



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 11 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Елизарова Т. Г., Широков И.А.

Моделирование
турбулентного течения
Куэтта на основе КГД-
уравнений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Елизарова Т. Г., Широков И.А. Моделирование турбулентного течения Куэтта на основе КГД-уравнений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 11. 26 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-11>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Т.Г. Елизарова, И.А. Широков

**Моделирование
турбулентного течения Куэтта
на основе КГД-уравнений**

Москва — 2015

Т.Г. Елизарова, И.А. Широков

Моделирование турбулентного течения Куэтта на основе КГД-уравнений

Аннотация

На основе КГД-алгоритма проведено моделирование турбулентного и ламинарного течения Куэтта в вязком сжимаемом газе. Результаты демонстрируют хорошее согласие с экспериментальными и расчетными данными, полученными ранее. Показано, что КГД-алгоритм позволяет единообразно проводить моделирование как турбулентных, так и ламинарных пристеночных течений. При этом КГД-алгоритм позволяет использовать более грубые пространственные сетки по сравнению с методами типа DNS.

Ключевые слова: квазигазодинамические (КГД) уравнения, моделирование турбулентных пристеночных течений, течение Куэтта

T. G. Elizarova, I. A. Shirokov

Numerical simulation of the turbulent Couette flow based on the quasi-gasdynamic equations

Abstract

The numerical simulation of the turbulent and laminar channel Couette flow is performed by means of the quasi-gas dynamic (QGD) algorithm for the viscous compressible gas flow. The results show good agreement with experimental and calculated data obtained previously. It is shown that the QGD algorithm gives opportunity to simulate turbulent and laminar near-wall flows universally. Besides, the QGD algorithm demands smaller number of the spatial grid than the standard DNS methods of high approximation order.

Keywords: quasi-gas dynamic (QGD) system, near-wall turbulent flow modeling, Couette flow

Оглавление

Введение	- 3 -
Постановка задачи	- 4 -
Математическая модель и метод численного решения	- 6 -
Результаты расчетов: общие замечания	- 7 -
Результаты расчетов для $Re = 3000$	- 11 -
Результаты расчетов для $Re = 4250$	- 19 -
Результаты расчетов для $Re = 300$	- 21 -
Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса	- 23 -
Выводы	- 24 -
Литература	- 24 -

Введение

Турбулентное течение Куэтта является хорошим примером для тестирования численного алгоритма, предназначенного для моделирования пристеночных газодинамических течений. В частности, моделирование течения Куэтта позволяет определить, насколько адекватно применяемый алгоритм описывает профили скорости и ее пульсационных составляющих. При этом эталонными данными являются значения параметров течения, полученные в экспериментах. Так, в работе [1] приведены профили осредненной скорости турбулентного течения Куэтта, зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса и предложена эмпирическая формула, выражающая эту зависимость. В [2] получены профили осредненной скорости, аналогичные результатам из [1]. В работах [3], [4] и [5] приведены профили среднеквадратичных пульсаций скорости вблизи стенки. В работе [5] получен детальный профиль осредненной скорости вблизи стенки, на основе которого определены значения эмпирических коэффициентов в двухслойной модели пристеночной турбулентности.

Численное моделирование турбулентного течения Куэтта проводилось в работах [6], [7], [8]. Результаты, полученные в [6], хорошо соответствуют результатам экспериментальных работ [1]–[5]. Результаты из [7] и [8] также в общих чертах соответствуют экспериментальным данным. Но значения эмпирических коэффициентов двухслойной модели пристеночной турбулентности, полученные в [7] и [8], несколько занижены по сравнению с экспериментальными значениями.

В настоящей работе приведены результаты численного моделирования турбулентного течения Куэтта сжимаемого газа на основе квазигазодинамического (КГД) алгоритма [9]–[11]. Разностная сетка, использованная в настоящей работе, отличается меньшими размерами по сравнению с сетками, обычно используемыми для моделирования пристеночной турбулентности, и не удовлетворяет рекомендациям, сформулированным в [12]. Несмотря на это, результаты моделирования демонстрируют хорошее согласие с результатами как экспериментального [1]–[5], так и численного [6]–[8] исследования турбулентного течения Куэтта.

В настоящей работе показано, что КГД-алгоритм позволяет единообразно моделировать как турбулентный режим течения Куэтта при достаточно большом числе Рейнольдса, так и ламинарный режим при малом числе Рейнольдса. При этом не требуется вносить никаких изменений в параметры алгоритма. В работе [13] на примере вихря Тейлора–Грина было показано, что КГД-алгоритм позволяет проводить моделирование турбулентных и ламинарных течений сжимаемого газа вдали от стенок. Можно сделать вывод, что КГД-алгоритм является универсальным средством моделирования как ламинарных, так и турбулентных течений, как вдали от стенок, так и пристеночных.

Проведенные ниже расчеты выполнены на многопроцессорном вычислительном комплексе К-100 [14].

Постановка задачи

Рассмотрим пространственную область в декартовых координатах $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$, $-L_z/2 \leq z \leq L_z/2$ (рис. 1). Область заполнена газом (азотом). Состояние газа описывается следующими параметрами: $\rho(x, y, z, t)$ – плотностью, $u_x(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t)$, $u_z(x, y, z, t)$ – макроскопической скоростью газа, $p(x, y, z, t)$ – давлением. Считаем газ идеальным: $p = \rho RT$. Значения газодинамических параметров указаны в табл. 1, 2 и 3.

Граница $y=0$ является неподвижной твердой стенкой. Противоположная граница $y=L_y$ – это твердая стенка, которая движется с постоянной скоростью U_0 в направлении положительных значений x .

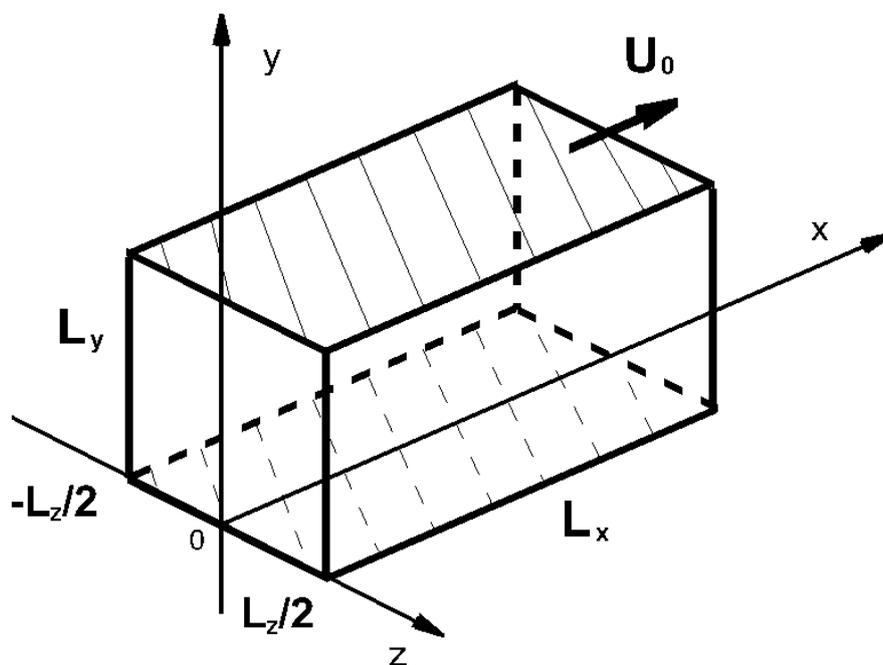


Рис. 1. Схема расчетной области

При малых значениях начального числа Рейнольдса $Re = \rho_0(U_0/2)(L_y/2)/\mu_0$ течение в области, вызванное движением твердой стенки $y=L_y$, будет ламинарным. При увеличении Re происходит переход к турбулентному течению.

Начальная температура постоянна во всей области: $T = T_0 = 273$ К, начальные давление и плотность тоже постоянны и определяются из заданного значения начального числа Рейнольдса и уравнения состояния.

