



**Бессонов Р.В., Куркина А.Н.,
Сазонов В.В.**

Исследование
систематической ошибки
определения центров
изображений звезд на
матричном фотоприемнике
звездного датчика БОКЗ-
М60

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бессонов Р.В., Куркина А.Н., Сазонов В.В. Исследование систематической ошибки определения центров изображений звезд на матричном фотоприемнике звездного датчика БОКЗ-М60 // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 36. 42 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-36>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

Р.В. Бессонов, А.Н. Куркина, В.В. Сазонов

**ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕНТРОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЗВЕЗД
НА МАТРИЧНОМ ФОТОПРИЕМНИКЕ
ЗВЕЗДНОГО ДАТЧИКА БОКЗ-М60**

Москва – 2015

Аннотация

Исследована периодическая систематическая ошибка в определениях координат центров яркости изображений звезд на ПЗС-матрице звездного датчика БОКЗ-М60. Исследование выполнено посредством обработки реальной измерительной информации, полученной в земных условиях. Обработка выполнялась в несколько этапов. Сначала была построена аппроксимация движения изображения звездного неба в плоскости матрицы на достаточно продолжительных (более 100с) отрезках времени. На фоне этой аппроксимации прослежено движение отдельных звезд, в котором выявлены периодические составляющие. Проведен спектральный анализ этих составляющих. Показано, что они обусловлены принятым способом оценки координат центров яркости изображений звезд на матрице и периодической пиксельной структурой последней.

R.V. Bessonov, A.N. Kurkina, V.V. Sazonov. Investigation of the periodic systematic error in determining centers of star images in the CCD matrix of star sensor BOKZ-M60. We investigate the periodic systematic error found out in ground-based measurements of the star sensor BOKZ-M60. This error can be explained by periodic pixel structure of the sensor CCD matrix. Our conclusion is based on processing sufficiently long series of measurement data. The measurements were processed in a few stages. First, we approximate the motion of star images in the matrix plane and trace the development of some individual stars. Using spectral analysis, we found periodic components of their motion. The period of those components allow us to make the above conclusion.

1. Периодическая систематическая ошибка. Ниже описываются результаты исследования четырех рядов измерений звездного датчика БОКЗ-М60, выполненных в земных условиях. Первые три ряда получены на поворотной платформе наземного испытательного стенда ИКИ РАН, причем каждому ряду отвечает определенный тип движения платформы относительно земной поверхности – покой, плавные периодические колебания и периодические колебания с чередующимися участками покоя, разгона и торможения. Четвертый ряд получен при фиксированном положении датчика относительно земной поверхности. Предметом исследования были измерения координат центров яркости изображений звезд на ПЗС-матрице датчика. В рядах измерений, полученных в покое, обнаружена систематическая ошибка, которая в продолжительной последовательности соседних кадров меняется периодическим образом. Чтобы выявить ошибку, сначала была построена аппроксимация движения изображения звездного неба в плоскости матрицы на достаточно продолжительных, охватывающих более 100с, последовательностях соседних кадров. На фоне такой аппроксимации прослежено движение центров яркости отдельных звезд по матрице, и в этом движении выявлены периодические составляющие. Проведен спектральный анализ этих составляющих. Их наличие в спектре тем заметнее, чем длиннее траектория изображения звезды. В рядах измерений, полученных при колебаниях платформы, таких составляющих обнаружить не удалось. По-видимому, отдельные звезды находятся в поле зрения датчика слишком короткое время. Показано, что найденные периодические ошибки обусловлены периодической пиксельной структурой ПЗС-матрицы и принятым способом оценивания координат центров яркости.

2. Обработка соседних кадров. Даны два кадра, полученные звездным датчиком. Назовем один из них первым, другой вторым. Оба содержат по N звезд. Известно, что это одни и те же звезды. Координаты звезд на первом кадре обозначим

$$(x_n, y_n), \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad (1)$$

координаты звезд на втором кадре

$$(x'_n, y'_n), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь и ниже координаты точек и компоненты векторов указываются в правой декартовой системе координат xu , жестко связанной с ПЗС-матрицей датчика и расположенной в ее плоскости. Единицей длины служит длина стороны квадратного пиксела ПЗС-матрицы.

