ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 12 за 2015 г.

Вашковьяк М.А.

Интегрируемые случаи задачи об эволюции спутниковых орбит под действием сжатия планеты, притяжения ее массивных спутников и Солнца

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Вашковьяк М.А. Интегрируемые случаи задачи об эволюции спутниковых орбит под действием сжатия планеты, притяжения ее массивных спутников и Солнца // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 12. 24 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-12**

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

М.А. Вашковьяк

Интегрируемые случаи задачи об эволюции спутниковых орбит под действием сжатия планеты, притяжения её массивных спутников и Солнца

Москва — 2015

Вашковьяк М.А.

Интегрируемые случаи задачи об эволюции спутниковых орбит под действием сжатия планеты, притяжения её массивных спутников и Солнца.

Рассматривается задача о совместном влиянии сжатия центральной планеты, притяжения ее наиболее массивных (или главных) спутников и Солнца на эволюцию орбиты спутника пренебрежимо малой массы. Для произвольного угла между экваториальной плоскостью планеты и плоскостью её гелиоцентрической орбиты получены эволюционные уравнения в плането-экваториальных элементах спутниковой орбиты. Описаны интегрируемые случаи эволюционной задачи, намечены пути их возможного дальнейшего исследования и применения к реальным спутниковым системам планет.

Ключевые слова: осредненная возмущающая функция, эволюция орбит.

Mikhail Alexandrovich Vashkov'yak

Integrable cases of the problem orbital evolution of satellite under the influence of the planet's oblateness the attraction of its massive satellites and the Sun.

The problem combined influence of the oblateness of central planet, the attraction of its most massive (or main) satellites and the Sun on the orbital evolution of the satellite with negligible mass is considered. The evolutionary equations in planet-equatorial elements of the satellite orbit are given for arbitrary angle between the planet's equatorial plane and the plane of its heliocentric orbit. The integrable cases of the evolutionary problem are described; the paths of its possible investigation and application to real satellite systems are outlined.

Key words: averaged perturbation function, orbital evolution.

1. **Введение и постановка задачи**

Настоящая работа является естественным продолжением исследований по эволюции орбит под действием гравитационных возмущений, выполненных в работах М.Л. Лидова и У. Козаи (Лидов, 1961; Козаи, 1962), в которых выявлены главные особенности эволюции орбит спутников и астероидов под влиянием вековых возмущений от внешней притягивающей материальной точки. Это, в частности, - эффект сильного возрастания эксцентриситета орбиты при постоянной большой полуоси с одновременным уменьшением расстояния перицентра, вплоть до падения спутника на поверхность планеты конечного радиуса. Данный эффект, получивший название механизма (и резонанса) Лидова-Козаи, возникает, когда спутниковая (или астероидная) орбита наклонена к плоскости движения возмущающей точки на угол, достаточно близкий к 90º. Поскольку орбиты подавляющего большинства известных спутников достаточно далеки от ортогонального расположения относительно плоскости эклиптики, эффект падения для них проявиться не может. Исключением могли бы явиться главные и внутренние спутники Урана. Почти экваториальные (и почти круговые) орбиты этих спутников наклонены к плоскости эклиптики на углы, отличающиеся от прямого лишь на величину около 10º. Как было показано в работе (Лидов, 1963), объяснением реального существования самого далекого из главных спутников - Оберона (и конечно же, всех более близких спутников) является влияние сжатия Урана, с избытком компенсирующее вековые солнечные возмущения. Эволюционная модель, используемая в вышеуказанной работе, не включала в число возмущающих факторов притяжение главных спутников. В то же время, влияние этого фактора на процесс орбитальной эволюции может оказаться достаточно заметным – оно и является предметом предлагаемого исследования.

В настоящей работе получены эволюционные уравнения задачи о вековых возмущениях орбиты спутника пренебрежимо малой массы при совместном влиянии трёх возмущающих факторов (сжатия центральной планеты, притяжения её главных спутников и притяжения Солнца), описаны интегрируемые случаи и намечены возможные пути их исследования. В этой новой эволюционной ограниченной задаче наибольший интерес представляет изучение той области околопланетного пространства, в которой влияние на спутник указанных возмущений попарно или в совокупности сравнимо по величине.

Основой для получения эволюционной системы является вековая часть W полной возмущающей функции, которая находится с помощью её независимого осреднения по всем «быстрым» переменным – средним планетоцентрическим долготам Солнца, главных спутников и исследуемого (пробного - реального или гипотетического) спутника, т.е. исключением короткопериодической части. Таким образом, функция W зависит только от пяти планетоцентрических кеплеровских элементов орбиты: a – большой полуоси, e – эксцентриситета, i –

наклонения, ω - аргумента перицентра и Ω - долготы восходящего узла. Угловые элементы отнесены к плоскости экватора планеты и линии ее пересечения с плоскостью гелиоцентрической орбиты (или планетоцентрической орбиты Солнца). Как следует из уравнений Лагранжа в элементах, в силу независимости W от средней долготы пробного спутника большая полуось его орбиты, остается постоянной, а сама эта функция дает нам первый интеграл эволюционной системы W = const.

Функция W состоит из трёх слагаемых, отвечающих трём вышеупомянутым возмущающим факторам, а первый интеграл принимает вид

$$W = W_0 + W_1 + W_2 = \text{const}. \tag{1}$$

В нижеследующих формулах, кроме элементов орбиты, введены следующие обозначения:

$\mu_0, \mu_{\text{j}}, \mu'$ - произведения гравитационной постоянной на массы, соответственно, планеты, её j-го главного спутника и Солнца;

a_0, a_{j}, a' – соответственно, средний экваториальный радиус планеты, большая полуось орбиты её j-го главного спутника и планетоцентрической орбиты Солнца;

c_{20} – коэффициент при второй зональной гармонике гравитационного поля планеты;

i_{orb}, ω_{orb} - соответственно, наклонение и аргумент перицентра орбиты пробного спутника, отнесенные к плоскости орбиты планеты.

В данной работе эволюционная задача рассматривается с учетом главных членов вековых частей возмущающих функций, выражения для которых приводятся ниже.

Функция W_0 описывает вековое влияние лишь второй зональной гармоники гравитационного поля планеты

$$W_0 = \frac{3\mu_0 a_0^2 c_{20}}{4a^3}\left(1-e^2\right)^{-3/2}\left(\sin^2 i - 2/3\right).$$

Функция W_1 описывает влияние вековых солнечных возмущений в квадратичном приближении относительно a / a' или – в приближении Хилла.

$$W_1 = \frac{3\mu' a^2}{16a'^3}\left[2\left(e^2 - \sin^2 i_{orb}\right) + e^2 \sin^2 i_{orb}\left(5\cos 2\omega_{orb} - 3\right)\right].$$

Элементы i_{orb} и ω_{orb} могут быть известным образом выражены через i, ω, Ω и угол между экваториальной плоскостью планеты и плоскостью её орбиты, обозначаемый через I. При этом для функции W_1 получим следующее выражение

$$W_1 = \frac{3\mu' a^2}{16a'^3}\left\{\begin{aligned}&2e^2-\left(2+3e^2\right)\left[\sin^2 i+\sin^2 I\left(\cos 2i+\sin^2 i\sin^2\Omega\right)-\frac{1}{2}\sin 2I\sin 2i\cos\Omega\right]+\\&+5e^2\cos 2\omega\left[\sin^2 i+\sin^2 I\left(\cos 2i+\left(\sin^2 i-2\right)\sin^2\Omega\right)-\frac{1}{2}\sin 2I\sin 2i\cos\Omega\right]+\\&+5e^2\sin 2\omega\left[-\sin^2 I\cos i\sin 2\Omega+\sin 2I\sin i\sin\Omega\right]\end{aligned}\right\}.$$

