ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 13 за 2015 г.

Веденяпин В.В., Фимин Н.Н.

Метод Гамильтона-Якоби для негамильтоновых систем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Веденяпин В.В., Фимин Н.Н. Метод Гамильтона-Якоби для негамильтоновых систем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 13. 18 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-13**

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

В.В. Веденяпин, Н.Н. Фимин

МЕТОД ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ ДЛЯ НЕГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Москва — 2015

Веденяпин В.В., Фимин Н.Н.

Метод Гамильтона–Якоби для негамильтоновых систем

Анализируется метод Гамильтона–Якоби с точки зрения гидродинамической подстановки. Применяется его идеология в размерностях $n \geq 2$ для построения точных решений динамических систем.

Ключевые слова: гидродинамическая подстановка, уравнение Лиувилля, метод Гамильтона–Якоби, негамильтонова система.

Viktor Valentinovich Vedenyapin, Nikolay Nikolaevich Fimin

The Hamilton–Jacobi method for non–Hamiltonian systems

The Hamilton–Jacobi method is analyzed on the viewpoint of hydrodynamical substitution. The ideology of this method is applied for obtaining of exact solutions of dynamical system for dimensions $n \geq 2$.

Key words: hydrodynamical substitution, Liouville equation, Hamilton–Jacobi method, non–Hamiltonian system.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 14-01-00670.

Оглавление

1. Введение

Гидродинамическая подстановка [1]–[3] до недавних пор использовалась в основном в теории уравнения Власова. Однако недавно была продемонстрирована ее применимость к уравнению Лиувилля и гамильтоновой механике [4]–[9]. В работах В.В. Козлова [4]–[6] был намечен простейший вывод уравнения Гамильтона–Якоби (ГЯ), а гидродинамическая подстановка связала просто этот вывод с уравнением Лиувилля [8]–[9]. Более того, при внимательном анализе свойств исследуемой подстановки можно видеть, что она обладает свойством широкой универсальности и может быть использована для исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) достаточно общего вида. В настоящей работе рассматривается возможность применения гидродинамической подстановки для исследования системы автономных ОДУ с последующим использованием для ее решения метода Гамильтона–Якоби, причем, как оказывается, данный метод (после надлежащего обобщения) применим в том числе для динамических систем, не являющихся гамильтоновыми.

2. Гидродинамическая подстановка в гамильтоновой ситуации и прямой вывод уравнения ГЯ

Гамильтоновы канонические уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \tag{1}$$

приводят к уравнению Лиувилля на функцию распределения $f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ по импульсам $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ и пространственным переменным $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = 0. \tag{2}$$

В уравнении Власова изучается подстановка $f(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \rho(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{Q}(\mathbf{x},t))$ (так называемая “гидродинамическая подстановка”). Здесь $\delta(.)$ — функция Дирака, $\rho(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{Q}(\mathbf{x},t)$ имеют смысл плотности частиц и импульса частиц в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t соответственно. Вывод уравнений на ρ и $\mathbf{Q}$ проводится прямым способом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta\big(\mathbf{p}-\mathbf{Q}) - \rho(\nabla\delta, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\delta - \rho\big(\nabla\delta, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i}\big) + \rho\frac{\partial \delta}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} = \rho\frac{\partial \delta}{\partial p_i}.$$

Собирая множители при δ–функции, получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\bigg|_{p_i=Q_i}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho\,\mathrm{div}\frac{\partial H}{\partial p_i}\bigg|_{p_i=Q_i}\right) = 0.$$

Здесь мы должны положить во 2–м слагаемом после операции дифференцирования $\mathbf{p}=\mathbf{Q}$; обозначим для краткости $\mathbf{V}\equiv(\partial H/\partial\mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{Q}}$. Тогда получаем уравнение, совпадающее по виду с классическим уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho V_i) = 0,$$

так что по физическому смыслу можно называть введенную выше величину $\mathbf{V} = \big(\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})/\partial\mathbf{p}\big)|_{\mathbf{p}=\mathbf{Q}(\mathbf{x},t)}$ "обобщенной скоростью".

Приравнивая выражения при производных дельта–функции, получаем 2–ое уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}V_i\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} = \mathbf{F},$$

где: $F_i(\mathbf{x},t) = -\partial H(\mathbf{x},\mathbf{Q}(\mathbf{x},t))/\partial x_i$ — компоненты обобщенной силы.

