



Сарычев В.А., Гутник С.А.

Исследование устойчивости положений равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Общий случай

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Сарычев В.А., Гутник С.А. Исследование устойчивости положений равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Общий случай // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 33. 25 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-33>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. Келдыша  
Российской академии наук**

**В.А. Сарычев, С.А. Гутник**

**Исследование устойчивости положений  
равновесия спутника под действием  
гравитационного и аэродинамического  
моментов. Общий случай**

**Москва — 2015**

### **Сарычев В.А., Гутник С.А.**

Исследование устойчивости положений равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Общий случай

Исследована динамика вращательного движения спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Предложен метод определения всех положений равновесия спутника в орбитальной системе координат при заданных значениях вектора аэродинамического момента и главных центральных моментов инерции и получены условия их существования. Для каждой равновесной ориентации получены достаточные условия устойчивости с использованием в качестве функции Ляпунова обобщенного интеграла энергии. Проведен детальный численный анализ областей выполнения условий устойчивости положений равновесия в зависимости от четырех безразмерных параметров задачи. Показано, что число положений равновесия спутника, для которых выполняются достаточные условия устойчивости, в общем случае изменяется при возрастании величины модуля аэродинамического момента от 4 до 2.

**Ключевые слова:** спутник, гравитационный момент, аэродинамический момент, положения равновесия, устойчивость.

### **Sarychev V.A., Gutnik S.A.**

Investigation of equilibria stability conditions of the satellite subject to gravitational and aerodynamic torques. General case

Dynamics of attitude motion of a satellite moving along a circular orbit under influence of gravitational and aerodynamic torques is investigated. A symbolic-numerical method for determining all equilibrium orientations of the satellite in the orbital coordinate system with given aerodynamic torque and given principal central moments of inertia is proposed. Conditions of equilibria existence are obtained depending on four dimensionless parameters of the system. For each equilibrium orientation sufficient conditions of stability are obtained as a result of analysis of generalized energy integral used as Lyapunov's function. Investigation of domains where stability conditions take place is provided in detail depending on four dimensionless parameters of the problem. It is shown that the number of stable equilibria of the satellite in general case changes from 4 to 2 with the increasing the absolute value of aerodynamic torque.

**Key words:** satellite, gravitational torque, aerodynamic torque, equilibria, stability.

## 1. Уравнения движения

Рассмотрим движение спутника – твердого тела относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Для записи уравнений движения введем две правые прямоугольные системы координат с началом в центре масс  $O$  спутника.

$OXYZ$  – орбитальная система координат. Ось  $OZ$  направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника; ось  $OX$  направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс  $O$  спутника.

$Oxyz$  – связанная со спутником система координат;  $Ox, Oy, Oz$  – главные центральные оси инерции спутника.

Определим ориентацию системы координат  $Oxyz$  относительно орбитальной системы координат с использованием углов Эйлера  $\psi, \mathcal{I}$  и  $\varphi$ . Направляющие косинусы осей  $Ox, Oy, Oz$  в орбитальной системе координат выражаются через углы Эйлера с помощью соотношений [1]:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \cos(x, X) = \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\mathcal{I} \sin\varphi, \\
 a_{12} &= \cos(y, X) = -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\mathcal{I} \cos\varphi, \\
 a_{13} &= \cos(z, X) = \sin\psi \sin\mathcal{I}, \\
 a_{21} &= \cos(x, Y) = \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\mathcal{I} \sin\varphi, \\
 a_{22} &= \cos(y, Y) = -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\mathcal{I} \cos\varphi, \\
 a_{23} &= \cos(z, Y) = -\cos\psi \sin\mathcal{I}, \\
 a_{31} &= \cos(x, Z) = \sin\mathcal{I} \sin\varphi, \\
 a_{32} &= \cos(y, Z) = \sin\mathcal{I} \cos\varphi, \\
 a_{33} &= \cos(z, Z) = \cos\mathcal{I}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда уравнения движения спутника относительно центра масс запишутся в виде [1, 2]:

$$\begin{aligned}
 A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \omega_0^2(H_2a_{13} - H_3a_{12}) &= 0, \\
 B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \omega_0^2(H_3a_{11} - H_1a_{13}) &= 0, \\
 C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \omega_0^2(H_1a_{12} - H_2a_{11}) &= 0;
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 p &= \bar{p} + \omega_0 a_{21}, & \bar{p} &= \dot{\psi} a_{31} + \dot{\mathcal{I}} \cos\varphi, \\
 q &= \bar{q} + \omega_0 a_{22}, & \bar{q} &= \dot{\psi} a_{32} - \dot{\mathcal{I}} \sin\varphi, \\
 r &= \bar{r} + \omega_0 a_{23}, & \bar{r} &= \dot{\psi} a_{33} + \dot{\varphi}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

В уравнениях (2), (3)

$$H_1 = -\frac{Qa}{\omega_0^2}, \quad H_2 = -\frac{Qb}{\omega_0^2}, \quad H_3 = -\frac{Qc}{\omega_0^2};$$

$A, B, C$  - главные центральные моменты инерции спутника;  $p, q, r$  - проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси  $Ox, Oy, Oz$ ;  $\omega_0$  - угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите;  $Q$  - действующая на спутник сила сопротивления;  $a, b, c$  - координаты центра давления спутника в системе координат  $Oxyz$ . Без потери общности будем предполагать, что  $B > A > C$ . Точкой обозначено дифференцирование по времени.

Уравнения (2) получены при следующих предположениях:

1) действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника относительно воздуха;

2) влияние атмосферы на поступательное движение спутника пренебрежимо мало;

3) увлечением атмосферы вращающейся Землей пренебрегается.

Предположение 1) достаточно точно выполняется для формы спутника, близкой к сферической.

Для системы (2), (3) справедлив обобщенный интеграл энергии [1]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(A-C)a_{31}^2 + (B-C)a_{32}^2] + \\ & + \frac{1}{2}\omega_0^2[(B-A)a_{21}^2 + (B-C)a_{23}^2] - \omega_0^2(H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13}) = \text{const.} \end{aligned} \quad (4)$$

## 2. Положения равновесия спутника

Положив в (2) и (3)  $\psi = \psi_0 = \text{const}$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 = \text{const}$ ,  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ , получим при  $A \neq B \neq C$  уравнения

$$\begin{aligned} (C-B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - H_2a_{13} + H_3a_{12} &= 0, \\ (A-C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - H_3a_{11} + H_1a_{13} &= 0, \\ (B-A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - H_1a_{12} + H_2a_{11} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

позволяющие определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. В дальнейшем исследовании удобнее использовать эквивалентную систему

$$\begin{aligned}
& Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33} = 0, \\
& 3(Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33}) + (H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33}) = 0, \\
& (Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) - (H_1a_{21} + H_2a_{22} + H_3a_{23}) = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

которая получается проектированием уравнений (5) на оси орбитальной системы координат. Систему (6) с использованием безразмерных параметров  $h_i = H_i / (B - C)$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\nu = (B - A) / (B - C)$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \nu a_{21}a_{31} + a_{23}a_{33} = 0, \\
& -3(\nu a_{11}a_{31} + a_{13}a_{33}) + (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}) = 0, \\
& \nu a_{11}a_{21} + a_{13}a_{23} + (h_1a_{21} + h_2a_{22} + h_3a_{23}) = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Систему (6) или (7) можно рассматривать как систему трех уравнений с неизвестными  $\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0$ . Другой способ замыкания уравнений (6) или (7) заключается в добавлении шести условий ортогональности направляющих косинусов

$$\begin{aligned}
& a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0, \\
& a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \quad a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0, \\
& a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \quad a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Система уравнений (6), (8) была решена для некоторых частных случаев. В статьях [2, 3] для случая, когда центр давления аэродинамических сил расположен на одной из главных центральных осей инерции спутника (например,  $h_1 \neq 0, h_2 = h_3 = 0, A \neq B \neq C$ ), аналитически определены все положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. Для каждого положения равновесия спутника получены как достаточные, так и необходимые условия устойчивости. Исследована эволюция областей устойчивости в зависимости от двух безразмерных параметров задачи. Более сложный случай, когда центр давления аэродинамических сил лежит в одной из главных центральных плоскостей инерции спутника (например,  $h_1 \neq 0, h_2 = 0, h_3 \neq 0, A \neq B \neq C$ ), рассмотрен в [4]. Здесь предложен метод численного определения всех положений равновесия в зависимости от трех безразмерных параметров задачи, получены достаточные условия их устойчивости. И, наконец, в статье [5] были исследованы положения равновесия осесимметричного спутника при  $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0, A \neq B = C$ .

Настоящая работа является продолжением статей [6, 7], где с использованием символьно - численных методов были определены и исследованы положения равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов в общем случае, когда  $h_1 \neq 0$ ,  $h_2 \neq 0$ ,  $h_3 \neq 0$ ,  $A \neq B \neq C$ . Было показано, что число положений равновесия спутника на круговой орбите не превышает 24 и не может быть меньше 8, определены бифуркационные значения параметров системы, при которых изменяется число положений равновесия и проведен детальный численный анализ эволюции областей существования различного числа положений равновесия в пространстве четырех безразмерных параметров задачи. В предлагаемой работе главное внимание уделено исследованию устойчивости полученных в [7] положений равновесия спутника.

