



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 23 за 2015 г.



Суков С.А.

Методы генерации
тетраэдральных сеток и их
программные реализации

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Суков С.А. Методы генерации тетраэдральных сеток и их программные реализации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 23. 22 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-23>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

С.А.Суков

**Методы генерации
тетраэдральных сеток
и их программные реализации**

Москва — 2015

Суков С.А.

Методы генерации тетраэдральных сеток и их программные реализации

Рассмотрены характерные особенности и направления оптимизации алгоритмов генерации тетраэдральных сеток и их программных реализаций. Сформулированы новые методы оценки распределения сеточных узлов. Приведены результаты тестирования равномерных сеток, построенных генераторами GAMBIT и ICEM.

Ключевые слова: пространственная триангуляция, тетраэдральные сетки, численное моделирование

Sergey Alexandrovich Sukov

Tetrahedral mesh generation algorithms and applications

This paper describes the main features and drawbacks of the most used tetrahedral mesh generation algorithms and applications. The new methods for checking quality of the mesh nodes distribution are introduced. The test results for the two uniform meshes generated by GAMBIT and ICEM are given.

Key words: triangulation in 3D, tetrahedral mesh, numerical simulation

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №№ 15-07-04213-а, 15-01-04620-а, 14-07-00712-а.

Оглавление

Введение	3
Методы пространственной триангуляции многогранных областей произвольной формы	3
Постановка тестовой задачи.....	13
Критерии оценки качества сетки	14
Результаты сравнительного тестирования.....	18
Заключение.....	20
Список литературы.....	21

Введение

В современной научно-исследовательской деятельности большое внимание уделяется развитию методов численного моделирования физических процессов в областях сложной геометрии. Сюда относятся расчеты газодинамического обтекания тел, распространения акустических возмущений в жидкости и газе и другие актуальные как с точки зрения фундаментальных исследований, так и практических приложений задачи. Пространственная триангуляция – наиболее универсальный метод построения локально сгущающихся расчетных сеток внутри многосвязных областей произвольной формы. За прошедшие с начала исследований данной проблемы, как минимум, два десятилетия в литературе не было опубликовано описания ни одного гарантированно сходящегося алгоритма построения тетраэдризации внутри многогранников, заданных триангуляцией границ. Тем не менее, существует несколько в основном хорошо зарекомендовавших себя методов построения тетраэдральных сеток [1, 2, 3] и соответствующих им методов обработки ситуаций закливания основного алгоритма [4, 5]. Поэтому неформально проблема считается решенной, а усилия разработчиков сконцентрированы на создании программного обеспечения, поддерживающего генерацию подробных сеток. Однако точность результатов компьютерного моделирования зависит, естественно, не только от размера, но и от формы сеточных ячеек. На вырожденных (то есть сильно деформированных или значительно отличающихся по форме от правильных тетраэдров) элементах численные методы, как правило, теряют свои аппроксимационные свойства. С этой точки зрения результаты работы существующих генераторов оказываются неоднозначными. Сетки содержат в себе как элементы с высокой степенью деформации, так и элементы, размер которых отличен от заданной пользователем величины. В данной работе представлен обзор востребованных при разработке программного обеспечения методов построения тетраэдральных сеток, а также анализ этих методов на предмет возможности и основных направлений их оптимизации с целью повышения качества элементов генерируемых сеток. Сформулированы оригинальные критерии оценки качества распределения сеточных узлов. Приводятся сравнительные результаты тестирования двух равномерных тетраэдральных сеток, построенных широко используемыми на практике генераторами.

Методы пространственной триангуляции многогранных областей произвольной формы

Существующие тетраэдральные генераторы характеризуются развитым интерфейсом пользователя, практически гарантированной сходимостью на невырожденных примерах и высокой производительностью. Быстродействие, возможность обработки больших объемов данных и существование версии,

адаптированной к запуску на высокопроизводительных системах, – своего рода "тренд" при создании исследовательского программного обеспечения.

Быстродействие сеточного генератора (число генерируемых сеточных элементов в единицу времени) зависит от ресурсоемкости реализованного в ядре алгоритма, а также методов хранения и кэширования данных. Основная идея применяемых методов кэширования состоит в упорядочивании данных в соответствии с многоуровневой декомпозицией триангулируемого объекта на подобласти. Вычислительная сложность эффективных алгоритмов тетраэдризации достаточно высокая. Поэтому повышение быстродействия ядра достигается преимущественно упрощением логики исходного алгоритма, что, естественно, отрицательно сказывается на качестве генерируемых сеток. Стоит отметить, что изначально программная реализация упрощенных алгоритмов объяснялась низкой производительностью вычислительной техники. За прошедшее время производительность ЭВМ многократно возросла, но используется в большей степени как инструмент для генерации подробных многомиллионных сеток. С качественной же точки зрения результат остался практически на прежнем уровне.

Степень влияния отклонения формы элементов сетки от формы правильного многогранника на точность результата моделирования во многом зависит от особенностей применяемого численного метода. В большинстве случаев незначительное изменение формы элементов не сказывается на результатах расчетов. В то же время достаточно часто тетраэдрами заполняют области дальнего поля, где высокая точность решения не является обязательной. Поэтому реализация ресурсоемких алгоритмов тетраэдризации с практической точки зрения отчасти теряет смысл. Кроме того, в общем случае нельзя построить сетку, состоящую из правильных тетраэдров. Телесный угол при вершине правильного тетраэдра не кратен полному телесному углу. Поэтому любая сетка, содержащая в себе хотя бы один внутренний узел, всегда будет содержать в себе элементы отличной от правильного тетраэдра формы. То есть задача построения тетраэдральной сетки изначально имеет оптимизационный характер.

На практике деформация даже отдельных сеточных ячеек влияет не только на точность результата моделирования, но и отрицательно сказывается на продолжительности расчета. Шаг интегрирования по времени прямопропорционален минимальному характерному размеру сеточной ячейки. Это может быть минимальная высота тетраэдра, длина наименьшего из его ребер и т.д. Поэтому деформация тетраэдров или уход от заданной точности разрешения пространства в сторону локального сгущения приводят к уменьшению характерного размера элементов, снижению величины шага интегрирования по времени, увеличению общего числа шагов интегрирования, а, следовательно, и росту времени расчета в целом.

Доля затрат времени на генерацию дискретной модели, как этапа вычислительного эксперимента, в десятки раз меньше времени, затрачиваемого

в дальнейшем на сам расчет, анализ и визуализацию результатов. Например, время генерации тетраэдральной сетки, содержащей порядка миллиона элементов, не превосходит нескольких минут, а характерное время численного расчета кратно уже десяткам часов. Поэтому с точки зрения численного моделирования задач математической физики повышение быстродействия генератора, сопровождающееся появлением вырожденных сеточных элементов, оказывается практически нецелесообразным. Так, деформация со снижением характерного размера элемента на 10% увеличит объем вычислений на 11%, что есть 2.67 часа на сутки машинного времени относительно расчета на некоторой условно оптимальной сетке.

Качество отдельного сеточного элемента принято оценивать путем вычисления характеристического параметра Q , значение которого зависит от формы тетраэдра, и последующего сравнения результата со значением аналогичного параметра у правильного тетраэдра. Для большей ясности значение критерия преобразуют таким образом, чтобы нормированная величина $\bar{Q}$ находилась на интервале $\bar{Q} \in (0,1]$, а значение $\bar{Q} = 1$ соответствовало бы правильному тетраэдру. Качество сетки в целом вычисляется как среднее арифметическое значений критериев качества ее элементов или же приравнивается наихудшему среди них. Но ни тот ни другой варианты не дают развернутого представления о перспективах использования сетки для численных расчетов. В этом смысле наиболее информативна диаграмма распределения количества сеточных элементов по подинтервалам значений критерия качества.