Граничные условия являются периодическими вдоль осей x и z . На твердых стенках ставятся условия прилипания ($u_x = u_y = u_z = 0$ при $y=0$; $u_x = U_0$, $u_y = u_z = 0$ при $y=L_y$), а также дополнительное условие для КГД-

системы $\partial p / \partial n = 0$. Также на стенках $\partial T / \partial n = 0$ и $\partial p / \partial n = 0$, поскольку стенки считаем адиабатическими.

В качестве начального условия для продольной скорости используем ламинарный профиль:

$$u_x = U_0 y / L_y. \quad (1)$$

Известно, что инициирование турбулентного течения, то есть выбор начального возмущения, развитие которого скорейшим образом приводит к формированию неустановившегося колебательного процесса, является отдельной задачей. Как правило, в качестве такого возмущения задаются наименее устойчивые собственные функции краевой задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда (волны Толлмина–Шлихтинга) [6], [15], [16]. В данной работе для поперечных компонент скорости введем начальное возмущение следующего вида:

$$u_y = u_z = 0.2 U_0 \sin(8\pi x / L_x). \quad (2)$$

Кроме того, вводятся дополнительные малые возмущения скорости (турбулизаторы) вдоль ребер расчетной области. А именно, компоненты скорости на четырех ребрах, параллельных скорости течения, не равны в точности скорости стенки, а берутся из соседней ячейки разностной сетки. Такое возмущение приводит к переходу в турбулентный режим, если начальное число Рейнольдса достаточно велико.

Таблица 1

Газодинамические параметры

$R = 297$ Дж/(кг·К).	Газовая постоянная азота
$\gamma = 7/5$	Показатель адиабаты азота
$Pr = 14/19$	Число Прандтля азота
$T_0 = 273$ К	Температура начальных условий
$\mu = \mu_0 (T / T_0)^\omega$	Вязкость азота в зависимости от температуры
$\mu_0 = 1.67 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с)	Вязкость азота при $T_0 = 273$ К
$\omega = 0.74$	Показатель межмолекулярного взаимодействия
$U_0 = 1685$ м/с	Скорость движения стенки канала
$c_s = \sqrt{\gamma RT}$	Скорость звука
$c_{s0} = \sqrt{\gamma RT_0} = 337$ м/с	Скорость звука при начальных условиях

$Ma=U_0/c_{s0}=0.5$	Начальное число Маха
---------------------	----------------------

Математическая модель и метод численного решения

Турбулентное течение газа будем описывать макроскопической системой квазигазодинамических (КГД) уравнений [9]–[11], краткий вывод которой приведен в [13]. КГД-система определяет эволюцию во времени плотности, скорости и давления газа, зависящих от эйлеровых координат и от времени. Выпишем КГД-систему в декартовых координатах:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i j_m^i = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u^j + \nabla_i (j_m^i u^j) + \nabla^j p = \nabla_i \Pi^{ij}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i (j_m^i H) + \nabla_i q^i = \nabla_i (\Pi^{ij} u_j). \quad (5)$$

Полная энергия единицы объема E и полная удельная энтальпия H вычисляются по формулам: $E = \rho u^2 / 2 + p / (\gamma - 1)$, $H = (E + p) / \rho$. Вектор плотности потока массы j_m^i определяется следующим образом:

$$j_m^i = \rho (u^i - w^i), \quad w^i = \frac{\tau}{\rho} (\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p). \quad (6)$$

Выражения для тензора вязких напряжений Π^{ij} и теплового потока q^i записываются так:

$$\Pi^{ij} = \Pi_{NS}^{ij} + \tau u_i \rho (u_k \nabla^k u_j + \frac{1}{\rho} \nabla_j p) + \tau \delta^{ij} (u_k \nabla^k p + \gamma p \nabla^k u_k), \quad (7)$$

$$\Pi_{NS}^{ij} = \mu (\nabla^i u^j + \nabla^j u^i - \frac{2}{3} \nabla^k u_k) + \zeta \delta^{ij} \nabla^k u_k, \quad (8)$$

$$q^i = q_{NS}^i - \tau u_i \rho (u_j \nabla^j \varepsilon + p u_j \nabla^j \frac{1}{\rho}), \quad q_{NS}^i = -\kappa \nabla^i T. \quad (9)$$

Здесь $\delta^{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta^{ij} = 0$ при $i \neq j$ – символ Кронекера, $\varepsilon = p / (\rho(\gamma - 1))$ – внутренняя энергия единицы массы газа.

Коэффициент теплопроводности выражается соотношением [11, с. 71]

$$\kappa = \frac{\mu \gamma R}{Pr(\gamma - 1)}, \quad (10)$$

где Pr – число Прандтля [11, с. 310], [17]. Коэффициент динамической вязкости μ в газе, входящий в выражения для тензора вязких напряжений Π^{ij} и теплового потока q^i (7)–(10), будем определять через температурную зависимость [11, с. 25]:

$$\mu = \mu_0 (T / T_0)^\omega, \quad (11)$$

где ω – показатель, описывающий межмолекулярное взаимодействие в газе [17].

Коэффициент второй (объемной) вязкости определим через соотношение [11, с. 71]

$$\zeta = \mu (5/3 - \gamma). \quad (12)$$

Определим значение релаксационного параметра τ , входящего в (6)–(9):

$$\tau = \alpha h / c_s, \quad (13)$$

где $c_s = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T}$ – локальная скорость звука, h – величина шага пространственной сетки. Слагаемые с коэффициентом τ представляют собой подсеточную диссипацию, которая сглаживает пульсации газодинамических величин на масштабах порядка шага сетки. Коэффициент α можно рассматривать как настроечный параметр, определяющий уровень подсеточной диссипации.

Для численного решения начально-краевой задачи (3)–(13) с начальными условиями (1)–(2) методом конечных разностей введем в области равномерную по пространству и по времени сетку $\Omega_{xyz} = \omega_x \times \omega_y \times \omega_z \times \omega_t$, $\omega_x = \{x_i, i = \overline{0, N_x - 1}, x_i = -h/2 + hi\}$, $\omega_y = \{y_j, j = \overline{0, N_y - 1}, y_j = -h/2 + hj\}$, $\omega_z = \{z_k, k = \overline{0, N_z - 1}, z_k = -L_z/2 - h/2 + hk\}$, $\omega_t = \{t, n_t = \overline{0, N_t}, t = h n_t\}$. Число шагов по времени N_t заранее не определено. Граничные точки сетки определяют фиктивные ячейки. Границы области располагаются в полущелых точках.

Алгоритм построения явной по времени разностной схемы такой же, как в работах [13], [19], [20]: пространственные производные аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком, а производные по времени с первым порядком. Значения параметров расчета указаны в табл. 2.

Расчет проводится на многопроцессорном вычислительном комплексе К-100 [14], при этом авторы используют технологию распараллеливания вычислений, основанную на декомпозиции расчетной области плоскостями $x = const$. Такая технология использует стандарт передачи сообщений MPI и с успехом применялась в работах [13], [19], [20]. Отметим, что программный комплекс обладает полной переносимостью между платформами, поддерживающими язык Си и стандарт MPI.

Результаты расчетов: общие замечания

Значения расчетных параметров указаны в табл. 2. Используемый в настоящей работе КГД-алгоритм имеет единственный настроечный параметр α , определяющий уровень подсеточной диссипации. В работе [13] было показано, что значение $\alpha = 0.1$ является пригодным при расчетах турбулентных

течений вдали от стенок (вихрь Тейлора–Грина). Результаты, полученные в настоящей работе, позволяют сделать вывод, что для моделирования пристеночных турбулентных течений можно взять такое же значение $\alpha=0.1$.

Таблица 2

Параметры расчетов

$L_x = 0.16$ м	Длина канала
$L_y = 0.08$ м	Расстояние между твердыми стенками (высота канала)
$L_z = 0.08$ м	Ширина канала
$N_x = 162, N_y = 82, N_z = 82$	Размер разностной сетки
$h = 0.001$ м	Шаг разностной сетки
$h_t = \beta h / c_{s0} = 5.936 \cdot 10^{-7}$ с	Шаг по времени
$\beta = 0.2$	Число Куранта
$\tau = \alpha h / c_s$	Релаксационный параметр
$\alpha = 0.1$	Настроечный параметр

В настоящей работе проведено моделирование течения Куэтта для трех значений начального числа Рейнольдса $Re=300$, 4250 и 300 . Все параметры расчетов одинаковы для трех случаев, за исключением начальных значений плотности и давления, которые и определяют значение числа Рейнольдса. Процедура задания начальных значений параметров газа на основе заданных чисел Маха и Рейнольдса такая же, как в [13]. При $Re=300$ и $Re=4250$ начальное возмущение (2) приводит к возникновению развитого турбулентного течения Куэтта. При $Re=300$ начальное возмущение быстро сглаживается за счет вязкой диссипации, и происходит установление ламинарного течения Куэтта.