Функция W_2 описывает вековые возмущения от главных спутников планеты, которые в нашем рассмотрении предполагаются не взаимодействующими между собой. Эта функция определяется формулой

$$W_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V\left(E\right)\left(1-e\cos E\right)dE, \tag{2}$$

где E – эксцентрическая аномалия пробного спутника, а V в динамической интерпретации представляет собой силовую функцию системы конечного числа J гауссовых колец с массами, равными массам спутников. Мы используем нетрадиционную форму функции W_2, предложенную в работе (Вашковьяк и др., 2013а). Особенностью является её единое представление как для внутреннего, так и для внешнего вариантов задачи, т.е. для $a/a_{\mathrm{j}}<1$ и для $a/a_{\mathrm{j}}>1$. В упрощенной модели мы будем предполагать, что орбиты всех главных спутников лежат в экваториальной плоскости планеты и имеют нулевые эксцентриситеты. При этом V выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса (Вашковьяк, 1976)

$$V = \sum_{j=1}^{J}\frac{\mu_j}{\sqrt{a_j^2+r^2}}F\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4};\ 1;\ \frac{4a_j^2\left(r^2-z^2\right)}{\left(a_j^2+r^2\right)^2}\right), \tag{3}$$

и зависит от E только посредством квадратов планетоцентрических координат пробного спутника

$$r = a(1-e\cos E) \quad \text{и} \quad z = a\sin i[(\cos E - e)\sin\omega+(1-e^2)^{1/2}\cos\omega\sin E]. \tag{4}$$

С использованием формул (2) – (4) можно показать, что функция W_2 зависит от e, i и ω, соответственно, лишь посредством комбинаций e^2, $\sin^2 i$ и $e^2\sin^2 i\cos 2\omega$. Указанные свойства справедливы для любых значений эксцентриситета и наклонения орбиты пробного спутника, а выражение для функции W_2 в общем виде может быть представлено следующей формулой

$$W_2 = \sum_{j=1}^{J} \frac{\mu_{\mathrm{j}}}{\sqrt{a^2 + a_{\mathrm{j}}^2}} \sum_k P_k^{(\mathrm{j})}\left(a, a_{\mathrm{j}}\right) Q_k^{(\mathrm{j})}\left(e^2, \sin^2 i, e^2 \sin^2 i \cos 2\omega\right), \tag{5}$$

где $P_k^{(\mathrm{j})}, Q_k^{(\mathrm{j})}$ - суть некоторые рациональные функции своих аргументов. Однако, явное аналитическое выражение (5) для произвольных значений *e, i* достаточно громоздко. В силу этого, для целей приближенного анализа мы будем использовать упрощенную формулу

$$W_2 = \sum_{\mathrm{j}=1}^{J} \frac{\mu_{\mathrm{j}}}{\sqrt{a^2 + a_{\mathrm{j}}^2}} \begin{bmatrix} P_1^{(\mathrm{j})}\left(a, a_{\mathrm{j}}\right)\left(e^2 - \sin^2 i\right) + P_2^{(\mathrm{j})}\left(a, a_{\mathrm{j}}\right) e^4 + P_3^{(\mathrm{j})}\left(a, a_{\mathrm{j}}\right) \sin^4 i + \\ + P_4^{(\mathrm{j})}\left(a, a_{\mathrm{j}}\right) e^2 \sin^2 i + P_5^{(\mathrm{j})}\left(a, a_{\mathrm{j}}\right) e^2 \sin^2 i \cos 2\omega + O\left(e, \sin i\right)^6 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Разумеется, она справедлива лишь для умеренных значений эксцентриситета и синуса наклонения и не учитывает слагаемых шестой и высших чётных степеней относительно *e* и sin*i*. Постоянные коэффициенты, $P_k^{(\mathrm{j})}\left(a, a_{\mathrm{j}}\right)$ ($1 \le \mathrm{j} \le J$; $1 \le k \le 5$), вообще говоря, могут быть вычислены с помощью известных коэффициентов Лапласа. Мы используем нестандартный метод вычисления (Вашковьяк и др., 2013а, б; 2015), в котором коэффициенты $P_k^{(\mathrm{j})}\left(a, a_{\mathrm{j}}\right)$ находятся с помощью степенных рядов относительно параметров

$$\zeta_{\mathrm{j}} = \left(\frac{2aa_{\mathrm{j}}}{a^2 + a_{\mathrm{j}}^2}\right)^2 \quad \text{или} \quad \eta_{\mathrm{j}} = 1 - \zeta_{\mathrm{j}} = \left(\frac{a^2 - a_{\mathrm{j}}^2}{a^2 + a_{\mathrm{j}}^2}\right)^2,$$

не зависящих от соотношений между большими полуосями a и a_{j}. Кроме положительных степеней, в разложении по параметру η_{j} функции W_2 появляются особенности вида $1/\eta_{\mathrm{j}}$ и $\ln \eta_{\mathrm{j}}$. Они связаны с возможной близостью орбит возмущаемого и возмущающего спутников. Однако, применение такого ряда позволяет существенно уменьшить число его членов, необходимое для достижения заданной точности вычисления W_2.

Нашей целью является аналитическое исследование новой эволюционной задачи или системы дифференциальных уравнений Лагранжа в элементах с осредненной возмущающей функцией *W*.

2. Эволюционная система в кеплеровских элементах

Для последующего рассмотрения мы вводим несколько постоянных параметров

$$\alpha_0 = -\frac{3}{16}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 c_{20}, \quad \alpha_{\mathrm{k}>0} = \frac{a}{\mu_0} S_{\mathrm{k}},$$
$$S_{\mathrm{k}} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\mu_{\mathrm{j}}}{\sqrt{a^2 + a_{\mathrm{j}}^2}} P_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{j})}\left(a, a_{\mathrm{j}}\right), \quad \left(1 \le \mathrm{k} \le 5\right), \tag{7}$$
$$\beta = \frac{3}{16}\frac{\mu'}{\mu_0}\left(\frac{a}{a'}\right)^3, \quad \gamma_{\mathrm{k}} = \alpha_{\mathrm{k}} / \beta, \quad \left(0 \le \mathrm{k} \le 5\right).$$

Кроме того, удобно ввести новую независимую переменную

$$\tau = \beta n\left(t - t_0\right),$$

где $n = \sqrt{\mu_0 / a^3}$ - среднее движение пробного спутника, t_0 и t – начальный и текущий момент времени, соответственно, а также нормировать функцию W, полагая

$$W_{\mathrm{N}} = \frac{W}{\beta n^2 a^2} = \frac{Wa}{\beta \mu_0}.$$

По порядку величины α_0 характеризует собой модуль отношения к силовой функции центральной притягивающей точки (т.е. μ_0/a) осредненной возмущающей функции сжатия планеты. Параметры $\alpha_{\mathrm{k}>0}$ $\left(1 \le \mathrm{k} \le 5\right)$ характеризуют то же отношение, но возмущающей функции *системы гауссовых колец*, моделирующей притяжение главных спутников S_{k}. Параметр β характеризует отношение двукратно осредненной возмущающей функции солнечного притяжения к величине μ_0/a. Наконец, модули величин γ_{k} для $0 \le \mathrm{k} \le 5$ имеют порядок отношений осредненных возмущающих функций сжатия и системы гауссовых колец к возмущающей функции солнечного притяжения.

