временная шкала охлаждения, ε – внутренняя энергия, de_{cool}/dt – скорость охлаждения. (Rice, Lodato & Armitage, 2005) показали [8], что β зависит от уравнения состояния. Для диска с $\gamma = 7/5$ фрагментация возможна, если $\beta \leq 13$.

Пример 2. В области $\Omega: 0.1 \leq r \leq 2.1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -0.2 \leq z \leq 0.2$ на сетке $100 \times 16 \times 32$ задается плотность $\rho(r, \varphi, z) = (0.379r^2 - 0.0758r - 2)(13.3z^2 - 1)$ в виде произведения двух парабол, $\max \rho(0,0) = 2$, $\min \rho(2.1,0.2) = 0.25$. Скорость вращения $v = 0.8r / R^{3/2}$, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, давление $p = k\rho^\gamma$, $\gamma = 1.43$, значение $k = 0.0106$ соответствует температуре $95^\circ K$. Внутренняя энергия находится из уравнения состояния $\varepsilon = p / (\gamma - 1)\rho$, начальные скорости $u = w = 0$.

Коэффициент вязкости $\mu=10^{-4}$. На внешней границе задавались свободные граничные условия, а при $r=0$ – условия непротекания. Масса диска $M_d=0.46$.

На рис. 3а – 3г представлены графики плотности, скорости вращения, внутренней энергии и давления вдоль радиуса в центральном сечении. Кривая 1 – это начальное распределение, кривая 2 – это результат расчета только с Φ_s , который мы назовем базовым расчетом, кривая 3 – это результат расчета с Φ_s и Φ_d , кривая 4 – это результат расчета с Φ_s, Φ_d и Q_{cool} , кривая 5 – это результат расчета с Φ_s, Q_{cool} и σ .

Ко времени $t=1$ профиль плотности во всех расчетах резко изменился, образовалось два кольца. Первое – близко к центру, второе – в середине радиуса, в кольцах плотность выросла в 7-20 раз. Во всех расчетах вращательная скорость упала относительно начальной, близкой к кеплеровской скорости. Под влиянием самогравитации плотность растет, при включении охлаждения плотность еще немного увеличивается, т.е. меньшей температуре соответствует большая плотность. Вязкость сильно увеличивает плотность в области нуля, но второй максимум немного ниже, чем в расчете с самогравитацией. Внутренняя энергия самая низкая в четвертом расчете, то есть охлаждение преобладает над влиянием вязкости.

Приведем пример расчета течений в диске меньшей массы и рассмотрим половину диска по z .

Пример 3. В области $\Omega: 0.1 \leq r \leq 2.1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 0.2$, на сетке $100 \times 16 \times 16$ задается плотность $\rho(r, \varphi, z) = (0.492r^2 - 0.0985r - 2)(25.3z^2 - 1)$ в виде произведения двух парабол, $\max \rho(0,0) = 2$, $\min \rho(2.1,0.2) = 0.0025$. Скорость вращения $v = r / R^{3/2}$, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, давление $p = k\rho^\gamma$, $\gamma = 1.43$, $k = 0.0106$, начальные скорости $u = w = 0$. Коэффициент вязкости $\mu = 10^{-4}$. На внешней границе задавались свободные граничные условия, при $r=0$ задавались условия непротекания, при $z=0$ – условия симметрии. Масса диска $M_d = 0.3$.

На рис. 4а – 4г представлены графики плотности, скорости вращения, внутренней энергии и давления на момент времени $t=1.5$. Кривая 1 – это начальное распределение, кривая 2 – это результат расчета только с Φ_s , кривая 3 – это результат расчета с Φ_s и σ , кривая 4 – это результат расчета с Φ_s и Q_{cool} , кривая 5 – это результат расчета с Φ_s, Q_{cool} и σ . Образовалось два кольца, вязкость увеличивает плотность, при этом понижается внутренняя энергия. Скорость вращения понизилась, но во втором кольце, где большая плотность, скорость высокая. Охлаждение повышает плотность, но внутренняя энергия понижается меньше, чем при включении вязкости. Возможно, это связано с зависимостью от давления в (3.1).

Заключение

Численно исследована 3D модель вращающегося вокруг центральной звезды газового диска под действием гравитации самого диска, вязкости и охлаждения. Изучалось влияние вязкости газа и охлаждения на конфигурацию диска.