Итак, получаем систему уравнений (которую можно назвать редуцированной системой Эйлера или РСЭ), которая является точным следствием уравнения Лиувилля:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \big(\mathbf{V}, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}}\big) = \mathbf{F}, \tag{3}$$

где обобщенные скорость $\mathbf{V}$ и сила $\mathbf{F}$ определены выше.

Рассмотрим альтернативный вышеизложенному вывод уравнений (3) с помощью уравнений моментов. Проинтегрируем уравнение Лиувилля (2), полагая $\rho = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\, d\mathbf{p}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\int \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, d\mathbf{p} - \int \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}\, d\mathbf{p} \right) = 0.$$

Второе слагаемое в скобках преобразуем, вынося $\partial/\partial x_i$ за знак интеграла, тогда, учитывая, что $f = \rho(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{Q})$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{\partial H}{\partial p_i} \rho(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{Q})\, d\mathbf{p} = \int \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i} f\, d\mathbf{p} + \int \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) d\mathbf{p},$$

откуда имеем для второго слагаемого:

$$\int \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, d\mathbf{p} = \operatorname{div}\,(\rho \mathbf{V}) - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i}(\mathbf{x}, \mathbf{Q})\rho,$$

а третье слагаемое преобразуем, интегрируя по частям:

$$-\int \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}\, d\mathbf{p} = \rho \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i}(\mathbf{x}, \mathbf{Q}).$$

Это слагаемое сокращается с последним членом второго, и окончательно получаем уравнение неразрывности.

Чтобы получить второе из уравнений РСЭ, умножим (2) на $\mathbf{p}$ и, обозначая $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \rho^{-1} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\, \mathbf{p}\, d\mathbf{p}$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{Q}) + \sum_{i=1}^{n} \left(\int \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i}\, d\mathbf{p} - \int \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i}\, d\mathbf{p} \right) = 0.$$

Делая преобразования, аналогичные рассмотренным выше, при выводе уравнения неразрывности, имеем

$$\int p \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \mathbf{Q} V_i) - \rho \mathbf{Q} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i}(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) - \int \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i}\, d\mathbf{p} =$$

$$= \int \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i} \mathbf{p} \rho \delta(\mathbf{p} - \mathbf{Q})\, d\mathbf{p} + \rho \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{Q}).$$

Получаем окончательно:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{Q})}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\mathbf{Q}V_i)\right)=\rho\mathbf{F}.$$

Последнее уравнение несколько отличается по внешнему виду от второго уравнения РСЭ (3), но приводится к таковому с привлечением уравнения неразрывности. Но, вообще говоря, оно представляет и самостоятельный интерес, поэтому запишем РСЭ в новой форме:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{V})=0,\quad \frac{\partial(\rho\mathbf{Q})}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{Q}\mathbf{V})=\rho\mathbf{F}. \tag{4}$$

Второе из уравнений системы (3) совпадает с уравнением, выведенным в [4]–[6] из других соображений. Поэтому систему (3) или (4) можно считать выведенной из уравнений Гамильтона, как обоснование результатов этих работ. В работах [4]–[6] показывается, как из (3) получаются уравнения Гамильтона–Якоби. Во–первых, приведем второе уравнение (3) к форме Громеки–Лэмба [4]–[7]:

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t}+V_i\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial x_i}-V_i\frac{\partial Q_i}{\partial\mathbf{x}}=-\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}}-\frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{x},\mathbf{Q})\frac{\partial Q_i}{\partial\mathbf{x}}. \tag{5}$$

Выражение $(\partial Q_i/\partial x_j-\partial Q_j/\partial x_i)dx_i\wedge dx_j$ есть дифференциал от $Q_i dx_i$, и форма Громека показывает, что уравнение для ротора $R_{ij}=\partial Q_i/\partial x_j-\partial Q_j/\partial x_i$ имеет решение $\mathbf{R}\equiv 0$:

$$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t}+\operatorname{rot}[\mathbf{R},\mathbf{V}]=0. \tag{6}$$

Мы воспользовались тем, что второе и третье слагаемое в левой части (5) — это компоненты векторного произведения $[\mathbf{R},\mathbf{V}]$, а справа стоит градиент функции:

$$\frac{dH(\mathbf{x},\mathbf{Q})}{dx_j}=\frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{Q})}{\partial x_j}+\frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{Q})}{\partial p_i}\frac{\partial Q_i}{\partial x_j}$$