Эволюционная система задачи получается подстановкой в уравнения Лагранжа

$$\frac{de}{d\tau}=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial W_{\mathrm{N}}}{\partial\omega},\quad \frac{di}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\cos i\frac{\partial W_{\mathrm{N}}}{\partial\omega}-\frac{\partial W_{\mathrm{N}}}{\partial\Omega}\right),$$
$$\frac{d\omega}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\frac{\left(1-e^2\right)\sin i}{e}\frac{\partial W_{\mathrm{N}}}{\partial e}-\cos i\frac{\partial W_{\mathrm{N}}}{\partial i}\right), \tag{8}$$
$$\frac{d\Omega}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial W_{\mathrm{N}}}{\partial i}$$

частных производных от нормированной функции

$$\begin{gathered}W_{\mathrm{N}}=4\gamma_0\left(1-e^2\right)^{-3/2}\left(2/3-\sin^2 i\right)+\\+\gamma_1\left(e^2-\sin^2 i\right)+\gamma_2 e^4+\gamma_3\sin^4 i+e^2\sin^2 i\left(\gamma_4+\gamma_5\cos 2\omega\right)+\\+2e^2-\left(2+3e^2\right)\left[\sin^2 i+\sin^2 I\left(\cos 2i+\sin^2 i\sin^2\Omega\right)-\sin I\cos I\sin 2i\cos\Omega\right]+\\+5e^2\cos 2\omega\left[\sin^2 i+\sin^2 I\left(\cos 2i+\left(\sin^2 i-2\right)\sin^2\Omega\right)-\sin I\cos I\sin 2i\cos\Omega\right]+\\+5e^2\sin 2\omega\left[-\sin^2 I\cos i\sin 2\Omega+2\sin I\cos I\sin i\sin\Omega\right]=\mathrm{const.}\end{gathered} \tag{9}$$

При этом соотношение W_{N} = const является первым интегралом системы (8). Эта система четырёх осреднённых дифференциальных уравнений в элементах имеет следующий явный вид

$$\frac{de}{d\tau}=10e\sqrt{1-e^2}\left\{\begin{aligned}&\left(1+\frac{\gamma_5}{5}\right)\sin^2 i\sin 2\omega-\\&-\sin 2I\left[\sin i\sin\Omega\cos 2\omega+\sin i\cos i\cos\Omega\sin 2\omega\right]+\\&+\sin^2 I\left[\cos i\sin 2\Omega\cos 2\omega+\left(\cos 2i+\left(\sin^2 i-2\right)\sin^2\Omega\right)\sin 2\omega\right]\end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

$$\frac{di}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\begin{aligned}&-\left(5+\gamma_5\right)e^2\sin 2i\sin 2\omega+\\&+\sin 2I\left[\left(2+3e^2+5e^2\cos 2\omega\right)\cos i\sin\Omega+5e^2\cos 2i\cos\Omega\sin 2\omega\right]+\\&+\sin^2 I\left[\left(2+3e^2+5e^2\cos 2\omega\right)\sin i\sin 2\Omega+5e^2\sin i\cos i\left(3+\cos 2\Omega\right)\sin 2\omega\right]\end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

$$\frac{d\omega}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\begin{array}{l} 4\gamma_0\left(1-e^2\right)^{-3/2}\left(4-5\sin^2 i\right)+4\left(2+\gamma_1\right)+2e^2\left(1-\gamma_1+2\gamma_2-\gamma_4\right)-4\gamma_2 e^4- \\ -2\sin^2 i\left(5+\gamma_1+2\gamma_3-\gamma_4\right)+4\gamma_3\sin^4 i+2\left(5+\gamma_5\right)\left(\sin^2 i-e^2\right)\cos 2\omega+ \\ +\sin^2 I\left[\begin{array}{l} 3\left(5\sin^2 i-4-e^2\right)+\left(5\sin^2 i-2-3e^2\right)\cos 2\Omega+ \\ +5\left(3\left(e^2-\sin^2 i\right)-\left(\sin^2 i-2+e^2\right)\cos 2\Omega\right)\cos 2\omega+ \\ +5\left(e^2-2\right)\cos i\sin 2\Omega\sin 2\omega \end{array}\right]+ \\ +\sin 2I\left[\begin{array}{l} \left(10\sin 2i\sin^2\omega+\left(5e^2\cos 2\omega-3e^2-2\right)\mathrm{ctg}\, i\right)\cos\Omega+ \\ +5\left(2\sin^2 i-e^2-e^2\sin^2 i\right)\dfrac{\sin\Omega}{\sin i}\sin 2\omega \end{array}\right] \end{array}\right\}, \qquad (12)$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\begin{array}{l} 2\cos i\left[\begin{array}{l} -4\gamma_0\left(1-e^2\right)^{-3/2}-\gamma_1+2\gamma_3\sin^2 i+ \\ +\left(\gamma_4+\gamma_5\cos 2\omega\right)e^2+5e^2\cos 2\omega-3e^2-2 \end{array}\right]+ \\ +\sin^2 I\left[2\cos i\left(\sin^2\Omega-2\right)\left(5e^2\cos 2\omega-3e^2-2\right)+5e^2\sin 2\Omega\sin 2\omega\right]+ \\ +\sin 2I\left[\left(2+3e^2-5e^2\cos 2\omega\right)\dfrac{\cos 2i}{\sin i}\cos\Omega+5e^2\mathrm{ctg}\, i\sin\Omega\sin 2\omega\right] \end{array}\right\}. \qquad (13)$$

При произвольных значениях угла I данная система, имеющая лишь один первый интеграл W_N = const, по-видимому, неинтегрируема. Тем не менее, нам представляется интересным и полезным выявить её основные свойства, интегрируемые случаи и частные решения, возможно и периодические, на существование которых указывает инвариантность системы относительно замены переменных

$$\tilde{\tau}=-\tau, \quad \tilde{e}=e, \quad \tilde{i}=i, \quad \tilde{\omega}=-\omega, \quad \tilde{\Omega}=-\Omega .$$

Для произвольных значений I и начальных условий e_0, i_0, ω_0, Ω_0, в частности - отвечающих орбитам реальных (или гипотетических) спутников какой–либо планеты, для решения эволюционной системы, естественно, придется использовать один из численных методов и контролировать вычисления с помощью интеграла W_N = const.

3. **Преобразование системы к элементам Пуанкаре**

В некоторых аналитических исследованиях эволюции почти круговых спутниковых орбит с малым наклонением к экваториальной плоскости планеты, наряду с использованием кеплеровских элементов, обладающих наглядным геометрическим смыслом, оказывается полезным применять и специальные регулярные элементы.

Далее мы вводим элементы второй канонической системы Пуанкаре, нормированные на величину $(\mu_0 a)^{1/4}$

$$\xi=\sqrt{x_1}\cos g,\quad \eta=-\sqrt{x_1}\sin g,\quad x_1=2\left(1-\sqrt{1-e^2}\right),$$
$$p=\sqrt{x_2}\cos\Omega,\quad q=-\sqrt{x_2}\sin\Omega,\quad x_2=2\sqrt{1-e^2}\left(1-\delta\cos i\right),$$
$$g=\Omega+\omega\delta,\quad \delta=\operatorname{sign}\left(\cos i\right).$$

Здесь g – долгота перицентра, переменные ξ, η имеют порядок e при $e\to 0$, а переменные p, q – порядок $\sin i$ при $\sin i\to 0$. Через эти элементы, единые для прямых и обратных спутниковых орбит, выражаются основные комбинации кеплеровских элементов, входящие в функцию (9).