Следуя [7], рассмотрим системы (7) и (8), которые образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно 9 неизвестных направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. Как показано в [2, 7], систему уравнений (7), (8) можно разрешить относительно  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$  при  $A \neq B \neq C$  следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{3[\nu a_{32}^2 - (1-\nu)a_{33}^2]a_{31}}{F}, & a_{21} &= \frac{3a_{32}a_{33}}{F}, \\ a_{12} &= \frac{-3(\nu a_{31}^2 + a_{33}^2)a_{32}}{F}, & a_{22} &= \frac{-3(1-\nu)a_{33}a_{31}}{F}, \\ a_{13} &= \frac{3[(1-\nu)a_{31}^2 + a_{32}^2]a_{33}}{F}, & a_{33} &= \frac{-3\nu a_{31}a_{32}}{F}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $F = h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}$ .

Подставляя уравнения (9) во второе и третье уравнение (7) и добавляя третье уравнение (8), получим, также как в [3, 4, 7], систему

$$\begin{aligned} 9[a_{32}^2 a_{33}^2 + (1-\nu)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + \nu^2 a_{31}^2 a_{32}^2] &= (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33})^2 (a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2), \\ 3\nu(1-\nu)a_{31}a_{32}a_{33} - [h_1 a_{32}a_{33} - h_2(1-\nu)a_{33}a_{31} - h_3\nu a_{31}a_{32}] &\times \\ \times (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}) &= 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (10)$$

для определения направляющих косинусов  $a_{31}, a_{32}, a_{33}$ . После решения системы (10) формулы (9) позволяют определить оставшиеся шесть направляющих косинусов. Отметим, что для обеспечения однородности правая часть первого уравнения (10) была умножена на  $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$ .

Введя переменные  $x = a_{31}/a_{33}$ ,  $y = a_{32}/a_{33}$  и разделив обе части первого уравнения (10) на  $a_{33}^4$ , а второго уравнения (10) на  $a_{33}^3$ , получим алгебраическую систему двух уравнений относительно переменных  $x$  и  $y$

$$\begin{aligned} 9[y^2 + (1-\nu)^2 x^2 + \nu^2 x^2 y^2] &= (h_1 x + h_2 y + h_3)^2 (1 + x^2 + y^2), \\ 3\nu(1-\nu)xy - [h_1 y - h_2(1-\nu)x - h_3 \nu xy](h_1 x + h_2 y + h_3) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее, подставляя выражения  $a_{31} = xa_{33}$ ,  $a_{32} = ya_{33}$  в последнее уравнение системы (10), получим выражение

$$a_{33}^2 = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}. \quad (12)$$

Систему уравнений (11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_0 y^2 + a_1 y + a_2 &= 0, \\ b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4 &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= h_2(\nu h_3 x - h_1), \\ a_1 &= \nu h_1 h_3 x^2 - h_1 h_3 + [3\nu(1-\nu) - h_1^2 + (1-\nu)h_2^2 + \nu h_3^2]x, \\ a_2 &= (1-\nu)h_2(h_1 x + h_3)x, \\ b_0 &= h_2^2, \quad b_1 = 2h_2(h_1 x + h_3), \\ b_2 &= (h_2^2 + h_3^2 - 9) + 2h_1 h_3 x + (h_1^2 + h_2^2 - 9\nu^2)x^2, \\ b_3 &= 2h_2(h_1 x + h_3)(1 + x^2), \\ b_4 &= (h_1 x + h_3)^2(1 + x^2) - 9(1-\nu)^2 x^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Исключая из системы двух уравнений (11)  $y$  с использованием понятия результата и применяя для вычисления определителя результата систему компьютерной алгебры Mathematica, можно получить алгебраическое уравнение 12-го порядка относительно  $x$

$$\begin{aligned} p_0 x^{12} + p_1 x^{11} + p_2 x^{10} + p_3 x^9 + p_4 x^8 + p_5 x^7 + p_6 x^6 + \\ + p_7 x^5 + p_8 x^4 + p_9 x^3 + p_{10} x^2 + p_{11} x + p_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

коэффициенты которого представляют собой довольно сложные полиномы восьмого порядка, зависящие от параметров  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $\nu$  [7].

Отметим, что число действительных корней алгебраического уравнения (15) четно и не превышает 12. Подставляя значение действительного корня  $x_1$

алгебраического уравнения (15) в уравнения системы (11), найдем совпадающий корень  $y_1$  этих уравнений. Для каждого решения  $(x_1, y_1)$  из уравнения (12) можно определить два значения  $a_{33}$ , а затем и соответствующие им величины  $a_{31} = x_1 a_{33}$  и  $a_{32} = y_1 a_{33}$ . Таким образом, каждому действительному корню алгебраического уравнения (15) соответствуют два набора значений  $a_{31}, a_{32}, a_{33}$ , которые, в силу (9), однозначно определяют остальные направляющие косинусы  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ . Из приведенных соображений следует, что спутник на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов в общем случае ( $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0, A \neq B \neq C$ ) может иметь не более 24 положений равновесия.

### 3. Исследование достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника

Для исследования достаточных условий устойчивости полученных положений равновесия системы (7), (8) будем использовать обобщенный интеграл энергии (4) в качестве функции Ляпунова. Этот интеграл можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_0^2\{3[(1 - \nu)a_{31}^2 + a_{32}^2] + \\ & + (\nu a_{21}^2 + a_{23}^2) - 2(h_1 a_{11} + h_2 a_{12} + h_3 a_{13})\} = \text{const}. \end{aligned} \quad (16)$$

Представим углы  $\psi, \vartheta, \varphi$  как  $\psi = \psi_0 + \bar{\psi}$ ,  $\vartheta = \vartheta_0 + \bar{\vartheta}$ ,  $\varphi = \varphi_0 + \bar{\varphi}$ , где  $\bar{\psi}, \bar{\vartheta}, \bar{\varphi}$  – малые отклонения от положения равновесия спутника  $\psi = \psi_0 = \text{const}$ ,  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$ ,  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ , удовлетворяющего системе уравнений (7), (8).

Тогда интеграл энергии (16) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_0^2(A_{\psi\psi}\bar{\psi}^2 + A_{\vartheta\vartheta}\bar{\vartheta}^2 + A_{\varphi\varphi}\bar{\varphi}^2 + \\ & + 2A_{\psi\vartheta}\bar{\psi}\bar{\vartheta} + 2A_{\psi\varphi}\bar{\psi}\bar{\varphi} + 2A_{\vartheta\varphi}\bar{\vartheta}\bar{\varphi}) + \Sigma = \text{const}, \end{aligned} \quad (17)$$

где символ  $\Sigma$  обозначает члены выше второго порядка малости относительно  $\bar{\psi}, \bar{\vartheta}, \bar{\varphi}$  и

$$\begin{aligned}
A_{\psi\psi} &= \nu(a_{11}^2 - a_{21}^2) + (a_{13}^2 - a_{23}^2) + h_1 a_{11} + h_2 a_{12} + h_3 a_{13}, \\
A_{\mathcal{G}\mathcal{G}} &= (3 + \cos^2 \psi_0)(1 - \nu \sin^2 \varphi_0) \cos 2\mathcal{G}_0 - \\
&\quad - \frac{1}{4} \nu \sin 2\psi_0 \cos \mathcal{G}_0 \sin 2\varphi_0 - (h_1 \sin \varphi_0 + h_2 \cos \varphi_0) \sin \psi_0 \cos \mathcal{G}_0 + h_3 a_{13}, \\
A_{\varphi\varphi} &= \nu[(a_{22}^2 - a_{21}^2) - 3(a_{32}^2 - a_{31}^2)] + h_1 a_{11} + h_2 a_{12}, \\
A_{\psi\mathcal{G}} &= -\frac{1}{2} \sin 2\psi_0 \sin 2\mathcal{G}_0 + \nu(a_{11} a_{23} + a_{13} a_{21}) \sin \varphi_0 - \cos \psi_0 (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}), \\
A_{\psi\varphi} &= \nu(a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}) + h_1 a_{22} - h_2 a_{21}, \\
A_{\mathcal{G}\varphi} &= -\frac{3}{2} \nu \sin 2\mathcal{G}_0 \sin 2\varphi_0 + \nu(a_{21} \cos \varphi_0 + a_{22} \sin \varphi_0) a_{23} - (h_1 \cos \varphi_0 - h_2 \sin \varphi_0) a_{13}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Из теоремы Ляпунова следует, что изучаемое положение равновесия устойчиво, если квадратичная форма

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{1}{2}(B - C)\omega_0^2(A_{\psi\psi}\bar{\psi}^2 + A_{\mathcal{G}\mathcal{G}}\bar{\mathcal{G}}^2 + A_{\varphi\varphi}\bar{\varphi}^2 + \\
&+ 2A_{\psi\mathcal{G}}\bar{\psi}\bar{\mathcal{G}} + 2A_{\psi\varphi}\bar{\psi}\bar{\varphi} + 2A_{\mathcal{G}\varphi}\bar{\mathcal{G}}\bar{\varphi})
\end{aligned} \tag{19}$$

является определено-положительной, то есть, выполняются условия

$$\begin{aligned}
A_{\psi\psi} &> 0, \\
A_{\psi\psi}A_{\mathcal{G}\mathcal{G}} - (A_{\psi\mathcal{G}})^2 &> 0, \\
A_{\psi\psi}A_{\mathcal{G}\mathcal{G}}A_{\varphi\varphi} + 2A_{\psi\mathcal{G}}A_{\psi\varphi}A_{\mathcal{G}\varphi} - A_{\psi\psi}(A_{\mathcal{G}\varphi})^2 - A_{\mathcal{G}\mathcal{G}}(A_{\psi\varphi})^2 - A_{\varphi\varphi}(A_{\psi\mathcal{G}})^2 &> 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя выражения  $A_{\psi\psi}, A_{\mathcal{G}\mathcal{G}}, A_{\varphi\varphi}, A_{\psi\mathcal{G}}, A_{\psi\varphi}, A_{\mathcal{G}\varphi}$  из (18) для соответствующего положения равновесия в (20), получим достаточные условия устойчивости этого решения.