Основной вывод заключается в том, что включение и самогравитации, и охлаждения, и вязкости понижает внутреннюю энергию диска, то есть температуру. А это условие необходимо для фрагментации диска.

Библиографический список

1. Страховская Л.Г. Модель эволюции самогравитирующего газового диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 80. 24 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-80>
2. Страховская Л.Г. Роль гравитации в формировании околовзвездного газового диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 82. 24 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-82>
3. Страховская Л.Г. Численная модель охлаждающегося гравитирующего газового диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. №109. 16 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-109>
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
5. Paardekooper S.-J., Numerical convergence in self-gravitating shearing sheet simulation and the stochastic nature of disc fragmentation. 2012. arXiv:1201.3371v1 [astro-ph.EP]
6. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.М., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
7. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994.
8. Rise W. K. M., Lodato G., Armitage P. J., Investigating fragmentation conditions in self-gravitating accretion discs. 2005, MNRAS, 364, L56.

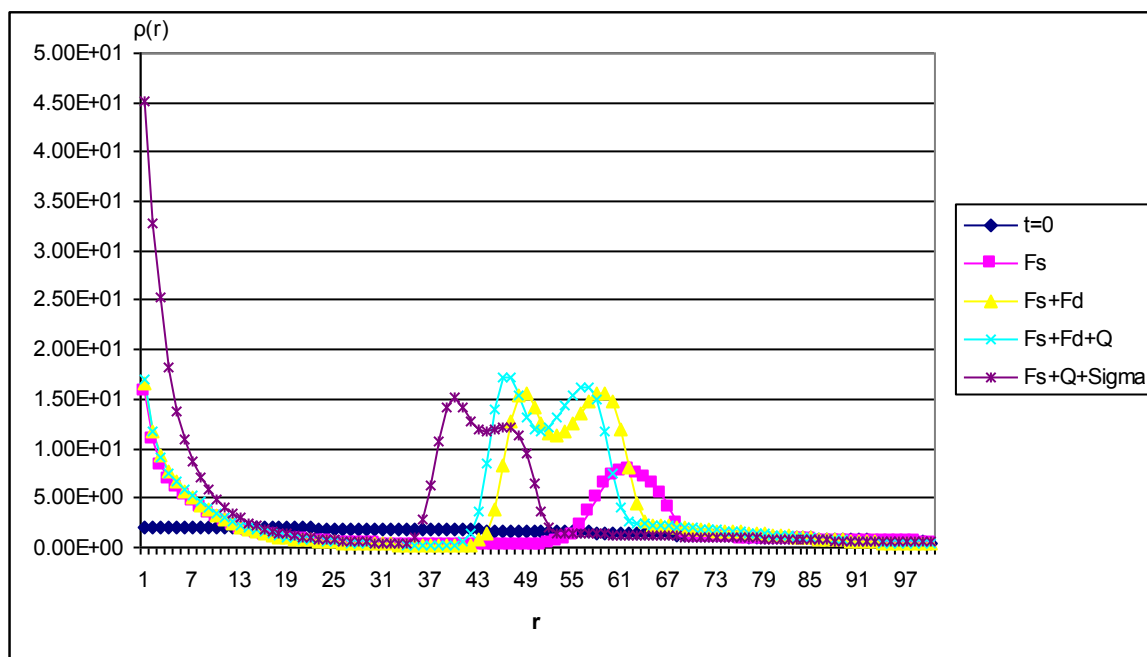


Рис. 3а. Значения плотности $\rho(r)$ в сечении $z=0$, $t=1$

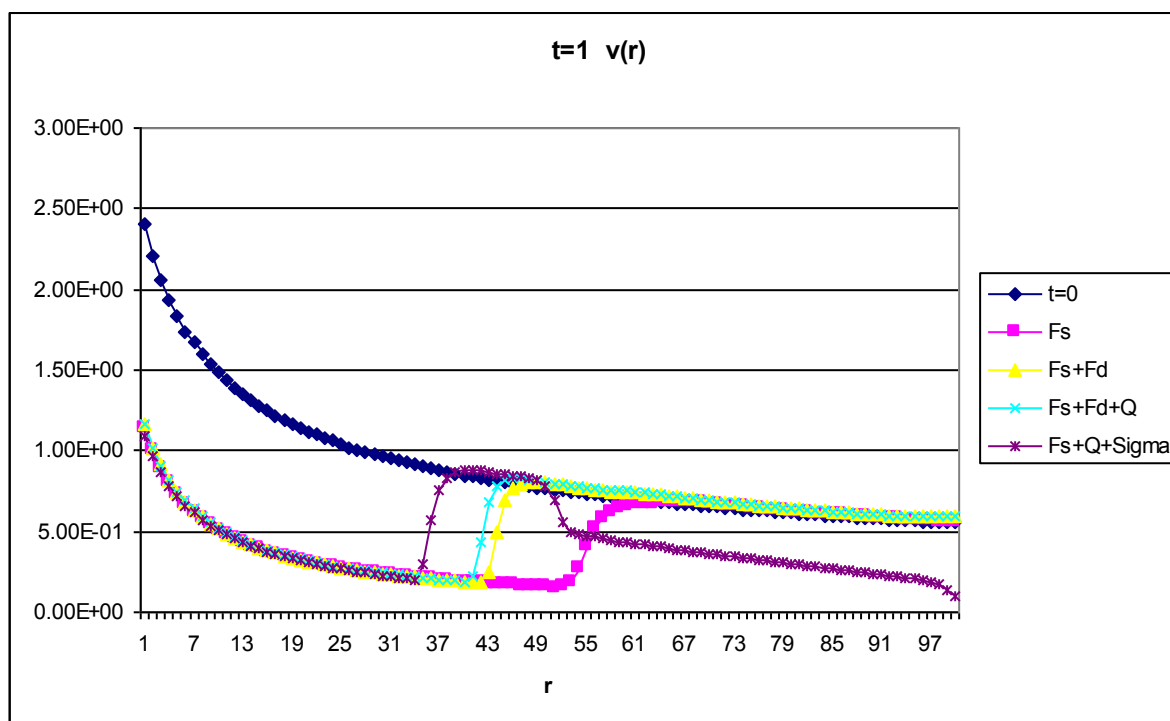


Рис. 3б. Значения скорости $v(r)$ в сечении $z=0$, $t=1$

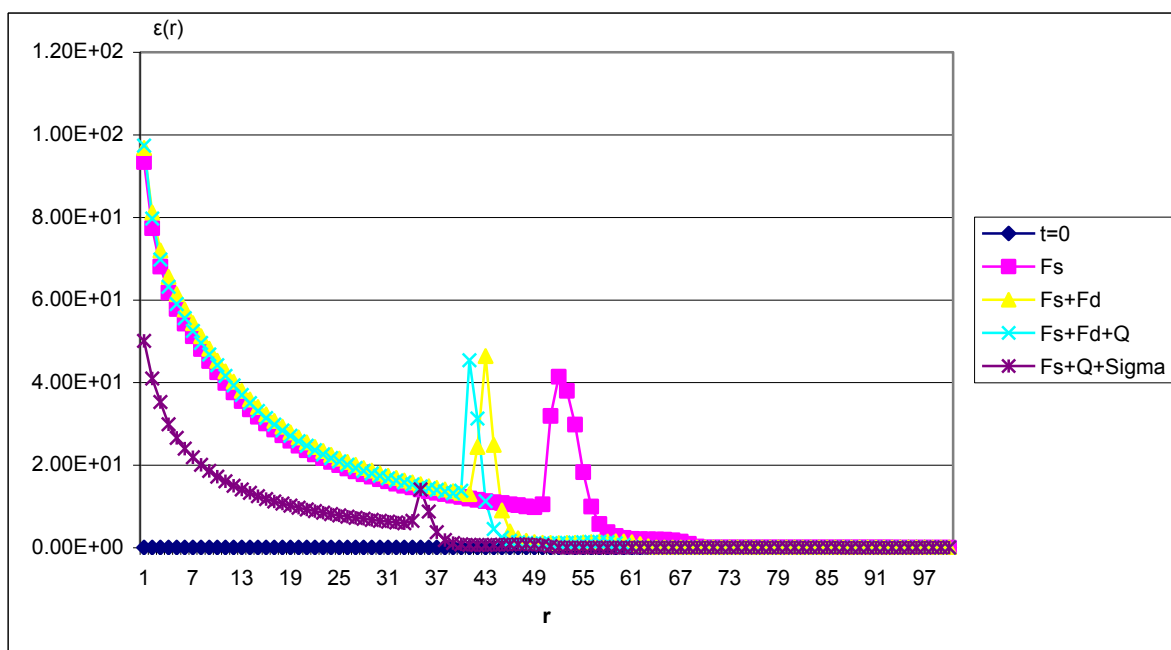


Рис. 3в. Значения внутренней энергии $\varepsilon(r)$ в сечении $z=0$, $t=1$

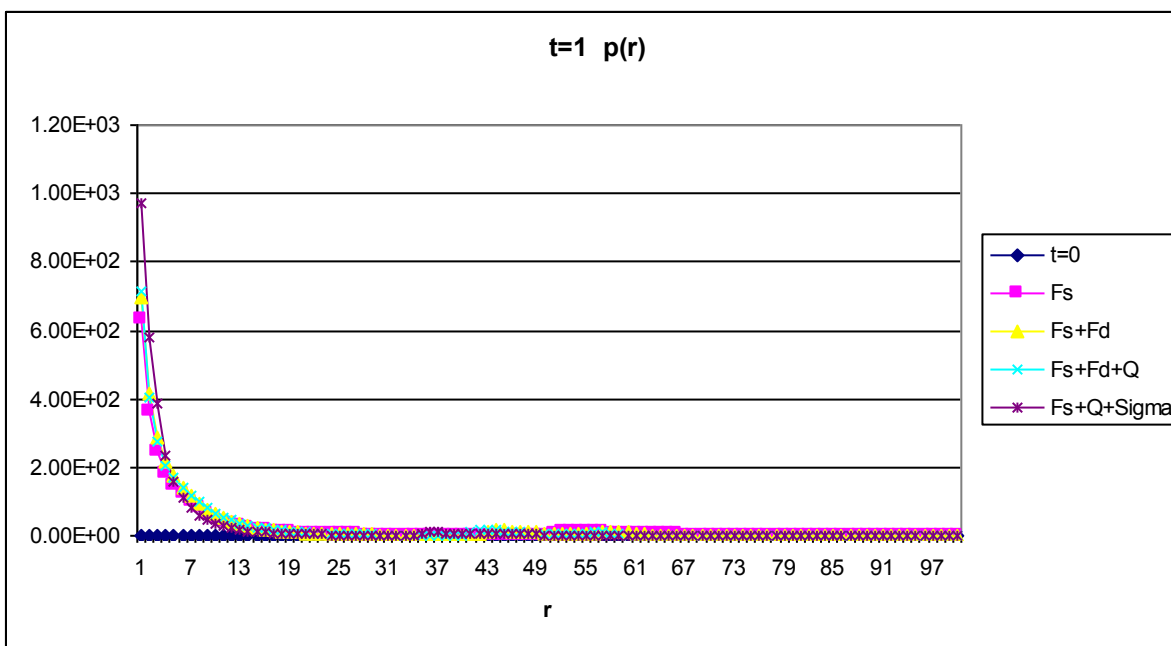


Рис. 3г. Значения давления $p(r)$ в сечении $z=0$, $t=1$

