



Кушнирук М.С., Иванов Д. С.

Исследование алгоритмов  
управления движением  
группы спутников с  
помощью аэродинамической  
силы сопротивления

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Кушнирук М.С., Иванов Д. С. Исследование алгоритмов управления движением группы спутников с помощью аэродинамической силы сопротивления // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 28. 30 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-28>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**М.С. Кушнирук, Д.С. Иванов**

**Исследование алгоритмов управления  
движением группы спутников с помощью  
аэродинамической силы сопротивления**

**Москва — 2015**

**Кушнирук М.С., Иванов Д.С.**

Исследование алгоритмов управления движением группы спутников с помощью аэродинамической силы сопротивления

Анализируется подход к управлению групповым полетом спутников на низкой околоземной орбите с помощью аэродинамической силы сопротивления. Исследуются алгоритмы на основе линейно-квадратичного регулятора и функции Ляпунова с точки зрения зависимости быстродействия управления от параметров алгоритмов, проводится их сравнительный анализ. Также исследуется точность поддержания заданного движения с использованием двух алгоритмов при воздействии возмущений от второй гармоники гравитационного потенциала Земли.

**Ключевые слова:** групповой полет спутников, относительное движение, аэродинамическое сопротивление

**Kushniruk M.S., Ivanov D.S.**

Study of Satellite Formation Flying Control by Aerodynamic Drag

Formation flying relative motion control in a Low Earth Orbit by aerodynamic drag is proposed. This paper examines two algorithms, i.e. Linear Quadratic Regulator (LQR) and Sliding Mode Control. Performance of control depends on algorithm parameters. Results of the comparative analysis of algorithms are presented. In addition, the maintenance of the formation configuration using two algorithms is analyzed in the presence of the  $J_2$  harmonic perturbation.

**Key words:** satellite formation flying, relative trajectory, aerodynamic control

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 13-01-00665, 14-01-31313.

## Введение

Групповой полет – формация спутников, движущихся по орбите на большом удалении (от нескольких метров до нескольких километров) друг от друга и решающих единую задачу. Групповой полет спутников расширяет возможности наблюдений, решения других прикладных задач в космосе. Основными его преимуществами являются способность одновременного выполнения экспериментов и повышенная работоспособность: неисправность одного из спутников не приводит к утрате работоспособности всей группы. Для проведения таких исследований требуется возможность управления относительным движением спутников в группе. В связи с широким использованием в формациях малых спутников, имеющих ограничения по массе, запасу топлива и энергетике на борту, большой интерес представляют алгоритмы управления относительным движением, не требующие расхода рабочего тела. Существуют методы управления, основанные на магнитных [1] и электростатических силах [2,3], перебросе дополнительного тела между спутниками [4]. В настоящей работе исследуется способ управления относительным движением, основанный на использовании силы сопротивления в верхних слоях атмосферы.

Рассматривается группа, состоящая из двух спутников, движущихся по близким низким орбитам вокруг Земли. Предполагается, что спутники имеют форму, близкую к плоской. За счет поворота относительно центра масс изменяется площадь сечения аппарата относительно набегающего потока, которая определяет величину аэродинамической силы, действующей на аппарат. Если спутники имеют различную ориентацию относительно набегающего потока, то их эффективные сечения отличаются, и возникает разница между действующими на два спутника силами (рис.1). Таким образом, управляя взаимной ориентацией двух аппаратов, можно управлять относительным движением их центров масс.



Рис.1. Группа спутников OrbComm

Хотя управление движением группы спутников с использованием аэродинамической силы сопротивления является довольно популярным и исследуется в литературе, было реализовано всего несколько миссий с таким управлением –

спутники OrbComm [5] и спутники JC2Sat-FF [6]. Популярность этого управления обусловлена упрощенным запуском малых спутников на низкие орбиты и эффективным управлением без расхода топлива.

Впервые рассматриваемый подход к управлению был предложен в 1986 году Леонардом [7] в предположении дискретного изменения эффективного сечения спутников, летящих в группе. Он предложил алгоритм управления групповым полетом с помощью аэродинамической силы на основе пропорционально-дифференциального (ПД) регулятора. ПД-регулятор [8] формирует управляющий сигнал, являющийся суммой двух слагаемых, первое пропорционально ошибкам по координатам, второе – ошибкам по скоростям. Однако, как показали Кумар, Банг и Тахк в работе [9], пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) регулятор позволяет уменьшить энергетические затраты для совершения маневра. С технической точки зрения проще реализовать релейное управление, когда спутник может принимать только два угловых положения: в первом на аппарат не действует сила сопротивления, во втором возникает сила сопротивления [10]. Релейное управление с помощью импульсной модуляции позволяет реализовать рассчитанное по ПД- или ПИД-регулятору управляющее воздействие, однако сама модуляция приводит к некоторым ошибкам исполнения. Наряду с регуляторами в литературе рассматриваются алгоритмы на основе функции Ляпунова. Например, Перес и Бевилакквa [11] разработали алгоритм для управления движением спутников в нижних слоях атмосферы на основе функции Ляпунова и сравнили работу алгоритма управления для поддержания требуемой траектории в случае кеплерова движения и при воздействии возмущения со стороны второй гармоники разложения гравитационного потенциала.

Точность работы того или иного алгоритма управления зависит от принятой модели относительного движения. В большинстве работ рассматривается наиболее простая модель Хилла–Клохесси–Уилтшира [12,13], которая получена при линеаризации кеплерова движения двух близколетающих спутников относительно опорной круговой орбиты. Для эллиптических невозмущенных орбит используются уравнения Лоудена [14]. При исследовании возмущенного управляемого движения часто используются уравнения Швайгарда-Седвика [15], которые учитывают вторую гармонику в разложении гравитационного потенциала Земли. Алгоритмы управления, разработанные для простых моделей движения, необходимо протестировать в условиях воздействия возмущений для оценки точности и надежности их работы.

В вышеупомянутых работах по управлению групповым полетом с помощью аэродинамической силы сопротивления не исследовались переходные процессы при управлении, что представляется весьма важным аспектом их применения. В частности, для миссии может иметь ключевое значение время совершения маневра реконфигурации, а также точность поддержания заданного движения после перестроения. Настоящая работа посвящена исследованию различных по схеме построения алгоритмов – линейно-квадратичного регуля-

тора и управления на основе функции Ляпунова – с точки зрения зависимости быстродействия системы от параметров алгоритмов. В работе проводится их сравнительный анализ. Во второй части работы рассматривается возмущенное движение группы спутников под воздействием второй гармоники гравитационного потенциала Земли, исследуется точность поддержания заданного движения с использованием двух алгоритмов.

## 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### 1.1 Уравнения движения

Будем рассматривать конфигурацию, состоящую из двух спутников, движущихся по близким орбитам. Для описания траекторий в таком случае удобно пользоваться уравнениями движения, записанные в относительных координатах. Общий вид уравнений относительного движения двух спутников достаточно сложен для аналитического рассмотрения, поэтому в настоящей работе используется система уравнений Хилла-Клохесси-Уилтшира, которая описывает относительное движение двух спутников, летящих по близким околокруговым орбитам в центральном поле тяготения Земли [13,15]. Используется опорная система координат, ее начало (опорная точка  $O$ ) движется по круговой орбите радиуса  $r_0$  с угловой скоростью  $\omega = \sqrt{\mu/r_0^3}$ , где  $\mu$  – гравитационный параметр Земли. Ось  $Oz$  направлена от центра Земли к опорной точке, ось  $Oy$  направлена по нормали к плоскости орбиты, ось  $Ox$  дополняет тройку до правой (рис.2).

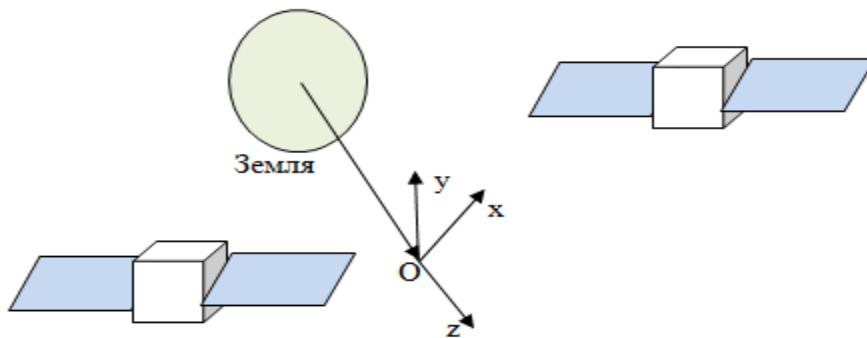


Рис.2. Система координат, связанная с опорной точкой  $O$ , движущейся по круговой орбите

Пусть  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  – координаты первого и второго спутников в опорной системе координат. Тогда для координат  $(x, y, z)$  вектора относительного положения спутников  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -2\dot{z}\omega, \\
\ddot{y} &= -y\omega^2, \\
\ddot{z} &= 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}
x(t) &= -3c_1\omega t + 2c_2 \cos \omega t - 2c_3 \sin \omega t + c_4, \\
y(t) &= c_5 \sin \omega t + c_6 \cos \omega t, \\
z(t) &= 2c_1 + c_2 \sin \omega t + c_3 \cos \omega t,
\end{aligned} \tag{2}$$

где константы интегрирования  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  выражаются через начальные условия  $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dot{z}(0) = \dot{z}_0$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}, c_2 = \frac{\dot{z}_0}{\omega}, c_3 = -3z_0 - \frac{2\dot{x}_0}{\omega}, \\
c_4 &= x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\omega}, c_5 = \frac{\dot{y}_0}{\omega}, c_6 = y_0.
\end{aligned}$$

Как видно, относительная траектория второго спутника замкнута тогда и только тогда, когда  $c_1 = 0$ .