Нужно так же отметить, что общепринятые критерии оценки качества тетраэдров (табл. 1) лишь условно отражают степень близости к элементу правильной формы и не эквивалентны между собой.

Таблица 1

Критерий	Формула определения значения	Интервал возможных значений / оптимальное значение	Формула определения нормированной величины
Соотношение радиусов описанной (R) и вписанной (r) сфер	$Q^R = \frac{R}{r}$	$[3; +\infty) / 3$	$\bar{Q}^R = \frac{3}{Q^R}$
Максимальный двугранный угол	$Q^D = \min \delta$	$[\arccos \frac{1}{3}; \pi) / \arccos \frac{1}{3}$	$\bar{Q}^D = 1 - \frac{Q^D - \arccos \frac{1}{3}}{\pi - \arccos \frac{1}{3}}$
Минимальный телесный угол	$Q^S = \max \theta$	$(0; \arccos \frac{23}{27}] / \arccos \frac{23}{27}$	$\bar{Q}^S = \frac{Q^S}{\arccos \frac{23}{27}}$

На рис. 1 представлены графики зависимости трех различных критериев качества (табл. 1) от нормированной высоты $H_n \in [0.05, 2.0]$ тетраэдра, построенного на основании правильного треугольника с ребром единичной длины и четвертой вершиной, проекция которой на основание попадает в центр его масс. Нормированная высота вычисляется как $H_n = H_t/H_{opt}$, где H_t – расстояние от четвертой вершины тетраэдра до основания, а $H_{opt} = \sqrt{2/3}$ – высота правильного тетраэдра с ребром единичной длины.

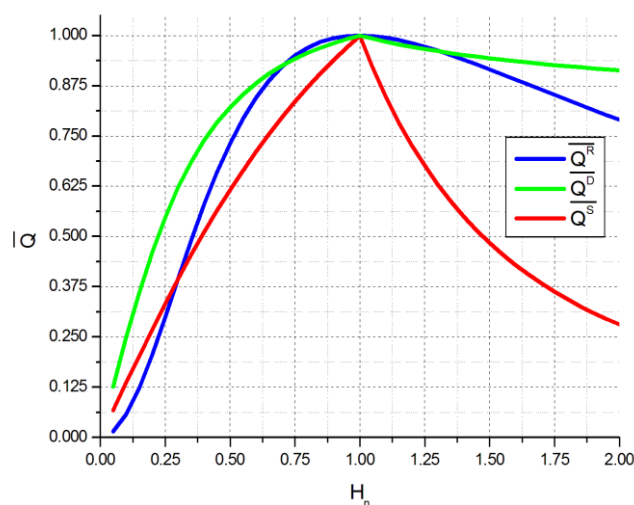


Рис. 1. Графики значений критериев оценки качества тетраэдра

Видно, что поведение функций $\overline{Q^R}$ и $\overline{Q^D}$ при $H_n > 1$ достаточно серьезно отличается от функции $\overline{Q^S}$. Кроме того, опираясь на приведенные в табл. 2 данные можно говорить о расхождении значений параметров в принципе. Таким образом, с точки зрения тестирования сетки на предмет эффективности ее использования в численных расчетах целесообразно использовать критерии, учитывающие особенности конкретного вычислительного алгоритма.

Таблица 2

	H/H_{opt}									
	0.05	0.2	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$\overline{Q^R}$	0.15	0.21	0.58	0.85	0.97	0.98	0.94	0.89	0.84	0.79
$\overline{Q^D}$	0.13	0.46	0.74	0.88	0.96	0.97	0.95	0.94	0.92	0.91
$\overline{Q^S}$	0.07	0.27	0.51	0.71	0.87	0.73	0.55	0.43	0.34	0.28

Близость геометрии элементов конформных в смысле связности сеток к правильным тетраэдрам зависит от двух факторов. Это метод заполнения триангулируемой области узлами и алгоритм построения сеточных ячеек на заданном множестве узлов. Определяющее значение здесь имеет первый пункт.

На множестве узлов равномерной треугольной сетки можно построить альтернативную сетку, содержащую тупоугольные элементы, но нельзя в общем случае построить равномерную сетку на сгенерированном случайным образом множестве узлов.

На сегодня уже существует достаточное число программных реализаций концептуально похожих методов заполнения многогранных областей узлами (например, [6]). Узлы первоначального распределения уподобляются физическим объектам (молекулам, заряженным частицам, окружностям и т.д.), взаимодействующим посредством сил взаимного притяжения и отталкивания. Под действием этих сил узлы перемещаются в заданном пространстве до тех пор, пока система не придет к равновесному состоянию. Затем выполняется анализ полученного распределения, по результатам которого численность узлов может быть скорректирована. В таком случае процедура оптимизации повторяется вновь и так далее до тех пор, пока не будет получено распределение, удовлетворяющее установленным критериям.

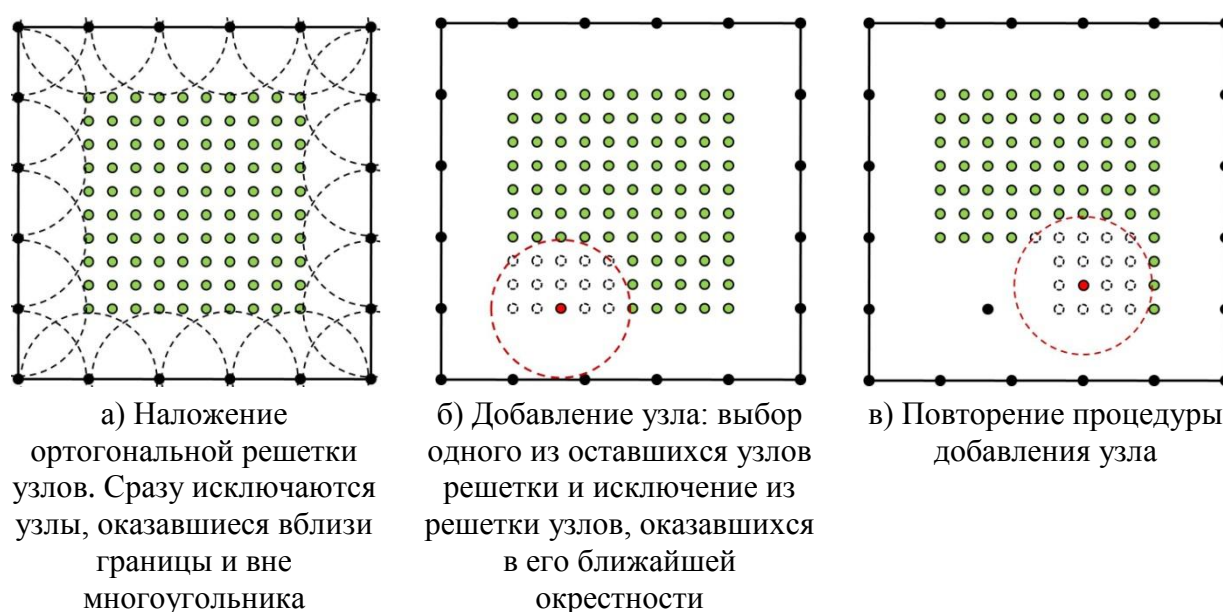


Рис. 2. Пример алгоритма генерации начального распределения узлов

Эффективность алгоритма инициализации начального распределения узлов имеет большое значение: чем оно ближе к оптимальному, тем меньше преобразований потребуется в дальнейшем. Однако по постановке данная задача аналогична основной, для которой не существует одновременно и эффективного и быстрого метода решения. Поэтому здесь есть смысл применять какой-либо логически простой и быстрый алгоритм. Например, поместить многоугольник внутрь ортогональной решетки высокого разрешения, и затем генерировать начальное распределение циклически добавляя в него один из узлов решетки и одновременно удаляя из самой решетки выбранный узел и его ближайшее окружение, радиус которого определяется сеточным шагом (рис. 2). Варианты реализации данного подхода

(например, [7]) отличаются алгоритмами выбора добавляемого в сетку узла из оставшихся узлов решетки.