(композиция $\operatorname{rot}\circ\operatorname{grad}\equiv 0$). Обратно, если ротор $\mathbf{Q}$ равен нулю, то $\mathbf{Q}$ есть градиент некоторой функции (в односвязной области): $Q_i=\partial S/\partial x_i$, и это свойство, как показывает уравнение (6), сохраняется со временем. Из (5) следует:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+H(\mathbf{x},\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}})\right)=0.$$

Отсюда $\partial S/\partial t + H(\mathbf{x}, \partial S/\partial \mathbf{x}) = f(t)$. Снова следуя [4]–[6] и делая замену $S = \widetilde{S} + \int f(t)dt$, получаем чистое уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(\mathbf{x},\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)=0. \tag{7}$$

В частности, если $H = p^2/(2m) + U(\mathbf{x})$, то $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = (\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{p})/\partial \mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}/m$ (стандартная функция Гамильтона для классической частицы), $\mathbf{F} = -(\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{p})/\partial \mathbf{x})|_{\mathbf{p}=\mathbf{Q}} = -\partial U/\partial \mathbf{x}$. Система (3) в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{m}\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{Q})=0,\quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{1}{m}(\nabla\mathbf{Q},\mathbf{Q})=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}.$$

Отметим, что в этом случае уравнение Гамильтона–Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}(\nabla S,\nabla S)+U(\mathbf{x})=0.$$

3. Гидродинамическая подстановка в негамильтоновой ситуации и обобщение уравнений ГЯ

Рассмотрим общую (негамильтонову) автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 1–го порядка в n–мерном пространстве:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{v}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in R^n,\ \ \mathbf{v}(\mathbf{x})\in R^n,\ \ t\in R^1. \tag{8}$$

Введем вновь функцию распределения $f(\mathbf{x}, t)$ изображающих точек в n–мерном фазовом пространстве, представляющую собой вероятность пребывания точки траектории динамической системы в окрестности данной точки пространства R^n в момент времени t. Ее эволюция описывается обобщенным уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathrm{div}_n(\mathbf{v}f)=0. \tag{9}$$

Чтобы описать движение m–мерной ($1 \le m \le n-1$) поверхности, представим вектор $\mathbf{x}$ как упорядоченную пару $(\mathbf{q},\mathbf{p})^T$, $\mathbf{q} \in R^m$, $\mathbf{p} \in R^{n-m}$ (иначе говоря, разложим фазовое пространство системы в декартову сумму фазовых множеств, определяемых новыми переменными: $R^n_{\mathbf{x}} = R^m_{\mathbf{q}} \oplus R^{n-m}_{\mathbf{p}}$). Перепишем систему (8) в этих переменных:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{q},\mathbf{p}), \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{q},\mathbf{p}), \tag{10}$$

где $\mathbf{w}(\mathbf{q},\mathbf{p})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{q},\mathbf{p})$ — это, соответственно, m первых и $n-m$ последних компонент векторной функции $\mathbf{v}(\mathbf{q},\mathbf{p})$ из (8) (т. е. $\big(\mathbf{w},\mathbf{g}\big)^T = \mathbf{v}$).

Будем искать решение уравнения Лиувилля (9) , вновь используя гидродинамическую подстановку: $f(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \rho(\mathbf{q},t)\delta\big(\mathbf{p} - \mathbf{P}(\mathbf{q},t)\big)$. Здесь $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q},t)$ — уравнение m–мерной поверхности в момент времени t, $\rho(\mathbf{q},t)$ — плотность изображающих точек на ней. Подстановка данного представления $f(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ в уравнение (9) дает (в соответствии с [8]–[9]) уравнение неразрывности и уравнение движения поверхности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial q_k}\big(\rho W_k\big) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} W_k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q_k} = \mathbf{G}. \tag{12}$$

Здесь $\mathbf{W}(\mathbf{q},t) = \mathbf{w}\big(\mathbf{q},\mathbf{P}(\mathbf{q},t)\big)$, $\mathbf{G}(\mathbf{q},t) = \mathbf{g}\big(\mathbf{q},\mathbf{P}(\mathbf{q},t)\big)$.