В новых переменных нелинейные эволюционные уравнения записываются в стандартной канонической форме

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{\partial W_N}{\partial\eta},\quad \frac{d\eta}{d\tau}=-\frac{\partial W_N}{\partial\xi},\quad \frac{dp}{d\tau}=\frac{\partial W_N}{\partial q},\quad \frac{dq}{d\tau}=-\frac{\partial W_N}{\partial p}, \qquad (14)$$

а интеграл (1) принимает вид

$$W_N=\sum_{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=1}^{4} W_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\xi^{\nu_1}\eta^{\nu_2}p^{\nu_3}q^{\nu_4}=\mathrm{const},$$

где ненулевые значения коэффициентов $W_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ определяются формулами

$$W_{0010}=2\mu,$$
$$W_{2000}=b+2\sigma,\quad W_{0020}=-b+4\sigma,\quad W_{0002}=-b+2\sigma,\quad W_{0200}=b-8\sigma,$$
$$W_{2010}=-\frac{3}{2}\mu,\quad W_{0210}=\frac{17}{2}\mu,\quad W_{0030}=-\frac{5}{4}\mu,\quad W_{0012}=W_{0030},\quad W_{1101}=-10\mu,$$

$$W_{4000}=-\frac{1}{2}+4\gamma_0-\frac{1}{4}\gamma_1+\gamma_2-\frac{1}{2}\sigma,\quad W_{2200}=-1+8\gamma_0-\frac{1}{2}\gamma_1+2\gamma_2+\frac{3}{2}\sigma,$$
$$W_{0400}=-\frac{1}{2}+4\gamma_0-\frac{1}{4}\gamma_1+\gamma_2+2\sigma,\quad W_{2020}=1-8\gamma_0-\frac{1}{2}\gamma_1+\gamma_4+\gamma_5-2\sigma,$$
$$W_{0220}=-9-8\gamma_0-\frac{1}{2}\gamma_1+\gamma_4-\gamma_5+18\sigma,\quad W_{2002}=-9-8\gamma_0-\frac{1}{2}\gamma_1+\gamma_4-\gamma_5+9\sigma,$$
$$W_{0202}=1-8\gamma_0-\frac{1}{2}\gamma_1+\gamma_4-\gamma_5-\sigma,\quad W_{0040}=\frac{1}{2}+\gamma_0+\frac{1}{4}\gamma_1+\gamma_3-\sigma,$$
$$W_{0022}=1+2\gamma_0+\frac{1}{2}\gamma_1+2\gamma_3-\frac{3}{2}\sigma,\quad W_{0004}=\frac{1}{2}+\gamma_0+\frac{1}{4}\gamma_1+\gamma_3-\frac{1}{2}\sigma,$$
$$W_{1111}=4\left(5+\gamma_5\right)-30\sigma,$$
$$b\ =2+4\gamma_0+\gamma_{1,}\quad \sigma=\sin^2 I,\quad \mu=\delta\sin 2I.$$

В линейном приближении система (14) расщепляется на две пары уравнений относительно (ξ,η) и (p,q)

$$\frac{d\xi}{d\tau}=2W_{0200}\eta,\quad \frac{d\eta}{d\tau}=-2W_{2000}\xi,\quad \frac{dp}{d\tau}=2W_{0002}q,\quad \frac{dq}{d\tau}=-2W_{0020}p-W_{0010}.\quad (15)$$

Корни характеристического уравнения первой пары линейных однородных уравнений (15) определяются формулой

$$\lambda_{1,2}=\pm 2\sqrt{\left(b\ +2\sin^2 I\right)\left(8\sin^2 I-b\ \right)}.$$

Нетрудно показать, что коэффициенты, входящие в формулу для b, положительны. Действительно, γ_0 определяется формулой

$$\gamma_0=-c_{20}\frac{\mu_0}{\mu'}\frac{a_0^2 a'^3}{a^5}$$

и в случае сжатой планеты больше нуля. Из работы (Вашковьяк и др., 2013а), следует, что коэффициент γ_1 также положителен. Поэтому и коэффициент b будет принимать только положительные значения. Тогда из выражения для $\lambda_{1,2}$ следует условие устойчивости нулевого решения в линейном приближении относительно эксцентриситета (или ξ,η)

$$2+4\gamma_0+\gamma_1>8\sin^2 I\ .$$

Из этого неравенства для произвольной спутниковой системы можно найти критическое значение большой полуоси круговой экваториальной орбиты, при котором возникает ее неустойчивость относительно эксцентриситета.

Как следует из второй пары линейных, но неоднородных уравнений (15), при произвольном значении угла I их нулевое решение оказывается неустойчивым по наклонению. Лишь в рассматриваемых далее интегрируемых случаях I ÷ V, когда либо sin$I$ = 0, либо cos$I$ = 0, т.е., когда $\mu = 0$**,** имеет смысл говорить об условиях устойчивости решения в линейном приближении относительно наклонения (или p,q). Эти условия следуют из формулы для характеристических корней второй пары однородных уравнений (15)

$$\lambda_{3,4} = \pm 2\sqrt{\left(b - 2\sin^2 I\right)\left(4\sin^2 I - b\right)}\,.$$

В случае, когда sin$I$ = 0, решение устойчиво в линейном приближении при любом b, поскольку

$$\lambda_{3,4} = \pm 2\sqrt{-b^2}\,.$$

В случае, когда cos$I$ = 0, $\lambda_{3,4} = \pm 2\sqrt{\left(b - 2\right)\left(4 - b\right)}$ и решение устойчиво в линейном приближении либо при b < 2, либо при b > 4. Из этих неравенств можно найти соответствующие критические значения большой полуоси спутниковой орбиты, при которых возникает ее неустойчивость относительно наклонения.

4. **Случаи интегрируемости**

Прежде всего, укажем, что при $\gamma_k = 0$ $(1 \le k \le 5)$ система дифференциальных уравнений (10) – (13) описывает эволюцию спутниковой орбиты при совместном влиянии сжатия планеты и удаленной притягивающей точки. Интегрируемые случаи этой задачи были исследованы в работе (Лидов, Ярская, 1974). При описании случаев интегрируемости более общей системы с $\gamma_k \neq 0$ мы будем придерживаться нумерации, установленной в вышеуказанной статье. Сразу заметим, что новых случаев интегрируемости в данной задаче не оказалось, что естественно, поскольку в модель добавлена лишь компланарная система колец, расположенная в плоскости экватора планеты.

***Случай* I**

Эволюция орбиты происходит только под действием солнечного притяжения, т.е. c_{20} = 0, μ_j = 0 (1 ≤ j ≤ J) или, как следствие, $\gamma_k = 0$ $(0 \le k \le 5)$. Полагая в этом случае произвольный угол I равным нулю и считая угловые элементы i, ω, Ω отнесенными к плоскости орбиты планеты, получим уравнения двукратно осредненной задачи Хилла. С помощью существующего в этом случае дополнительного первого интеграла

$$\left(1 - e^2\right)\cos^2 i = c_1 \tag{16}$$

и преобразования функции W_N М.Л. Лидовым получен существенно более простой интеграл

$$e^2\left(2/5-\sin^2 i\sin^2\omega\right)=\text{const}, \tag{17}$$

В уже упоминавшихся работах (Лидов, 1961; Козаи, 1962) выполнен полный качественный анализ этой эволюционной задачи. В работах (Вашковьяк, 1999; Киношита, Накаи, 1999; 2007) получено общее решение задачи для произвольных значений элементов спутниковой орбиты, а в цикле работ, начиная с 2001 г. (Прохоренко, 2001) выполнено её геометрически наглядное исследование.