Для каждого набора значений параметров  $h_1, h_2, h_3, \nu$  с использованием численного пакета системы Mathematica определялся действительный корень  $x$  уравнения (15). Для наглядности представления положений равновесия спутника результаты вычислений выразим через углы Эйлера. Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{31}}{a_{32}} = \frac{x_1}{y_1} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{a_{31}}{a_{32}} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Угол  $\mathcal{G}$  ( $0 \leq \mathcal{G} < \pi$ ) определяется соотношением  $\cos \mathcal{G} = a_{33}$ . Угол  $\psi$  ( $0 \leq \psi < 2\pi$ ) также однозначно определяется с помощью соотношений (1)

$$\sin \psi = \frac{a_{13}}{\sin \mathcal{G}}; \quad \cos \psi = -\frac{a_{23}}{\sin \mathcal{G}}.$$

Таким образом, для каждого действительного корня уравнения (15) можно однозначно определить два набора углов ориентации  $\psi_0, \mathcal{G}_0, \varphi_0$ , вычислить коэффициенты квадратичной формы (18) и проверить выполнение условий ее положительной определенности (20).

Так как  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , то для каждого действительного корня  $\operatorname{tg} \varphi = x_1/y_1$  существуют два значения угла  $\varphi$  ( $\varphi_1$  и  $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ ). Из свойств коэффициентов квадратичной формы (18) следует, что достаточные условия устойчивости (20) для значений  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  одинаковы. Кроме того, можно показать, что условия (20) не зависят от знака параметров  $h_1, h_2, h_3$ . Следовательно, численный анализ достаточных условий устойчивости равновесных решений уравнений (7), (8) можно проводить лишь для положительных значений  $h_1, h_2, h_3$ , одного значения угла  $\varphi$  ( $\varphi_1$  или  $\varphi_2$ ) и при выполнении условий  $0 < \nu < 1$  (рис. 1).

На рис. 2 – 27 показаны результаты вычислений зависимости угла  $\varphi$  от  $h_1$  при фиксированных значениях  $\nu, h_2$  и  $h_3$ ; пунктирной линией обозначены ветви положений равновесия, для которых выполняются достаточные условия устойчивости (20). В силу того, что достаточные условия устойчивости (20) для значений углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_1 + \pi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) одинаковы, численные результаты на рис. 2-27 представлены для  $0 \leq \varphi < \pi$ .

Вычисления проводились при следующих значениях инерционного параметра:  $\nu = 0.2, \nu = 0.4, \nu = 0.5$  и  $\nu = 0.8$  (рис. 2–27). Из анализа результатов вычислений для указанных значений параметров следует, что для  $h_3 < 1 - \nu$  при малых значениях  $h_1, h_2$  существуют 24 ветви положений равновесия и для четырех ветвей из них выполняются условия устойчивости (20) (рис. 2, 3, 4, 13, 15, 21).

При возрастании значений параметра  $h_1$  происходит последовательное слияние ветвей положений равновесия в точках, соответствующих точкам пересечения прямой  $h_2 = \text{const}$  с границами областей с равным числом положений равновесия. Рассмотрим в качестве примера вариант расчета границ областей с равным числом положений равновесия при  $\nu = 0.2, h_3 = 0.153$  (рис. 1). В этом случае происходит слияние границ областей с числом положений равновесия, равным 20, представляющих собой кривые типа астроид и границ областей с числом положений равновесия, равным 16, представляющих собой кривые типа эллипсов в одной точке  $h_2 = 0.604$ . Данный рисунок представляет собой пример наиболее типичных областей с равным числом положений равновесия спутника, границы которых являются комбинациями астроид и эллипсов, подробно рассмотренных в работе [7]. На рис. 1 представлены четыре точки пересечения прямой линии  $h_2 = 0.1$  с

границами областей с равным числом положений равновесия  $h_1=0.0463$ ,  $h_1=0.3788$ ,  $h_1=0.6104$  и  $h_1=1.8479$ ; на рис. 2 ( $\nu=0.2$ ,  $h_2=0.1$ ,  $h_3=0.153$ ) показано, что в этих точках происходит слияние ветвей положений равновесия.

На рис. 3-10 показана эволюция характера изменения ветвей положений равновесия при изменении значений параметра  $h_2$  от величины 0.05, когда существуют 24 ветви положений равновесия, до значения 4.0, когда существуют 8 ветвей положений равновесия (при фиксированных  $\nu=0.2$ ,  $h_3=0.01$ ). На рис. 4 и 5 показан характер изменения ветвей положений равновесия при увеличении значения параметра  $h_2$  с величины 0.1 (рис. 4) до величины 0.2 (рис. 5). Число ветвей положений равновесия при этом уменьшается с 24 до 20, а число ветвей положений равновесия для которых условия устойчивости (20) выполняются, уменьшаются с 4 до 2. При значении  $h_2=0.6$  (рис. 6) существуют 16 ветвей положений равновесия, условия устойчивости (20) выполняются для двух из них. При возрастании  $h_2$  до значения  $h_2=1.0$  (рис. 7) число ветвей положений равновесия уменьшается до 12, условия устойчивости (20) выполняются для двух из них. Начиная со значения  $h_2=3.0$  (рис. 9), число ветвей положений равновесия становится равным 8. При дальнейшем увеличении параметра  $h_2$  число ветвей положений равновесия не изменяется и условия устойчивости (20) при этом выполняются также только для двух из них (рис. 10).

Существуют четыре устойчивых положения равновесия для  $h_3 \geq 1$  когда имеют место 16 положений равновесия (рис. 11, 12, 14, 20). На рис. 11, 12 показан характер изменения 16-ти ветвей положений равновесия при изменении параметра  $h_3$  с величины 1.0 до величины 2.0 (при  $\nu=0.2$ ,  $h_2=0.1$ ). На рис. 11, 14 и 20 можно проследить характер изменения 16 ветвей положений равновесия при изменении параметра  $\nu$  от 0.2 до 0.5 при фиксированных  $h_2=0.1$ ,  $h_3=1.0$ . Рис. 11, 14, 20 и 26 показывают характер изменения ветвей положений равновесия при изменении значений параметра  $\nu$  от 0.2 до 0.8 при фиксированных значениях  $h_2=0.1$ ,  $h_3=1.0$ .

На рис. 15-19 показан характер изменения ветвей положений равновесия при изменении значений параметра  $h_2$  с величины 0.2, когда существуют 24 ветви положений равновесия до величины 3.0, когда существуют 8 ветвей положений равновесия при фиксированных значениях  $\nu=0.5$ ,  $h_3=0.01$ . На рис. 21-25 показан характер изменения ветвей положений равновесия при изменении значений параметра  $h_2$  с величины 0.2, когда существуют 24 ветви положений равновесия до величины 3.0, когда существуют 8 ветвей положений равновесия при фиксированных значениях  $\nu=0.8$ ,  $h_3=0.01$ .

На рис. 26, 27 показана эволюция изменения характера 12 ветвей положений равновесия при изменении значений параметра  $h_3$  с величины 1.0

до величины 2.0 (при  $\nu=0.8$ ,  $h_2=0.1$ ), при этом условия устойчивости (20) выполняются для двух ветвей.

При значениях параметров  $h_1, h_2, h_3$ , равных или превосходящих 3, существуют 8 положений равновесия (рис 9, 10, 19, 25) и лишь два из них являются устойчивыми. При больших значениях параметров  $h_1, h_2, h_3$  равновесные значения угла  $\varphi$  приближаются к тривиальным решениям, при которых одна из осей связанной со спутником системы координат совпадает с какой-либо осью орбитальной системы координат. Характер устойчивости положений равновесия в зависимости от параметров задачи соответствует характеру устойчивости положений равновесия для осесимметричного случая [5], где было показано, что число положений равновесия спутника, для которых выполняются достаточные условия устойчивости, так же, как и в общем случае, изменяется от четырех до двух при возрастании величины модуля аэродинамического момента.

## Заключение

Динамика вращательного движения спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов, исследуется в значительном числе работ. По-видимому, первое предложение по использованию аэродинамического момента в задаче ориентации искусственных спутников Земли было сделано Д.Е. Охоцимским в 1956 г. [8, 9]. Он разработал оригинальную гравитационную систему ориентации спутника. Параметры этой системы были выбраны таким образом, чтобы и гравитационный, и аэродинамический моменты были стабилизирующими. Несколько позже простейшие схемы использования аэродинамических моментов для ориентации спутника были предложены в [10-14]. Более глубокие исследования влияния аэродинамического и гравитационного моментов на движение спутника около центра масс проведены в [15-22].

В упомянутых выше работах рассматривался лишь случай консервативного аэродинамического момента. На самом деле, аэродинамический момент для более сложной конфигурации спутника обладает и неконсервативной компонентой. В этом случае обобщенный интеграл энергии (4) не существует и приходится исследовать лишь необходимые условия устойчивости положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. Можно показать [23, 24], что при учете неконсервативности аэродинамического момента коэффициенты характеристического уравнения линеаризованной в окрестности положения равновесия спутника системы уравнений движения

$$a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0 \quad (21)$$

таковы, что всегда  $a_1 = 0$ . Если при этом  $a_3 \neq 0$  и (или)  $a_5 \neq 0$ , то исследуемое положение равновесия неустойчиво. Коэффициенты  $a_3, a_5$  зависят от неконсервативной компоненты аэродинамического момента. При введении достаточного по величине диссипативного момента можно обеспечить необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия спутника.

Более подробно и глубоко влияние неконсервативной аэродинамической компоненты рассмотрено в [25] применительно к исследованию вращательного движения орбитальной станции Союз-7, подверженной действию гравитационного, аэродинамического и диссипативного моментов. Проведено оригинальное численно-аналитическое исследование, позволяющее объяснить основные характеристики самопроизвольно устанавливающегося режима гравитационной ориентации орбитальной станции Салют-7.