## 1.2 Модель аэродинамической силы

Рассмотрим управляемое движение двух спутников. Будем предполагать, что оба спутника имеют одинаковую форму. Каждый из спутников состоит из центральной части, имеющей форму шара, и тонкой пластины. На спутники действует аэродинамическая сила сопротивления, которая состоит из двух компонент: действующей на центральную часть и на пластины. Также будем предполагать, что сопротивление центральной части не зависит от ориентации спутника в пространстве, а сопротивление пластины зависит от угла между нормалью к пластине и направлением набегающего потока. Запишем уравнения относительного движения с учетом аэродинамической силы в виде

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -2\dot{z}\omega + f_x, \\
\ddot{y} &= -y\omega^2, \\
\ddot{z} &= 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2,
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $f_x = f_2 - f_1$  – результирующая аэродинамическая сила сопротивления, которая состоит из двух частей: сопротивление, действующее на первый и на второй спутник. Силу сопротивления, действующую на каждый из спутников, можно представить:

$$f_i = -\frac{1}{2} \rho C V^2 (S \cos \beta_i + S_0).$$

Здесь  $\rho$  – плотность атмосферы на высоте  $r_0$ ,  $C$  – коэффициент сопротивления (предполагается одинаковым для двух спутников),  $S_0$  – максимальная площадь сечения центральной части,  $V$  – скорость набегающего потока,  $S$  – площадь пластины,  $\beta_i$  – угол между направлением набегающего потока и нормалью  $i$ -ой пластины, которая образует острый угол с набегающим потоком,  $i = 1, 2$ . Заметим, что углы  $\beta_i$  лежат в пределах  $[0; \pi/2]$ . Будем рассматривать близкотящие спутники, поэтому плотность атмосферы для обоих спутников можно считать одинаковой. Также будем предполагать, что плотность атмосферы не изменяется вдоль орбиты.

Сделаем для удобства замену  $\alpha_i = 90^\circ - \beta_i$ . После элементарных преобразований получаем формулу для суммарной аэродинамической силы сопротивления:

$$f_x = -\frac{1}{2} \rho C V^2 S (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = \frac{1}{2} \rho C V^2 S \sin \Delta \alpha,$$

$$\Delta \alpha = \arcsin(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2).$$

Для любого  $\Delta \alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$  существует бесконечное множество пар  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые удовлетворяют равенству, записанному выше. Для однозначности наложим условие на  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :  $\alpha_1 \alpha_2 = 0$ , то есть, только один из спутников во время управления отклоняется от направления набегающего потока. При повороте первого спутника значение  $\Delta \alpha > 0$ , а при повороте второго спутника  $\Delta \alpha < 0$ .

Запишем уравнения Хилла в виде линейной системы для осей  $Ox$  и  $Oz$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

где приняты следующие обозначения.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\omega & 3\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{B}_x = -\frac{1}{2} \rho C V^2 S, \quad u = \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1.$$



При изменении разности углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  создается управляющее воздействие, пропорциональное разности синусов этих углов  $\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2$ . Однако следует заметить, что разность синусов не может лежать вне интервала  $[-1; 1]$  при условии  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0; \pi/2]$ . Это накладывает ограничения на возможное значение управляющего воздействия. Вне интервала  $[-1; 1]$  управление не реализуемо и не имеет физического смысла.

### 1.3 Исследование быстродействия

При исследовании управляемого движения большой интерес представляют переходные процессы – поведение системы от момента начала маневра до прихода в стационарное положение. Важной характеристикой является быстродействие алгоритмов, которое определяет время перехода с исходной на требуемую траекторию. Алгоритмы управления зависят от ряда параметров, подобрав которые можно добиться приемлемых свойств поведения управляемой системы с точки зрения быстродействия. Таким образом, исследование зависимости быстродействия от параметров системы позволяет необходимым образом настроить алгоритм управления.

Для определения быстродействия управляемой системы можно руководствоваться изменением ошибки траектории во времени,

$$e(t) = \sqrt{(x(t) - x_d(t))^2 + (z(t) - z_d(t))^2},$$

где  $x_d(t), z_d(t), x(t)$  и  $z(t)$  – требуемые и текущие координаты по осям  $Ox$  и  $Oz$  соответственно. Будем считать, что спутник в момент времени  $t_0$  вышел на требуемую траекторию, если  $\forall t > t_0$  ошибка траектории  $e(t)$  не превосходит некоторого  $\varepsilon > 0$ .

## 2 АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим два алгоритма управления групповым полетом с использованием аэродинамической силы сопротивления: локально-оптимальное управление на основе линейно-квадратичного регулятора и управление на основе функции Ляпунова. Эти алгоритмы основаны на различных посылах – линейно-квадратичный регулятор минимизирует функционал, зависящий от ошибок и управления, а функция Ляпунова обеспечивает сходимость ошибки траектории. Представляется интересным исследовать их быстродействие в зависимости от параметров алгоритмов и точность поддержания заданной траектории при воздействии возмущений, а также сравнить эти алгоритмы.

В настоящем разделе сформулированы перечисленные выше алгоритмы управления.

### 2.1 Оптимальное управление

Рассмотрим линеаризованную систему с управлением вида

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (5)$$

где  $\tilde{\mathbf{e}} = [\mathbf{x} - \mathbf{x}_d]$  – вектор ошибок траектории,  $\mathbf{x} = [x \ z \ \dot{x} \ \dot{z}]^T$ ,  $\mathbf{x}_d = [x_d \ z_d \ \dot{x}_d \ \dot{z}_d]^T$ ,  $x_d, z_d, \dot{x}_d, \dot{z}_d$  – требуемые координаты и скорости в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oz$  соответственно,  $\mathbf{A}$  – матрица размера  $4 \times 4$ , характеризующая движение,  $\mathbf{B}$  – матрица характеризующая управление,  $\mathbf{u}$  – вектор управления [16].

При синтезе управления дополнительно к задаче обеспечения асимптотической устойчивости решения системы с управлением  $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\tilde{\mathbf{e}})$ , потребуем, чтобы управление также минимизировало некоторый функционал, характеризующий качество переходных процессов:

$$J = \int_0^{\infty} F(\tilde{\mathbf{e}}, \mathbf{u}) dt.$$

Указанный функционал может характеризовать, например, расход энергии для управления, либо какие-то другие важные величины, «запас» которых ограничен. Рассмотрим обратную связь вида  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\tilde{\mathbf{e}}$ , которая обеспечивает минимизацию следующего функционала вдоль траектории системы

$$J = \int_0^{\infty} (\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt, \quad (6)$$

где  $Q$  и  $R$  – заданные положительно определенные матрицы. Матрицы  $Q$  и  $R$  имеют физические интерпретации – весовая матрица ошибки по вектору состояния и весовая матрица расхода ресурса управления соответственно. Будем считать, что в произвольный момент времени  $t$  система (5) имеет состояние  $\tilde{\mathbf{e}}$ . Введем функцию Беллмана

$$S(\tilde{\mathbf{e}}) = \min_{\mathbf{u}} \int_{t_0}^{\infty} (\tilde{\mathbf{e}}^T Q \tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt.$$

Эта функция определяет минимальное значение функционала для системы (6), начиная с момента времени  $t_0$ . Известно, что функция Беллмана удовлетворяет функциональному уравнению Беллмана

$$\min_{\mathbf{u}} \left[ \tilde{\mathbf{e}}^T Q \tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} + (\nabla S)^T (A \tilde{\mathbf{e}} + B \mathbf{u}) \right] = 0. \quad (7)$$

Запишем необходимое условие минимума по  $\mathbf{u}$  в форме равенства нулю градиента по этой переменной от выражения в квадратных скобках. В результате получим уравнение

$$2R\mathbf{u} + B^T \nabla S = 0.$$

Выразив отсюда  $\mathbf{u}$ , получим

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \nabla S. \quad (8)$$

Подставив (8) в уравнение (7), после приведения подобных членов имеем

$$\tilde{\mathbf{e}}^T Q \tilde{\mathbf{e}} - \frac{1}{4} (\nabla S)^T B R^{-1} B^T (\nabla S) + (\nabla S)^T A \tilde{\mathbf{e}} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) представляет собой уравнение в частных производных относительно неизвестной функции Беллмана  $S(\tilde{\mathbf{e}})$ . Решение этого уравнения будем искать в виде положительно-определенной квадратичной формы, определяемой симметрической матрицей  $P$ ,

$$S(\tilde{\mathbf{e}}) = \tilde{\mathbf{e}}^T P \tilde{\mathbf{e}}$$

Вычислим градиент от  $S(\tilde{\mathbf{e}})$

$$\nabla S = 2P\tilde{\mathbf{e}}. \quad (10)$$

Подставляя выражение (10) в (9) и учитывая симметричность матрицы  $P$ , получаем

$$\tilde{\mathbf{e}}^T Q \tilde{\mathbf{e}} - \tilde{\mathbf{e}}^T P B R^{-1} B^T P \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}^T P A \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}^T A^T P \tilde{\mathbf{e}} = 0.$$

Левую часть последнего равенства можно также записать в виде квадратичной формы

$$\tilde{\mathbf{e}}^T [Q - P B R^{-1} B^T P + P A + A^T P] \tilde{\mathbf{e}} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, квадратичная форма (11) обращается в нуль для произвольного вектора  $\tilde{\mathbf{e}}$ . Очевидно, что это возможно лишь в том случае, если матрица, определяющая эту квадратичную форму, является нулевой, то есть

$$Q - P B R^{-1} B^T P + P A + A^T P = 0. \quad (12)$$

С другой стороны, если существует положительно определенная симметрическая матрица  $P$ , являющаяся решением матричного уравнения (12), то существует и соответствующее решение уравнения Беллмана (7). Заметим, что уравнение (12) называется матричным уравнением Риккати. Итак, если указанное выше решение (12) существует, то искомое оптимальное управление имеет следующий вид:

$$\mathbf{u} = -R^{-1} B^T P \tilde{\mathbf{e}},$$

Таким образом, задав весовые матрицы  $Q$  и  $R$ , можно решить уравнение Риккати (12) относительно матрицы  $P$  и, зная текущий вектор ошибок траектории  $\tilde{\mathbf{e}}$ , вычислить вектор управления. Параметры алгоритма – матрицы  $Q$  и  $R$  – определяют качество переходных процессов. Возникает задача выбора таких параметров, которые бы обеспечили требуемое быстродействие алгоритма при заданных ограничениях на управление.