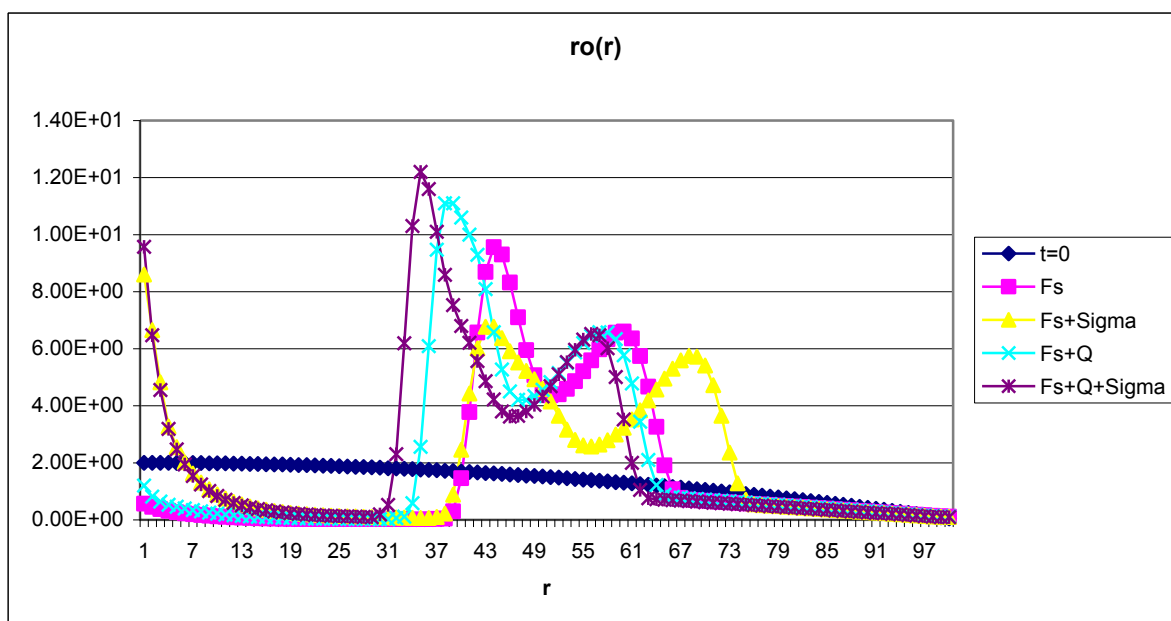


Рис. 4а. Значения плотности $\rho(r)$ в сечении $z=0$, $t=1.5$

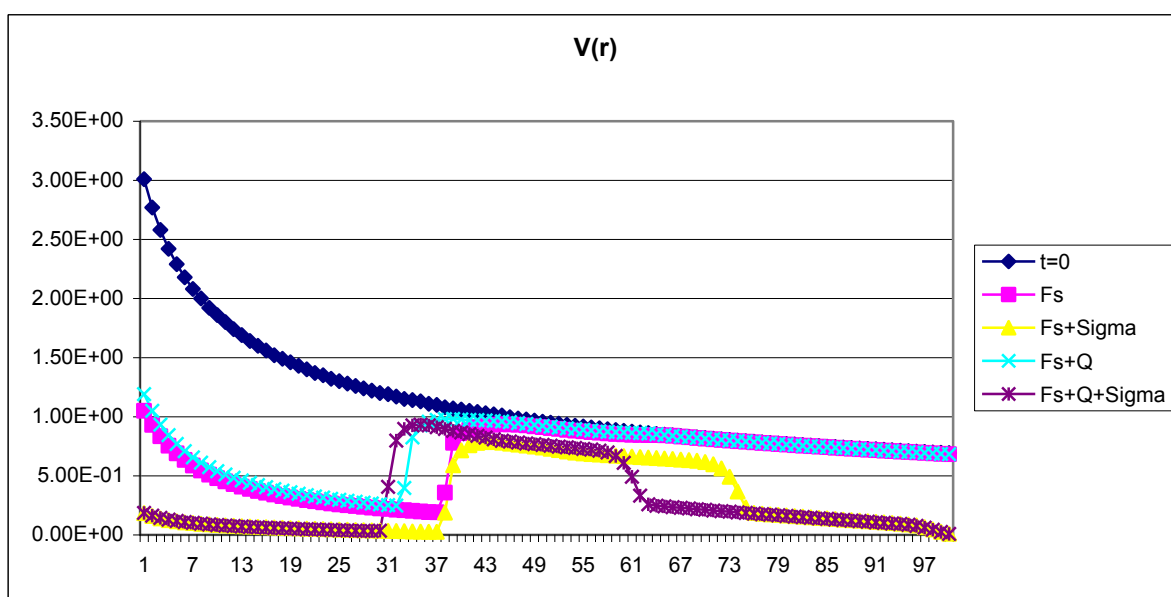


Рис.4б. Значения скорости $v(r)$ в сечении $z=0$, $t=1.5$

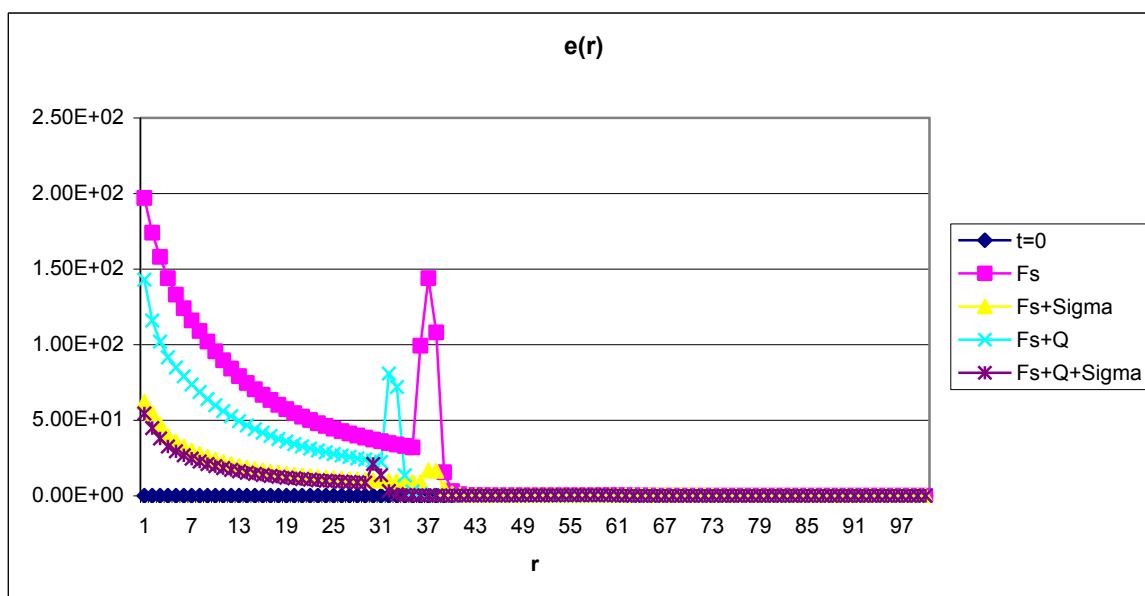


Рис. 4в. Значения внутренней энергии $\varepsilon(r)$ в сечении $z=0$, $t=1.5$

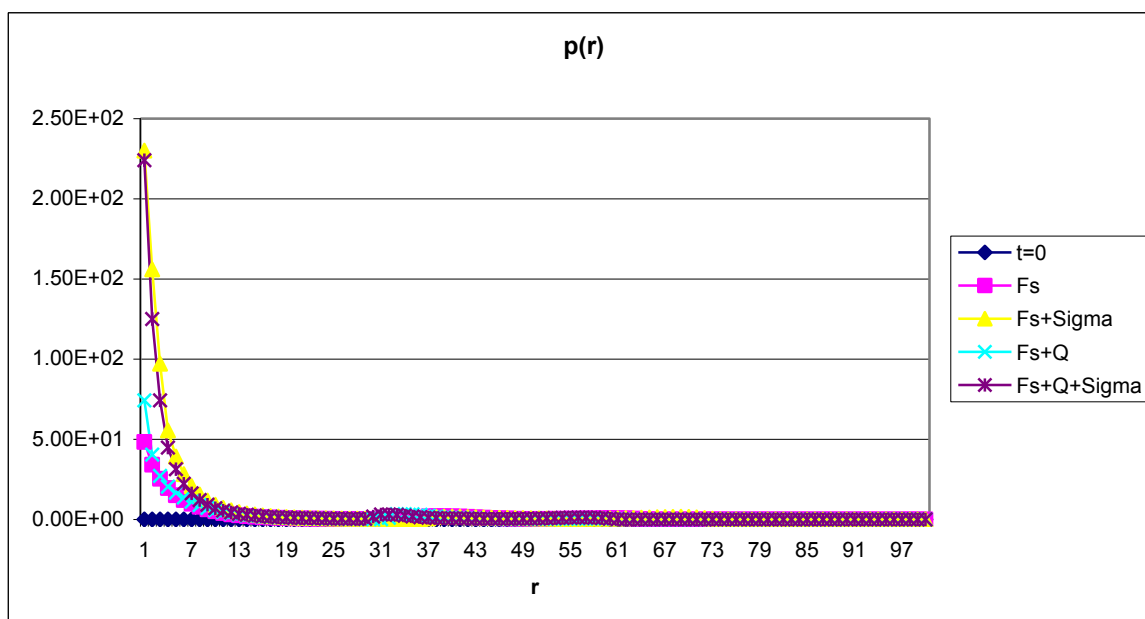


Рис. 4г. Значения давления $p(r)$ в сечении $z=0$, $t=1.5$