Движение узлов (рис. 3) описывается, как правило, уравнением вида

$$m_i a_i + c v_i = f_i,$$

где f_i – суммарная сила взаимодействия i -го сеточного узла с другими узлами, m_i – масса узла или ее аналог, a_i и v_i – ускорение и скорость движения узла, а c – коэффициент вязкости. Помимо основной силы f на узлы дополнительно действует сила сопротивления движению (сила вязкости), величина которой зависит от скорости движения узла, а направление противоположно вектору скорости. Сила вязкости используется для того, чтобы узлы множества с течением времени могли занять устойчивое положение, а именно совершали бы незначительные колебания вблизи некоторого положения равновесия. Иначе, как показывает практика, система практически не имеет шансов стабилизироваться. Помимо конкретных значений коэффициентов уравнения движения и формулы вычисления силы f большое влияние на результат оптимизации оказывает такой параметр, как максимальный радиус взаимодействия узлов.

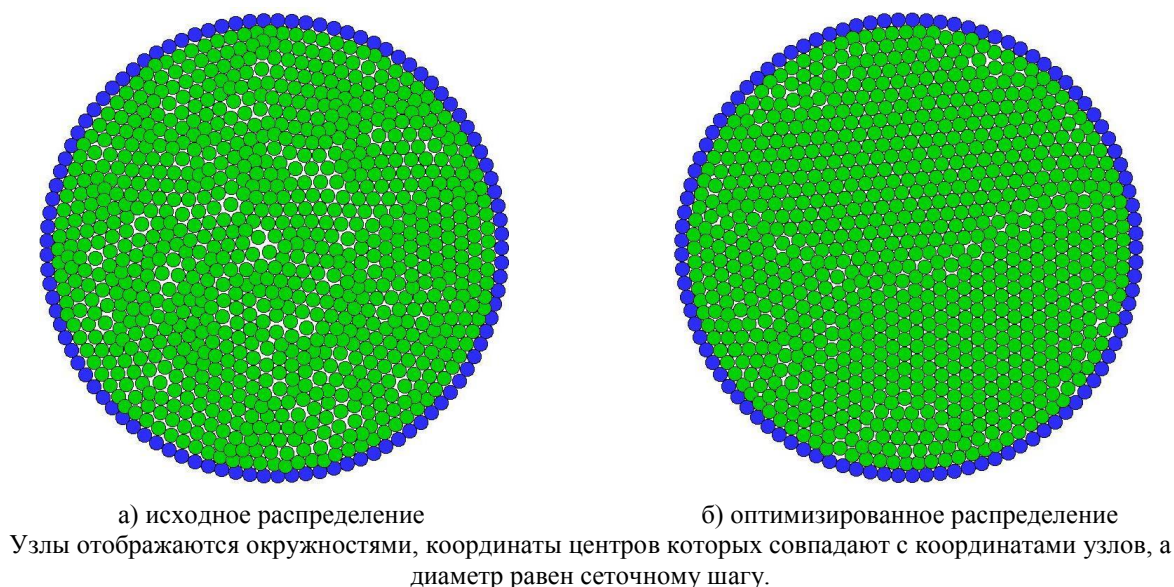


Рис. 3. Пример оптимизации распределения узлов в результате их движения под действием сил взаимного притяжения и отталкивания

Корректировка численности узлов осуществляется на основе анализа локальной плотности их распределения. Наиболее эффективно в этом смысле вычислять коэффициент связности узла α . То есть параметр, значение которого отражает взаимное расстояние и число узлов, находящихся в ближайшей окрестности рассматриваемой вершины. Например, в работе [8] коэффициент связности i -го узла равномерной треугольной сетки с шагом h предлагается вычислять по формуле

$$\alpha_i = \frac{2}{h} \sum_{j=1}^n \left(\frac{3}{2}h - |\overline{x_i x_j}| \right),$$

где x_i – координата i -го сеточного узла, в ближайшую окрестность которого попадает n узлов с удовлетворяющими условию $|\overline{x_i x_j}| < \frac{3}{2}h$ координатами.

Если коэффициент связности внутреннего узла оказывается ниже оптимальной величины, то в его окрестности добавляется новый сеточный узел. Если коэффициент связности узла выше максимального порога – требуется удалить один из узлов в окрестности или же его самого (рис. 4).

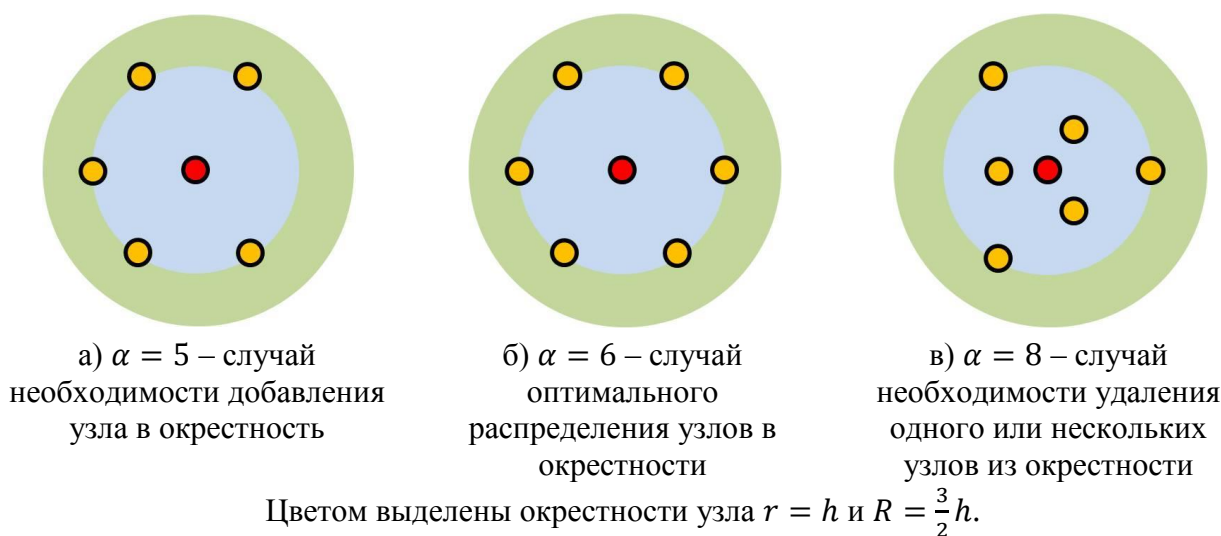


Рис. 4. Примеры различных с точки зрения оптимизации вариантов распределения узлов

Добавление и удаление узлов должно быть согласованным. Поэтому после каждого локального преобразования численности, как минимум, пересчитываются значения коэффициентов связности близлежащих узлов. А в идеале происходит и локальная оптимизация их взаимного расположения. Вторая проблема состоит в определении координаты добавляемого узла и выборе узла, который удаляется из сетки. Оптимальная численность узлов – необходимое условие для получения качественного решения задачи. До этого момента суть всех преобразований будет сводиться к выявлению разреженных и перенасыщенных узлами областей.