4. Разделение переменных в случае двух переменных

Пытаясь обобщить метод ГЯ на негамильтонову ситуацию, отметим, что данному методу можно приписать три составляющие: (*замена переменных*) — (*запас точно решаемых уравнений*) — (*уравнение ГЯ*). В качестве основных примеров замен переменных в [10] рассматриваются сферическая, эллиптическая и параболическая системы координат: для них с помощью подстановки в уравнение ГЯ находятся все (или почти все — все физически интересные) гамильтоновы системы, интегрируемые по Лиувиллю. Поэтому у нас в качестве запаса точно решаемых выступят любые, например, линейные или с разделяющимися переменными. Но что же в общем случае сыграет роль уравнения ГЯ? Как оказывается, любое следствие уравнения (12). Мы здесь будем пользоваться простейшим следствием: при $m = 1$ уравнение (12) в стационарном случае — это результат деления $(n-1)$–го уравнения системы (8) на последнее. Эти $n-1$ уравнений хорошо известны, так как описывают траектории, причем время исключено. Эта согласованность показывает правильность наших рассуждений.

Рассмотрим пару уравнений

$$\dot{x} = v_1(x,y), \quad \dot{y} = v_2(x,y). \tag{13}$$

Уравнение (12) для данной системы приводится к виду (в стационарном случае)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_1(x,y)}{v_2(x,y)}$$

хорошо известного следствия для определения траекторий, и это единственный кандидат на роль уравнения ГЯ в негамильтоновой ситуации.

Рассмотрим две возможности перехода от декартовой (x, y) к некоторой другой "удобной" системе координат, где последнее уравнение можно решить точным интегрированием (ограничимся для простоты возможностью разделения переменных).

1-я возможность. Пусть $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ — новые переменные (то есть "новые" координаты являются однозначными функциями "старых"). Тогда имеем

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'_x v_1 + \alpha'_y v_2 \equiv \Omega_1(\alpha,\beta), \quad \frac{d\beta}{dt} = \beta'_x v_1 + \beta'_y v_2 \equiv \Omega_2(\alpha,\beta), \tag{14}$$

и после деления

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\alpha'_x + \alpha'_y \cdot \dfrac{v_2}{v_1}}{\beta'_x + \beta'_y \cdot \dfrac{v_2}{v_1}} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}. \tag{15}$$

Если мы хотим, чтобы переменные α и β разделялись, приравняем правую часть вышеприведенного уравнения (Ω_1/Ω_2) выражению $\omega_1(\alpha)\omega_2(\beta)$ (здесь $\omega_1(...)$, $\omega_2(...)$ — произвольные функции своих аргументов), и получим линейное уравнение для определения v_2/v_1. Решая его, имеем:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\alpha'_x - \dfrac{\Omega_1}{\Omega_2}\beta'_x}{-\alpha'_y + \dfrac{\Omega_1}{\Omega_2}\beta'_y}.$$

Таким образом, получаем общий вид систем, разделяющихся в новых переменных α, β:

$$v_1 = \chi(x,y)\big(\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\beta'_y - \alpha'_y\big), \qquad v_2 = \chi(x,y)\big(\alpha'_x - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\beta'_x\big), \tag{16}$$

где $\chi(x,y) \not\equiv 0$ — произвольная функция.

По своей структуре уравнения (16) весьма близки к каноническим уравнениям Гамильтона: последние могут быть получены (если взять простейший случай $\chi = 1$) в условиях предельных переходов $\omega_1\omega_2 \to 0$ или $\omega_1\omega_2 \to \infty$:

$$\dot{x} = -\alpha'_y, \quad \dot{y} = \alpha'_x \quad \text{или} \quad \dot{x} = \beta'_y, \quad \dot{y} = -\beta'_x \tag{17}$$

(при этом роль функции Гамильтона выполняют "новые" переменные — соответственно α и β).