## 2.2 Управление на основе функции Ляпунова

Алгоритмы управления на основе функции Ляпунова, как правило, задают такое управление, при котором ошибки по координатам асимптотически стремятся к нулю. Для этого выбирается некоторая функция  $V$  от ошибок и управления. Эта функция может принимать значения только одного знака ( $V > 0$  или  $V < 0$ ) и обращаться в нуль только в начале координат. Далее требуется, чтобы производная функции  $\dot{V}$  была знакопостоянной функцией противоположного знака с  $V$ . Из этого условия в силу уравнений движения можно найти такое управление, которое обеспечит асимптотическую сходимость ошибки траектории к нулю [17].

Введем функцию Ляпунова следующего вида:

$$V = \frac{1}{2} S^2.$$

Здесь

$$S = \dot{e}_x + K_1 e_z + K_2 \dot{e}_z + K_3 e_x, \quad (13)$$

$e_x = [x - x_d]$ ,  $\dot{e}_x = [\dot{x} - \dot{x}_d]$ ,  $e_z = [z - z_d]$ ,  $\dot{e}_z = [\dot{z} - \dot{z}_d]$  – ошибки движения по координатам и скоростям,  $x_d, \dot{x}_d, z_d, \dot{z}_d$  – требуемые координаты и скорости по осям  $Oz$  и  $Ox$  соответственно,  $x_d, z_d, \dot{x}_d, \dot{z}_d, x, z, \dot{x}, \dot{z}$  рассчитываются по формулам (2) и (3),  $K_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – константы. Главная идея этого управления заключается в том, что  $S \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Для этого требуем, чтобы знаки функций  $\dot{V}$  и  $V$  были противоположны, то есть  $\dot{V} = S\dot{S} < 0$ . Пусть  $\dot{S} = -n \text{sign}(S)$ , где  $n = \text{const}$ .

Дифференцируя равенство (13) по времени, получаем

$$\dot{S} = [\ddot{x} - \ddot{x}_d] + K_1 \dot{e}_z + K_2 [2\dot{x}\omega + 3z\omega^2 - \ddot{z}_d] + K_3 \dot{e}_x = -n \text{sign}(S).$$

Учитывая, что  $\ddot{e}_x = [\ddot{x} - \ddot{x}_d]$ ,  $\ddot{x} = -2\dot{z}\omega + u$ , выражаем управление

$$u = -K_1 \dot{e}_z - K_2 \ddot{e}_z - K_3 \dot{e}_x - n \text{sign}(S) + 2\dot{z}\omega + \ddot{x}_d. \quad (14)$$

Из формулы (14) видно, что управление зависит от трех констант  $K_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), которые в данном случае являются параметрами алгоритма. Представляется важным исследовать качество переходных процессов в зависимости от этих параметров.

### 3 ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ И ИХ СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Проведем исследование алгоритмов на основе линейно-квадратичного регулятора и функции Ляпунова для конкретного примера маневра спутников, двигающихся в группе. Исследуем, как зависит быстродействие алгоритмов от их параметров при ограничении на управление, а также проведем сравнительный анализ этих алгоритмов.

#### 3.1 Параметры численного моделирования

Рассмотрим круговую орбиту на высоте 400 км, по которой движется один из спутников. Второй спутник движется на небольшом расстоянии относительно первого. На этой высоте плотность атмосферы  $\rho = 10^{-11}$  кг/м<sup>3</sup>. Будем считать её постоянной вдоль всей орбиты. Предполагаем, что коэффициент сопротивления пластины спутника при ее ориентации перпендикулярно набегающему потоку  $C = 2$ . Площадь пластин  $S = 1$  м<sup>2</sup> одинакова для обоих спутников. Следовательно, коэффициент  $B_x$  при управлении в формуле (4) приблизительно равен  $10^{-4}$  м/с<sup>2</sup>. Пусть в начальный момент второй спутник движется по круговой относительной орбите радиуса  $R_{init} = 400$  м вокруг первого спутника. Рассмотрим в качестве примера, переход с этой начальной орбиты на другую круговую относительную орбиту радиуса  $R_d = 200$  м, который осуществляется с помощью линейно-квадратичного регулятора и управления на основе функции Ляпунова.

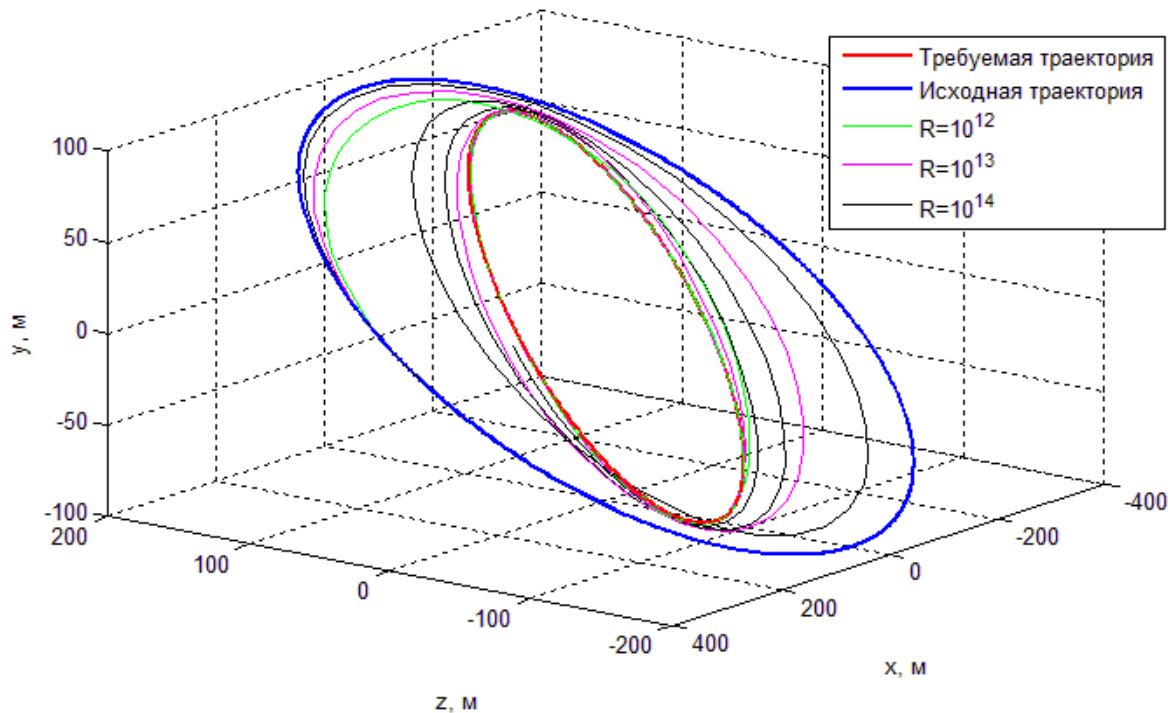
#### 3.2 Линейно-квадратичный регулятор

Пусть для линейно-квадратичного регулятора справедливо

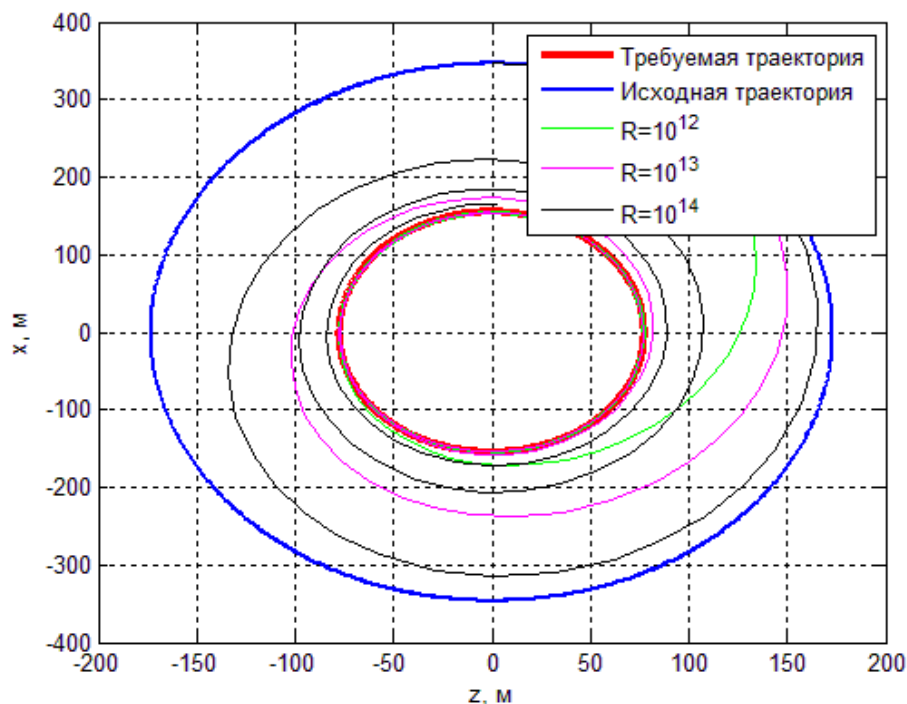
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_x u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; R = const.$$

Значение  $R$  при управлении будем считать изменяемым параметром алгоритма. Рассмотрим, как будет изменяться быстродействие системы при изменении параметра  $R$  с учетом того, что величина управления лежит в пределах  $u \in [-1; 1]$ .

На рис. 3 и рис. 4 приведены примеры относительных траекторий спутников под действием линейно-квадратичного регулятора при разных значениях весового коэффициента  $R$ . Как видно из рис. 4, чем больше вес при управлении, тем дольше происходит выход на требуемую траекторию.