Опираясь на существующий опыт решения задач молекулярного моделирования можно утверждать, что сравнительное быстрое действие программной реализации описанного выше метода генерации распределения узлов окажется на посредственном уровне. Только однократная оптимизация координат полумиллиона сеточных узлов в трехмерном пространстве без последующей корректировки численности потребует времени больше, чем генерация сетки в целом существующими методами. Поэтому на практике итерационный метод заполнения области узлами применяется крайне редко.

Большинство из программно реализованных методов тетраэдризации основывается на идее добавления узлов внутрь некоторой уже существующей сетки. Предполагается, что первичным разбиением должна быть сетка, построенная строго на узлах и элементах поверхностной триангуляции границ области. Далее внутрь этой тетраэдризации циклически вбрасываются сеточные узлы. Добавление узла сопровождается локальным перестроением сеточных элементов в его окрестности (рис. 5). Критерием перестроения может быть условие исключения попадания вершин внутрь описанных вокруг элементов сфер (триангуляция Делоне), соотношение радиусов описанной и вписанной сфер и т.д. Главное практическое преимущество такого подхода заключается в его гарантированной сходимости. То есть задачу построения сетки можно считать решенной по завершении инициализации грубой триангуляции на поверхностных элементах.

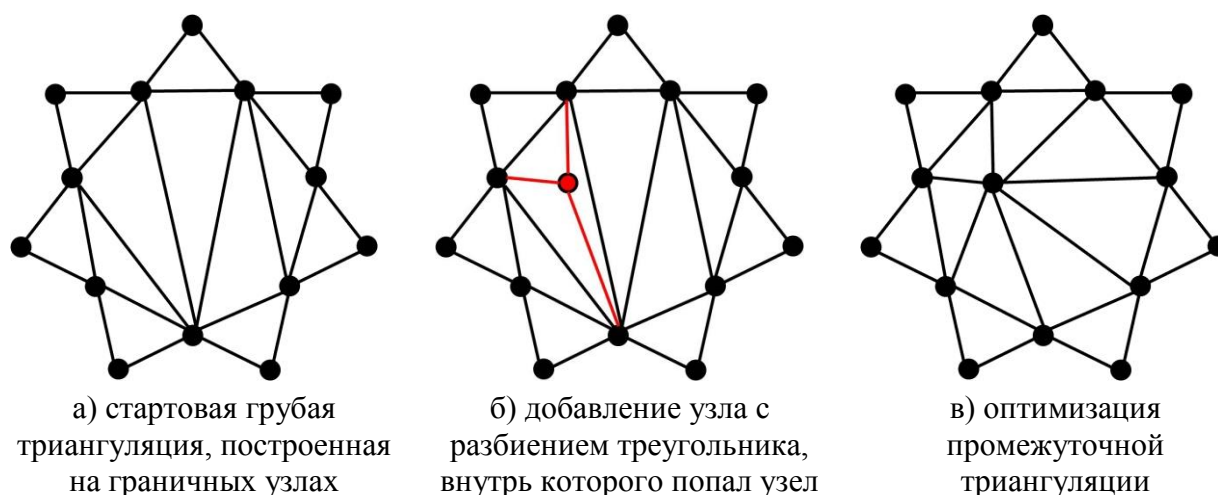
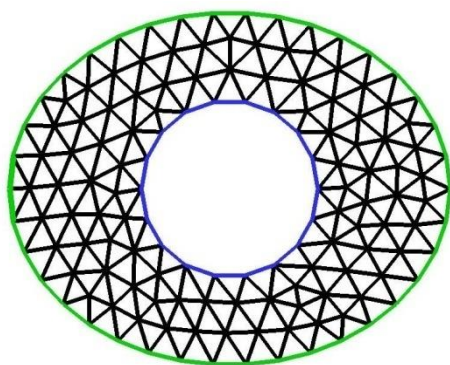


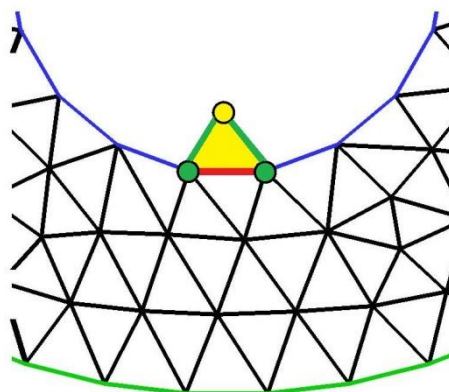
Рис. 5. Добавление узла в грубую триангуляцию

Выше неявно подразумевается, что множество вбрасываемых сеточных узлов генерируется заранее. Предварительная генерация множества дает возможность определить оптимальную с точки зрения минимизации вспомогательных преобразований последовательность добавления узлов. С другой стороны соблюдение данного условия вовсе не является обязательным, поскольку добавление узлов происходит поочередно. То есть координаты узлов могут вычисляться прямо в процессе создания сетки. Один из вариантов реализации подобного подхода базируется на использовании принципов метода движущегося фронта [9]. Позиция нового узла выбирается как оптимальная позиция недостающей вершины тетраэдра, строящегося на заданном основании. В оригинальной формулировке метод движущегося фронта предполагает четкое разделение области на уже триангулированную и пустую зоны, треугольники на границе между которыми могут стать основанием добавляемых в пустую зону тетраэдров (рис. 6). Главный недостаток данного метода заключается в вероятности возникновения “неразбиваемых” тел. К ним

относятся такие конфигурации фронта, где его продвижение невозможно без добавления новых вершин, а добавление новых вершин приводит к появлению вырожденных элементов и не исключает возможности повторения аналогичных коллизий в дальнейшем. При наличии же грубой тетраэдризации объема проблемы сходимости нет. Необходимо лишь выделить виртуальный фронт из граней тетраэдров промежуточной сетки.



а) Общий вид триангулируемой области: зеленая линия – граница области, синяя – текущий фронт, черные линии – ребра элементов уже построенной сетки



б) Добавление узла с продвижением фронта

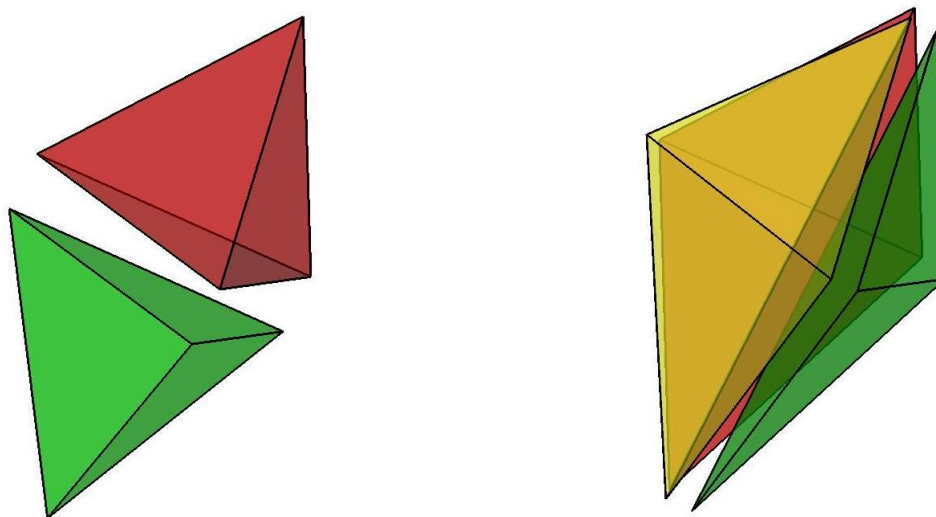
Рис. 6. Построение сетки на основе метода движущегося фронта

Второй недостаток метода движущегося фронта состоит в том, что координата четвертой вершины тетраэдра есть функция, зависящая исключительно от координат вершин треугольника-основания. Следовательно вычисленная таким образом координата оптимальна исключительно в отношении одного тетраэдра и трех узлов промежуточной сетки. Взаимное расположение нового узла относительно уже существующих вершин оценивается, как правило, на уровне сравнения расстояния между ними с некоторой минимальной величиной. Поэтому внутри многогранника возможно появление подобластей с распределением узлов, на котором в принципе невозможно построить тетраэдры хорошего качества. В то же время реализация алгоритма, учитывающего расположение всех узлов в окрестности оптимальной позиции четвертой вершины, не дает каких-либо значимых преимуществ. Фронт движется внутрь пустой области. Поэтому в большинстве случаев позиция добавляемого узла будет скорректирована только со стороны фронта и с целью повышения качества элементов промежуточной сетки. Наиболее стабильным в смысле эффективности результата методом генерации распределения сеточных узлов может быть только подход, основанный на глобальной оптимизации координат узлов начального распределения.