Пример 1. В полярной системе координат (СК) $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$, и уравнения (14)

$$\frac{dr}{dt} = v_1(r\cos\,\varphi, r\sin\,\varphi)\cdot\cos\,\varphi + v_2(r\cos\,\varphi, r\sin\,\varphi)\cdot\sin\,\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}\big(-v_1(r\cos\,\varphi, r\sin\,\varphi)\cdot\sin\,\varphi + v_2(r\cos\,\varphi, r\sin\,\varphi)\cdot\cos\,\varphi,$$

откуда:

$$\frac{v_1(r\cos\,\varphi, r\sin\,\varphi)}{v_2(r\cos\,\varphi, r\sin\,\varphi)} = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \omega_1(r)\omega_2(\varphi)}{-1 - \operatorname{tg}\varphi\cdot\omega_1(r)\omega_2(\varphi)}.$$

Данное условие можно переписать в терминах исходных декартовых координат:

$$v_1(x,y) = \chi(x,y)\cdot\left(\frac{y}{x} - \omega_1\bigl(x^2+y^2\bigr)\omega_2\bigl(\frac{y}{x}\bigr)\right),$$

$$v_2(x,y) = \chi(x,y)\cdot\left(-1 - \frac{y}{x}\cdot\omega_1\bigl(x^2+y^2\bigr)\omega_2\bigl(\frac{y}{x}\bigr)\right).$$

Далее рассмотрим некоторые следствия полученной выше формулы преобразования.

а) Продемонстрируем условие разделения на примере 2–мерной системы Пуанкаре [11]. Если положить $\chi(x,y) = -x$, $\omega_1(x,y) = 1 - r^2$, $\omega_2(x,y) \equiv 1$, то имеем:

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Перейдем к полярной СК:

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -1$$

(разделение переменных очевидно), при этом $v_1/v_2 = \bigl(\operatorname{tg}\varphi + 1 - r^2\bigr)/\bigl(-1 + \operatorname{tg}\varphi\cdot(1 - r^2)\bigr)$. Фазовая траектория системы — устойчивый предельный цикл.

б) Можно получить картину динамической системы, имеющей несколько фазовых циклов: возьмем, например, $\omega_1(r) = (r^2-1)(r^2-4)$, $\omega_2 \equiv -1$. Таким образом, исходная система перепишется как

$$\frac{dr}{dt} = -r(r^2-1)(r^2-4), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -1,$$

и система приобретает два предельных цикла.

в) Если положить $\chi = -x$, $\omega_1 = \omega_1(r^2)$, $\omega_2 = -1$, то имеем систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y + x\omega_1(r^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y\omega_1(r^2),$$

а после перехода к полярным координатам:

$$\frac{dr}{dt} = -r\cdot\omega_1(r^2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = -1.$$

В данном случае легко привести пример динамической системы с бесконечным (счетным) числом циклов: для этого достаточно выбрать, например, $\omega_1(r^2) = \sin(r^2)$. Фазовый портрет последней системы состоит из совокупности концентрических орбит (на плоскости (x, y)), попеременно являющихся устойчивыми и неустойчивыми предельными циклами. Можно также рассмотреть случай $\omega_2 = -1$, $\omega_1(r^2) = \exp(-r^2)\sin(r^{-2})$ — для этого варианта можно наблюдать неограниченное сгущение предельных циклов при $r \to 0$, когда система (13) класса C^∞.

Пример 2. Рассмотрим примеры 2–мерных систем координат, которые возникают в комплексном анализе. Если $u(x, y) + iv(x, y)$ — голоморфная функция, так что функции u, v удовлетворяют условиям Коши–Римана $u'_x = v'_y$, $v'_x = -u'_y$, то имеем автоматически $(\nabla u, \nabla v) = 0$. Например, в квадратичном случае $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, и новые координаты: $\alpha(x, y) = x^2 - y^2$, $\beta(x, y) = 2xy$. Переменные разделяются, если:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{y + x\omega_1(x^2 - y^2)\omega_2(xy)}{x + y\omega_1(x^2 - y^2)\omega_2(xy)}.$$

В кубическом случае $\alpha(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $\beta = 3x^2y - y^3$, и условие разделение получается из (15) аналогичным образом.