**Рис.3. Пример траектории под действием линейно-квадратичного регулятора при разных значениях весового коэффициента**



**Рис.4. Пример проекции траектории на плоскость  $Oxz$  под действием линейно-квадратичного регулятора при разных значениях весового коэффициента**

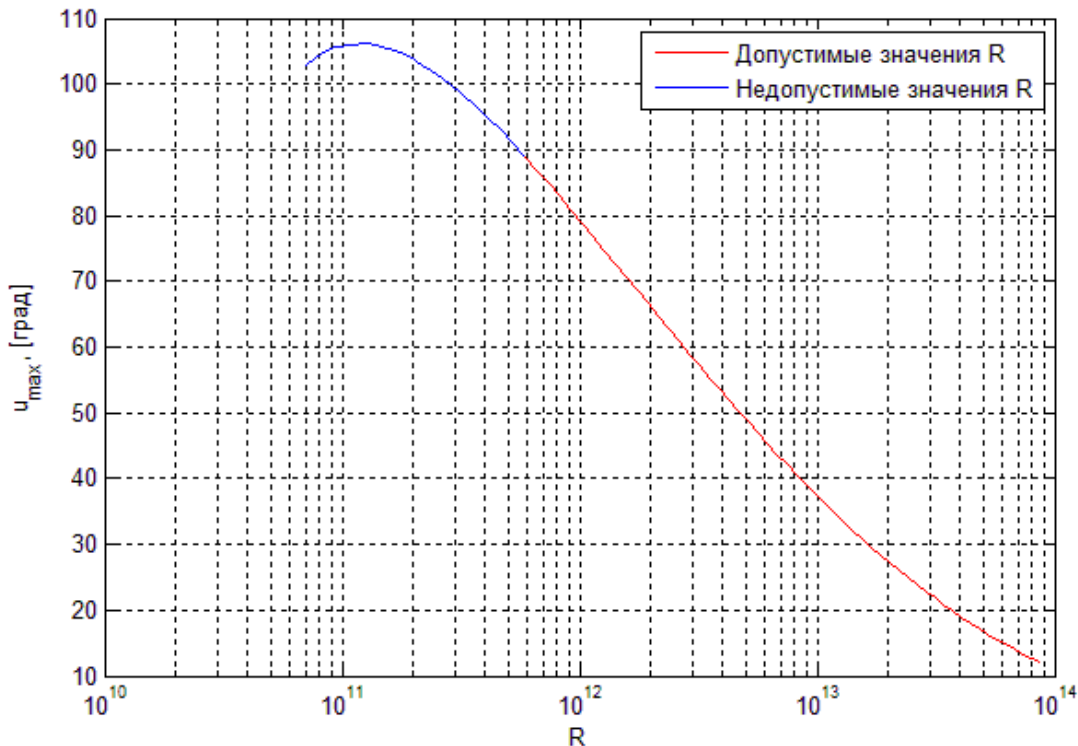
На рис.5 представлена зависимость максимального угла в данном маневре от весового коэффициента. На графике изображены две кривые. Красная кривая соответствует реализуемому значению поворота спутника, синяя кривая – не-

допустимому углу поворота. При этом критическое значение  $R_{cr}$  приблизительно равно  $7 \cdot 10^{11}$ . Для любого  $R \geq R_{cr}$  маневр реализуем.

На рис.6 приведена зависимость времени сходимости от весового коэффициента  $R$ . Можно заметить, что при увеличении значения  $R$  время сходимости увеличивается.

На рис.7 представлена зависимость ошибки траектории от времени при  $R = 7 \cdot 10^{11}$ . Ошибка с течением времени уменьшается. После достижения требуемой траектории ошибка составляет меньше метра и обусловлена ошибками управления из-за дискретизации.

На рис.8 представлен пример зависимости разности углов от времени при  $R = 7 \cdot 10^{11}$ . При данном значении  $R$  максимальная разность углов достигает  $90^\circ$ .



**Рис.5. Зависимость максимального угла поворота от весового коэффициента  $R$**



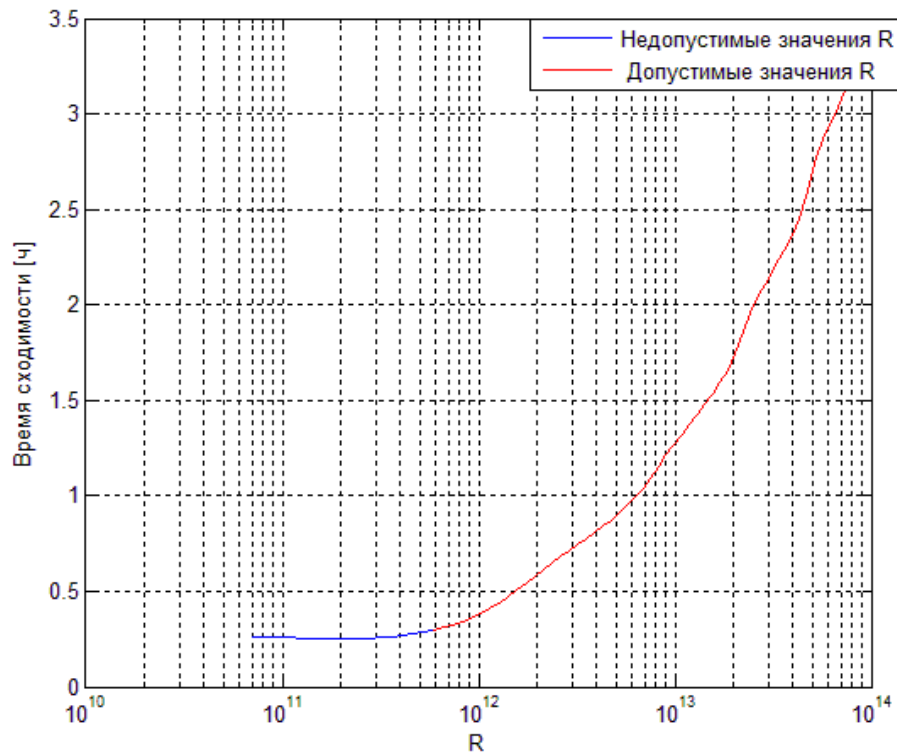


Рис.6. Зависимость времени сходимости от весового коэффициента  $R$

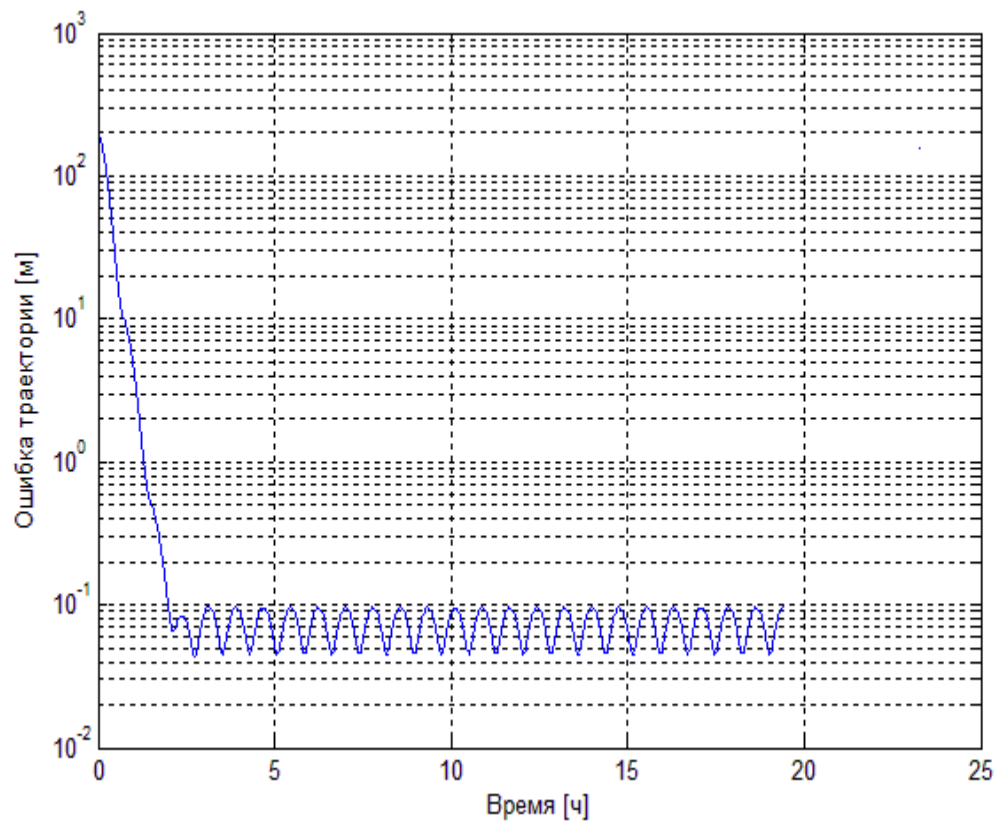


Рис.7. Зависимость ошибки траектории от времени при  $R = 7 \cdot 10^{11}$

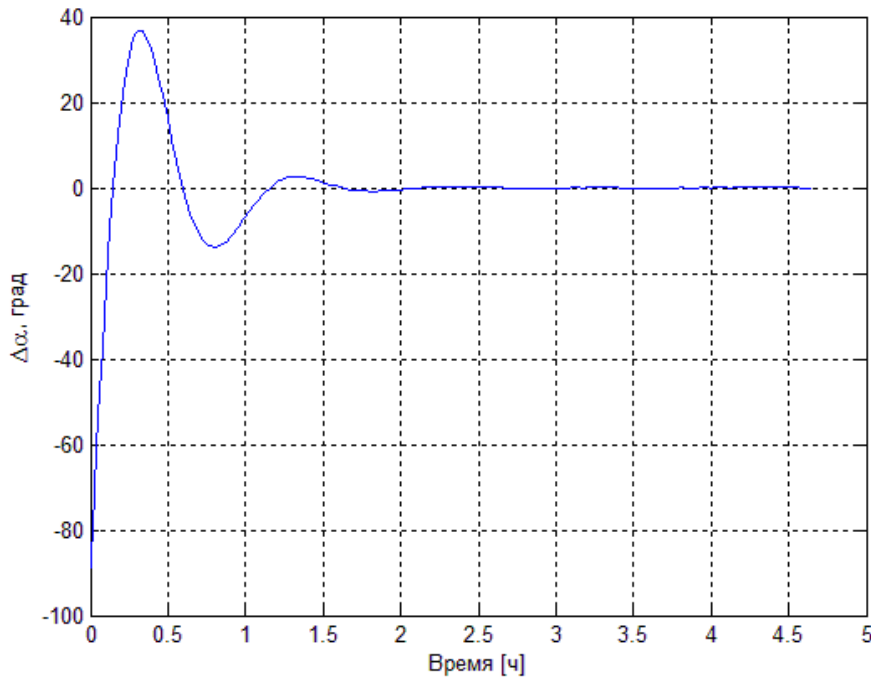


Рис.8. Зависимость разности углов от времени при  $R = 7 \cdot 10^{11}$

Таким образом, алгоритм управления на основе линейно-квадратичного регулятора успешно справляется с задачей перехода с одной относительной орбиты на другую. Однако, особое внимание следует уделить выбору коэффициентов алгоритма, так как при некоторых значениях величина управления становится нереализуемой, то есть разность синусов углов между плоскостями спутников и набегающим потоком становится по модулю больше единицы. Для рассматриваемого примера реконфигурации критическим значением параметра является  $R = 7 \cdot 10^{11}$ . Также выбор параметров алгоритмов значительным образом влияет на быстродействие алгоритма.