***Случай* II**

Эволюция орбиты происходит под действием сжатия планеты и притяжения ее главных спутников, т.е. $\mu'=0$. В силу симметрии задачи относительно оси вращения планеты, так же, как и в случае I, возникает интеграл (16), в котором наклонение i отнесено к ее экваториальной плоскости. Из интегралов (1) и (16) следует

$$\begin{gathered}4\alpha_0\left(2/3-\sin^2 i\right)\left(1-e^2\right)^{-3/2}+\alpha_1\left(e^2-\sin^2 i\right)+\alpha_2 e^4+\alpha_3\sin^4 i+e^2\sin^2 i\left(\alpha_4+\alpha_5\cos2\omega\right)+\\+O\left(e,\sin i\right)^6=c_2,\end{gathered} \tag{18}$$

где постоянные параметры α_k $(0\le k\le 5)$ определены формулами (7).

С использованием независимой переменной $\nu=n\left(t-t_0\right)$ получим

$$\begin{aligned}
\frac{de}{d\nu}&=2\alpha_5 e\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\sin2\omega;\\
\frac{di}{d\nu}&=-\alpha_5\frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin2i\sin2\omega;\\
\frac{d\omega}{d\nu}&=\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\begin{aligned}&4\alpha_0\left(1-e^2\right)^{-3/2}\left(4-5\sin^2 i\right)+\alpha_1\left(3-e^2-2\sin^2 i\right)+2\alpha_2 e^2\left(1-e^2\right)-\\&-\alpha_3\sin^2 2i+\left(-2e^2+\sin^2 i+e^2\sin^2 i\right)\left(\alpha_4+\alpha_5\cos2\omega\right)\end{aligned}\right\}.\\
\frac{d\Omega}{d\nu}&=\frac{2\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\left\{-4\alpha_0\left(1-e^2\right)^{-3/2}-\alpha_1+\alpha_3\sin^2 i+e^2\left(\alpha_4+\alpha_5\cos2\omega\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Последнее из уравнений (19) позволяет найти зависимость долготы восходящего узла $\Omega(\nu)$ с помощью квадратуры, однако, только после определения $e(\nu)$, $i(\nu)$, $\omega(\nu)$. Заметим, что при $\alpha_5=0$ элементы e, i постоянны, а ω и Ω суть линейные функции времени. При произвольном значении $\alpha_5\neq0$ эксцентриситет и наклонение не остаются постоянными (как при учете только сжатия планеты), хотя и связаны между собой в силу интеграла (16). Если с его помощью исключить $\sin^2 i$ и $\sin^4 i$ из выражения (18), то получим некоторую функцию, определяющую семейство фазовых траекторий в плоскости (ω, e) в зависимости от констант интегралов c_1, c_2 и постоянных параметров задачи α_k $(0 \le k \le 5)$.

При необходимости исследование данного интегрируемого случая может быть продолжено и применено к спутниковой системе, в которой влияние далекого внешнего тела пренебрежимо мало. Следует только напомнить, что в интеграле (18) остались неучтенными слагаемые, пропорциональные $\alpha_{k>5}$, имеющие шестую и более высокие четные степени относительно e и $\sin i$. Поэтому результаты анализа случая II (как и III÷VII) применимы лишь для орбит с умеренными значениями эксцентриситета и синуса наклонения.

***Случай* III**

Плоскость экватора планеты совпадает с плоскостью ее гелиоцентрической орбиты, т.е. $I = 0$. При этом условии, кроме интеграла (16), из формулы (9) следует

$$\begin{aligned} W_N &= 4\gamma_0\left(1-e^2\right)^{-3/2}\left(2/3-\sin^2 i\right)+\gamma_1\left(e^2-\sin^2 i\right)+\gamma_2 e^4+\gamma_3\sin^4 i+ \\ &+e^2\sin^2 i\left(\gamma_4+\gamma_5\cos 2\omega\right)+2\left(e^2-\sin^2 i\right)-3e^2\sin^2 i+5e^2\sin^2 i\cos 2\omega+O\left(e,\sin i\right)^6=c_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Эволюционные уравнения примут более простой вид

$$\frac{de}{d\tau}=2\left(5+\gamma_5\right)e\sqrt{1-e^2}\sin^2 i\sin 2\omega, \qquad \frac{di}{d\tau}=-\frac{\left(5+\gamma_5\right)e^2\sin 2i\sin 2\omega}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau}&=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left[\begin{array}{l} 2\gamma_0\left(1-e^2\right)^{-3/2}\left(4-5\sin^2 i\right)+2\left(2+\gamma_1\right)+e^2\left(1-\gamma_1+2\gamma_2-\gamma_4\right)-2\gamma_2 e^4- \\ -\left(5+\gamma_1+2\gamma_3-\gamma_4\right)\sin^2 i+2\gamma_3\sin^4 i+\left(5+\gamma_5\right)\left(\sin^2 i-e^2\right)\cos 2\omega \end{array}\right], \\ \frac{d\Omega}{d\tau}&=\frac{2\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\left[-4\gamma_0\left(1-e^2\right)^{-3/2}-\gamma_1+2\gamma_3\sin^2 i+\gamma_4 e^2+\left(\gamma_5+5\right)e^2\cos 2\omega-3e^2-2\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Зависимость $\Omega(\tau)$ может быть найдена квадратурой из последнего уравнения (22) после определения $e(\nu)$, $i(\nu)$, $\omega(\nu)$. Отметим, что впервые исследованный в работе (Лидов, Ярская, 1974) этот случай при $\gamma_k = 0$ $(0 \le k \le 5)$ оказался наиболее богатым в смысле разнообразия структур семейств фазовых траекторий и, вдобавок, не был ограничен малостью значений e и $\sin i$. Мы рассмотрим далее эволюционную систему (14) в элементах Пуанкаре при $I = 0$, но $\gamma_k \ne 0$ $(0 \le k \le 5)$, когда выражение функции W_N упрощается, а интегралы (16) и (20) с точностью до членов порядка $(e, \sin i)^4$ включительно принимают вид

$$\xi^2+\eta^2+p^2+q^2=\text{const},$$
$$W_N=W_{2000}\left(\xi^2+\eta^2-p^2-q^2\right)+W_{4000}\left(\xi^2+\eta^2\right)^2+W_{0040}\left(p^2+q^2\right)^2+$$
$$+W_{2020}\left(\xi p+\eta q\right)^2+W_{2002}\left(\eta p-\xi q\right)^2=\text{const},$$

где

$$W_{2000}=4\gamma_0+\gamma_1+2,\quad W_{4000}=4\gamma_0-\frac{1}{4}\gamma_1+\gamma_2-\frac{1}{2},\quad W_{0040}=\gamma_0+\frac{1}{4}\gamma_1+\gamma_3+\frac{1}{2},$$
$$W_{2020}=-8\gamma_0-\frac{1}{2}\gamma_1+\gamma_4+\gamma_5+1,\quad W_{2002}=-8\gamma_0-\frac{1}{2}\gamma_1+\gamma_4-\gamma_5-9.$$