В табл. 3 определяются динамические параметры течения. Величины μ^m , ρ^m являются осредненными по времени значениями μ и ρ в точке $x=L_x/2$, $y=0$, $z=0$ (на стенке в середине расчетной области). Величина u_x^m – это осредненная по времени продольная компонента скорости u_x в сечении $x=L_x/2$, $z=0$.

Таблица 3

Динамические параметры

$Re = \rho_0(U_0/2)(L_y/2)/\mu_0$	Начальное число Рейнольдса
$Re^m = (\rho^m(U_0/2)(L_y/2)/\mu^m) _{y=0}$	Осредненное число Рейнольдса
$Re_\tau = (\rho^m u_\tau(L_y/2)/\mu^m) _{y=0}$	Динамическое число Рейнольдса
u_x^m, μ^m, ρ^m	Осредненные по времени скорость, динамическая вязкость и плотность
$u_\tau = ((\tau_w/\rho^m)^{1/2}) _{y=0}$	Динамическая скорость
$l_\tau = (\mu^m/(\rho^m u_\tau)) _{y=0}$	Динамическая длина
$\tau_w = (\mu^m(du_x^m/dy)) _{y=0}$	Касательное напряжение на стенке
$u_+ = u_x^m/u_\tau$	Безразмерная скорость
$y_+ = y/l_\tau$	Безразмерная координата
$C_f = 2\tau_w/(\rho^m(U_0/2)^2)$	Коэффициент трения

Осреднение величин по времени проводится согласно формуле (записанной на примере компоненты скорости u_x)

$$u_x^m = \frac{1}{n_{t2} - n_{t1} + 1} \left(\sum_{n_t = n_{t1}}^{n_{t2}} u_x \right). \quad (14)$$

Номера шагов по времени n_{t1} и n_{t2} являются границами интервала осреднения. Формула (14) может быть записана в рекуррентном виде, удобном для программной реализации:

$$u_x^m|_{n_{t2}+1} = \frac{n_{t2} - n_{t1} + 1}{n_{t2} - n_{t1} + 2} u_x^m|_{n_{t2}} + \frac{1}{n_{t2} - n_{t1} + 2} u_x|_{n_{t2}+1} \quad (15)$$

В (15) значение средней скорости на шаге $n_{t2} + 1$ вычисляется через значение средней скорости на предыдущем шаге n_{t2} .

Для случаев $Re=3000$ и $Re=4250$ осреднение проводится от $n_{t1}=3 \cdot 10^5$ до $n_{t2}=8 \cdot 10^5$. Отметим, что полное число шагов по времени $n_{t2}=8 \cdot 10^5$ соответствует $t=0,475$ с и требует около 160 часов машинного времени при использовании 32-х процессоров кластера K-100 (Intel Xeon X5670) [14]. Время

осреднения $T^m = h_t(n_{t_2} - n_{t_1}) = 0.297c$ можно выразить через полувысоту канала $L_y/2$ и осевую скорость течения $U_0/2$: $T^m = 625(L_y/2)/(U_0/2)$. Такая величина времени осреднения является, возможно, недостаточной для исследований крупномасштабных структур, возникающих при ламинарно-турбулентном переходе [7], [15]. Длина расчетной области в настоящей работе (табл. 2) также мала для этих целей. Однако структура течения и величины динамических параметров, полученные авторами данной работы, демонстрируют очень хорошее согласие с данными экспериментов и показывают перспективность применения КГД-алгоритма при моделировании пристеночных турбулентных течений.

Диссипация энергии начальных условий (2) приводит к повышению температуры газа относительно начальной T_0 . При этом в турбулентном течении температура максимальна вблизи стенок, а в ламинарном температура практически постоянна в расчетной области. Поскольку вязкость газа зависит от температуры согласно (11), в установившемся течении вязкость также превышает начальное значение μ_0 . Для учета этого эффекта авторы настоящей работы вводят осредненное число Рейнольдса Re^m , вычисляемое на основе осредненных значений μ^m и ρ^m . Значение Re^m оказывается несколько меньшим начального Re . Значения некоторых динамических параметров, полученных в расчетах, указаны в табл. 4.

Таблица 4

Значения динамических параметров в настоящей работе

Режим	Re	Re^m	Re_τ	C_f
Ламинарный	300	286	17	0.007
Турбулентный	3000	2804	153	0.0059
Турбулентный	4250	3994	198	0.0049

Кинетическая энергия газа в расчетной области определяется формулой

$$E_{kin}(t) = \sum_{i=1}^{N_x-2} \sum_{j=1}^{N_y-2} \sum_{k=1}^{N_z-2} \frac{1}{2} \rho_{ijk}(t) (u_{x_{ijk}}^2(t) + u_{y_{ijk}}^2(t) + u_{z_{ijk}}^2(t)) \cdot h^3, \quad (16)$$

где суммирование проводится по точкам пространственной сетки.

Результаты расчетов для $Re = 3000$

На рис. 2 показана зависимость кинетической энергии газа в расчетной области (16) от текущего числа шагов по времени n_t (при этом время $t = h_t n_t$). После $n_t = 2 \cdot 10^5$ устанавливается турбулентный режим, и профиль кинетической энергии становится квазистационарным.

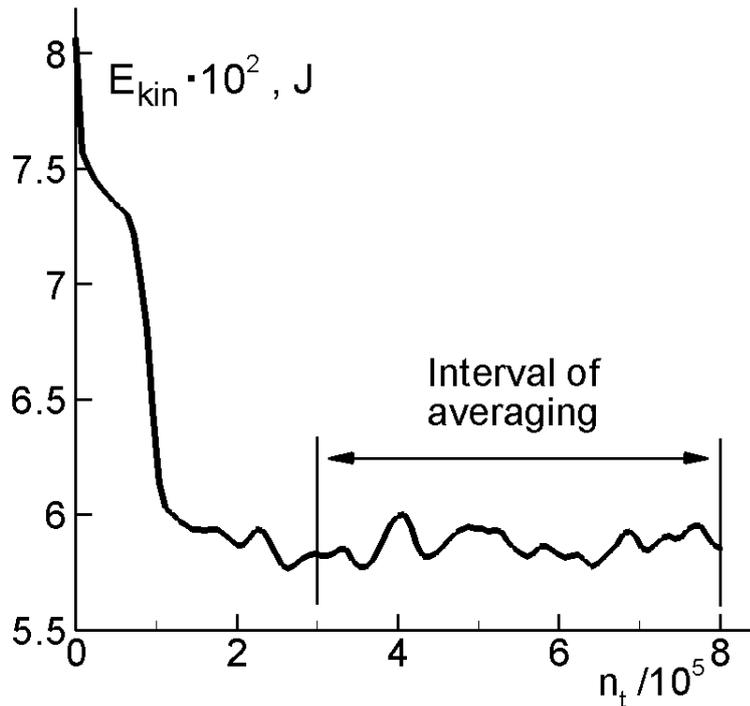


Рис. 2. Зависимость кинетической энергии газа от текущего числа шагов по времени для $Re = 3000$.

На рис. 3 представлен вычисленный профиль осредненной по времени продольной компоненты скорости u_x^m в зависимости от координаты y (кривая 1). Скорость u_x^m нормирована на скорость стенки U_0 , координата y нормирована на высоту канала L_y .

Символами 3, 4 на рис. 3 обозначены экспериментальные результаты для профиля средней продольной скорости в течении Куэтта при $Re = 28500$ (символы 3) [2, 6] и $Re = 8200$ (символы 4) [1, 6]. Результаты для различных чисел Рейнольдса мало отличаются друг от друга. Видно, что моделирование на основе КГД-алгоритма хорошо передает характерный профиль средней скорости в течении Куэтта.