Первая успешная реализация трехосной аэродинамической системы ориентации была осуществлена советскими учеными на спутниках Космос-149 (1967 г.) и Космос-320 (1970 г.). Система ориентации состоит из аэродинамического стабилизатора и гиродемпфера. Аэродинамический стабилизатор выполнен из тонкой жести в виде боковой поверхности усеченного конуса и установлен на четырех длинных (4-6 м) полых стержнях, соединенных с корпусом спутника (рис. 28). Аэродинамический стабилизатор приводит к появлению восстанавливающих аэродинамических моментов по тангажу (в плоскости орбиты) и рысканию (в плоскости, перпендикулярной радиусу-вектору), стремящихся совместить продольную ось спутника с направлением набегающего потока воздуха. Гиродемпфер (два двухстепенных гироскопа) обеспечивает демпфирование собственных колебаний спутника и появление восстанавливающих гироскопических моментов по рысканию и крену (поворот вокруг касательной к орбите). Основные проблемы динамики спутника с аэродинамической системой ориентации были исследованы в [26-30].

Еще один пример использования аэродинамического момента для ориентации спутников - разработанный американскими учеными малый спутник PAMS (проект GAMES) [31-33]. Демпфирование собственных колебаний этого спутника обеспечивалось с помощью магнитных гистерезисных стержней. Спутник PAMS с одноосной аэродинамической системой ориентации был запущен на орбиту с борта корабля Space Shuttle в мае 1996 г.

Значительный цикл работ посвящен исследованию влияния аэродинамического момента на динамику движения находящихся в режиме гравитационной ориентации орбитальных станций Салют-6 и Салют-7, обладающих большими по площади солнечными батареями [34-38].

Отметим сходство, существующее между задачей о положениях равновесия спутника, подверженного действию гравитационного и

аэродинамического моментов, и задач о положениях равновесия спутника-гиростата. Для этого достаточно сравнить уравнения (9), (10) настоящего препринта с аналогичными уравнениями задачи о спутнике-гиростате [39]. Сравнимые уравнения отличаются численными коэффициентами 3, 9 настоящего препринта и 4, 16 в задаче о спутнике-гиростате.

Полученные в препринте результаты могут быть использованы при создании гравитационных и аэродинамических систем управления ориентацией искусственных спутников Земли, а также при исследовании влияния аэродинамического момента на вращательное движение спутника около его центра масс на сравнительно низких круговых орбитах.

## Литература

1. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. - Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства». М.: ВИНТИ. Т. 11. 1978. 224 с.
2. Sarychev V.A., Mirer S.A. Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2000. Vol.76. № 1. P. 55-68.
3. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A., Duarte E.K. Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2007. V. 97. № 4. P. 267-287.
4. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A. Equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques with pressure center in a principal plane of inertia // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2008. V.100. № 4. P. 301-318.
5. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // *Космические исследования*. 2012. Т. 50. № 5. С. 394-402.
6. Gutnik S.A. Symbolic-numeric investigation of the aerodynamic forces influence on satellite dynamics. // In: Gerdt, V.P., Koepef, W., Mayr, E.W., Vorozhtsov, E.V. (eds.) *CASC 2011. LNCS*. V. 6885. P. 192-199.
7. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2014. № 39. 36 с.
8. Охоцимский Д.Е., Зонов Ю.В., Токарь Е.Н., Князев Д.А., Лурье А.И., Максимов Г.Ю. Предварительное исследование проблемы создания ориентированного спутника Земли. Отчет Отделения прикладной математики МИ АН СССР. 1956. 137 с.

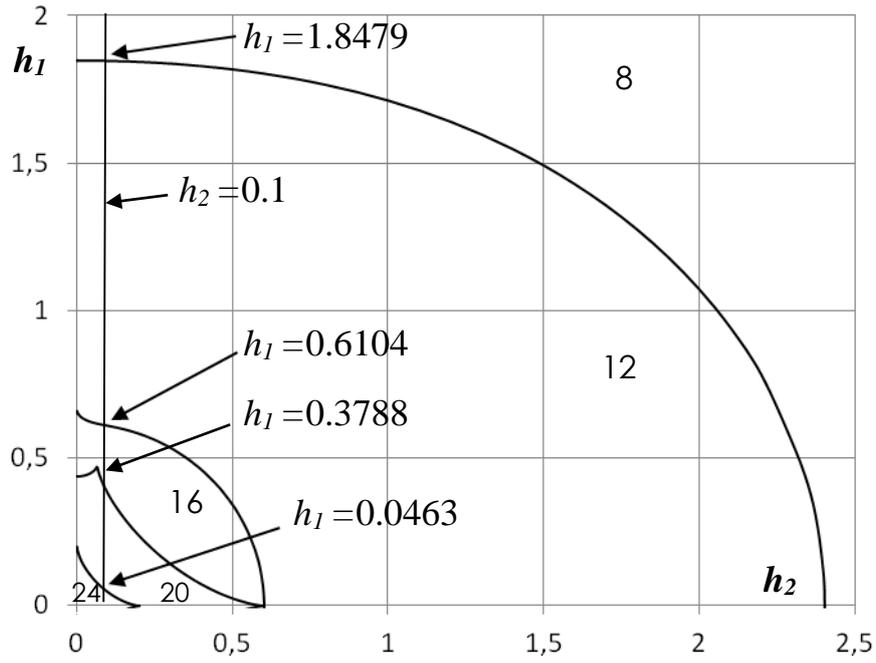
9. Охоцимский Д.Е., Сарычев В.А. Система гравитационной стабилизации искусственных спутников // *Искусственные спутники Земли*. М.: Изд. АН СССР. 1963. № 16. С. 5-9.
10. Roberson R.E. Attitude control of a satellite - an outline of the problems // *Proc. of the 7th International Astronautical Congress*. 1958. P. 317-339.
11. De Bra D.B. The effect of aerodynamic forces on satellite attitude // *Journal of the Astronautical Sci.* 1959. V. 6. № 3. P. 40-45.
12. Wall J.K. The feasibility of aerodynamic attitude stabilization of a satellite vehicle // *American Rocket Soc. Preprints*. 1959. № 787.
13. Schrello D.M. Aerodynamic influences on satellite librations // *ARS Journal*. 1961. V. 31. № 3. P. 442-444.
14. Schrello D.M. Dynamic stability of aerodynamically responsive satellites // *Journal of Aerospace Sci.* 1962. V 29. № 10. P. 1145-1155, 1163.
15. Сарычев В.А. Влияние сопротивления атмосферы на систему гравитационной стабилизации искусственных спутников Земли // *Космические исследования*. 1964. Т. 2. № 1. С. 23-32.
16. Sarychev V.A. Dynamics of a satellite gravitational stabilization system with consideration of atmosphere resistance // *Proc. of the 11th International Congress on Applied Mechanics*. 1965. P. 429-435.
17. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс // М.: Наука. 1965.
18. Meirovitch L., Wallace F.B., Jr. On the effect of aerodynamic and gravitational torques on the attitude stability of satellites // *AIAA Journal*. 1966. V. 4. № 12. P. 2196-2202.
19. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников // М.: Изд-во ВЦ АН СССР. 1967.
20. Морозов В.М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов // *Вестник МГУ. Сер. математики, механики*. 1968. № 6. С. 109-111.
21. Modi V.J., Shrivastava S.K. On the limiting regular stability and periodic solutions of a gravity oriented system in the presence of the atmosphere. *C.A.S.I. Transactions*. 1972. V. 5. № 1. P. 5-10.
22. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Динамика спутника с пассивной аэродинамической системой ориентации // *Космические исследования*. 1994. Т. 32. № 6. С. 561-575.
23. Nurre G.S. Effects of aerodynamic torques on an asymmetric, gravity stabilized satellite // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1968. V. 5. № 9. P. 1046-1050.

24. Frik M.A. Attitude stability of satellites subjected to gravity gradient and aerodynamic torques // *AIAA Journal*. 1970. V. 8. № 10. P. 1780-1785.
25. Сазонов В.В. О механизме потери устойчивости в гравитационно-ориентированном спутнике // *Космические исследования*. 1989. Т. 27. № 6. С. 836-848.
26. Sarychev V.A. Aerodynamic stabilization system of the satellite // *Proc. of the International Conference on Attitude Changes and Stabilization of Satellites*. 1968. P. 177-183. Paris, France.
27. Сарычев В.А. Условия устойчивости системы гравитационной стабилизации спутников с гиродемпфированием // *Astronautica Acta*. 1969. V. 14. № 4. P. 299-310.
28. Сарычев В.А., Садов Ю.А. Анализ динамики спутника с гидроаэродинамической системой ориентации // Сб. "*Космическая стрела. Оптические исследования атмосферы*". М.: Наука. 1974. С. 71-88.
29. Драновский В.И., Зигунов В.Н., Новоселова Н.Г., Соколов Л.В. Математическая нелинейная модель гидроаэродинамической системы ориентации // Сб. "*Космическая стрела. Оптические исследования атмосферы*". М.: Наука. 1974. С. 47-54.
30. Сарычев В.А., Мирер С.А., Златоустов В.А. Оптимальные параметры аэрогироскопической системы ориентации спутников // *Космические исследования*. 1984. Т. 22. № 3. С. 369-380.
31. Pacini L., Skillman D. A passive aerodynamically stabilized satellite for low Earth orbit // *AAS Paper 95-173*. Feb. 1995. P. 625-630.
32. Kumar R.R., Mazanek D.D., Heck M.L. Simulation and Shuttle Hitchhiker validation of passive satellite aerostabilization // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1995. V. 32. № 5. P. 806-811.
33. Kumar R.R., Mazanek D.D., Heck M.L. Parametric and classical resonance in passive satellite aerostabilization // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1996. V. 33. № 2. P. 228-234.
34. Sarychev V.A., Sazonov V.V. Gravity gradient stabilization of large space stations // *Acta Astronautica*. 1981. V. 8. № 5-6. P. 549-573.
35. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Влияние сопротивления атмосферы на одноосную гравитационную ориентацию искусственного спутника // *Космические исследования*. 1982. Т. 20. № 5. С. 659-673.
36. Sarychev V.A., Sazonov V.V. Gravity gradient stabilization of the Salyut-Souz orbital complex // *Acta Astronautica*. 1984. V. 11. № 7-8. P. 435-447.