Поскольку, кроме имеющихся двух очевидных первых интегралов, других интегралов эволюционной канонической системы непосредственно не усматривается, естественно попытаться упростить ее, выполнив нелинейную (и не каноническую!) замену переменных

$$x_1=\xi^2+\eta^2,\quad x_2=p^2+q^2,\quad x_3=\xi p+\eta q,\quad x_4=\eta p-\xi q.$$

В новых переменных эволюционные уравнения принимают вид

$$\frac{dx_1}{d\tau}=\beta_0x_3x_4,\quad \frac{dx_2}{d\tau}=-\beta_0x_3x_4,\quad \frac{dx_3}{d\tau}=\left[\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_5\right]x_4,\quad \frac{dx_4}{d\tau}=\left[\beta_3x_1+\beta_4x_2-\beta_5\right]x_3,$$

где

$$\beta_0=4\left(W_{2002}-W_{2020}\right)=-8\left(5+\gamma_5\right),\beta_1=2\left(2W_{4000}-W_{2002}\right)=2\left(8+16\gamma_0+2\gamma_2-\gamma_4+\gamma_5\right),$$
$$\beta_2=2\left(W_{2002}-2W_{0040}\right)=-2\left(10+10\gamma_0+\gamma_1+2\gamma_3-\gamma_4+\gamma_5\right),$$
$$\beta_3=2\left(W_{2020}-2W_{4000}\right)=2\left(2-16\gamma_0-2\gamma_2+\gamma_4+\gamma_5\right),$$
$$\beta_4=2\left(2W_{0040}-W_{2020}\right)=2\left(10\gamma_0+\gamma_1+2\gamma_3-\gamma_4-\gamma_5\right),\beta_5=4W_{2000}=4\left(2+4\gamma_0+\gamma_1\right),$$

причем $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=0,\quad \beta_2-\beta_1+\beta_4-\beta_3=\beta_0.$

Как оказалось, система уравнений в переменных x_1,x_2,x_3,x_4 имеет три независимых первых интеграла:

$$x_1+x_2=C_1,$$
$$\beta_0\left(\beta_4x_3^2-\beta_2x_4^2\right)+\rho x_1^2-2\beta_5\left(\beta_2+\beta_4\right)x_1=C_2,$$
$$\beta_0\left(\beta_3x_3^2-\beta_1x_4^2\right)+\rho x_2^2+2\beta_5\left(\beta_1+\beta_3\right)x_2=C_3,$$

где $\rho=\beta_2\beta_3-\beta_1\beta_4=8\left(5+\gamma_5\right)\left(-2+6\gamma_0-\gamma_1+2\gamma_2-2\gamma_3\right)\neq 0$.

Для случая $\beta_5=0$ интегралы с постоянными C_2 и C_3 были выведены Ю.А. Садовым, который любезно сообщил автору о полученном им результате после совместного обсуждения исследуемой проблемы.

Нетрудно показать, что интеграл W_N = const (гамильтониан исходной эволюционной канонической системы) составляет специально подобранная линейная комбинация трех вышеуказанных интегралов

$$W_N = \frac{W_{0040}+W_{4000}}{W_{0040}-W_{4000}} W_{2000} C_1 + \frac{1}{\rho}\left(W_{4000} C_2 + W_{0040} C_3\right),$$

и с помощью их получается эллиптическая квадратура для определения зависимости τ от одной из переменных, например, x_1

$$\tau = \int \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}, \quad R(x_1) = R_1(x_1) R_2(x_1),$$

$$R_1(x_1) = (\beta_1 - \beta_2)\left(x_1 - x_1^{(1)}\right)\left(x_1 - x_1^{(2)}\right) =$$

$$= (\beta_1 - \beta_2) x_1^2 + 2\left[\beta_2 C_1 + \frac{\beta_5}{\rho}(\beta_1+\beta_3)(\beta_1+\beta_2)\right] x_1 + \frac{1}{\rho}\left[\beta_2 C_3 - \beta_1 C_2 - 2\beta_2\beta_5(\beta_1+\beta_3)C_1\right],$$

$$R_2(x_1) = (\beta_3 - \beta_4)\left(x_1 - x_1^{(3)}\right)\left(x_1 - x_1^{(4)}\right) =$$

$$= (\beta_3 - \beta_4) x_1^2 + 2\left[\beta_4 C_1 + \frac{\beta_5}{\rho}(\beta_1+\beta_3)(\beta_3+\beta_4)\right] x_1 + \frac{1}{\rho}\left[\beta_4 C_3 - \beta_3 C_2 - 2\beta_4\beta_5(\beta_1+\beta_3)C_1\right].$$

Аналитическое нахождение и обращение данной квадратуры связано с элементарным вычислением четырех корней $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_1^{(4)}$ полинома $R(x_1)$, который в данном случае представляет собой произведение двух квадратичных полиномов. Два из этих корней, не превосходящие 1, определяют пределы $x_{1,\min}$ и $x_{1,\max}$ изменения переменной x_1 и связанного с ней эксцентриситета спутниковой орбиты – наиболее важной из эволюционных характеристик

$$[x_{1,\min}(1 - x_{1,\min}/4)]^{1/2} \le e \le [x_{1,\max}(1 - x_{1,\max}/4)]^{1/2}.$$

Переменные x_2, x_3, x_4 находятся с использованием тех же трех интегралов. Переход от x_1, x_2, x_3, x_4 к кеплеровским переменным осуществляется по формулам

$$e^2 = x_1(1 - x_1/4), \quad \sin^2 i = y_1(1 - y_1/4), \quad y_1 = x_2/(1 - x_1/2),$$

$$\cos\omega = x_3/y_2, \quad \sin\omega = -\delta x_4/y_2, \quad y_2 = \sqrt{x_1 x_2}.$$

При необходимости исследование данного интегрируемого случая может быть продолжено и применено к спутниковой системе, у которой экваториальная плоскость планеты близка к плоскости её орбиты.

Заметим, что и в предыдущем случае II после модификации формул для $W_{2000}, W_{4000}, W_{0040}, W_{2020}, W_{2002}$ уравнения, описывающие изменения x_1, x_2, x_3, x_4, также интегрируются в квадратурах.

***Случай* IV**

Плоскость гелиоцентрической орбиты планеты ортогональна плоскости ее экватора, т.е. $\cos I = 0$, а спутник движется в этой плоскости ($\sin i_{\mathrm{orb}} = 0$), так что в частном решении $\cos i = 0$ и $\sin\Omega = 0$. При этом $di/d\tau = d\Omega/d\tau = 0$. Однако для подтверждения двух последних равенств нельзя опираться только на формулу (9), а следует использовать описанные ранее свойства функции W_2 и ее общее выражение (5). Отметим, что выражения для функций W_0 и W_1 получены для произвольных значений эксцентриситета и наклонения спутниковой орбиты. Предложенные же формулы (6), (9) для функций W_2 и W_N, соответственно, справедливы лишь при умеренных значениях e и $\sin i$. Поэтому в нашей постановке эволюционной задачи отмеченный случай может быть правомерно рассмотрен, если будет получено выражение функции W_2 для полярных орбит. Заметим, что ее выражение для произвольного i, справедливое, в частности, и для $i = 90°$, получено в работе (Вашковьяк, 1976), однако лишь с точностью до e^2, включительно.