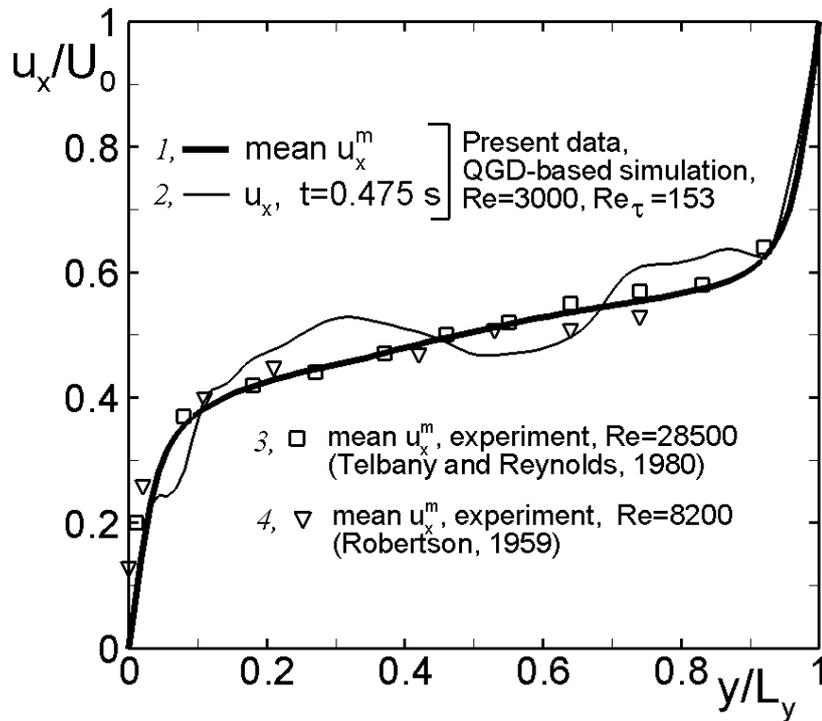


Рис. 3. Распределение продольной компоненты скорости турбулентного течения Куэтта

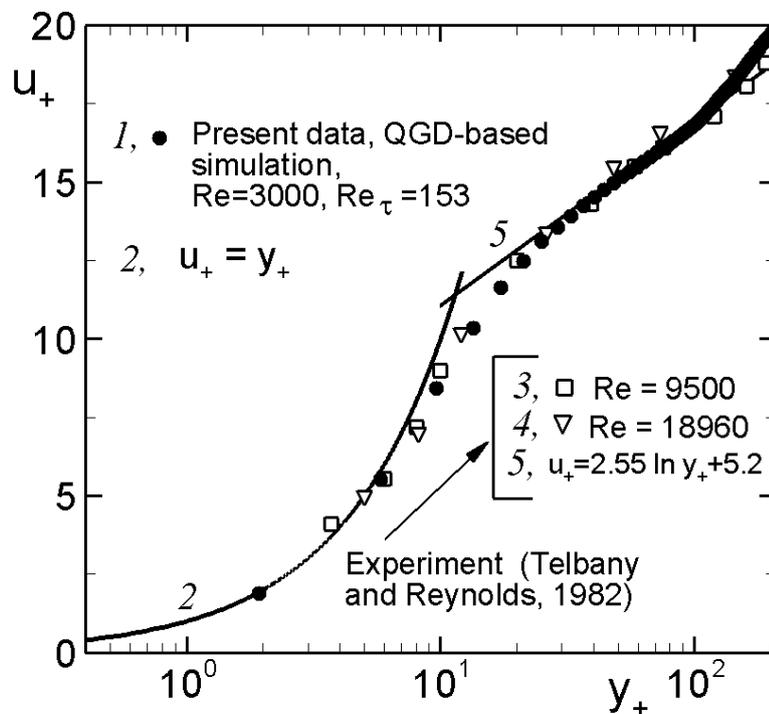


Рис. 4. Распределение осредненной продольной компоненты скорости турбулентного течения Куэтта в безразмерных переменных

Кроме профиля средней скорости u_x^m , на рис. 3 приведен график мгновенной скорости u_x (кривая 2) в момент времени $t=0.475$ с. В то время как профиль средней скорости имеет характерный вид для турбулентного течения в канале, мгновенная скорость испытывает случайные колебания.

На рис. 4 показан вычисленный профиль средней скорости u_x^m в безразмерных переменных (символы 1), а также данные, полученные при экспериментальном исследовании течения Куэтта [5]. Символами 3 обозначены данные для $Re=9500$, символами 4 – для $Re=18960$. Как видно, данные расчета по КГД-алгоритму и экспериментальные значения для разных чисел Рейнольдса почти не отличаются. Здесь и далее расположение символов 1 соответствует расчетной сетке КГД-алгоритма.

Согласно двухслойной модели пристеночной турбулентности, профиль средней скорости в вязком подслое $y_+ < 5$ является линейным: $u_+ = y_+$ (кривая 2), а при $y_+ > 11$ – логарифмическим: $u_+ = A \ln y_+ + B$ (прямая 5). В работе [5] получены следующие значения постоянных: $A=2.55$, $B=5.2$. На рис. 4 видно, что в интервале $30 < y_+ < 100$ результаты моделирования на основе КГД-модели практически совпадают с прямой $u_+ = 2.55 \ln y_+ + 5.2$. Таким образом, результаты расчета по КГД-алгоритму очень хорошо описывают особенности пристеночной турбулентности. Прямая $u_+ = 2.55 \ln y_+ + 5.2$ также хорошо соответствует результатам численного моделирования течения Куэтта, проведенного в [6].

Отметим, что в работах, посвященных исследованию турбулентного течения Куэтта, получены различные значения постоянных A и B . Так, результаты численного моделирования из [7] показывают заниженное значение $A=2.439$ по сравнению $A=2.55$ из [5], при этом $B=5.2$, как и в [5]. Значения $A=2.439$ и $B=5.0$ из [8] несколько ниже по сравнению со значениями из [5].

На рис. 4 видно, что результаты расчета по КГД-алгоритму соответствуют экспериментальным данным из [5] не только на линейном ($y_+ < 7$) и на логарифмическом ($y_+ > 12$) участках, но и в переходной зоне $7 < y_+ < 11$.

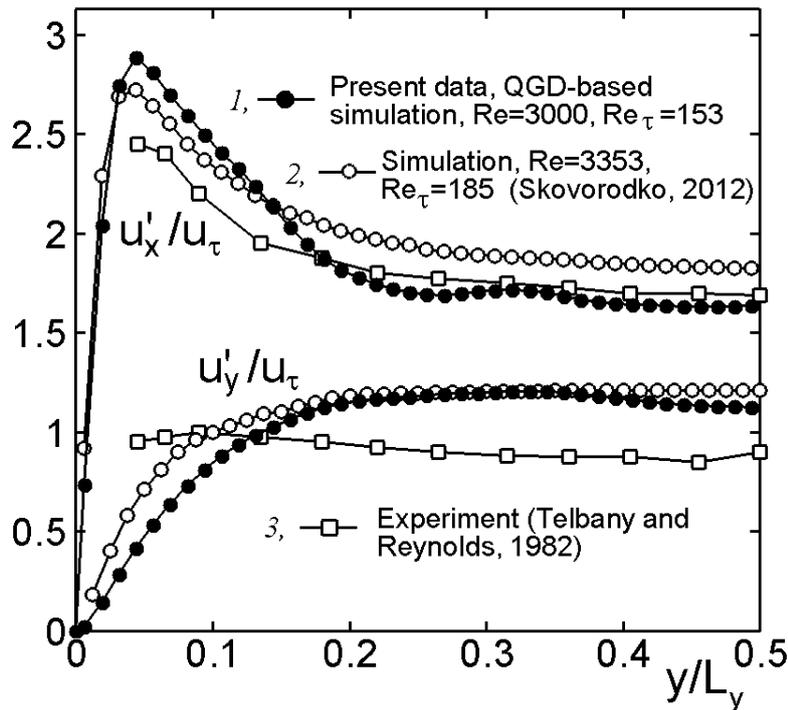


Рис. 5. Распределение среднеквадратичных пульсаций u'_x и u'_y в турбулентном течении Куэтта

На рис. 5 приведены профили среднеквадратичных пульсаций компонент скорости u'_x и u'_y в зависимости от координаты y , нормированной на L_y . Символами 1 обозначены данные настоящей работы. Пульсации u'_x вычисляются по формуле

$$u'_x = \left[\frac{1}{n_{t2} - n_{t1} + 1} \left(\sum_{n_t = n_{t1}}^{n_{t2}} u_x^2 \right) - (u_x^m)^2 \right]^{1/2} \quad (17)$$

и нормируются на динамическую скорость u_τ . Значения пульсаций u'_y определяются аналогично u'_x . Для сравнения на рис. 5 приведены значения среднеквадратичных пульсаций, полученные при моделировании течения Куэтта при близких значениях Re и Re_τ в работе [8] (символы 2), а также экспериментальные значения пульсаций из [5] (символы 3).