### 3.3 Управление на основе функции Ляпунова

Пусть для управления на основе функции Ляпунова параметры, входящие в (13), имеют следующие значения:

$$K_3 = -0.03, n = 10^{-5}$$

Параметры  $K_1$  и  $K_2$  будем варьировать. На рис.9 представлены примеры траекторий относительного движения спутников под действием управления на основе функции Ляпунова при различных параметрах  $K_1$  и  $K_2$ . Как видно из рисунка, скорость сходимости и величина ошибки траектории после сходимости зависят от выбранных параметров. На рис.10 представлен пример зависимости разности углов от времени при  $K_1 = 0.1$  и  $K_2 = 35$ , а на рис.11 – график ошибки траектории от времени. Ошибка траектории асимптотически стремится к нулю.

После достижения требуемой траектории  $e(t)$  колеблется около нуля из-за дискретизации управления.

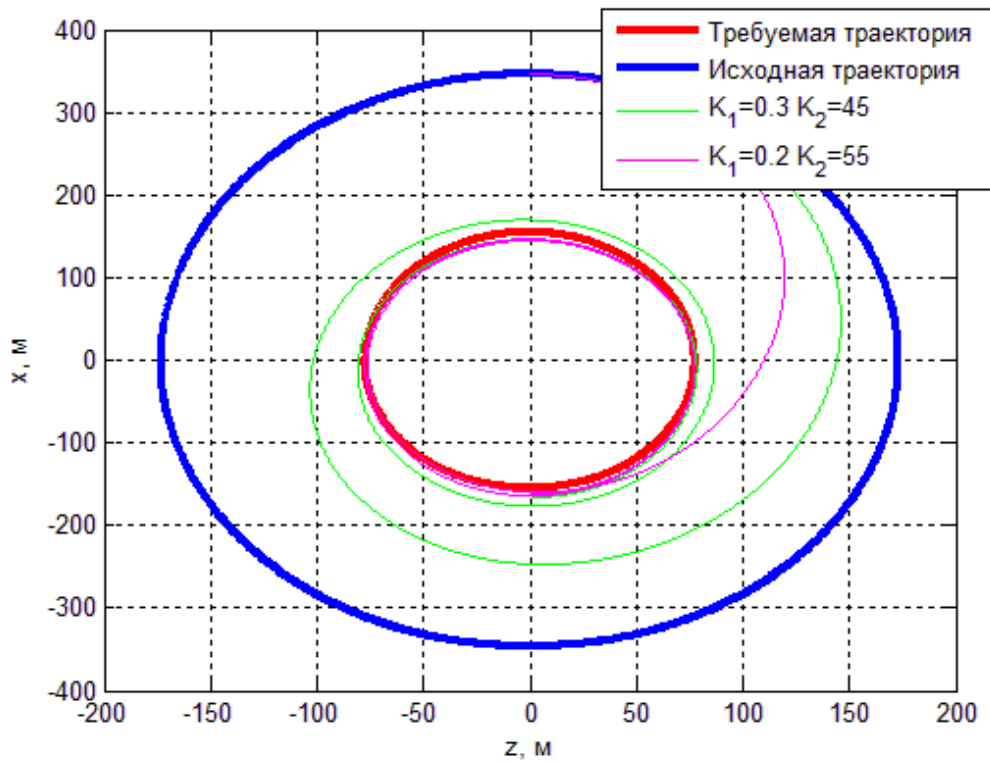


Рис.9. Пример проекции траектории на плоскость  $Oxz$  под действием управления на основе функции Ляпунова

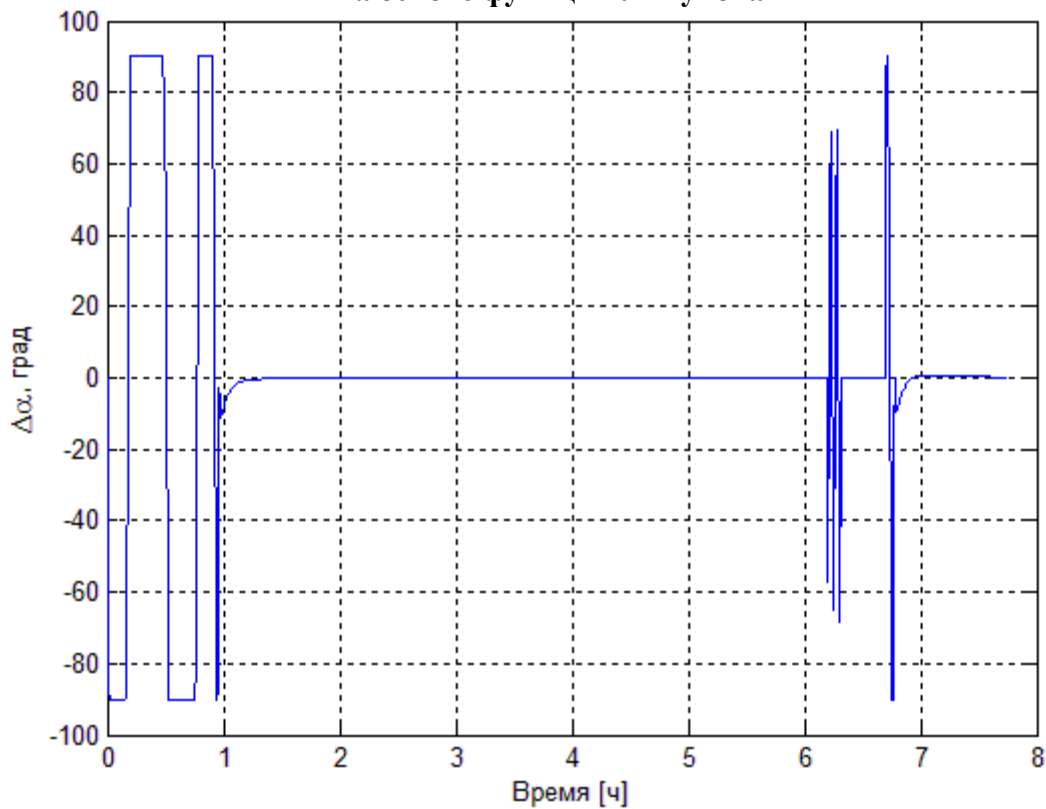
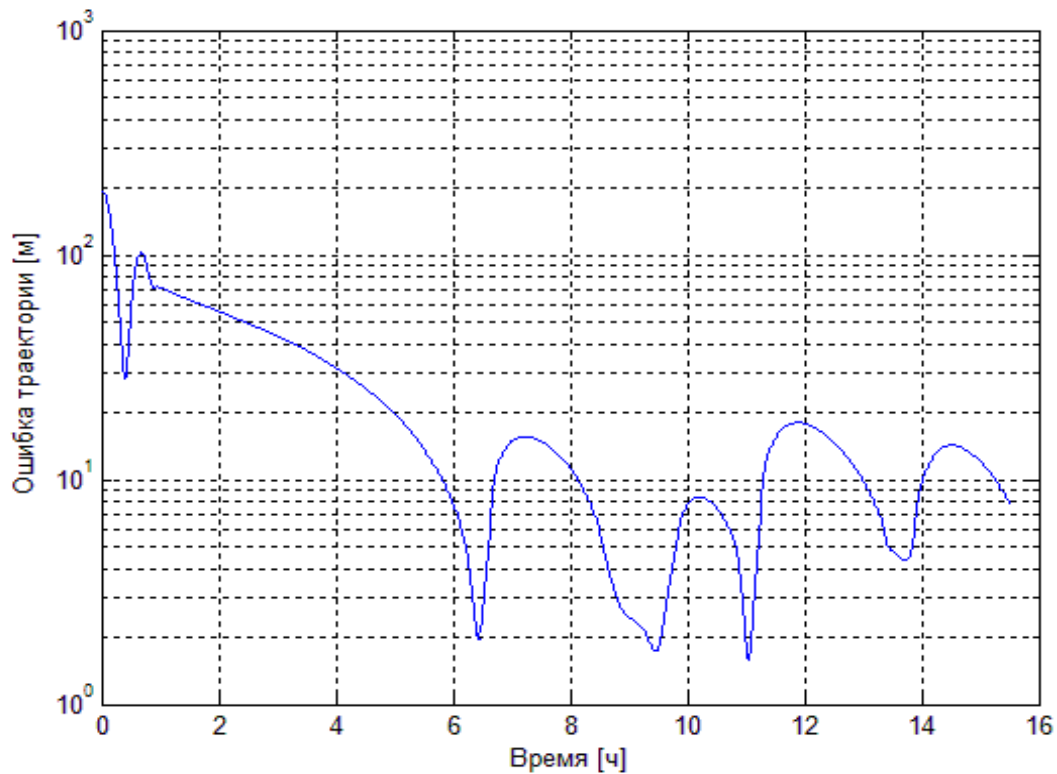
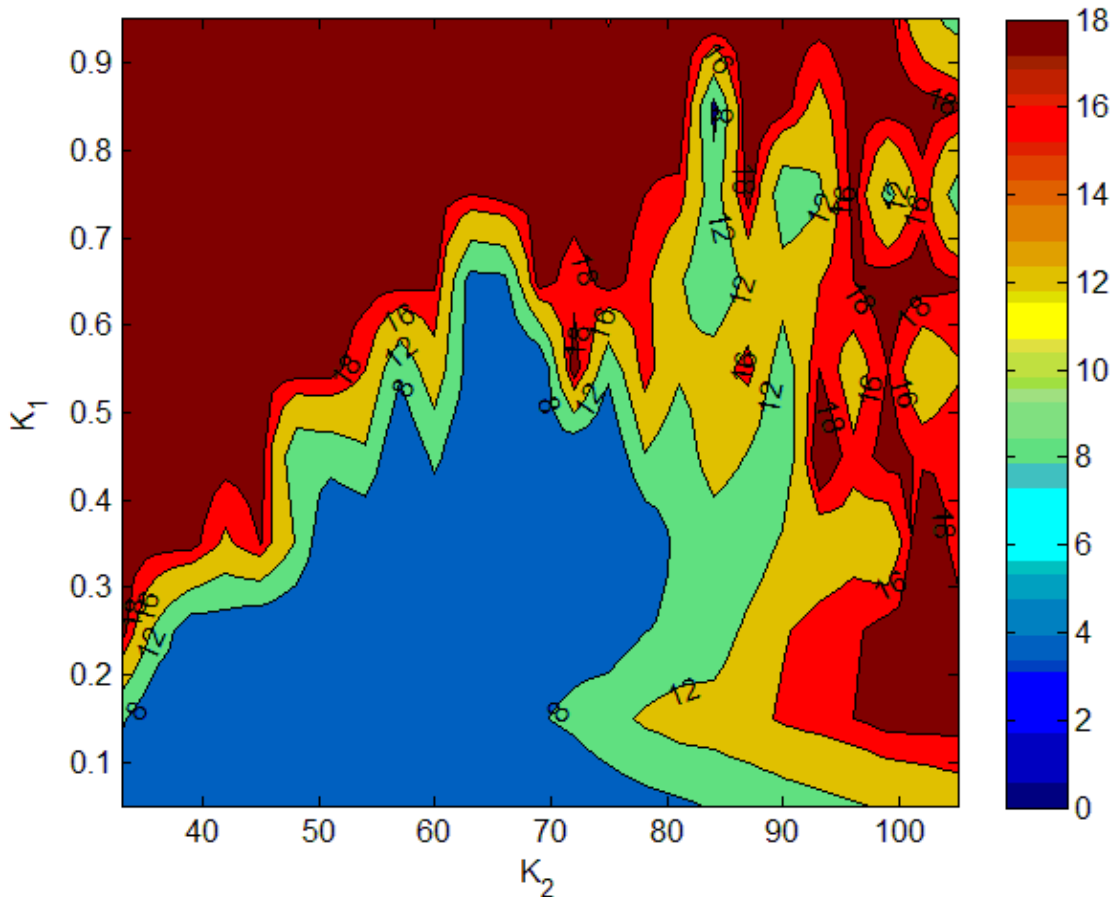