***Случай* V**

Плоскость гелиоцентрической орбиты планеты так же, как и в случае IV, ортогональна плоскости ее экватора, т.е. $\cos I = 0$, но спутник в частном решении движется в экваториальной плоскости ($\sin i = 0$, $di/d\tau = 0$). Принятые предположения упрощают эволюционную систему. Для экваториальных орбит, в силу неопределенности долготы узла, система четырех уравнений сводится к двум относительно эксцентриситета и ранее введенной долготы перицентра g.

Система этих уравнений

$$\begin{aligned}
&\delta\frac{de}{d\tau} = 10e\sqrt{1-e^2}\sin 2g,\\
&\delta\frac{dg}{d\tau} = 8\gamma_0\left(1-e^2\right)^{-2} + 2\sqrt{1-e^2}\left(\gamma_1 + 2\gamma_2 e^2 + 5\cos 2g - 1\right)
\end{aligned} \tag{23}$$

имеет первый интеграл $\gamma_2 e^4 + \left(\gamma_1 + 5\cos 2g - 1\right)e^2 + \frac{8}{3}\gamma_0\left(1-e^2\right)^{-3/2} = \mathrm{const}$.

При нулевом начальном значении эксцентриситета e_0 существует частное решение, когда орбита остается круговой $\left(de/d\tau = 0\right)$. При $e_0 \neq 0$ стационарные решения рассматриваемой системы (23) определяются условиями:

$$\begin{aligned}
&g = 0, 180°;\ \sqrt{1-e^2}\left(\gamma_1 + 2\gamma_2 e^2 + 4\right) + 4\gamma_0\left(1-e^2\right)^{-2} = 0;\\
&g = \pm 90°;\ \sqrt{1-e^2}\left(\gamma_1 + 2\gamma_2 e^2 - 6\right) + 4\gamma_0\left(1-e^2\right)^{-2} = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что $\gamma_0 > 0$ ($c_{20} < 0$), а кроме того, будем считать положительными γ_1 и γ_2. В силу принятых предположений, относительно параметров γ_0, γ_1, γ_2, первое из уравнений (24) не удовлетворяется ни при каких значениях эксцентриситета $e < 1$. Поэтому стационарное решение существует лишь при $g = g^* = \pm 90°$ и определяются из второго алгебраического уравнения (24). Поскольку в рассматриваемом случае V (как и во всех, кроме случая I) предполагается малость эксцентриситета, то естественно получить решение этого уравнения лишь в биквадратном приближении по e

$$e = e^* = \sqrt{\frac{5+q_1}{2q_2}}, \tag{25}$$

где $q_1 = 1 - \gamma_1 - 4\gamma_0$, $\quad q_2 = \gamma_2 + 5\gamma_0$.

Таким образом, особые точки в плоскости $(g,\ e)$ существуют только при условии $5 + q_1 > 0$ или

$$f(a) = -(5+q_1) = 4\gamma_0(a) + \gamma_1(a) - 6 \le 0. \tag{26}$$

Если непрерывно изменять значение большой полуоси орбиты спутника (или γ_0, γ_1), то функция $f(a)$ неизбежно обратится в нуль, что будет означать бифуркацию (исчезновение или появление особого решения) в точке $(g^*, 0)$. Неравенство $f(a) > 0$ соответствует только циркуляционному изменению долготы перицентра (когда $\frac{dg}{d\tau}$ - функция, знакопостоянная по τ), а при $f(a) \le 0$ она может изменяться и либрационно относительно g^* (когда $\frac{dg}{d\tau}$ - знакопеременная функция τ). Появление либрационной области в фазовой плоскости (g, e), вместе с особой точкой типа центр, влечет за собой появление и седловой особой точки, что делает круговые орбиты неустойчивыми относительно эксцентриситета.

При малых e интеграл уравнений (23) принимает более простой вид

$$e^2\left(5\cos 2g - q_1 + q_2 e^2\right) = c_2. \tag{27}$$

Из этого выражения, в котором отброшены члены порядка e^6, непосредственно получается уравнение семейства фазовых траекторий в плоскости (g, e)

$$e^2 = \frac{1}{2q_2}\left[q_1 - 5\cos 2g \pm \sqrt{\left(q_1 - 5\cos 2g\right)^2 + 4q_2c_2}\right]. \tag{28}$$

Постоянная интеграла c_2 определяется по начальным значениям e_0, g_0

$$c_2 = e_0^2\left[5\cos 2g_0 - q_1 + q_2 e_0^2\right].$$

Значения $c_2 > 0$ соответствуют циркуляционному изменению g, $c_2 < 0$ – его либрационному изменению, а $c_2 = 0$ – особой траектории (сепаратрисе), уравнение которой имеет вид

$$e^2 = \frac{q_1 - 5\cos 2g}{q_2} \tag{29}$$

Эта траектория ограничивает изменение эксцентриситета при $g = \pm 90^\circ$ величиной

$$e_s = \sqrt{2}e^*.$$

Упрощенное выражение интеграла (27) позволяет получить квадратуру, для определения зависимости $\tau(e)$, исключив долготу перицентра g из первого уравнения (23). Для изменения новой переменной $z = e^2$ будем иметь следующее уравнение

$$\delta\frac{dz}{d\tau} = \pm 4\sqrt{(1-z)P(z)}, \tag{30}$$

где знак правой части определяется знаком $\sin 2g$,

$$P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4,$$

$$p_0 = -c_2^2,\quad p_1 = -2c_2 q_1,\quad p_2 = 25 + 2c_2 q_2 - q_1^2,\quad p_3 = 2q_1 q_2,\quad p_4 = -q_2^2,$$

Из (30) получим достаточно сложный для обращения ультраэллиптический интеграл

$$\tau = \pm\frac{\delta}{4}\int_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)P(\zeta)}}, \tag{31}$$

где $z_0 = e_0^2 = e^2(\tau = 0)$.

Экстремальные значения эксцентриситета (или z) определяются двумя положительными корнями полинома $P(z)$, меньшими единицы. В зависимости от знака постоянной c_2 они находятся различным образом из уравнения фазовой траектории (28).

Для $c_2 \geq 0$ $e_{\min} = e(g = 0) = \sqrt{z_{\min}}$, $e_{\max} = e(g = \pm 90^\circ) = \sqrt{z_{\max}}$,

где $z_{\min} = \frac{1}{2q_2}\left[q_1 - 5 + \sqrt{(q_1 - 5)^2 + 4q_2 c_2}\right]$, $z_{\max} = \frac{1}{2q_2}\left[q_1 + 5 + \sqrt{(q_1 + 5)^2 + 4q_2 c_2}\right]$. (32)

В этом случае долгота перицентра g изменяется монотонно со временем, а ее период циркуляции T_C может быть найден вычислением квадратуры

$$T_\text{C} = \frac{1}{\beta n} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)P(\zeta)}}.$$

Для $c_2 \le 0$ $e_{\text{extr}} = e\left(g = \pm 90^\circ\right) = \sqrt{z}$, причем минимуму соответствует знак (-) в (28), а максимуму знак (+), т.е.

$$z_{\min} = \frac{1}{2q_2}\left[q_1 + 5 - \sqrt{(q_1+5)^2 + 4q_2c_2}\right], \quad z_{\max} = \frac{1}{2q_2}\left[q_1 + 5 + \sqrt{(q_1+5)^2 + 4q_2c_2}\right]. \tag{33}$$