Завершающим этапом работы любого сеточного генератора становится этап глобальной оптимизации сетки (например, [10, 11]). Необходимость данной процедуры объясняется возможными упрощениями алгоритма

генерации или же неоднозначностью базового критерия качества. Так, например, в тетраэдризации, отвечающей критерию Делоне, возможно присутствие вырожденных тетраэдров, вершины которых находятся на поверхности одной сферы вблизи ее экватора.

Основной метод оптимизации состоит в локальной ретриангуляции многогранников, построенных на одной из фиксированных комбинаций сеточных элементов. В двумерном случае это выбор одного из двух вариантов триангуляции четырехугольника, построенного на двух треугольниках с общим ребром. В трехмерном случае речь, как правило, идет о декомпозиции шестигранника (рис. 7) или восьмигранника, но возможны и более сложные варианты. Основное отличие построенных по этому принципу алгоритмов состоит в формализации процедуры перестроения и критериях оценки альтернативных вариантов декомпозиции. Так, например, в широко известной работе [12] базовым сеточным примитивом считается треугольная грань. Грань остается в сетке, если ни одно из фиксированных преобразований содержащих ее многогранников не улучшает минимальное значение критериев качества соответствующей комбинации тетраэдров. Быстродействие программной реализации алгоритма здесь определяется числом и топологической сложностью вариантов построения многогранников на рассматриваемом примитиве. Но конечный результат все равно зависит от очередности выполнения преобразований и не всегда сходится к условно оптимальному решению. Поэтому в сетке могут оставаться тетраэдры с низким значением критерия качества.



а) декомпозиция на два тетраэдра

б) декомпозиция на три тетраэдра

Рис. 7. Варианты декомпозиции шестигранника

В таком случае для преобразования вырожденных элементов возможно применение методов, связанных с корректировкой численности узлов. Их суть заключается в разбиении элементов плохого качества посредством добавления

узлов на сеточные ребра, грани и внутрь тетраэдров. Обратный прием состоит в удалении тетраэдров и узлов в результате стягивания сеточных примитивов в точку.

Сдвиг вершин без изменения топологической структуры с целью улучшения качества элементов триангуляции применяется только в исключительных случаях. Например, для корректировки трехгранных углов минимальной величины. Один их характерных приемов – сглаживание по Лапласу [13], когда узел движется в направлении центра масс многогранника, сформированного из опирающихся на него сеточных ячеек. Недостаток метода состоит в том, что в процессе перемещения узла может произойти вырождение сеточных элементов. Кроме того, процедура оказывается сильно зависимой от топологической связности. Для решения этих проблем движение узлов должно сопровождаться, как минимум, локальной ретриангуляцией, что многократно увеличивает вычислительную сложность алгоритма.

Резюмируя представленный выше обзор, можно отметить, что основная проблема существующих генераторов тетраэдральных сеток заключается в реализации упрощенных подходов к решению задачи поиска оптимального распределения сеточных узлов. Построенная на полученном таким образом множестве узлов сетка может содержать в себе элементы плохого качества. Декомпозиция вырожденных элементов приводит к сгущению сетки относительно заданного пользователем шага. При последующем тестировании этот момент не учитывается, поскольку практически все варианты оценки основываются исключительно на вычислении показателя степени деформации тетраэдров. Между тем, взаимное расположение узлов и объемы ячеек должны соответствовать заданной пользователем функции. Несоответствие сетки установленным параметрам приводит к росту объема вычислений, а с точки зрения фундаментальных исследований искажает оценку точности численного метода.

Постановка тестовой задачи

Далее проанализируем результаты работы двух генераторов тетраэдральных сеток GAMBIT [14] и ICEM [15]. В качестве референсной задачи требуется построить равномерную тетраэдральную сетку с шагом $h=1/64$ внутри правильного тетраэдра с ребром единичной длины. Помимо сравнения двух сеток между собой здесь принципиально оценить и их отклонение от оптимального метода триангуляции области. То есть сетки, элементы которой по форме будут максимально близки к правильным тетраэдрам с ребром длины h . В качестве такой условно оптимальной сетки возьмем дискретную модель, полученную путем равномерного измельчения правильного тетраэдра.

Измельчение сетки представляет собой циклический процесс с промежуточным преобразованием тетраэдральной сетки к сетке «смешанного» типа, состоящей из тетраэдров и октаэдров, и добавлением на каждом шаге узлов на середины ребер сетки и в центры масс восьмигранников. В результате

декомпозиции каждый тетраэдр распадается на четыре тетраэдра и октаэдр, а октаэдр – на восемь тетраэдров и шесть октаэдров. В финале процедуры измельчения октаэдры разбиваются на четыре тетраэдра (рис. 8). В рассматриваемом случае шестикратной декомпозиции правильного тетраэдра сетка будет состоять из равных по объему 87424 правильных тетраэдров и 174720 тетраэдров, полученных разбиением правильного октаэдра.

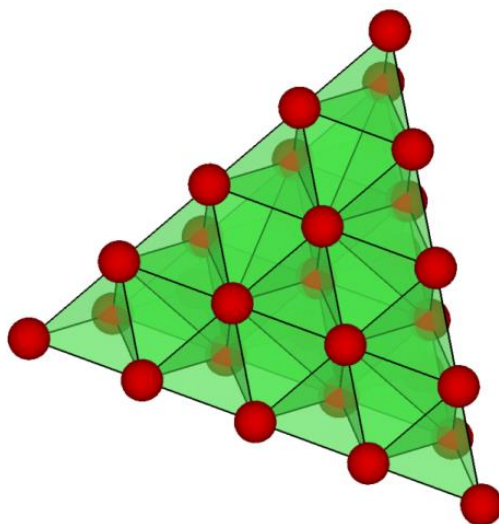


Рис. 8. Сетка, построенная двукратным измельчением правильного тетраэдра

Критерии оценки качества сетки

Критерии оценки качества сетки, отдельных сеточных элементов и формулы для их вычисления перечислены в табл. 3. Число тетраэдров равномерной сетки должно стремиться к

$$N_E = \frac{V_{AREA}}{V_{OPT}},$$

где V_{AREA} – объем триангулируемого многогранника. Корректно проанализировать отклонение объемов сеточных элементов от объема правильного тетраэдра V_{OPT} возможно только построив соответствующую диаграмму распределения. Сопутствующая грубая оценка отклонений объемов основывается на вычислении осредненного отклонения D_V , а так же минимального V_{MESH}^{min} и максимального V_{MESH}^{max} среди объемов сеточных элементов. Для большей ясности объемы и другие характеристические параметры нормируются на соответствующие размеры правильного тетраэдра с ребром длины h .

Качество сеточных элементов проверяется по трем нормированным критериям отношения радиусов описанной и вписанной сфер, максимального двугранного и минимального телесного углов. Соответствующий критерий качества сетки в целом равен среднему арифметическому значению критериев качества тетраэдров.