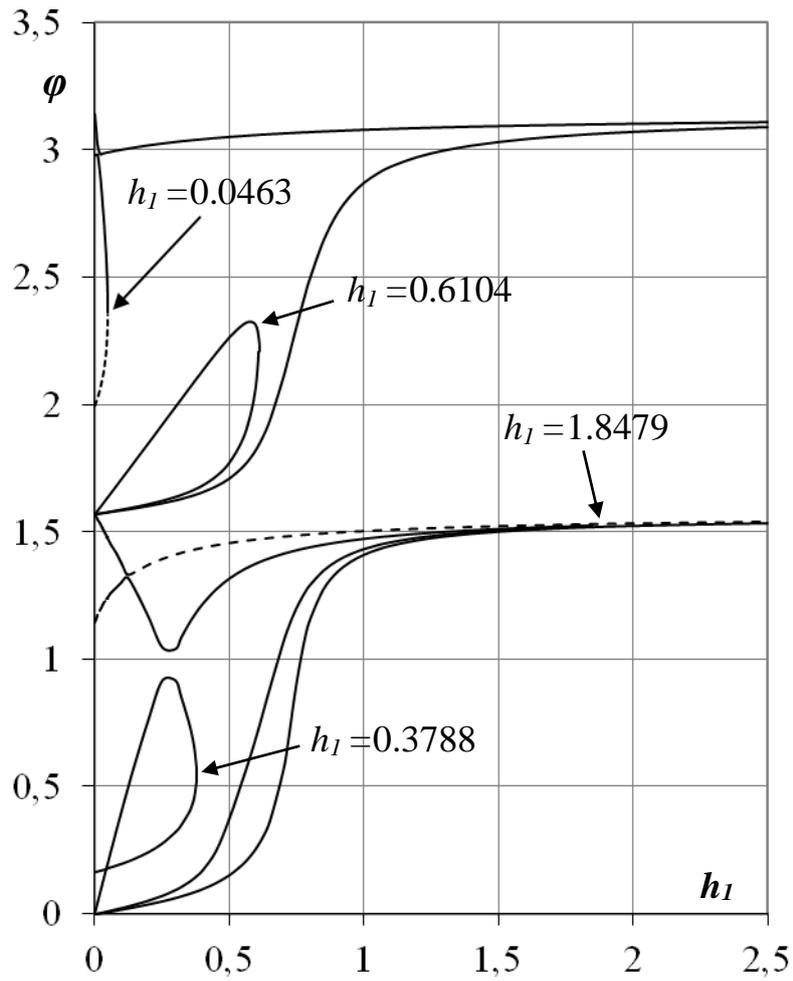
37. Гречко Г.М., Сарычев В.А., Легостаев В.П., Сазонов В.В., Гансвинд И.Н. Гравитационная ориентация орбитального комплекса "Салют-6-Союз" // *Космические исследования*. 1985. Т. 23. № 5. С. 659-675.
38. Sarychev V.A., Legostaev V.P., Sazonov V.V., Belyaev M.Yu., Gansvind I.N., Tyun T.N. The passive attitude motion of the orbital stations Salyut-6 and Salyut-7 // *Acta Astronautica*. 1987. V. 15. № 9. P. 635-640.
39. Гутник С.А., Сантуш Л., Сарычев В.А., Силва А. Динамика спутника-гиростата, подверженного действию гравитационного момента. Положения равновесия и их устойчивость // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2015. №3. С. 142-155.

## Оглавление

1. Уравнения движения .....	3
2. Положения равновесия спутника.....	4
3. Исследование достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника .....	8
Заключение.....	12
Литература .....	14



*Puc. 1.*  $\nu=0.2, h_3 = 0.153$



*Puc. 2.*  $\nu=0.2, h_2 = 0.1, h_3 = 0.153$

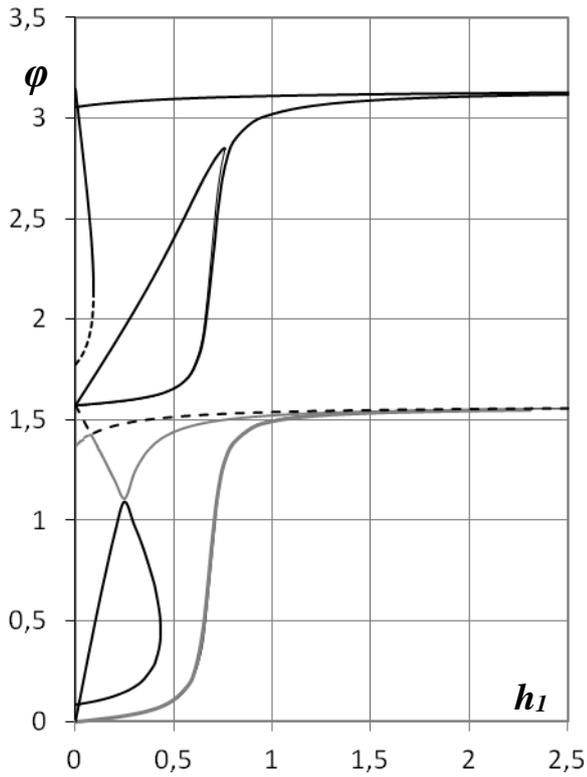


Рис. 3.  $v=0.2, h_2 = 0.05, h_3 = 0.01$   
(24 равновесия, 4 устойчивые)

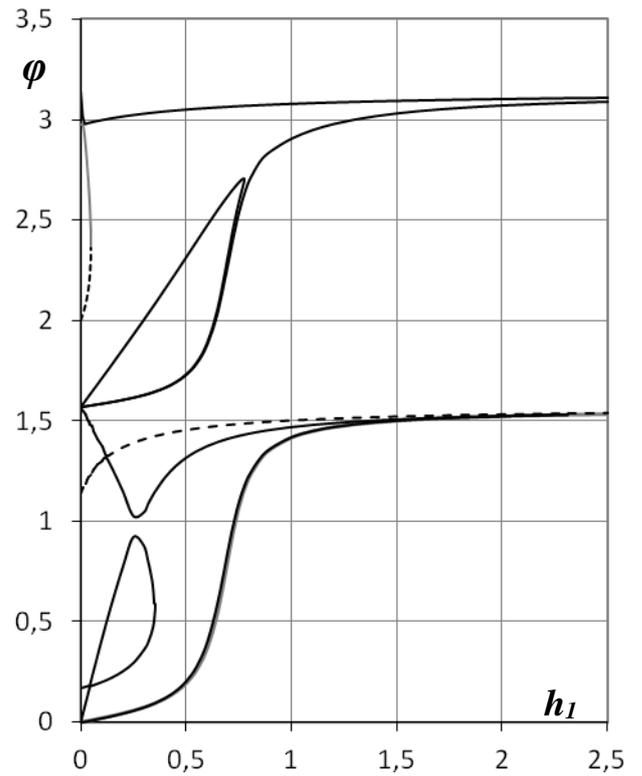


Рис. 4.  $v=0.2, h_2 = 0.1, h_3 = 0.01$   
(24 равновесия, 4 устойчивые)

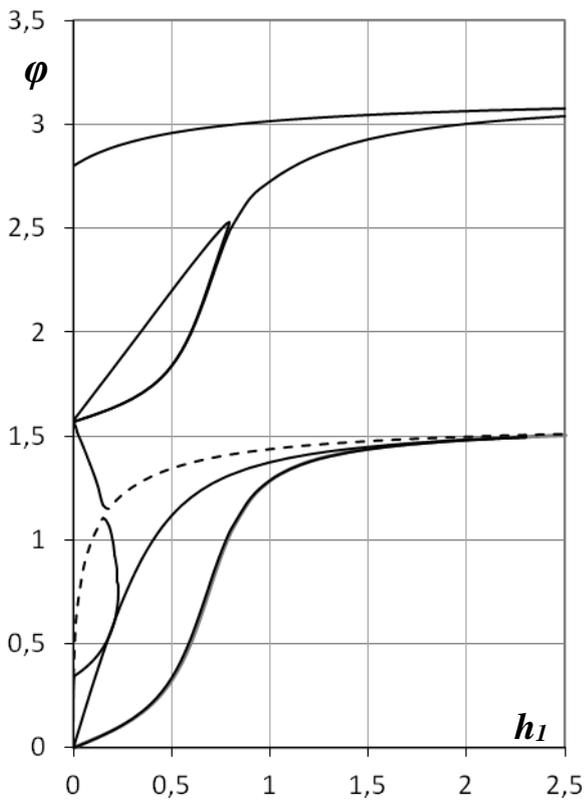


Рис. 5.  $v=0.2, h_2 = 0.2, h_3 = 0.01$   
(20 равновесий, 2 устойчивые)