Экспериментальные значения соответствуют различным числам Рейнольдса в диапазоне 9500–18960. Значения u'_x находятся в разумном согласии между собой во всех трех случаях. Однако экспериментальные значения u'_y лежат несколько ниже расчетных.

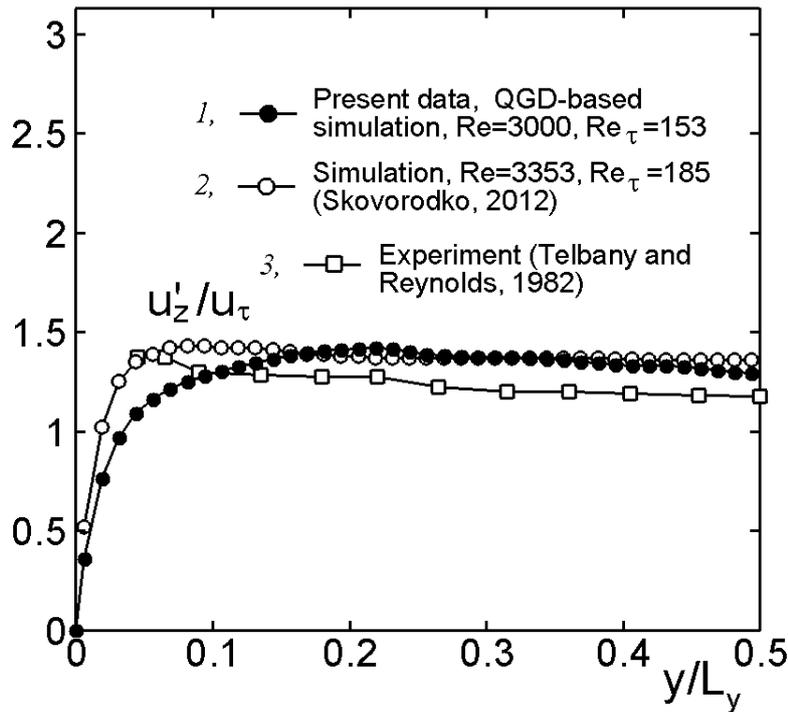


Рис. 6. Распределение среднеквадратичных пульсаций u'_z в турбулентном течении Куэтта

Рис. 6 изображает значения среднеквадратичных пульсаций u'_z . Пульсации u'_z вычисляются аналогично (17). Обозначения на рис. 6 такие же, как и на рис. 5. Данные u'_z расчетов и эксперимента находятся в хорошем согласии.

Рис. 7 показывает значения пульсаций u'_x , вычисленных в настоящей работе (символы 1) и полученных экспериментально (символы 2, 3, 4) в зависимости от безразмерной координаты y_+ . Символы 2 объединяют данные для чисел Рейнольдса в диапазоне 9500–18960 [5]. Символами 3 обозначены данные для $Re=13800$ из [4], символами 4 – данные для $Re=15200$ из [3].

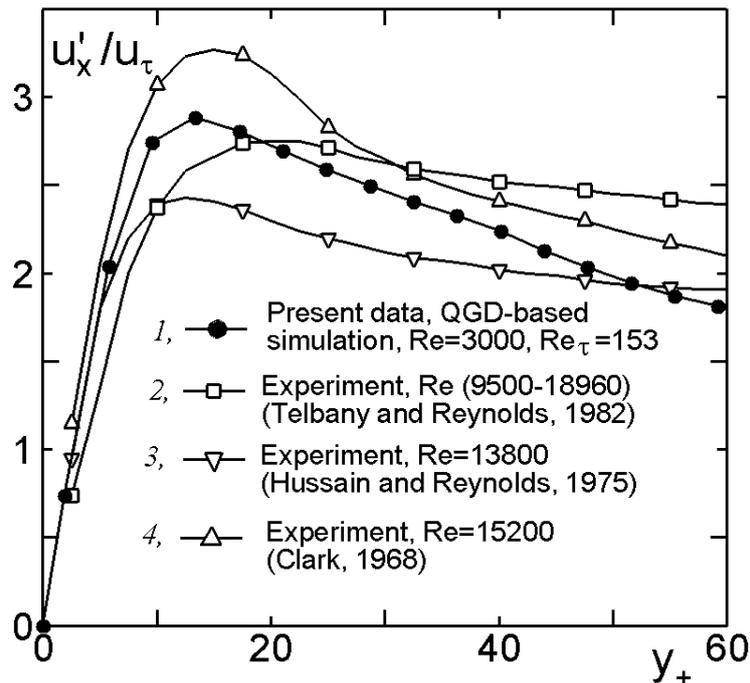


Рис. 7. Распределение среднеквадратичных пульсаций u'_x в турбулентном течении Куэтта в зависимости от безразмерной координаты

Видно, что экспериментальные данные заметно различаются, при этом не наблюдается зависимости от числа Рейнольдса. С учетом разброса данных экспериментов, результаты моделирования на основе КГД-алгоритма разумно соответствуют экспериментальным результатам.

В настоящей работе используется весьма грубая равномерная пространственная сетка. Для $Re=3000$ первые пять от стенки расчетных точек имеют координаты $y_+ = 0, 1.91, 5.73, 9.54, 13.36$. В [12, с. 107] рекомендованы следующие параметры расчетной сетки для прямого моделирования пристеночной турбулентности: минимальное значение шага $\Delta y_+ = 1$, число точек в области $0 < y_+ < 10$ не меньше 3. Видно, что в настоящей работе удовлетворяется только второе условие. Несмотря на большую величину шага $\Delta y_+ = 1.91$, результаты моделирования на основе КГД-алгоритма хорошо соответствуют экспериментальным данным для течения Куэтта.

Отметим, что в большинстве работ по прямому численному моделированию турбулентных течений в каналах используется намного более подробная пространственная сетка. Например, в работе [18] вязкий подслои ($y_+ < 5$) включает 11 точек сетки, а в расчетах, проведенных в [15], в вязком подслое лежат 7 точек. Таким образом, для достижения результатов, сравнимых с данными прямого численного моделирования, в случае использования КГД-алгоритма можно выбирать пространственную сетку в 3–5 раз грубее.