Пример 3. Положим $\alpha(x, y) = y^2/2 + U(x)$ (аналог полной механической энергии, $U(x)$ — гладкая функция), тогда из условия ортогональности имеем $\nabla\beta = \big(1/U'(x),\ -1/y\big)$, откуда $\beta(x, y) = \int \big(U'(x)\big)^{-1} dx - \ln(y)$. Например, если в качестве "потенциала" выберем функцию $U(x) = (x^2 - 1)^2$ (потенциал Лифшица), то в этом случае получаем

$$\beta(x, y) = \ln\big(y^{-1}x^{-1/4}(x + 1)^{1/8}(x - 1)^{1/8}\big).$$

Если положить $\alpha(x, y) = y - x^2$, то условие ортогональности дает $\nabla\beta = \big(-(2x)^{-1},\ -1\big)$, откуда $\beta(x, y) = \ln\sqrt{1/x} - y$ (данный пример связывает предельные случаи псевдогамильтонова представления (16) для простейшего осцилляторного потенциала $U(x) = x^2/2$).

Итак, мы привели простейшие примеры, показывающие, как работает метод ГЯ в негамильтоновой ситуации. Приведем менее тривиальный пример, когда условие $(\nabla\alpha, \nabla\beta) = 0$ не выполняется.

Пример 4. Будем полагать $\alpha(x, y) = y^2/2 + U(x) \equiv E$, $\beta(x, y) = x$. Соответственно, $\omega_1 = \omega_1(E)$, $\omega_2(x, y) = 1$. Условие $(\nabla\alpha, \nabla\beta) = 0$ не выполняется. Получаем систему

$$\dot{x} = y - \beta'_y\omega_1(E) = y, \quad \dot{y} = -U'_x + \beta'_x\omega_1(E) = -U'_x + \omega_1(E).$$

Данная система примечательна тем, что позволяет использовать механическую интуицию для систем с гамильтонианом $H = y^2/2 + U(x)$. Фактически, в данном случае система получается из гамильтоновой, но имеет диссипативные свойства. Вышеприведенную систему можно привести к форме

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega_1\big(E(x, y)\big) + U'_x(x).$$

Возьмем один из возможных простейших случаев: $U(x) = x^2/2$, $\omega_1(E) = 1 - E$, $\omega_2(x, y) = 1$. Тогда система уравнений в старых координатах

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + 1 - x^2 - y^2$$

преобразуется в координатах (α, β) к системе

$$\dot{\alpha} = \pm\sqrt{\alpha - \beta^2}(1 - \alpha), \quad \dot{\beta} = \pm\sqrt{\alpha - \beta^2}.$$

Хотя система решается в новых координатах (α, β), поведение исходной системы выявляется не полностью: там имеются две стационарные точки, внешняя и внутренняя по отношению к предельному циклу. Внешняя точка седловая, поведение сепаратрисы по отношению к циклу в старых и новых координатах здесь различается. Возникающий в связи с этим комплекс вопросов, по–видимому, указывает на важность ортогональности новой системы координат.

Положим $\omega_1(\alpha) = \prod_{j=1}^{\ell}(\alpha - \alpha_j)$ — полином, аннулирующийся в k точках: $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_k)$, причем максимальный по модулю нуль α_k таков, что уравнение $U(x) = \alpha_k$ имеет ровно 2ℓ решений. Тогда вышеприведенная система имеет ровно $k\ell$ предельных циклов.

В частности, если $U(x) = \prod_{i=1}^{2}(x - x_i)^2$ (обобщенный потенциал Лифшица), то система обладает двумя предельными циклами.

Если же $\omega_1(E) = \exp\big(-\frac{1}{E^2}\big)\sin\big(\frac{1}{E}\big)$, то имеем счетное число циклов с уменьшающимся с ростом k радиусом $E_k = (\pi k)^{-1}$; при выборе $\omega_1(E) = \sin(E)$ радиусы предельных циклов $E_k = \pi k$ будут расти.

Переход к неортогональной системе координат явным образом проявляется в возможности изменения локальной геометрической структуры фазового портрета системы, а также площади соответствующих друг другу областей на фазовых портретах в старых и новых координатах: если якобиан преобразования $\mathfrak{D} = \partial(\alpha,\beta)/\partial(x,y) \neq 1$, то при необходимости перехода к переменным типа "действие–угол" ($\alpha = \widetilde{J}$, $\beta = \widetilde{w}$) следует учитывать масштабный фактор $|\mathfrak{D}|$.