Таблица 3

Критерий	Обозначение	Формула для вычисления
Число сеточных вершин	N_V	
Число сеточных элементов	N_E	
Шаг сетки	h	1/64
Оптимальная высота тетраэдра	H_{OPT}	$H_{OPT} = \sqrt{\frac{2}{3}}h$
Минимальная высота тетраэдра	H_i	
Минимальная относительная высота среди тетраэдров сетки	H_{MESH}	$H_{MESH} = \frac{\min_{i=1...N_E} H_i}{H_{OPT}}$
Оптимальный объем тетраэдра	V_{OPT}	$V_{OPT} = \frac{\sqrt{2}}{12}h^3$
Объем тетраэдра	V_i	
Минимальный относительный объем среди тетраэдров сетки	V_{MESH}^{min}	$V_{MESH}^{min} = \frac{\min_{i=1...N_E} V_i}{V_{OPT}}$
Максимальный относительный объем среди тетраэдров сетки	V_{MESH}^{max}	$V_{MESH}^{max} = \frac{\max_{i=1...N_E} V_i}{V_{OPT}}$
Расстояние между i-м и j-м сеточными узлами	L_{ij}	$L_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$
Нормированное значение критерия качества CR (CR = R, D, S) тетраэдра	$\overline{Q_i^{CR}}$	Формулы в табл. 1
Минимальное нормированное значение критерия качества элемента	$\overline{Q_{min}^{CR}}$	$\overline{Q_{min}^{CR}} = \min_{i=1...N_E} \overline{Q_i^{CR}}$
Осредненное значение нормированного критерия качества тетраэдров сетки	$\overline{Q_{MESH}^{CR}}$	$\overline{Q_{MESH}^{CR}} = \sum_{i=1}^{N_E} \overline{Q_i^{CR}}$
Расстояние между i-м узлом и его ближайшим соседом	RS_i	$RS_i = \min_{j=1...N_V, j \neq i} L_{ij}$
Минимальное расстояние между сеточными узлами	RS_{MESH}^{min}	$RS_{MESH}^{min} = \frac{\min_{i=1...N_V} RS_i}{h}$
Максимум из минимальных расстояний между сеточными узлами	RS_{MESH}^{max}	$RS_{MESH}^{max} = \frac{\max_{i=1...N_V} RS_i}{h}$
Вычислительная нагрузка	W	$W = \frac{N_E}{H_{MESH}}$
Осредненное отклонение объемов сеточных элементов	D_V	$D_V = \frac{\sum_{i=1}^{N_E} \left 1 - \frac{V_i}{V_{OPT}} \right }{N_E}$
Осредненное отклонение минимальных высот сеточных элементов	D_H	$D_H = \frac{\sum_{i=1}^{N_E} \left 1 - \frac{H_i}{H_{OPT}} \right }{N_E}$
Осредненное отклонение минимальных расстояний между узлами	D_{RS}	$D_{RS} = \frac{\sum_{i=1}^{N_V} \left 1 - \frac{RS_i}{h} \right }{N_V}$
Коэффициент упаковки сфер, построенных вокруг сеточных узлов	K_V^{SP}	$K_V^{SP} = \frac{\sum_{i=1}^{N_V} [\max(h, RS_i)]^3}{h^3}$
Объем расширенной области триангуляции	V_{GLOB}	
Коэффициент заполнения объема расширенной области сферами с центрами в узлах сетки	K_{MESH}^{SP}	$K_{MESH}^{SP} = \pi \frac{\sum_{i=1}^{N_V} [\max(h, RS_i)]^3}{6V_{GLOB}}$

Характерным размером элемента, который определяет шаг интегрирования по времени, выбрана минимальная из четырех высот тетраэдра H_i . В этом случае относительный шаг интегрирования по времени будет обратнопропорционален H_{MESH} – минимальному среди характерных размеров всех тетраэдров. А суммарная вычислительная сложность расчета W условно равна произведению числа шагов интегрирования и числа сеточных элементов.

Как и в случае с объемами тетраэдров, приблизительно оценить эффективность распределения сеточных узлов можно вычислив осредненное отклонение от h расстояний D_{RS} между каждой из вершин и ее ближайшим соседом. Параметры RS_{MESH}^{min} и RS_{MESH}^{max} отражают точки максимального сгущения и разрежения плотности узлов. Более детальный анализ распределения вершин основывается на критериях, применяемых для тестирования упаковок сфер. Между задачами упаковки сфер и триангуляции есть тесная взаимосвязь. Так, например, координаты вершин сетки, состоящей из правильных треугольников, совпадают с координатами центров упакованных наилучшим образом окружностей одного радиуса. Существуют алгоритмы упаковки сфер, основанные на идеях метода движущегося фронта [16].

Предположим, что каждый узел равномерной тетраэдральной сетки (рис. 9 а) есть сфера диаметра h , центр которой совпадает с этим узлом (рис. 9 б). Тогда можно вычислить соответствующий коэффициент упаковки, равный отношению суммарного объема сфер к объему триангулируемой области. Однако данный метод оценки корректно применять при условии, что расстояние между двумя любыми сеточными узлами больше либо равно h , чего гарантировать нельзя. Поэтому приравняем диаметр содержащей узел сферы к расстоянию между ним и его ближайшим соседом (рис. 9 в). С точки зрения задачи заполнения объекта сферами разного диаметра такое решение не является оптимальным. Но оно, что здесь более важно, гарантирует негативное влияние на результат тестирования в областях локального сгущения сетки.

Суть задач упаковки заключается в поиске оптимального алгоритма заполнения заданного объема телами определенной формы. То есть упаковываемые объекты должны целиком находиться внутри этого объема. Сферы с центрами в узлах, расположенных на поверхности триангулируемого многогранника, очевидно, частично находятся вне его объема. Разрешить данное противоречие можно двумя способами. Во-первых, скорректировать форму многогранника таким образом, чтобы сферы с центрами в граничных узлах целиком попали внутрь его объема (рис. 9 г). Во-вторых, учитывать только части объемов сфер, попадающие внутрь многогранника (рис. 9 д). Оба подхода достаточно сложно реализовать при обработке тел сложной формы. Поэтому для простоты можно перейти к вычислению коэффициента упаковки, равного отношению суммы объемов сфер с центрами в сеточных узлах к суммарному объему соответствующего числа сфер диаметра h (рис. 9 е). Но при

этом нужно учитывать, что достоверность данного подхода будет низкой в областях разрежения.