Couette flow, section at $x=0.08$ m

Top wall, $u_x=U_0=168.5$ m/s

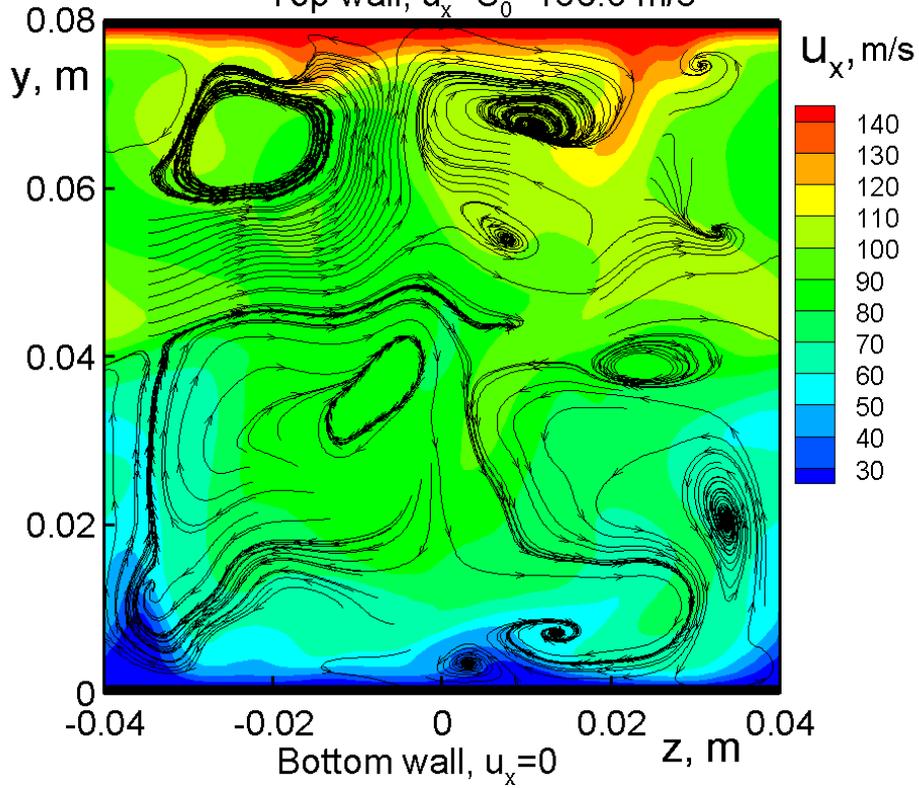


Рис. 8

Couette flow, section at $x=0.08$ m

Top wall, $u_x=U_0=168.5$ m/s

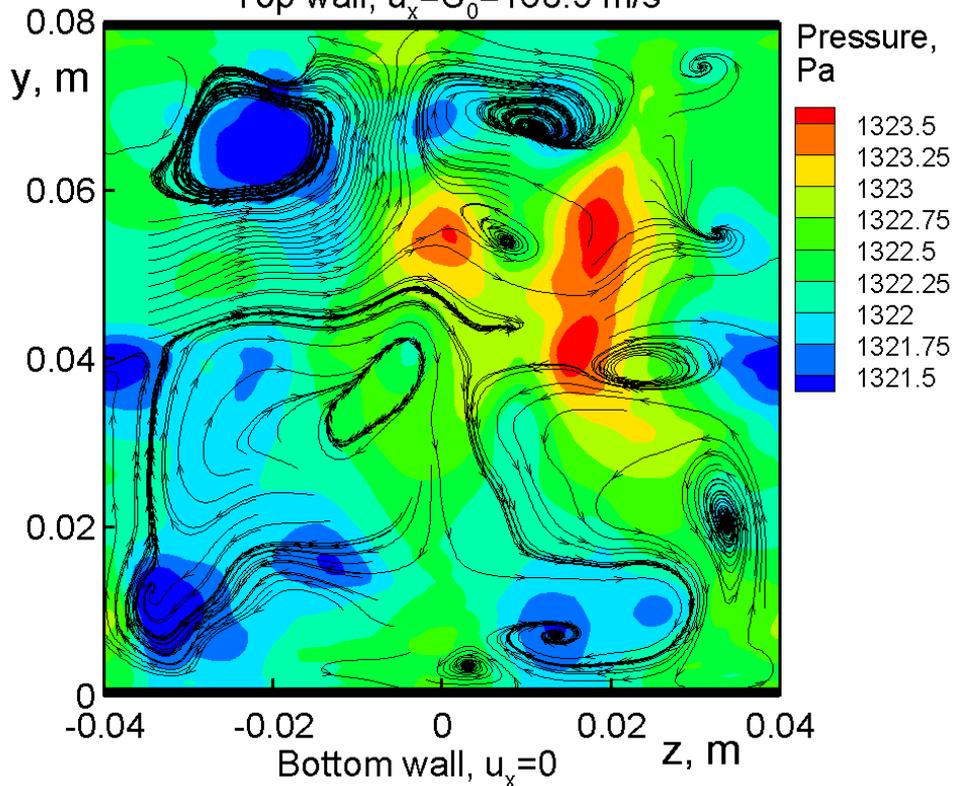


Рис. 9

На рис. 8 изображены контуры продольной компоненты мгновенной скорости u_x в сечении $x=0.08$, а также линии тока поперечных компонент скорости u_y , u_z в этом же сечении. Хорошо заметна вихревая структура турбулентного потока. На рис. 9, наряду с линиями тока, показаны контуры давления в том же сечении. Можно увидеть пространственную корреляцию между областями пониженного давления и расположением вихрей.

На рис. 10 изображены поверхности уровня температуры $T=299.7\text{K}$ в расчетной области целиком. Заметно повышение температуры от начального значения $T_0=273\text{K}$, а также волнообразный характер распределения температуры. На поверхности уровня температуры нанесены контуры мгновенной продольной скорости u_x . Кроме того, на рис. 10 изображены пространственные линии тока. Поскольку турбулентное течение имеет вихревой характер в поперечном сечении (рис. 8 и 9), пространственные линии тока не являются прямыми.

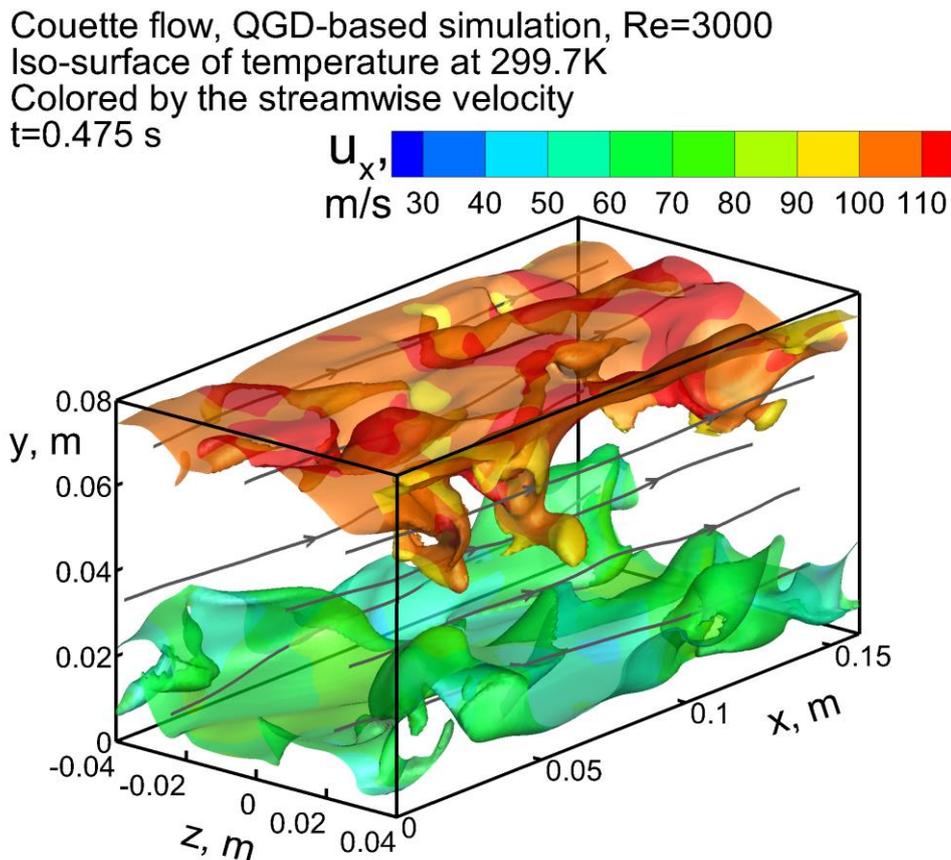


Рис. 10

Результаты расчетов для $Re = 4250$

Моделирование на основе КГД-алгоритма для $Re=4250$ проводится так же, как и для $Re=3000$, меняются только начальные значения плотности и давления. Зависимость кинетической энергии от текущего числа шагов по времени показана на рис. 11. Вид графика, как и для $Re=3000$ (рис. 2), соответствует установлению турбулентного режима течения.