В этом случае долгота перицентра g колеблется в ограниченных пределах относительно $g^* = \pm 90°$, ее экстремальными значениями являются

$$\begin{gathered} g_{\min}^{(1)} = \frac{1}{2}\arccos\frac{q_1 - 2e_0\sqrt{q_2\left(5+q_1-q_2e_0^2\right)}}{5}, \\ g_{\max}^{(1)} = 180^\circ - g_{\min}^{(1)}, g_{\min}^{(2)} = 180^\circ + g_{\min}^{(1)}, g_{\max}^{(2)} = 360^\circ - g_{\min}^{(1)}, \end{gathered} \tag{34}$$

а ее период либрации T_L может быть найден вычислением квадратуры

$$T_\text{L} = \frac{1}{2\beta n} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta)P(\zeta)}}.$$

В случае предельного (лимитационого) движения, когда $c_2 = 0$, период равен бесконечности,

$$e_{\min} = 0, \quad e_{\max} = e_s, \quad g_{\min} = g_s = \frac{1}{2}\arccos\frac{q_1}{5}. \tag{35}$$

В применении к спутниковой системе, у которой экваториальная плоскость центральной планеты почти ортогональна плоскости её орбиты, исследование данного интегрируемого случая V при необходимости может быть выполнено более детально. Однако следует иметь в виду, что соответствующие результаты также будут пригодны лишь для орбит с небольшими значениями эксцентриситетов и синусов наклонений.

***Случай* VI**

Плоскость экватора планеты наклонена к плоскости ее орбиты под произвольным углом I, а плоскость орбиты спутника ортогональна линии их пересечения, т.е. $\cos i = 0$ и $\cos\Omega = 0$. При этом

$$\frac{di}{d\tau} = \frac{d\Omega}{d\tau} = 0.$$

Однако, для подтверждения этих равенств, так же как и в вышеуказанном случае IV, следует использовать свойства функции W_2 и ее общее выражение (5). Все остальные замечания, касающиеся функции W_2, сделанные в случае IV, в полной мере относятся и к данному случаю VI.

***Случай* VII**

Плоскость экватора планеты наклонена к плоскости ее орбиты под произвольным углом I, а спутник в частном решении движется по круговой орбите, т.е. $e = 0$.

Как следует из уравнения (10), $\frac{de}{d\tau} = 0$ при $e = 0$. При этом уравнения (12), (13) позволяют найти зависимость долготы перицентра $g(\tau)$ с помощью квадратуры, однако, только после определения $i(\tau)$, $\Omega(\tau)$, а интеграл (9) принимает вид

$$\sin 2I \sin i \cos i \cos\Omega - \sin^2 i \left[1 + 2\gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma_3 \sin^2 i + \sin^2 I \left(\sin^2\Omega - 2\right)\right] = c_2 .$$

Отсюда можно получить семейство фазовых траекторий в плоскости (Ω, i) в зависимости от константы интеграла c_2 и постоянных параметров задачи γ_k (k=0,1,3), а из уравнений (11), (13) найти зависимости $i(\tau)$, $\Omega(\tau)$. После этого для элементов Лагранжа $h = e\cos\omega$ и $k = e\sin\omega$ при малых e получается линейная система двух дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. При необходимости исследование данного интегрируемого случая может быть продолжено. Следует только напомнить, что в данном интеграле остались неучтенными слагаемые, пропорциональные $\gamma_{k>5}$, имеющие шестую и более высокие четные степени относительно $\sin i$, так что результаты анализа случая VII (так же, как и случая II) применимы лишь для орбит с небольшими значениями синуса наклонения. Отметим, что при $\gamma_k = 0$ $(1 \le k \le 5)$ исследование пространственной эволюции круговых спутниковых орбит проведено в работах (Секигучи, 1961; Аллан, Кук,1964; Вашковьяк, 1983) на примере произвольно наклоненных к экватору Земли геосинхронных орбит ИСЗ.

5. Заключительные замечания

В настоящей работе рассмотрена небесно-механическая задача об эволюции спутниковой орбиты при совместном влиянии трех различных возмущающих факторов: нецентральности гравитационного поля планеты, притяжения Солнца и её главных спутников. Дано описание интегрируемых случаев этой более общей (по сравнению с рассмотренными ранее) задачи. Некоторые из описанных случаев могут оказаться полезными при рассмотрении одной интересной особенности спутниковых систем всех планет-гигантов. Эта особенность связана с существованием в околопланетном пространстве зон «избегания» малыми небесными телами или зон, разделяющих множества орбит регулярных и нерегулярных спутников. Так, для Урана ($I \approx 98^\circ$) полезным может оказаться случай V, а для Юпитера ($I \approx 3^\circ$) - случай III. Для Сатурна ($I \approx 25^\circ$) и Нептуна ($I \approx 28^\circ$) информацию о достаточно размытых границах подобных зон, по-видимому, возможно получить лишь с помощью численного интегрирования представленной эволюционной системы.

Автор выражает благодарность Ю.А. Садову за проявленный интерес к проблеме и сообщение о полученном им результате.

Библиографический список

Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли // 1961. Вып. 8. С. 5-45.

Козаи (Kozai Y.) Secular Perturbations of Asteroids with High Inclination and Eccentricity. // Astron. J. 1962. V. 67. P. 591 - 598.

Лидов М.Л. О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников // Проблемы движения искусственных небесных тел. – М.: Изд АН СССР, 1963. С. 119-134.

*Вашковьяк (Vashkovjak M.*A.) On the Stability of the Circular 'Asteroid' Orbits in an N-Planetary System // Celestial Mechanics. 1976. V. 13. No. 3. P. 313-324.

Вашковьяк М.А, Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. О разложении вековой части возмущающей функции взаимного притяжения в спутниковой системе планеты // Астрон. вестник. 2013а. Т. 47. № 1. С. 32-39.

Вашковьяк М.А, Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Единое представление вековой части возмущающей функции взаимного притяжения в спутниковой системе планеты // Астрон. вестник. 2013б. Т. 47. № 5. С. 448-451.

Вашковьяк М.А, Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Разложение вековой части возмущающей функции для орбит со сравнимыми по величине большими полуосями // Астрон. вестник. 2015. Т. 49 (в печати).

Лидов М.Л., Ярская М.В. Интегрируемые случаи в задаче об эволюции орбиты спутника при совместном влиянии внешнего тела и нецентральности поля планеты // Космические исследования. 1974. Т. 12. Вып. 2. С.155-170.

Вашковьяк М.А. Об эволюции орбит далёких спутников Урана // Письма в Астрон. Ж. 1999. Т. 25. № 7. С. 554-560.

Киношита, Накаи (Kinoshita H., Nakai H.) Analytical solution of the Kozai resonance and its application // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1999. V. 75. P. 125-147.

Киношита, Накаи (Kinoshita H., Nakai H.) General solution of the Kozai mechanism // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2007. V. 98. P. 67-74.

Прохоренко В.И. Геометрическое исследование решений ограниченной круговой двукратно осредненной задачи трех тел // Космические исследования. 2001. Т. 39. № 6. С. 622-633.

Секигучи (Sekiguchi N.) On the libration of the orbital plane of a stationary artificial satellite with a circular orbit // Publs Astron. Soc. Japan. 1961. V. 13. № 2. P. 207-211.

Аллан, Кук (Allan R.R., Cook G.E.) The long-period motion of a plane of a distant circular orbit // Proc. Roy. Soc. 1964. V. A280. № 1380. P. 97-109.

Вашковьяк М.А., Лидов М.Л. О системах искусственных спутников Земли на устойчивых круговых суточных орбитах. Космические исследования. 1983. Т. 21. № 1. С.12-19.

Оглавление