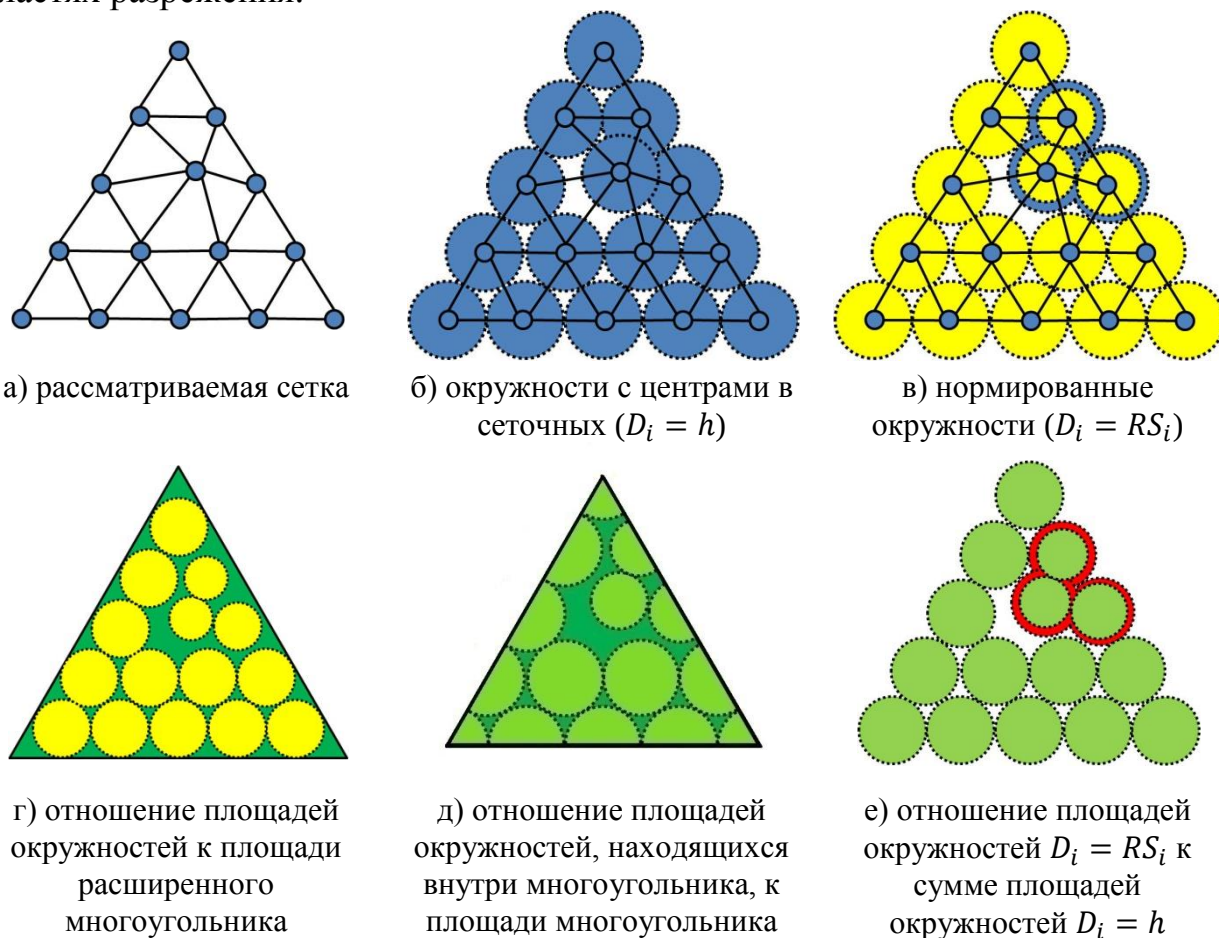


Рис. 9. Иллюстрации к различным методам определения коэффициентов упаковки

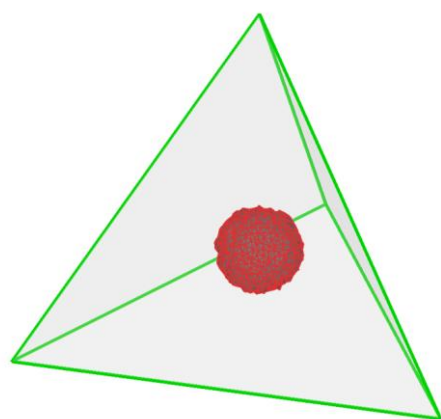


Рис. 10. Пример выделенной подобласти

Для исключения влияния на результаты тестирования ограничений со стороны поверхностной триангуляции перечисленные выше параметры вычисляются как для всей сетки, так и для выделенной в ее пределах внутренней подобласти. Подобласть имеет форму сферы с радиусом равным половине радиуса сферы, вписанной в единичный тетраэдр. Центр сферы совпадает с центром масс триангулируемого многогранника. Считается, что тетраэдр сетки принадлежит подобласти, если все его вершины находятся внутри или на поверхности выделенной сферы (рис. 10).

Результаты сравнительного тестирования

Результаты тестирования сеток GAMBIT, ICEM и DECO (равномерное измельчение) представлены в табл. 4. В табл. 4, 5 и 6 через дробь приводятся значения параметров для всей сетки и выделенной подобласти, соответственно. Выбранная в качестве референсной модели сетка DECO полностью соответствует заданному при построении шагу и обладает наилучшими среди трех сеток характеристиками. Незначительные расхождения значений тестируемых параметров сеток ICEM и GAMBIT в целом и в пределах внутренних подобластей свидетельствуют об однородности сеточной топологии и общности применяемых алгоритмов тетраэдризации.

Таблица 4

Параметр	Вариант построения сетки		
	ICEM	GAMBIT	DECO
N_V	59312 / 1882	48745 / 1658	47905 / 1601
N_E	321370 / 8951	268010 / 7867	262144 / 7663
$\overline{Q_{min}^R}$	0.6312 / 0.6815	0.2941 / 0.3108	0.8038 / 0.8038
$\overline{Q_{MESH}^R}$	0.863 / 0.8650	0.8281 / 0.8209	0.8693 / 0.8694
$\overline{Q_{min}^S}$	0.2779 / 0.3179	0.1629 / 0.2195	0.6164 / 0.6164
$\overline{Q_{MESH}^S}$	0.6153 / 0.6160	0.5967 / 0.5730	0.7443 / 0.7445
$\overline{Q_{min}^D}$	0.4719 / 0.5194	0.2096 / 0.2195	0.6442 / 0.6442
$\overline{Q_{MESH}^D}$	0.7827 / 0.7883	0.7476 / 0.7453	0.7629 / 0.7631
V_{MESH}^{min}	0.1613 / 0.3132	0.2254 / 0.2603	1 / 1
V_{MESH}^{max}	2.4075 / 2.0897	2.4593 / 2.0738	1 / 1
H_{MESH}	0.3787 / 0.4790	0.2637 / 0.2929	0.866 / 0.866
RS_{MESH}^{min}	0.4108 / 0.5287	0.4795 / 0.5505	1 / 1
RS_{MESH}^{max}	1.1162 / 1.0196	1.0911 / 0.9992	1 / 1
W / W_{DECO}	2.8034 / 2.1118	3.3575 / 3.0354	1 / 1
K_V^{SP}	0.4076 / 0.4404	0.6479 / 0.5707	1 / 1
K_{MESH}^{SP}	0.3838 / –	0.5013 / –	0.7602 / –
D_V	0.2418 / 0.1916	0.1804 / 0.2114	0 / 0
D_H	0.2432 / 0.2214	0.2077 / 0.2259	0.0893 / 0.0893
D_{RS}	0.2667 / 0.2461	0.1412 / 0.1724	0 / 0

Анализируя число сеточных узлов и элементов, можно сказать, что сетка ICEM по пространственному разрешению заметно превосходит заданный шаг. Число тетраэдров больше ожидаемого значения в 1.23 раза, а число тетраэдров с объемами в пределах $V_i \in (0.729V_{OPT}, 1.331V_{OPT}]$, что соответствует объему правильного тетраэдра с ребром $a \in (0.9h, 1.1h]$, составляет около 60% от общего числа элементов (табл. 5). Число элементов сетки GAMBIT близко к

оптимальному. При этом на интервал $V_i \in (0.729V_{OPT}, 1.331V_{OPT}]$ попадает порядка 77% тетраэдров. Таким образом, с точки зрения соответствия размера элементов заданному при построении шагу более предпочтительна сетка GAMBIT. По отклонению объемов минимального и максимального тетраэдров обе сетки демонстрируют примерно одинаковый результат. Минимальный объем тетраэдра составляет около $0.2V_{OPT}$, что условно соответствует правильному тетраэдру с ребром $0.585h$. Максимальный объем элемента превосходит ожидаемый размер в 2.4 раза (правильный тетраэдр с ребром $1.34h$).