На рис. 12 изображен профиль продольной компоненты скорости. Обозначения и экспериментальные данные на рис. 12 такие же, как на рис. 3. Вид профиля усредненной скорости для $Re=4250$ мало отличается от профиля для $Re=3000$ (рис. 3) и так же хорошо соответствует экспериментальным значениям.

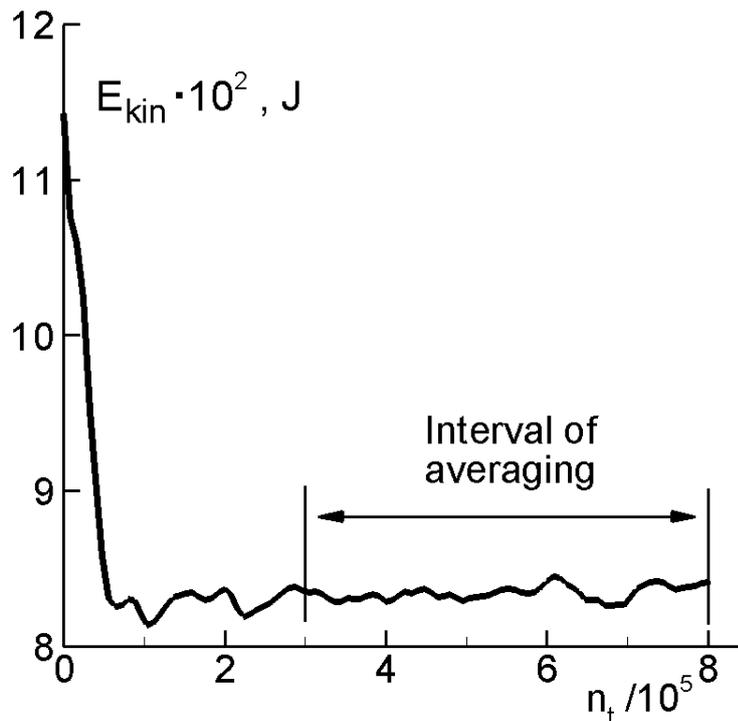


Рис. 11. Зависимость кинетической энергии газа от текущего числа шагов по времени для $Re=4250$

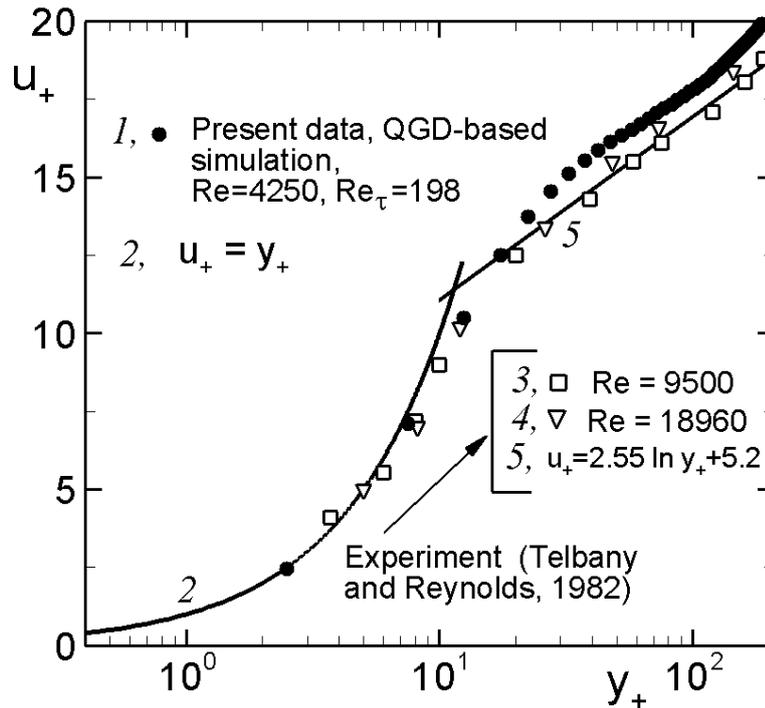


Рис. 13. Распределение осредненной продольной компоненты скорости турбулентного течения Куэтта в безразмерных переменных

Результаты моделирования с использованием даже такой грубой сетки демонстрируют качественное согласие с экспериментальными данными. Для моделирования течений при больших числах Рейнольдса шаг пространственной сетки необходимо уменьшать.

Результаты расчетов для $Re = 300$

При $Re=300$ течение Куэтта практически всегда является ламинарным [5, рис. 5]. Применяемый в настоящей работе КГД-алгоритм позволяет единообразно проводить моделирование как ламинарных, так и турбулентных режимов течения, как было показано в [13]. При этом не требуется менять какие-либо параметры алгоритма, достаточно изменить только начальное число Рейнольдса. В данной работе подтверждено это преимущество КГД-алгоритма в применении к пристеночной турбулентности. А именно, моделирование при $Re=300$ приводит к диссипации начального возмущения и к установлению ламинарного режима течения Куэтта. Соответствующая зависимость кинетической энергии от текущего числа шагов по времени показана на рис. 14.

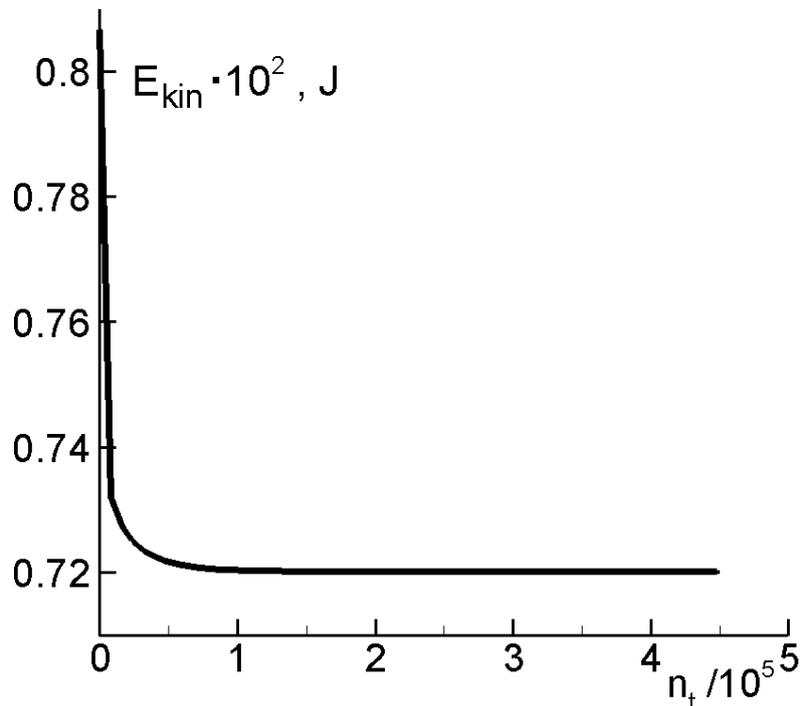


Рис. 14. Зависимость кинетической энергии газа от текущего числа шагов по времени для $Re=300$

Из рис. 14 видно, что при $Re=300$ кинетическая энергия газа в расчетной области становится постоянной при $n_t > 1.5 \cdot 10^5$. Профиль продольной скорости u_x при этом становится линейным, как и в начальный момент времени (1). Начальное возмущение (2) практически полностью исчезает, так что поперечные компоненты скорости не превышают 10^{-4} м/с. Диссипация энергии начальных условий приводит к повышению температуры газа в области до 292 К.

Отметим, что одно и то же значение настроечного параметра КГД-алгоритма $\alpha=0.1$ применимо к ламинарным и турбулентным режимам течений как вдали от твердых стенок (вихрь Тейлора–Грина), так и в пристеночной области (течение Куэтта).

Отметим также, что значения $\alpha \leq 0.3$ обеспечивают адекватное численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в задаче о течении за обратным уступом в плоском канале для двумерного случая [21], [22].

Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса

Коэффициент трения C_f (определяется в табл. 3) в ламинарном течении Куэтта выражается формулой

$$C_f = 2/Re^m. \quad (18)$$

Выражение (18) легко получить из линейного распределения продольной компоненты скорости в ламинарном течении (1) и определения осредненного числа Рейнольдса Re^m (табл. 3).