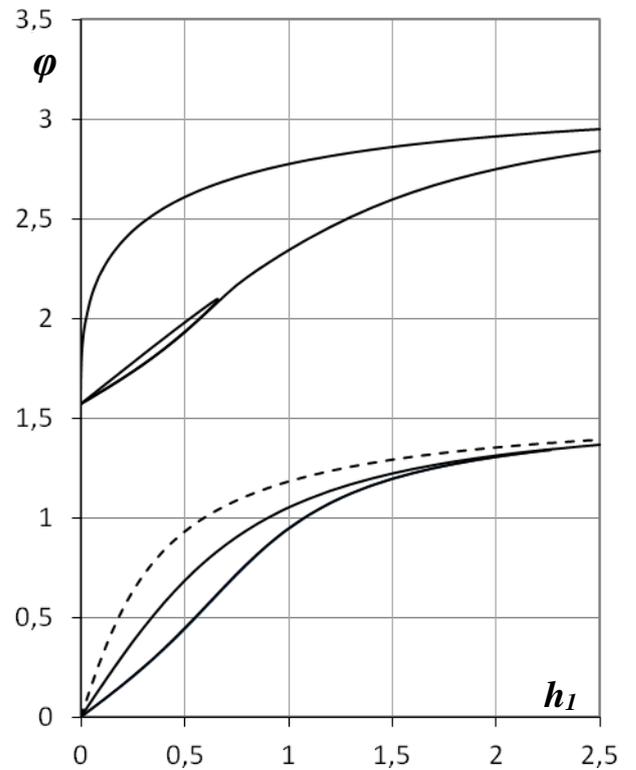


Рис. 6.  $v=0.2, h_2 = 0.6, h_3 = 0.01$   
(16 равновесий, 2 устойчивые)

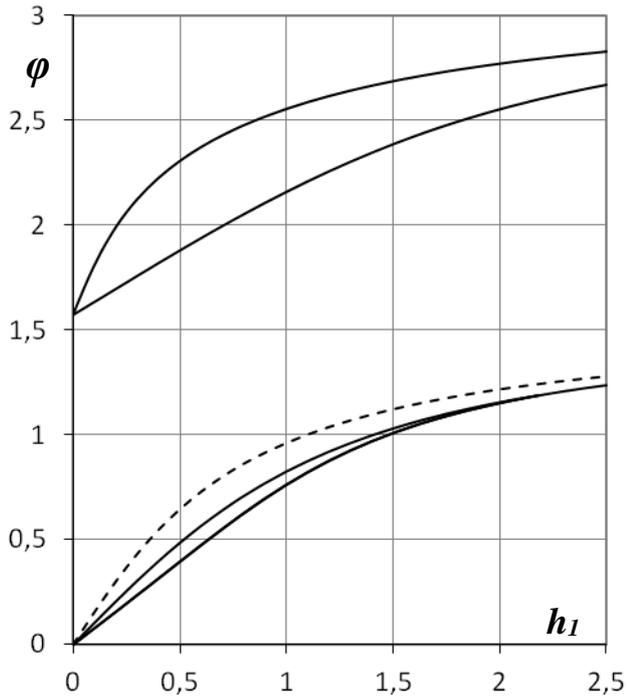


Рис. 7.  $v=0.2, h_2 = 1.0, h_3 = 0.01$   
(12 равновесия, 2 устойчивые)

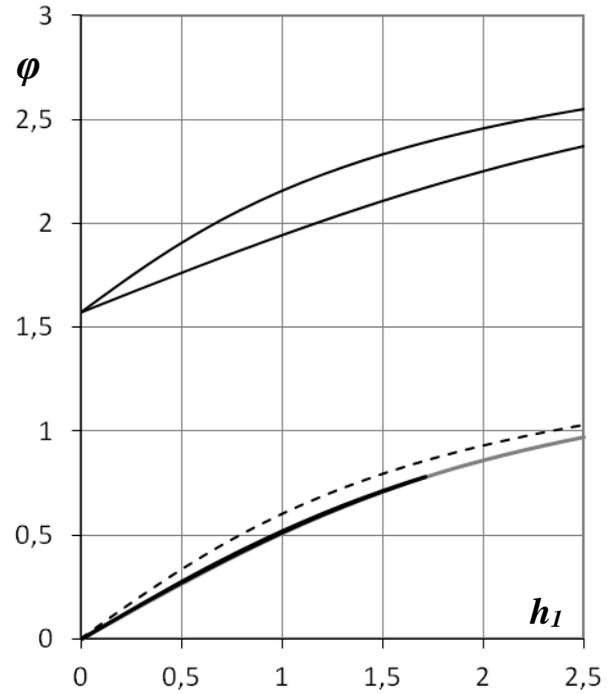


Рис. 8.  $v=0.2, h_2 = 2.0, h_3 = 0.01$   
(12 равновесий, 2 устойчивые)

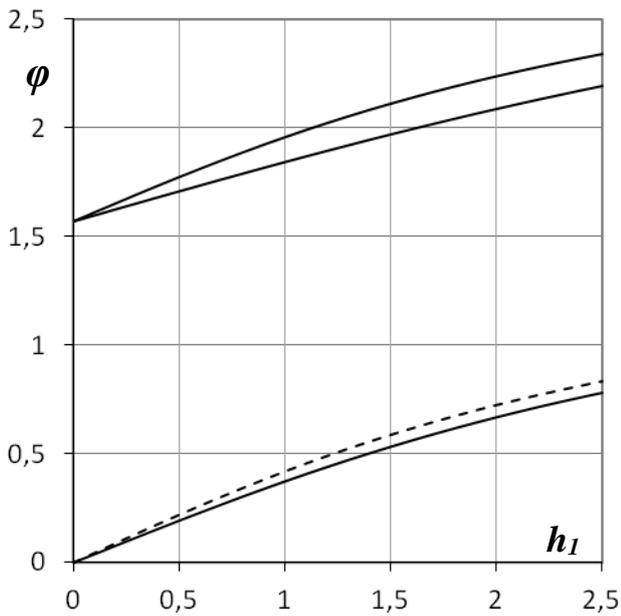


Рис. 9.  $v=0.2, h_2 = 3.0, h_3 = 0.01$   
(8 равновесий, 2 устойчивые)

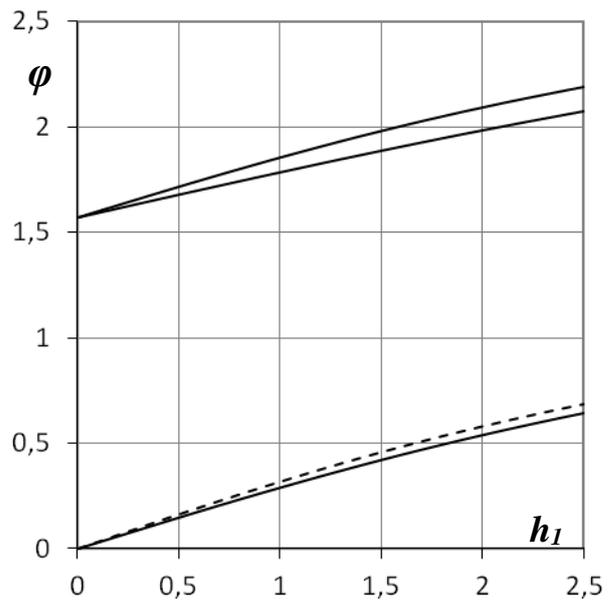


Рис.10.  $v=0.2, h_2 = 4.0, h_3 = 0.01$   
(8 равновесий, 2 устойчивые)



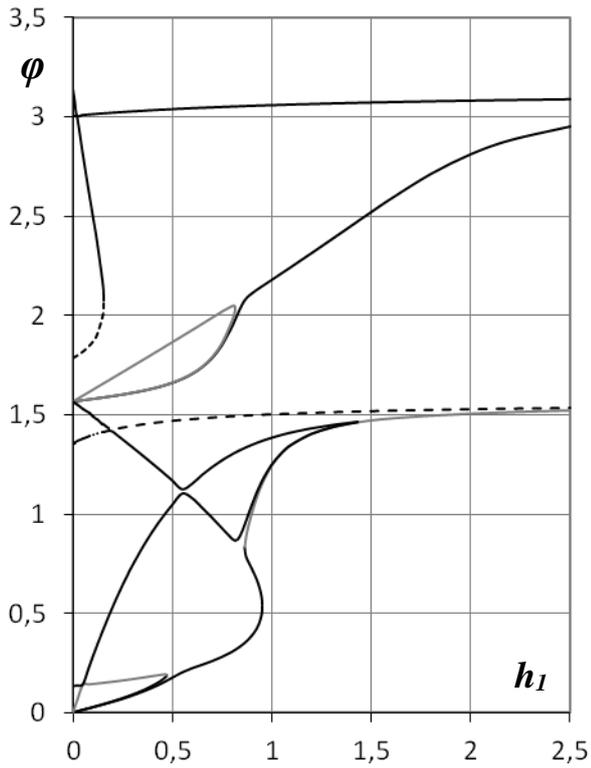


Рис. 15.  $v=0.5, h_2 = 0.2, h_3 = 0.01$   
(24 равновесия, 4 устойчивые)