Будем считать, что кадры сняты в близкие моменты времени. Тогда в отсутствие ошибок данные (1), (2) связаны соотношениями

$$x'_n = x_n - a + \varphi y_n, \quad y'_n = y_n - b - \varphi x_n \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (3)$$

Последние соотношения могут быть получены следующим образом. Рассмотрим движение какой-нибудь звезды по кадру. Координаты этой звезды обозначим $(x(t), y(t))$. Здесь t – время. Звезда на небе неподвижна, причем ее малую

окрестность на небесной сфере можно считать плоской. Параллельно этой плоскости движется плоскость ПЗС-матрицы. Это движение описывается компонентами скорости u_x , u_y начала системы координат xu и угловой скоростью ω этой системы вокруг оси z , перпендикулярной плоскости матрицы и дополняющей систему xu до правой системы координат. Поскольку звезда неподвижна, ее абсолютная скорость равна нулю. Это выражается соотношениями

$$\frac{dx}{dt} + u_x - \omega y = 0, \quad \frac{dy}{dt} + u_y + \omega x = 0.$$

Отсюда для близких моментов времени t и $t + \Delta t$ имеем

$$x(t + \Delta t) = x(t) - u_x \Delta t + y(t) \omega \Delta t, \quad y(t + \Delta t) = y(t) - u_y \Delta t - x(t) \omega \Delta t.$$

Полученные соотношения имеют вид (3) и позволяют дать кинематическую интерпретацию этим формулам: a – смещение начала координат системы xu вдоль оси x за время между экспонированием кадров, b – аналогичное смещение начала координат системы xu вдоль оси y , φ – поворот системы xu вокруг оси z за время между экспонированием кадров.

Поскольку данные (1) и (2) связаны соотношениями (3), этот факт можно использовать для оценки параметров a , b и φ . Полагая, что соотношения (3) выполнены со случайными ошибками, воспользуемся методом наименьших квадратов. Будем минимизировать по искомым параметрам выражение

$$\Phi = \sum_{n=1}^N [(x'_n - x_n + a - \varphi y_n)^2 + (y'_n - y_n - b + \varphi x_n)^2].$$

Соответствующие нормальные уравнения имеют вид

$$Na - Y\varphi = A, \quad Nb + X\varphi = B, \quad -Ya + Xb + Z\varphi = C, \quad (4)$$

$$X = \sum_{n=1}^N x_n, \quad Y = \sum_{n=1}^N y_n, \quad Z = \sum_{n=1}^N (x_n^2 + y_n^2),$$

$$A = \sum_{n=1}^N (x_n - x'_n), \quad B = \sum_{n=1}^N (y_n - y'_n), \quad C = \sum_{n=1}^N (x'_n y_n - x_n y'_n).$$

Они образуют линейную систему. Определитель этой системы

$$D = N^2 Z - N(X^2 + Y^2) = N^2 \left[\sum_{n=1}^N \left(x_n - \frac{X}{N} \right)^2 + \sum_{n=1}^N \left(y_n - \frac{Y}{N} \right)^2 \right]$$

положителен, если данные (1) задают более одной точки в плоскости xu .

Ковариационная матрица оценок параметров a , b и φ , определяемых системой (4), имеет вид

$$\frac{\sigma^2}{D} \begin{vmatrix} NZ - X^2 & -XY & NY \\ -XY & NZ - Y^2 & -NX \\ NY & -NX & N^2 \end{vmatrix}, \quad \sigma^2 = \frac{\Phi_{\min}}{2N - 3}.$$

Здесь Φ_{\min} – минимальное значение Φ (достигается на решении системы (4)), σ – оценка стандартного отклонения ошибок в соотношениях (3).

Вместо формул (3) ниже используются более симметричные формулы

$$x'_n = x_n - a + \frac{1}{2}\varphi(y_n + y'_n), \quad y'_n = y_n - b - \frac{1}{2}\varphi(x_n + x'_n) \quad (n=1, 2, \dots, N). \quad (5)$$

В этом случае оценки параметров a , b и φ по-прежнему определяются уравнениями (4), в которых для коэффициентов X , Y и Z следует принять новые выражения

$$X = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (x_n + x'_n), \quad Y = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (y_n + y'_n), \quad Z = \sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{x_n + x'_n}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_n + y'_n}{2} \right)^2 \right].$$

Формула ковариационной матрицы оценок сохраняет прежний вид.

3. Определение параметров движения ПЗС матрицы. Движение звезд по ПЗС-матрице датчика интерпретируем как плоское движение матрицы по неподвижному плоскому небу. Поскольку движение матрицы происходит в малой области небесной сферы, в которой сферу можно считать плоскостью, такая интерпретация является реалистической. Движение матрицы задается движением связанной с ней системы координат xu . Это движение определяется по последовательности кадров, описанных в предыдущем разделе. Временной интервал между соседними кадрами 0.25 с.