Рис.10. Зависимость разности углов времени при  $K_1 = 0.1$ ,  $K_2 = 35$



**Рис.11.** Зависимость ошибки траектории от времени при  $K_1 = 0.1$ ,  $K_2 = 35$

Рассмотрим, как изменяется быстродействие системы при изменении параметров  $K_1$  и  $K_2$  с учетом того, что величина параметра управления  $u$  лежит в пределах  $[-1;1]$ . На рис.12 представлены изолинии времени сходимости. На этом рисунке выбрана область значений параметров  $K_1 \in [0.05;0.95]$  и  $K_2 \in [32;105]$ , однако не все пары коэффициентов обеспечивают сходимость к требуемой траектории. На рисунке параметры  $K_1$  и  $K_2$ , которые не обуславливают сходимость ошибки траектории к нулю, выделены бордовым цветом.



**Рис.12. Изолинии времени сходимости при различных значениях коэффициентах  $K_1, K_2$**

Сравним работу линейно-квадратичного регулятора и алгоритма на основе функции Ляпунова. Управление на основе линейно-квадратичного регулятора является более удобным для реализации, так как является гладким, тогда как управление на основе функции Ляпунова из-за наличия нескольких слагаемых приводит к частому, довольно резкому изменению угла поворота пластин спутников относительно набегающего потока. Время переходных процессов при действии линейно-квадратичного регулятора меньше, чем у управления на основе функции Ляпунова. В установившемся движении ошибка почти на порядок меньше при использовании линейно-квадратичного регулятора.

## 4 УЧЁТ ВЛИЯНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим задачу поддержания заданной относительной орбиты с помощью управления на основе линейно-квадратичного регулятора и на основе функции Ляпунова при воздействии возмущения от второй гармоники гравитационного потенциала Земли. Исследуем точность поддержания с помощью рассматриваемых алгоритмов при ограничении на минимальную величину управления.

### 4.1 Уравнения возмущенного движения

Основной недостаток уравнений (1) – низкая точность на больших промежутках времени. Основной причиной появления ошибок является влияние второй гармоники  $J_2$  гравитационного поля Земли на движение группы спутников. Уравнения (1) были модифицированы Седвиком и Швайгардом [15], чтобы учесть влияние несферичности гравитационного поля на относительное движение спутников, оставаясь в рамках модели Хилла–Клохесси–Уилтшира.

Пусть орбиты двух спутников близки к некоторой опорной круговой орбите. Наклонение опорной орбиты и орбит двух спутников равны  $i_0, i_1, i_2$  соответственно. Пусть  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  – координаты первого и второго спутников в опорной системе координат. Тогда для координат  $(x, y, z)$  вектора относительного положения спутников  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  имеем следующую систему с учетом аэродинамической силы сопротивления:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + A\dot{z} &= f_x, \\ \ddot{y} + q^2 y &= 2lq \cos(qt + \phi), \\ \ddot{z} - A\dot{x} - Bz &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= 2\omega c, \\ B &= \omega^2(5c^2 - 2), \\ c &= \sqrt{1 + \frac{3J_2 R_\oplus^2}{8r_0^2}(1 + 3\cos 2i_0)}, \\ q &= \omega c + \frac{3J_2 R_\oplus^2}{2r_0^2} \left( \cos^2 i_2 - \frac{(\cos i_1 - \cos i_2)(\operatorname{ctg} i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0 - \cos i_2)}{\sin^2 \Delta\Omega_0 + (\cos i_1 \sin i_2 - \cos i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2} \right), \\ l &= -\frac{3J_2 R_\oplus^2}{2r_0^2} \frac{(\cos i_1 - \cos i_2) \sin i_1 \sin i_2 \sin \Delta\Omega_0}{\sqrt{1 - (\cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2}}, \\ \Delta\Omega_0 &= \frac{y_0}{r_0 \sin i_0} \end{aligned}$$

и введены обозначения:  $R_{\oplus}$  — радиус Земли,  $J_2$  — амплитуда сфероидальной гармоники  $r_0$  — радиус опорной орбиты,  $\omega$  — угловая скорость вращения по опорной орбите,  $\phi$  находится из уравнения

$$l \sin \phi + q y_0 \operatorname{ctg} \phi = \dot{y}_0.$$

Система (15) имеет аналитическое решение при  $f_x = 0$ :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{A}{a^3} (A\dot{x}_0 + Bz_0) \sin at + \frac{A\dot{z}_0}{a^2} (\cos at - 1) - \frac{B}{a^2} (\dot{x}_0 + Az_0)t, \\ y &= \left( lt + \frac{y_0}{\sin \phi} \right) \sin(qt + \phi), \\ z &= \frac{A}{a^2} (\dot{x}_0 + Az_0) + \frac{\dot{z}_0}{a} \sin at - \frac{1}{a^2} (A\dot{x}_0 + Bz_0) \cos at, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $a = \sqrt{A^2 - B}$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$  — координаты и скорости в момент времени  $t = 0$ . Следует заметить, что  $\dot{y}_0$  присутствует в (16) неявно, влияя на  $\phi$ .

#### 4.2 Поддержание относительной траектории

Ограничим минимальное значение угла поворота плоскости спутников относительно набегающего потока. Поступим следующим образом: с некоторым шагом по времени будем проверять, не достигло ли управление  $u$  минимального значения. Если это значение достигнуто, то спутник поворачивается относительно набегающего потока, совершает манёвр и возвращается на требуемую траекторию.

Рассмотрим следующий пример: начальные условия обеспечивают круговую относительную орбиту, однако вследствие влияния второй гармоники  $J_2$  орбиты спутников становятся незамкнутыми, то есть орбита одного спутника смещается относительно орбиты другого. Требуется управлять их движением с использованием аэродинамической силы сопротивления таким образом, чтобы спутники двигались по требуемой относительной траектории.

На рис.13 приведен пример траектории без управления. Можно заметить, что из-за сжатия Земли орбита второго спутника смещается относительно орбиты первого. На рис.14 приведен пример относительной траектории под действием линейно-квадратичного регулятора. Как видно из рисунка, требуемая траектория успешно поддерживается.