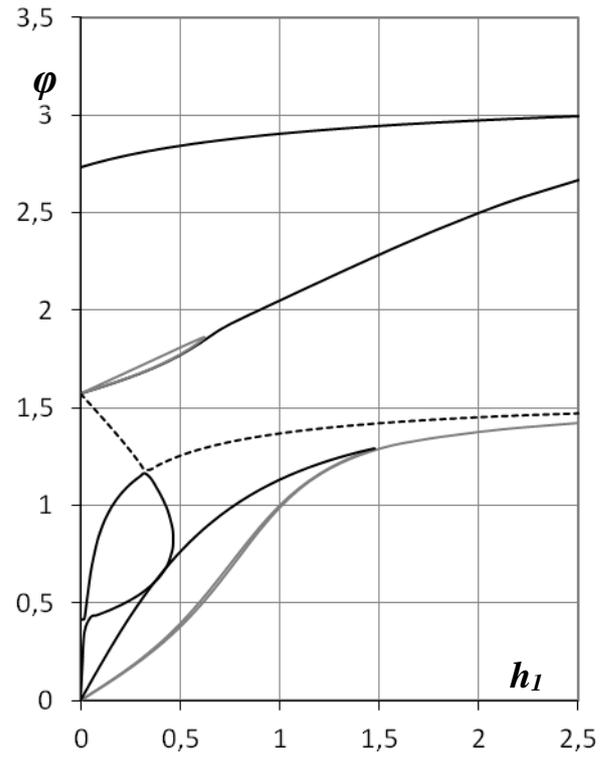


Рис. 16.  $v=0.5, h_2 = 0.6, h_3 = 0.01$   
(20 равновесий, 2 устойчивые)

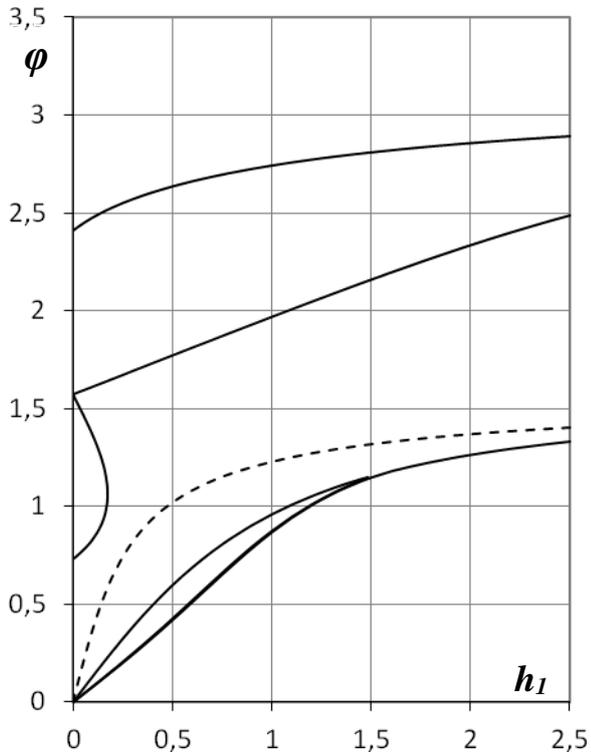


Рис. 17.  $v=0.5, h_2 = 1.0, h_3 = 0.01$   
(16 равновесий, 2 устойчивые)

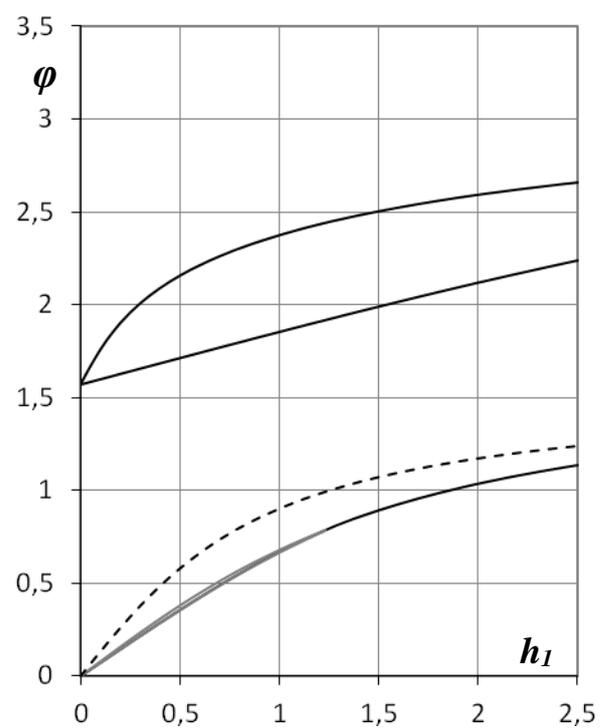


Рис. 18.  $v=0.5, h_2 = 2.0, h_3 = 0.01$   
(12 равновесий, 2 устойчивые)

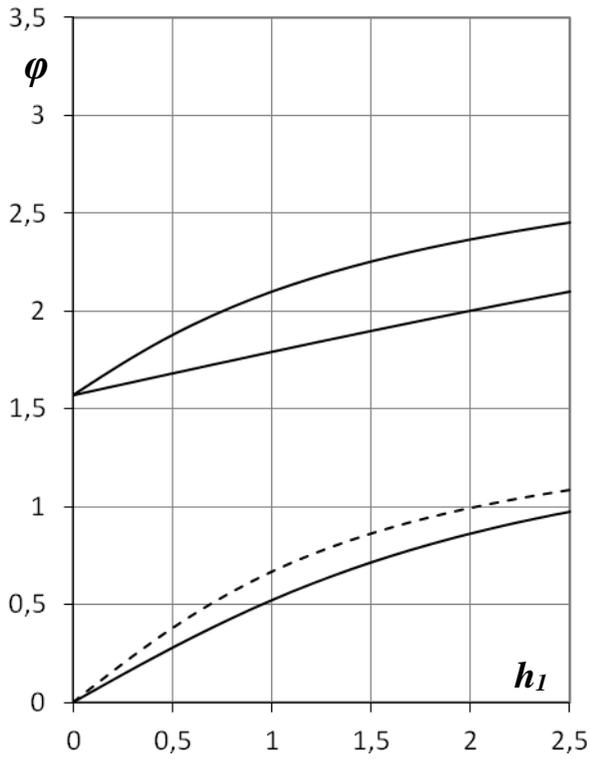


Рис. 19.  $v=0.5, h_2 = 3.0, h_3 = 0.01$   
(8 равновесий, 2 устойчивые)

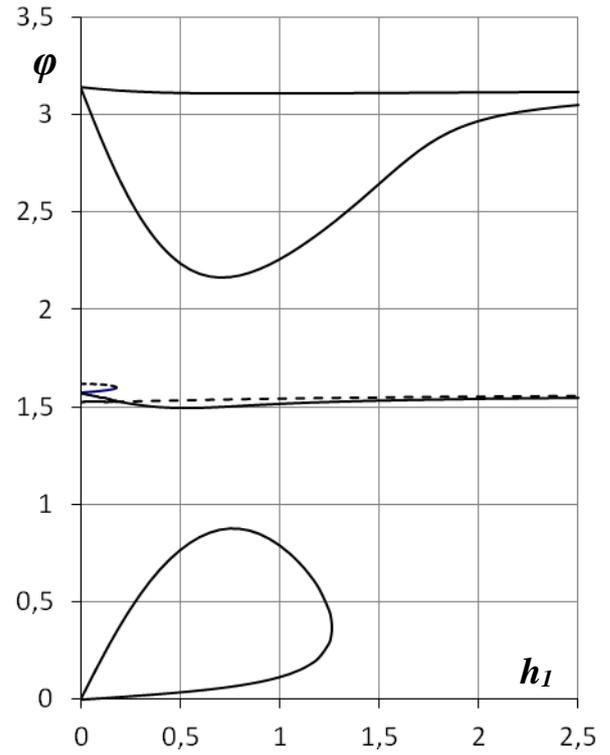


Рис. 20.  $v=0.5, h_2 = 0.1, h_3 = 1.0$   
(16 равновесий, 4 устойчивые)

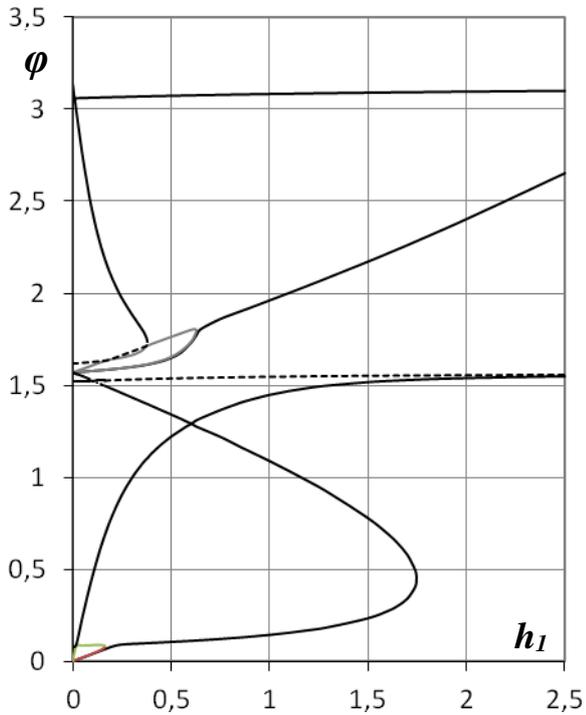


Рис. 21.  $v=0.8, h_2 = 0.2, h_3 = 0.01$   
(24 равновесия, 4 устойчивые)

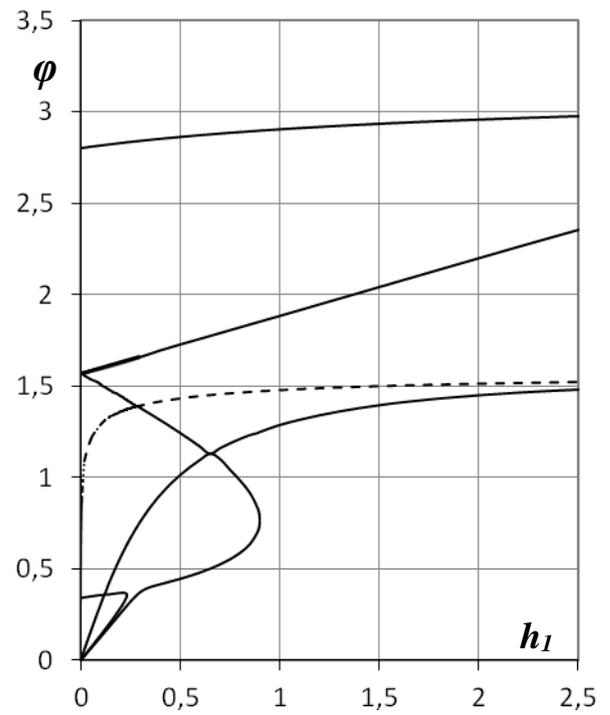


Рис. 22.  $v=0.8, h_2 = 0.8, h_3 = 0.01$   
(20 равновесий, 2 устойчивые)