Пример 5. Рассмотрим переход от декартовой системы (x, y) к новой системе координат (α, β), являющихся дробно–линейными преобразованиями старых:

$$\alpha(x,y) = \frac{y-a}{x-b}, \quad \beta(x,y) = \frac{y-c}{x-d}.$$

В этом случае, согласно общей формуле (15), имеем для простейшего случая $\Omega_1/\Omega_2 = A(= \mathrm{const})$:

$$v_1 = \chi(x,y)\big((x-b)^2(x-d) - A(x-b)(x-d)^2\big),$$

$$v_2 = \chi(x,y)\big((a-y)(x-d)^2 - A(c-y)(x-b)^2\big).$$

Выбирая призвольную функцию $\chi(x,y) = (x-b)^2(x-d)^2$, получаем, что тогда функции $v_{1,2}(x,y)$ имеют форму полиномов не выше 3–й степени. При этом, если считать $A \equiv 1$, то степени правых частей понижаются до 2–ой:

$$v_1 = (d-b)x^2 + (b^2 - a^2)x + bd^2 - b^2 d,$$

$$v_2 = (a-c)x^2 + (2cb - 2ad)x + (2d - 2b)xy + (b^2 - d^2) + ad^2 - cb^2.$$

2-ая возможность. Пусть старые переменные (x, y) заданы как функции новых переменных (α, β) (в общем случае, необратимые однозначно).

Тогда имеем $x = X(\alpha,\beta)$, $y = Y(\alpha,\beta)$, и, следовательно,

$$\dot{x} = X'_\alpha\dot{\alpha}+X'_\beta\dot{\beta} = V_1\big(X(\alpha,\beta),Y(\alpha,\beta)\big), \quad \dot{y} = Y'_\alpha\dot{\alpha}+Y'_\beta\dot{\beta} = V_2\big(X(\alpha,\beta),Y(\alpha,\beta)\big).$$

Отсюда, после решения системы линейных алгебраических уравнений (относительно переменных $\dot{\alpha},\dot{\beta}$, с правыми частями V_1,V_2), и деления $\dot{\beta}/\dot{\alpha} \equiv (d\beta/dt)/(d\alpha/dt)$, получаем окончательно

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{X'_\alpha V_2 - Y'_\alpha V_1}{X'_\alpha Y'_\beta - Y'_\alpha X'_\beta} \equiv \frac{\Omega_1}{\Omega_2}.$$

Приравнивая правую часть произведению $\omega_1(\alpha)\omega_2(\beta)$, получаем условие разделения переменных в новых координатах (α,β):

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Y'_\beta\omega_1\omega_2 + X'_\beta}{Y'_\alpha\omega_1\omega_2 + X'_\alpha}. \tag{18}$$

Какой практический смысл от получения явного вида правых частей системы ОДУ (13) в такой форме? Фактически здесь мы следуем вышерассмотренной идеологии метода ГЯ в общем негамильтоновом случае — "второй составляющей" этого метода мы определили набор точно решаемых уравнений. Условие на явный вид $V_{1,2}(X,Y)$ дает нам вид единицы такого набора в самом общем случае, так что для нахождения новой системы координат (α,β), при переходе к которой соответствующий аналог системы уравнений (13) (т. е. $\dot{\alpha} = V_1(\alpha,\beta), \dot{\beta} = V_2(\alpha,\beta)$) может быть решен разделением переменных, необходимо, чтобы правые части удовлетворяли условию (18).

5. Разделение переменных в случае трех и более переменных

Действуем аналогично вышеизложенному, стартуя с системы трех произвольных (в общем случае нелинейных) ОДУ

$$\dot{x} = v_1(x,y,z), \quad \dot{y} = v_2(x,y,z), \quad \dot{z} = v_3(x,y,z).$$

Переход к новым координатам $\alpha(x,y,z)$, $\beta(x,y,z)$, $\gamma(x,y,z)$ дает систему линейных алгебраических уравнений относительно v_1, v_2, v_3:

$$\dot{\alpha} = \alpha'_x v_1 + \alpha'_y v_2 + \alpha'_z v_3 = (\nabla\alpha,\mathbf{v}) = \Omega_1, \quad (\nabla\beta,\mathbf{v}) = \Omega_2, \quad (\nabla\gamma,\mathbf{v}) = \Omega_3.$$

Ответ запишется в виде отношения определителей:

$$\mathbf{v} = -\chi^{-1} \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \Omega_1 & \alpha'_x & \alpha'_y & \alpha'_z \\ \Omega_2 & \beta'_x & \beta'_y & \beta'_z \\ \Omega_3 & \gamma'_x & \gamma'_y & \gamma'_z \end{vmatrix}, \quad \chi = \det|\nabla\alpha, \nabla\beta, \nabla\gamma|^T,$$