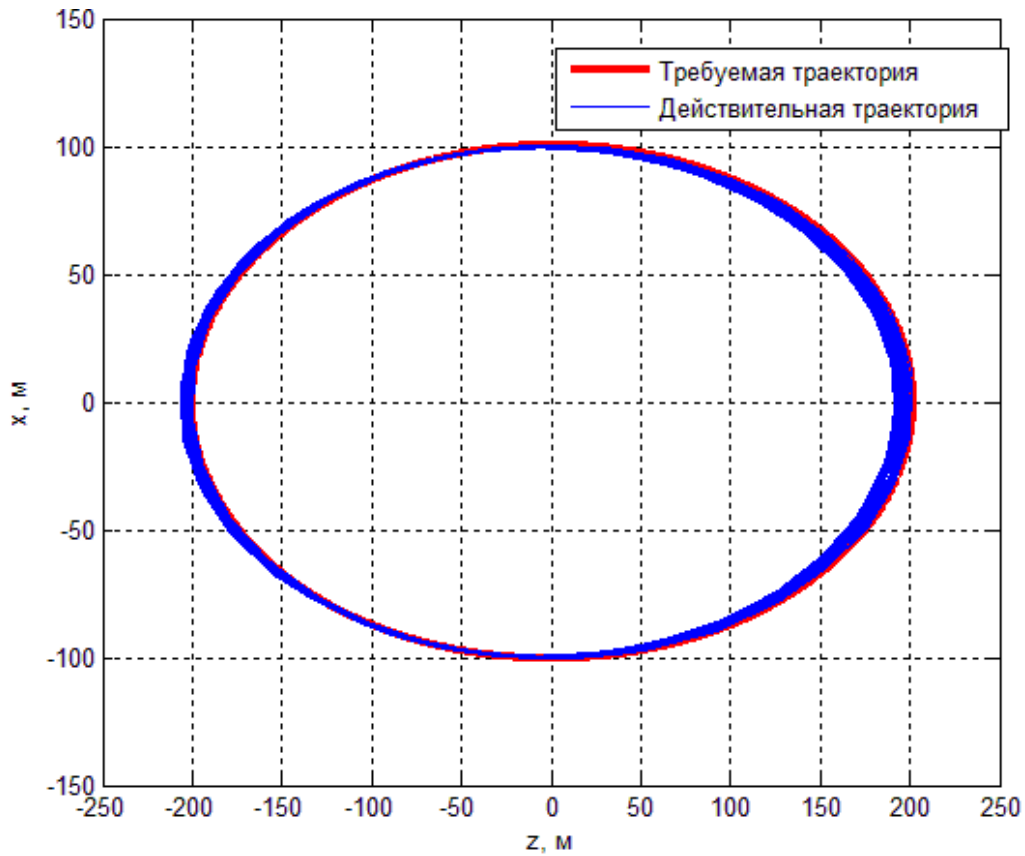


Рис.13. Пример проекции траектории на плоскость  $Oxz$  без управления

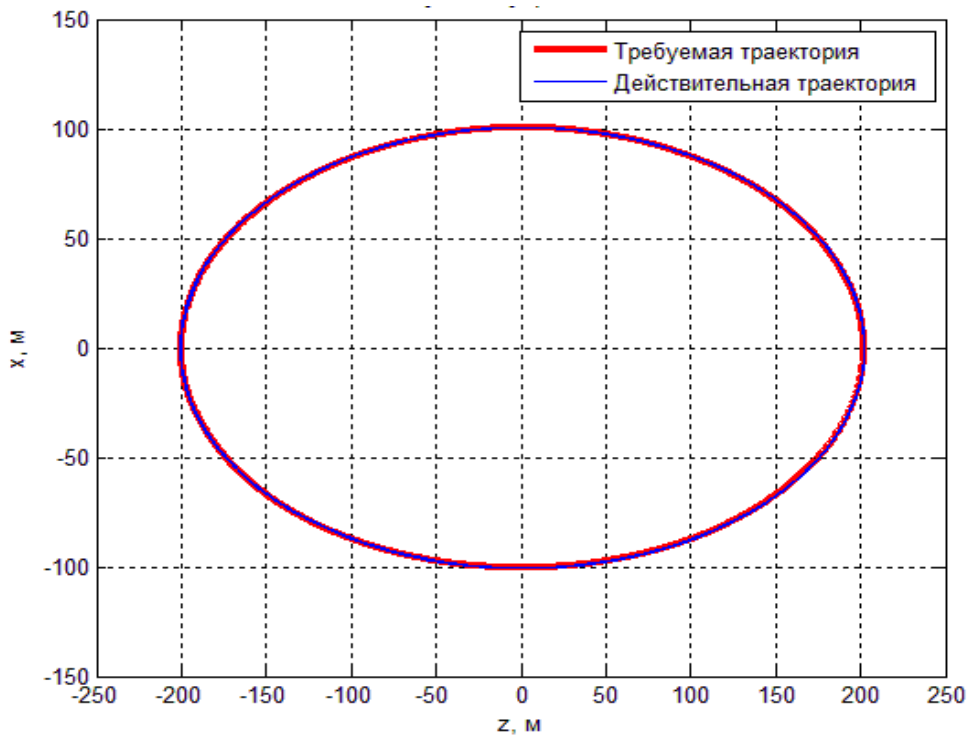
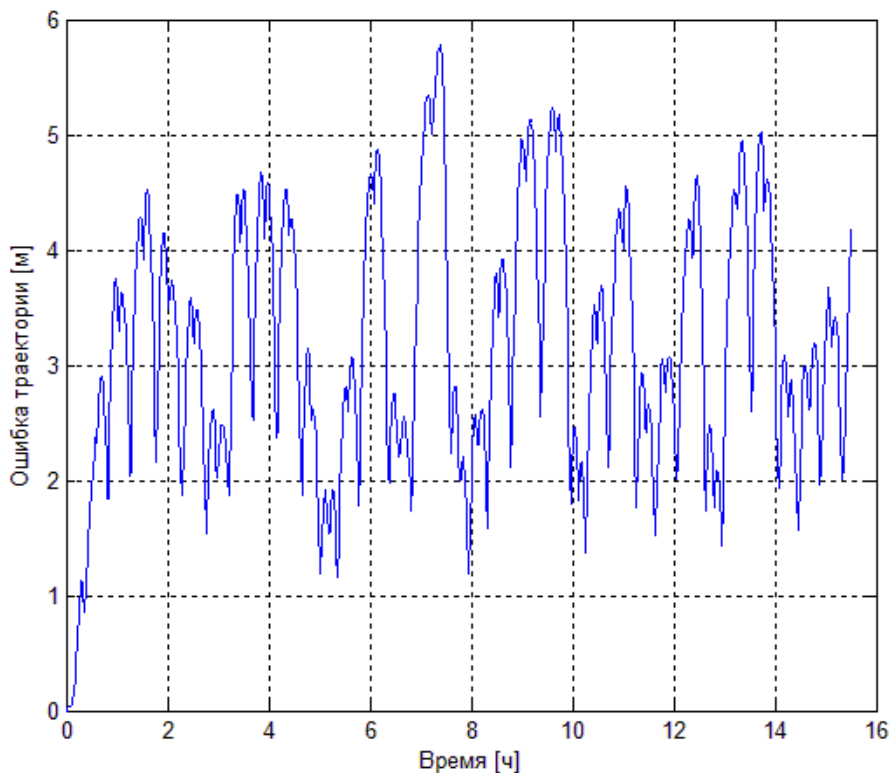


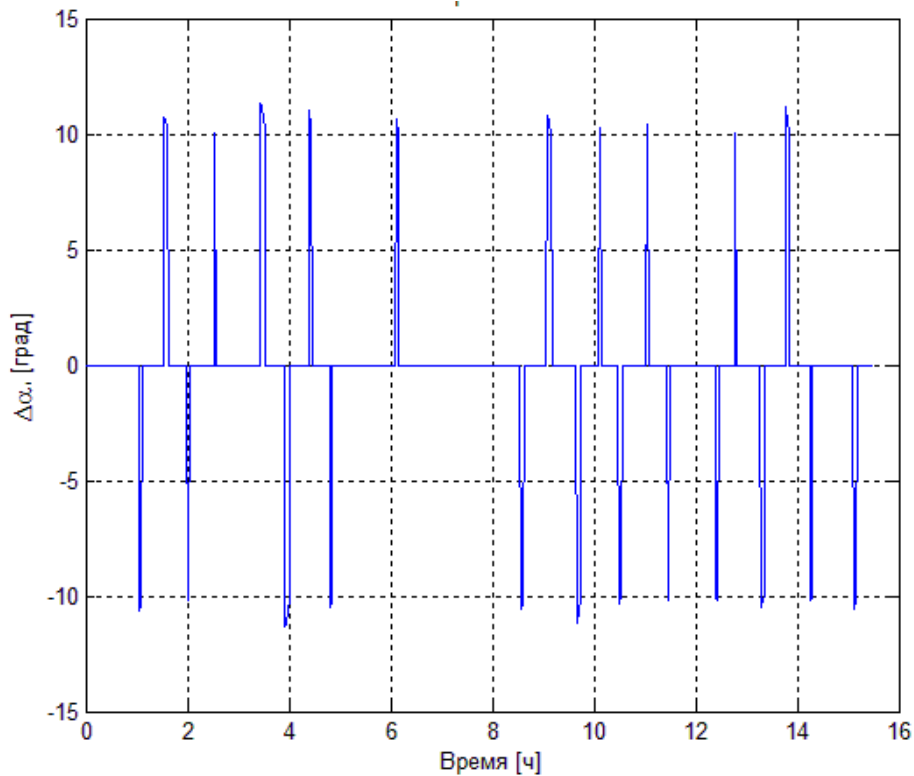
Рис.14. Пример поддержания проекции траектории на плоскость  $Oxz$  при управлении на основе линейно-квадратичного регулятора



На рис.15 представлена зависимость ошибки траектории от времени при  $R = 10^{11}$ . Ошибки удерживаются в пределах некоторого значения. На рис.16 представлена зависимость релейного управления от времени при  $R = 10^{11}$ . Из этих рисунков видно, что для поддержания заданной относительной траектории с помощью линейно-квадратичного регулятора необходимо периодически поворачивать аппарат на некоторый угол, в результате чего аэродинамическая сила возвращает аппарат на требуемую траекторию в пределах заданной ошибки 3 м.



**Рис.15. Зависимость ошибки траектории под действием линейно-квадратичного регулятора от времени при  $R = 10^{11}$**



**Рис.16.** Зависимость разности углов от времени при  $R = 10^{11}$

На рис.17 представлены графики зависимости ошибки траектории от времени, используя алгоритм на основе функции Ляпунова при значении параметров  $K_1 = 0.01$  и  $K_2 = 70$ , а на рис.18 представлена зависимость управления от времени. Из этих рисунков видно, что для поддержания заданной относительной траектории с помощью управления на основе функции Ляпунова необходимо периодически поворачивать аппарат на некоторый угол, в результате чего аэродинамическая сила возвращает траекторию аппарата в пределы заданной погрешности 0.8 м.