Таблица 5

V_i/V_{OPT}	Число тетраэдров	
	ICEM	GAMBIT
[0.125; 0.216)	12 / 0	0 / 0
[0.216; 0.343)	699 / 1	92 / 2
[0.343; 0.512)	18796 / 144	2094 / 84
[0.512; 0.729)	101566 / 1966	34982 / 1154
[0.729; 1.331)	193960 / 6599	206285 / 5767
[1.331; 1.728)	6100 / 235	22753 / 769
[1.728; 2.197)	234 / 6	1798 / 91
[2.197; 2.774)	3 / 0	6 / 0

Осредненные значения нормированных критериев качества сеток GAMBIT и ICEM близки к значениям соответствующих параметров «эталонной» сетки DECO. Но по значениям критериев качества наиболее вырожденных элементов сетки GAMBIT и ICEM заметно проигрывают равномерной декомпозиции расчетной области. Посредственные значения минимальных высот H_i деформированных элементов приводят к занижению величины параметра H_{MESH} . Поэтому условный объем вычислений W на построенных генераторами сетках оказывается заметно выше по сравнению с вариантом DECO.

Низкие значения коэффициентов упаковки K_V^{SP} и K_{MESH}^{SP} являются следствием повышенной плотности распределения сеточных узлов. Можно предположить, что области сгущения возникают в процессе оптимизации формы тетраэдров путем их разбиения с добавлением узлов. Наиболее заметно этот момент проявляется в параметрах сетки ICEM. Обладая наихудшими среди трех сеток значениями коэффициентов упаковки, с точки зрения критериев оценки формы сеточных элементов сетка ICEM близка, а по параметру Q_{MESH}^D даже опережает сетку DECO. Однако при ее последующем сравнении с сеткой GAMBIT по параметру W данный прием оказывается оправданным. Несмотря на меньшее в 1.2 раза число тетраэдров, в следствии их худшего качества, а значит и большего отклонения величины H_{MESH} объем вычислений на сетке GAMBIT оказывается в 1.2 раза выше по сравнению с сеткой ICEM.

Характеристики распределения количества сеточных элементов по подинтервалам значений параметра H_i приводятся в табл. 6. Теоретически, точность результата моделирования на сетке лучшего разрешения должна быть выше. Но с точки зрения исходной постановки задачи результат работы генератора ICEM правомерно считать некорректным. Так, например, сетку ICEM нельзя использовать в расчетах, направленных на исследование свойств численных методов, где принципиально строгое соблюдение заданного сеточного шага. В этом смысле сетка GAMBIT лучше соответствует требуемым характеристикам.

Таблица 6

H_i/H_{OPT}	Число тетраэдров	
	ICEM	GAMBIT
[0.2; 0.3)	0 / 0	27 / 1
[0.3; 0.4)	4 / 0	521 / 12
[0.4; 0.5)	337 / 1	2237 / 90
[0.5; 0.6)	11429 / 149	9581 / 361
[0.6; 0.7)	79391 / 1671	38769 / 1369
[0.7; 0.8)	128744 / 3534	85692 / 2739
[0.8; 0.9)	78495 / 2670	92278 / 2306
[0.9; 1.1)	22854 / 919	38251 / 952
[1.1; 1.2)	114 / 7	628 / 37
[1.2; 1.3)	2 / 0	26 / 0

Заключение

Суммируя представленный в данной работе обзор методов генерации тетраэдральных сеток и анализ результатов тестирования двух равномерных сеток, построенных используемыми на практике генераторами, можно сказать, что наибольшую перспективу в плане совершенствования алгоритмов пространственной триангуляции имеет направление по разработке эффективных методов генерации оптимального распределения сеточных узлов. Реализация приближенных алгоритмов определения координат сеточных узлов объясняется желанием разработчиков повысить производительность программного обеспечения. Результатом подобной расстановки акцентов становится сгущение сетки относительно заданного шага, возникающее в процессе оптимизации формы сеточных элементов, построенных на грубом распределении вершин. При этом применяемые методы построения сеток на заданном множестве узлов соответствуют требуемым от них функциональным возможностям. Снижение характерного размера элементов при увеличении их общего числа приводит к росту продолжительности расчета, что с точки зрения вычислительного эксперимента в целом сводит на нет экономию затрат времени на этапе генерации сетки. Таким образом, большое практическое

значение имеет не только поиск новых подходов к решению проблемы инициализации множества сеточных вершин в заданной области, но и, как вариант, распределенная реализация существующих ресурсоемких алгоритмов. К сожалению, в силу оптимизационного характера задачи пространственной триангуляции, а так же естественного влияния формы и шага дискретизации граничных поверхностей на свойства сеточных элементов, здесь нельзя в конечном итоге гарантировать полное отсутствие в сетке деформированных тетраэдров. Стабильно высокие характеристики должны иметь тетраэдры, расположенные в удаленных от границы триангулируемого многогранника областях.

Список литературы

1. S.J. Owen. A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology // Proceedings of 7th International Meshing Roundtable, pp. 239-269, Dearborn, MI, 1998.
2. Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 9. 32 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2006/prep09/prep2006_9.html
3. Галанин М.П., Щеглов И.А. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 10. 32 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2006/prep09/prep2006_10.html
4. P.R. Cavalcanti, U.T. Mello. Three-Dimensional Constrained Delaunay Triangulation: A Minimalist Approach // Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable, pp. 119-129, 1999.
5. Данилов А.А. Технология построения неструктурированных сеток и монотонная дискретизация уравнения диффузии: диссертация кандидата физико-математических наук: 05.13.18 – Москва, 2010.
6. Кудрявцева Л.Н. Методы самоорганизации и оптимизации для построения трехмерных расчетных сеток: диссертация кандидата физико-математических наук: 01.01.07 – Москва, 2014.
7. C.T. Chan, K. Anastasiou. An automatic tetrahedral mesh generation scheme by the advancing front method // Communications in Numerical Methods in Engineering, vol. 13, pp. 33 – 46, 1997.
8. K. Shimada, D.C. Grossard. Bubble mesh: Automated triangular meshing of non-manifold geometry by sphere packing // ACM Third symposium of solid modeling and applications, pp. 409-419, ACM, 1995.
9. P.J. Frey, H. Borouchaki, P.-L. George. Delaunay tetrahedralization using an advancing-front approach // Proceedings of 5th International Meshing Roundtable, Sandia National Lab, pp. 31-46, 1996.
10. Danilov A., Lipnikov K., Vassilevsky Yu. Unstructured 3D mesh generation and adaptation technologies in package Ani3D // Труды международной конференции "Численная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные

- вычисления (NUMGRID2010)", посвященной 120-летию со дня рождения Б.Н. Делоне, 11-13 октября 2010 г., с. 17-24.
11. L.A. Freitag, C. Ollivier-Gooch. Tetrahedral Mesh Improvement Using Swapping and Smoothing // International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, pp. 3979 – 4002, 1995.
12. B. Joe. Construction of three-dimensional improved-quality triangulations using local transformations // SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 16, issue 6, pp. 1292 - 1307, 1995.
13. S. Canann, J. Tristano, M. Staten. An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes // Proceedings of the 7th International Mesh Roundtable, pp. 479-494, Dearborn, MI, 1998.
14. Электронный ресурс: GAMBIT. <http://www.ansys.com>
15. Электронный ресурс: ICEM. <http://www.ansys.com>
16. A. Benabbou, H. Borouchaki, P. Laug, J. Lu. Sphere Packing and Applications to Granular Structure Modeling // Proceedings of the 17th International Meshing Roundtable, pp. 1-18, 2008.