или, после разложения 2–го множителя по первому столбцу:

$$\mathbf{v} = \frac{\Omega_1(\alpha,\beta,\gamma)}{\chi} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \beta'_x & \beta'_y & \beta'_z \\ \gamma'_x & \gamma'_y & \gamma'_z \end{vmatrix} - \frac{\Omega_2(\alpha,\beta,\gamma)}{\chi} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \alpha'_x & \alpha'_y & \alpha'_z \\ \gamma'_x & \gamma'_y & \gamma'_z \end{vmatrix} + \frac{\Omega_3(\alpha,\beta,\gamma)}{\chi} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \alpha'_x & \alpha'_y & \alpha'_z \\ \beta'_x & \beta'_y & \beta'_z \end{vmatrix}, \tag{19}$$

где функции $\Omega_{i=1,2,3}(\alpha,\beta,\gamma)$ суть правые части исследуемых автономных дифференциальных уравнений в новых переменных (α,β,γ).

Отметим, что такая форма записи легко обобщается на n–мерный случай:

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\chi} \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 & ... & \mathbf{e}_n \\ \Omega_1 & \partial_1\alpha_1 & ... & \partial_n\alpha_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ \Omega_n & \partial_1\alpha_n & ... & \partial_n\alpha_n \end{vmatrix} = \frac{1}{\chi}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\Omega_k \begin{vmatrix} \mathbf{e} \\ \nabla\alpha_1 \\ ... \\ [\nabla\alpha_k] \\ ... \\ \nabla\alpha_n \end{vmatrix},$$

где строка $[\nabla\alpha_k]$ в квадратных скобках отсутствует.

Мы полностью решили "задачу Гамильтона–Якоби" в негамильтоновой ситуации: для данной замены переменных $\alpha_1(\mathbf{x}), ..., \alpha_n(\mathbf{x})$ найти все системы, которые решаются (например, разделяются) в квадратурах. Для это надо в качестве "точно решаемой" взять систему

$$\frac{d\alpha_i}{d\alpha_1} = \frac{\Omega_i(\alpha_1, ..., \alpha_k)}{\Omega_1(\alpha, ..., \alpha_k)}. \tag{18}$$

6. Заключение

Таким образом, обобщение метода Гамильтона–Якоби на негамильтонову ситуацию оказывается даже проще, чем "классический" метод ГЯ. В роли уравнения ГЯ выступает любое из следствий уравнений гидродинамического типа (12) в стационарном случае. Мы выбрали простейшее $m = 1$. В роли точно решаемого ("интегрируемого по Лиувиллю" или "допускающего переменные действие–угол") уравнения — любое таковое, например, с разделяющимися переменными или линейное. Для любого такого точно решаемого уравнения (18), получается набор уравнений (8) с запасом произвольных функций: $\alpha_1(\mathbf{x}), ..., \alpha_n(\mathbf{x})$. Замена переменных оказывается более общей (чем в гамильтоновом случае) заменой переменных, так что можно не заботиться о каноничности замены, и ситуация снова упрощается. Отметим, что в 2–мерном случае $m = 1$ — единственный выбор, и мы построили примеры систем с конечным и бесконечным числом предельных циклов. В случае $n > 2$ открывается больше возможностей.

Список литературы

[1] Власов А.А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.

[2] Бом Д. Общая теория коллективных переменных. М.: Мир, 1964. 152 с.

[3] Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001. 112 с.

[4] Козлов В.В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестник Моск. ун–та. Сер. Матем. Механ., 1983, вып. 6, с. 10–22.

[5] Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995. 429 с.

[6] Козлов В.В. Общая теория вихрей. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1998. 238 с.

[7] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.–Л.: ГИТТЛ. 1950. 677 с.

[8] Веденяпин В.В., Фимин Н.Н. Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона–Якоби // Доклады РАН, 2012, Т. 446, вып. 2. с. 142–144.

[9] Веденяпин В.В., Негматов М.А. О топологии гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби // Доклады РАН, 2013, Т. 449, вып. 5, с. 521–526.

[10] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Изд. 4-ое. М.: Наука, 1988. 216 с.

[11] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1947. 448 с.