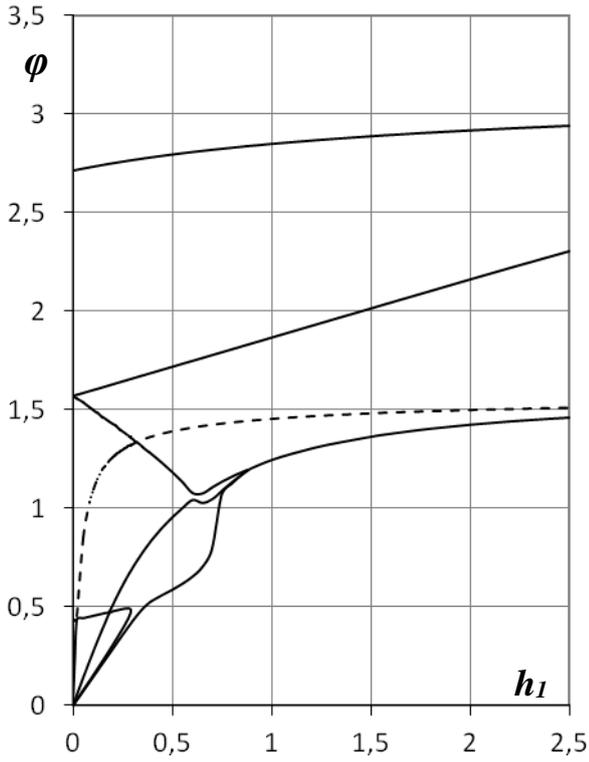


Рис. 23.  $\nu=0.8, h_2=1.0, h_3=0.01$   
(16 равновесий, 2 устойчивые)

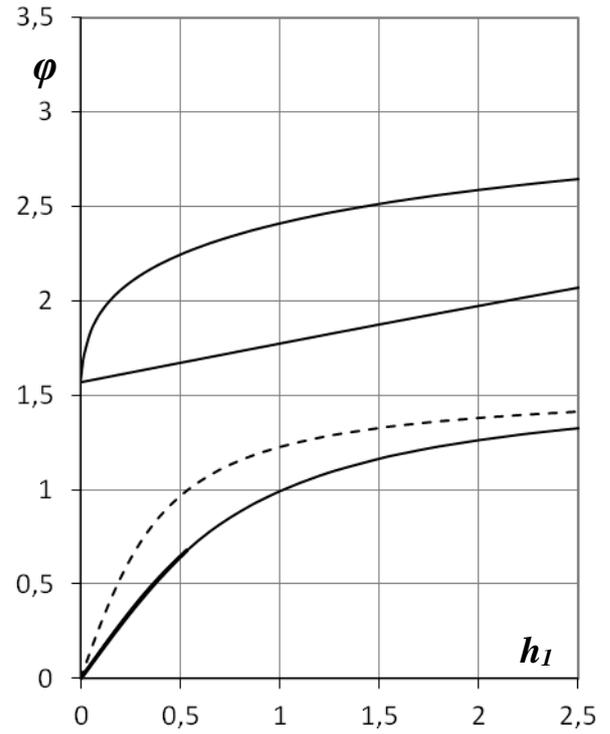


Рис. 24.  $\nu=0.8, h_2=2.5, h_3=0.01$   
(12 равновесий, 2 устойчивые)

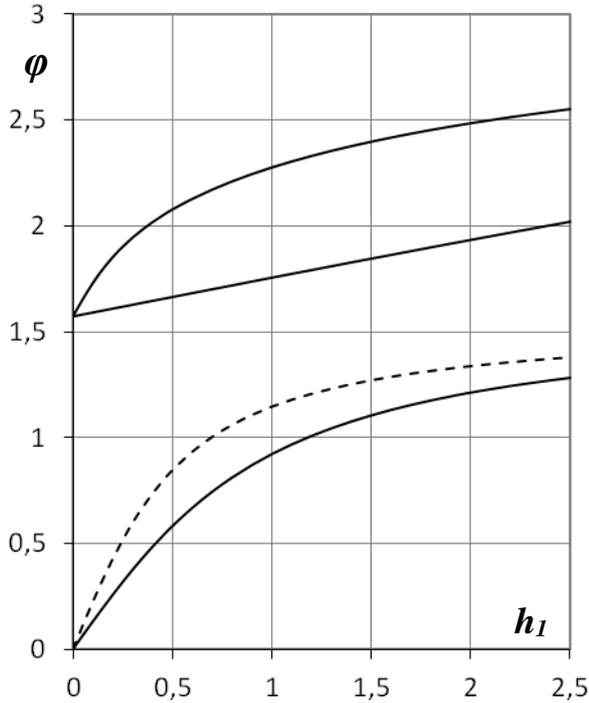


Рис. 25.  $\nu=0.8, h_2=3.0, h_3=0.01$   
(8 равновесий, 2 устойчивые)

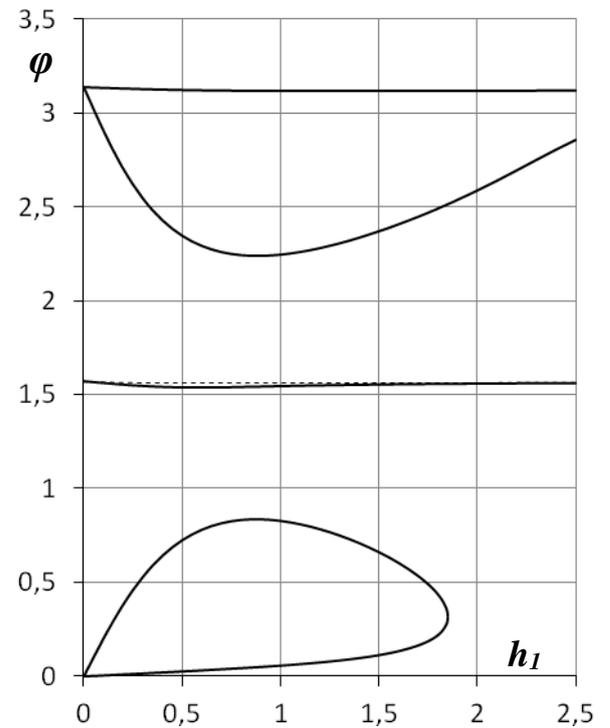


Рис. 26.  $\nu=0.8, h_2=0.1, h_3=1.0$   
(12 равновесий, 2 устойчивые)

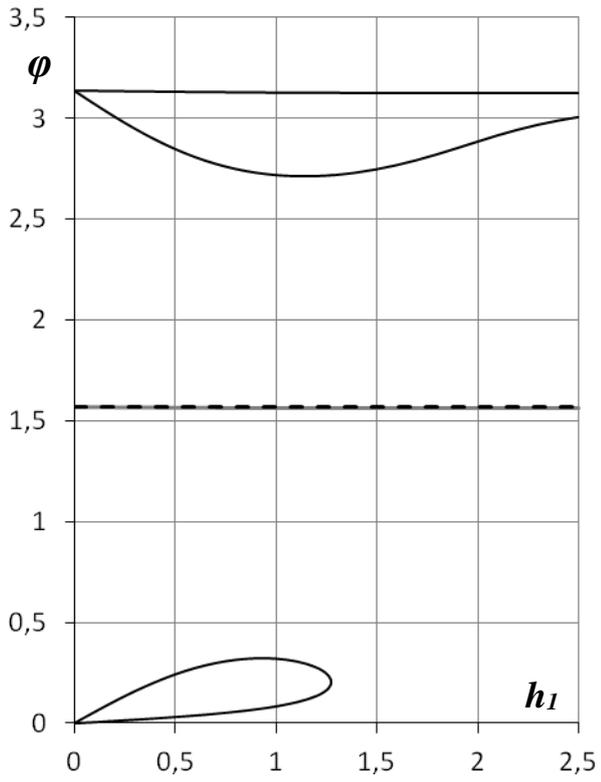


Рис. 27.  $\nu=0.8$ ,  $h_2 = 0.1$ ,  $h_3 = 2.0$   
(12 равновесий, 2 устойчивые)

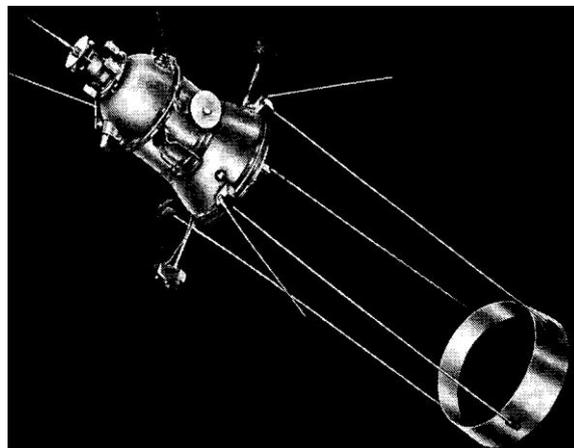


Рис. 28. Спутник Космос-149