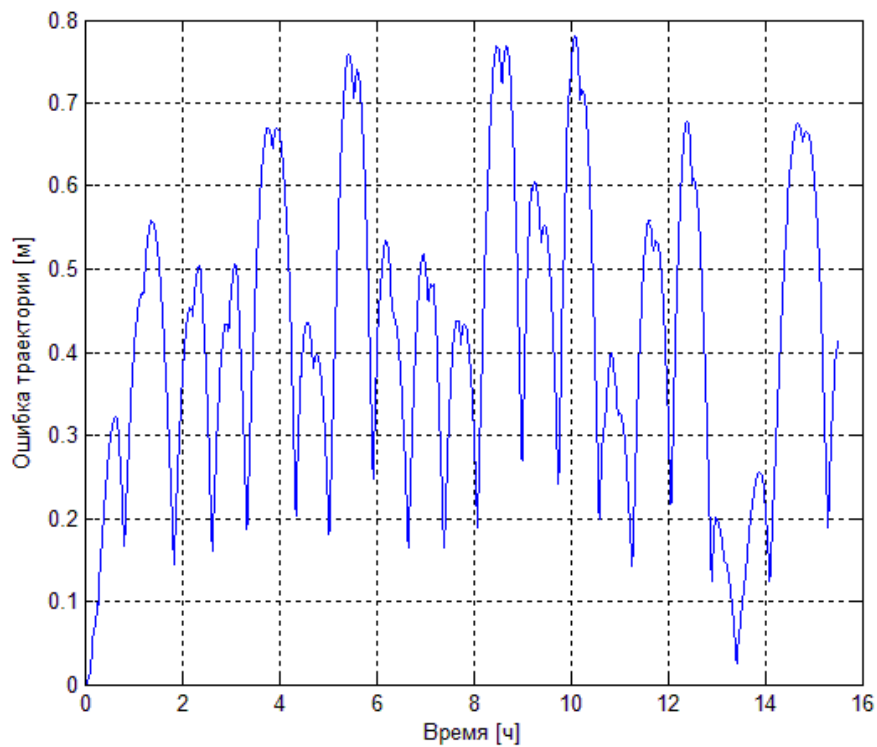


Рис.17. Зависимость ошибки траектории под действием управлением на основе функции Ляпунова от времени при  $K_1 = 0.01$ ,  $K_2 = 70$ ,  $K_3 = -0.03$

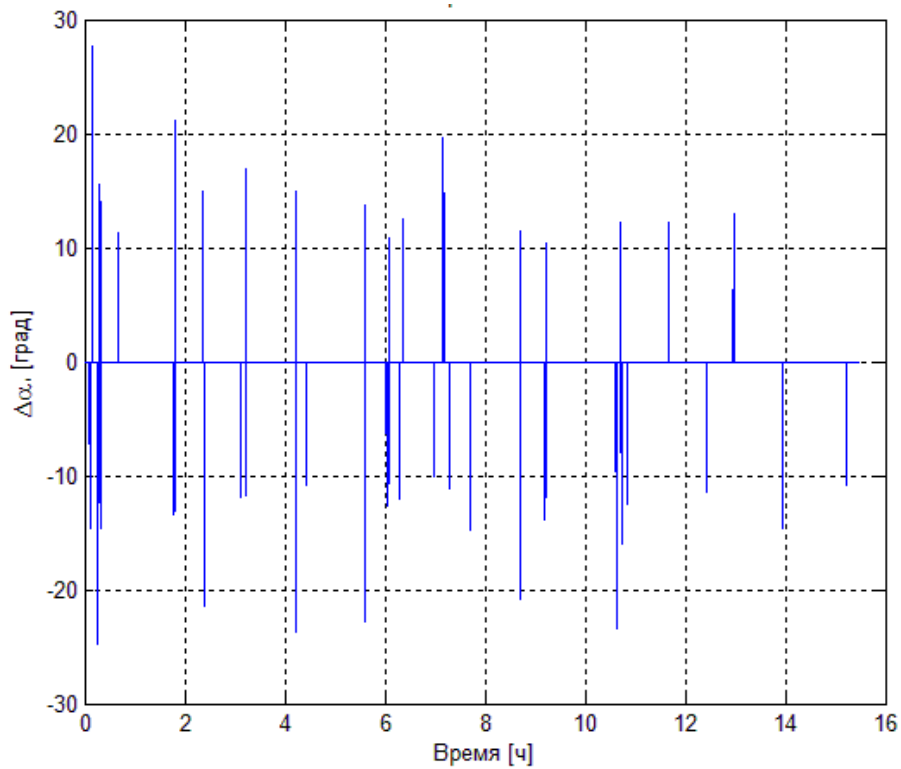


Рис.18. Зависимость разности углов от времени при  $K_1 = 0.01$ ,  $K_2 = 70$ ,  $K_3 = -0.03$

## 5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе для решения задачи управления относительного движения с использованием аэродинамической силы сопротивления атмосферы применены два алгоритма: управление на основе линейно-квадратичного регулятора и управление на основе функции Ляпунова. Работоспособность этих алгоритмов продемонстрирована на примере перехода с одной относительной орбиты на другую. Проведено исследование зависимости быстродействия этих алгоритмов от параметров при ограничениях на величину управляющего воздействия. Сравнительный анализ алгоритмов показал, что управление на основе линейно-квадратичного регулятора является более удобным для практической реализации вследствие его гладкости, тогда как управление на основе функции Ляпунова из-за наличия нескольких слагаемых приводит к частому, довольно резкому изменению углов поворота пластин спутников относительно набегающего потока.

В работе исследовалась задача поддержания заданной относительной траектории при влиянии второй гармоники гравитационного поля Земли. На конкретном примере показывается, что линейно-квадратичный регулятор и управление на основе функции Ляпунова успешно справляются с этой задачей при ограничении на минимально возможный угол поворота спутников, то есть минимальное значение управления. Управление с помощью линейно-квадратичного регулятора похоже на импульсное, ошибка траектории при этом удерживается в заданном пределе в 1 м.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peck M.A. et al. Spacecraft Formation Flying Using Lorentz Forces // J. Br. Interplanet. Soc. 2007. Vol. 60. P. 263–267.
2. Schaub H. et al. Challenges and Prospects of Coulomb Spacecraft Formation Control of the Astronautical Sciences // J. Astronaut. Sci. 2004. Vol. 52. P. 169–193.
3. King L.B., Parker G.G. Spacecraft Formation Flying Using Inter-vehicle Coulomb Forces // NASA tech. rep. NASA/NIAC, 2002. 103 P.
4. Шестаков С.А., Иванов Д.С., Овчинников М.Ю. Управление движением группового полета спутников с помощью переброса масс // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 81. 27 с.
5. Maclay C.T. Satellite Station-Keeping of the ORBCOMM Constellation Via Active Control of Atmospheric Drag: Operations, Constraints, and Performance // Adv.Astronaut.Sci. 2005. Vol. 120. P. 763–773.
6. De Ruiter A., Lee J. A Fault-Tolerant Magnetic Spin Stabilizing Controller For The JC2Sat-FF Mission // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Honolulu, Hawaii, 18– 21 August 2008. AIAA-2008-7486.
7. Leonard C.L. Formation Keeping of Spacecraft via Differential Drag // Master Thesis, Massachusetts Inst. Technol. 1986.
8. Kristiansen R., Nicklasson P.J. Spacecraft Formation Flying: A Review and New Results on State Feedback Control // Acta Astronaut. Elsevier, 2009. Vol. 65, № 11-12. P. 1537–1552.
9. Kumar B.S., Ng A., A Bang-Bang Control Approach to Maneuver Spacecraft in a Formation With Differential Drag // Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, AIAA Paper No.2008-6469, Honolulu, Hawaii, August 2008.
10. Zeng G., Hu M., Yao H. Relative Orbit Estimation and Formation Keeping Control of Satellite Formations in Low Earth Orbits // Acta Astronaut. Elsevier, 2012. Vol. 76. P. 164–175.
11. Perez D., Bevilacqua R. Lyapunov-based Spacecraft Rendezvous Maneuvers Using Differential Drag // AIAA-2011-6630 Paper, AIAA Guidance, Dynamics and Control Conference 2011, Portland, OR.

12. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // *J. Astronaut. Sci.* 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–678.
13. Hill G.W. Researches in Lunar Theory // *Am. J. Math.* 1878. Vol. 1. P. 5–26.
14. Lawden D.F. Fundamentals of Space Navigation // *J. Br. Interplanet. Soc.* 1954. Vol. 13, № 2. P. 87–101.
15. Schweighart S., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight // *J. Guid. Control. Dyn.* 2002. Vol. 25, № 6. P. 1073–1080.
16. Баладин Д.В., Городецкий С.Ю. Классические и современные методы построения регуляторов в примерах // *Электронное учебно-методическое пособие.* 2012. 122 с.
17. Kumar K.D. et al. Maintenance of Satellite Formations Using Environmental Forces // *Acta Astronaut. Elsevier*, 2014. Vol. 102. P. 341–354.

## Содержание

Введение.....	3
1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	5
1.1 Уравнения движения.....	5
1.2 Модель аэродинамической силы .....	6
1.3 Исследование быстродействия .....	8
2 АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ.....	9
2.1 Оптимальное управление .....	9
2.2 Управление на основе функции Ляпунова .....	12
3 ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ И ИХ СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ.....	13
3.1 Параметры численного моделирования.....	13
3.2 Линейно-квадратичный регулятор .....	13
3.3 Управление на основе функции Ляпунова .....	17
4 УЧЁТ ВЛИЯНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ .....	21
4.1 Уравнения возмущенного движения.....	21
4.2 Поддержание относительной траектории.....	22
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	27
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	28