В случае турбулентного течения Куэтта коэффициент трения может быть аппроксимирован следующим образом [1], [5]:

$$\sqrt{C_f/2} = G/\log_{10} Re^m. \quad (19)$$

Отметим, что в настоящей работе зависимости (18) и (19) записаны с помощью осредненного числа Рейнольдса Re^m вместо начального Re . Выражение Re^m учитывает увеличение динамической вязкости вследствие повышения температуры в процессе диссипации энергии начального возмущения. Значения чисел Рейнольдса и коэффициента трения для трех вариантов моделирования на основе КГД-алгоритма приведены в табл. 4.

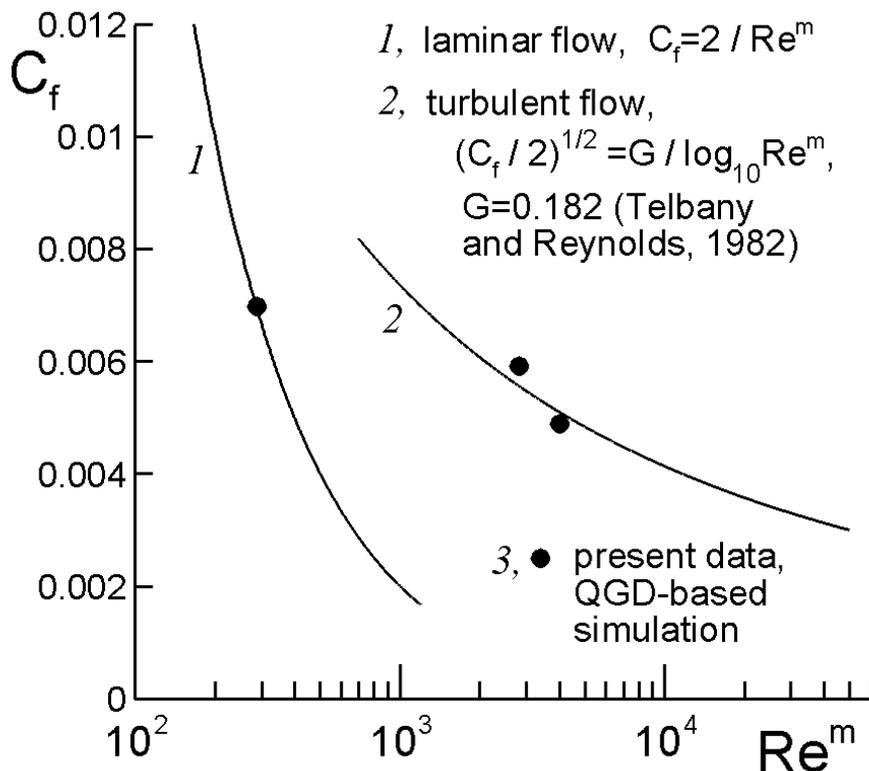


Рис. 15. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса

Значения постоянной G в (19) несколько различаются в разных работах. В [1] получено $G=0.19$, в [5] $G=0.182$. На рис. 15 показаны зависимости (18) (кривая 1) и (19) (кривая 2) для $G=0.182$, а также данные расчетов настоящей работы из табл. 4 (символы 3). Видно, что значение $G=0.182$ из работы [5] хорошо соответствует результатам настоящей работы. Отметим, что экспериментальные данные исследований течения Куэтта в различных постановках имеют заметный разброс относительно зависимости (19) (рис. 5 из [5]).

Выводы

На основе КГД-алгоритма проведено моделирование турбулентного ($Re=300$ и 4250) и ламинарного ($Re=300$) течения Куэтта в сжимаемом газе. Результаты численного моделирования демонстрируют очень хорошее согласие с экспериментальными и расчетными данными, полученными в различных работах, посвященных исследованию течения Куэтта, несмотря на относительно грубую пространственную сетку в настоящей работе. Показано, что КГД-алгоритм позволяет единообразно проводить моделирование как турбулентных, так и ламинарных пристеночных течений. При этом не требуется никакой модификации алгоритма, достаточно изменить число Рейнольдса.

Ранее было показано [13], что КГД-алгоритм позволяет проводить моделирование турбулентных течений сжимаемого газа вдали от стенок (вихрь Тейлора–Грина). Таким образом, КГД-алгоритм является универсальным средством моделирования как ламинарных, так и турбулентных течений, как вдали от стенок, так и пристеночных. При этом допустимо использование весьма грубых пространственных сеток.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты РФФИ 13-01-00703-а и РФФИ 15-51-50023ЯФ-а.

Литература

[1] J.M. Robertson. On turbulent plane Couette flow. Proc. 6th Midwestern Conf. Fluid Mech., Univ. Texas, Austin (1959), pp. 169–182.

[2] M.M.M. El Telbany, A.J. Reynolds. Velocity distributions in plane turbulent channel flows. J. Fluid Mech. (1980), vol. 100, part 1, pp. 1–29.

[3] J.A. Clark. A study of incompressible turbulent boundary layers in channel flow. J. of Basic Engineering (1968), vol. 90, p. 455.

[4] A. K. M. F. Hussain, W.C. Reynolds. Measurements in fully developed turbulent channel flow. J. of Fluids Engineering (1975), vol. 97, pp. 568–578.

- [5] M.M.M. El Telbany, A.J. Reynolds. The structure of turbulent plane Couette flow. *J. of Fluids Engineering* (1982), vol. 104, pp. 367–372.
- [6] Б.Л. Рождественский, И.Н. Симакин, М.И. Стойнов. Моделирование турбулентного течения Куэтта в плоском канале. // *Журнал прикладной механики и технической физики* (1989), т. 174, № 2, с. 60–68.
- [7] T. Tsukahara, H. Kawamura, K. Shingai. DNS of turbulent Couette flow with emphasis on the large-scale structure in the core region. *J. of Turbulence*, 2006, vol. 7, no. 19.
- [8] P. A. Skovorodko. Slip effects in compressible turbulent channel flow. 28th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, 2012. *AIP Conf. Proc.* 1501 (2012), pp. 457–464.
- [9] Б.Н. Четверушкин. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. Москва: Макс Пресс. 2004.
- [10] Ю.В. Шеретов. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2009.
- [11] Т.Г. Елизарова. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Москва: Научный мир. 2007. – 352 с.
- [12] P. Sagaut. Theoretical background: large-eddy simulation. In: C. Wagner, T. Huttli, P. Sagaut, editors. *Large-eddy simulation for acoustics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. p. 89–127.
- [13] I. A. Shirokov, T. G. Elizarova. Simulation of laminar–turbulent transition in compressible Taylor–Green flow basing on quasi-gas dynamic equations. // *J. of Turbulence* (2014), vol. 15, Issue 10, pp. 707–730.
- [14] Вычислительный комплекс К-100 (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН): <http://www.kiam.ru>
- [15] В.Г. Приймак. Моделирование когерентных структур и волновых движений в турбулентных сдвиговых течениях. Требования к численному методу. // *Математическое моделирование* (2008), т. 20, № 12, с. 27–43.
- [16] M. Lesieur. *Turbulence In Fluids*. Springer, 2008.

- [17] G.A. Bird. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Clarendon press, Oxford, 1998.
- [18] J. Kim, P. Moin, R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 177, pp. 133–166
- [19] И.А. Широков, Т.Г. Елизарова. Численное моделирование колебательного течения в окрестности гиперзвукового летательного аппарата. // Математическое моделирование (2012), т. 24, № 1, с. 21–32.
- [20] И.А. Широков, Т.Г. Елизарова. Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в слое вязкого сжимаемого газа. // Прикладная математика и информатика. № 42, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ (2013), 30–53.
- [21] Т.Г. Елизарова, П.Н. Никольский. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в течении за обратным уступом. // Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия. 2007. № 4, с. 14–17.
- [22] T. G. Elizarova, P. N. Nikolskii, J. C. Lengrand. A new variant of subgrid dissipation for LES method and simulation of laminar-turbulent transition in subsonic gas flows. (Eds. Peng, S.-H. and Haase, W., Book) "Advances in Hybrid RANS-LES Modelling". *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, Vol. 97, Springer Berlin/ Heidelberg, Volume 97/2008, pp. 289–298.