Для каждой пары соседних кадров рассчитываются параметры a , b , φ и стандартное отклонение σ . Они относятся к середине промежутка времени между кадрами, причем величины a , b и φ делятся на длину этого промежутка. В результате получаются функции $u_x(t)$, $u_y(t)$, $\omega(t)$ и $\sigma(t)$, заданные в узлах временной сетки, к которой относятся измерения. В промежутках между узлами эти функции доопределяются с помощью линейной интерполяции. Движение матрицы будем описывать графиками этих функций и графиками интегралов

$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^t u_x(s) ds, \quad \Delta y(t) = \int_{t_0}^t u_y(s) ds, \quad \Delta \varphi(t) = \int_{t_0}^t \omega(s) ds. \quad (6)$$

Здесь t_0 – момент получения первого кадра (ниже на графиках всюду принято $t_0 = 0$). Интегралы вычисляются следующим образом. В узлах сетки, образованной моментами получения кадров, они равны суммам соответствующих величин a , b и φ по всем парам кадров, предшествующих данному узлу. В про-

межутках между узлами функции (6) доопределяются с помощью линейной интерполяции.

Для трех упомянутых выше рядов измерений графики функций $u_x(t)$, $u_y(t)$, $\omega(t)$ и $\sigma(t)$ представлены в левых частях рис. 1, 3 и 5, графики соответствующих интегралов (6) приведены в правых частях этих рисунков. Сравнение левых и правых графиков показывает, что интегралы (6) более содержательно описывают движение ПЗС-матрицы, чем функции $u_x(t)$, $u_y(t)$, $\omega(t)$. В последующих расчетах используются только значения функций (6) в узлах сетки. Способ задания этих функций в промежуточных точках несуществен – он служит только для рисования графиков.

Судя по виду приведенных графиков, каждая из функций (6) содержит монотонную составляющую, линейно зависящую от времени. Чтобы исследовать детали движения, удалим эти составляющие из рассматриваемых функций. Для каждой функции по ее значениям в узлах сетки методом наименьших квадратов построим линейную аппроксимацию. Затем вычтем эти аппроксимации из соответствующих функций. Получившиеся функции обозначим $\delta x(t)$, $\delta y(t)$ и $\delta \varphi(t)$. Их графики приведены в левых частях рис. 2, 4 и 6. Новые функции имеют ярко выраженный колебательный характер. Количественные характеристики их частотных свойств можно найти с помощью спектрального анализа. Спектральный анализ – естественный способ изучения функций, которые выглядят похожими на почти-периодические (ср. упомянутые графики). Приведем основные соотношения, лежащие в основе этого анализа, и некоторые его результаты.

Пусть x_n ($n=1, 2, \dots, N$) – значения исследуемой функции в узлах сетки. $t_n = t_0 + nh$, где $h > 0$ – шаг сетки. Периодограммой называется функция $I(f)$, рассматриваемая на отрезке $0 \leq f \leq F$, $F = (2h)^{-1}$, и определенная соотношениями [1]

$$I(f) = \left[\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x}) \cos\left(\frac{\pi n f}{F}\right) \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x}) \sin\left(\frac{\pi n f}{F}\right) \right]^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n.$$

Здесь f – пробная частота, F – частота Найквиста. Если моменты времени t_n выражены в секундах, то f и F измеряются в герцах. Для функций на рис. 1 – 6 $h = 0.25$ с, $F = 2$ Гц.

Практическое использование периодограммы основано на следующем ее свойстве. Пусть исследуемые данные суть значения функции

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^K (\alpha_k \cos 2\pi \lambda_k t + \beta_k \sin 2\pi \lambda_k t),$$

где α_k , β_k и λ_k – параметры, причем все $\lambda_k \in (0, F)$ и среди них нет одинаковых. Тогда $\bar{x} \approx \alpha_0$, периодограмма имеет максимумы в точках $f = f_k \approx \lambda_k$ и

$\alpha_k^2 + \beta_k^2 \approx 4I(f_k)/N^2$. В общем случае точность выписанных приближенных соотношений увеличивается с ростом N . Таким образом, поиск гармонических составляющих – циклических трендов – в данных измерений сводится к поиску максимумов функции $I(f)$.

Ниже вместо графиков периодограммы будем рассматривать графики функции $A(f) = 2\sqrt{I(f)}/N$, называемой амплитудным спектром. Амплитудный спектр удобен тем, что его максимальные значения являются оценками амплитуд соответствующих циклических трендов. Однако значимые максимумы функции $A(f)$ выражены менее наглядно значимых максимумов периодограммы.

Графики амплитудных спектров функций $\delta x(t)$, $\delta y(t)$ и $\delta\varphi(t)$ приведены в правых частях рис. 2, 4 и 6. Здесь эти спектры обозначены соответственно A_x , A_y и A_φ . На графиках представлена только низкочастотная часть всего частотного диапазона $0 \leq f \leq F$ – на остальной его части спектры $A_x(f)$, $A_y(f)$ и $A_\varphi(f)$ практически равны нулю. Амплитудные спектры на рис. 2 заметно отличаются от спектров на рис. 4, 6. Спектральные пики на двух последних рисунках в несколько десятков раз выше, чем на рис. 2, и расположены на более низких частотах. Пики на рис. 4, 6 можно связать с движениями звездного датчика при проведении измерений. Как уже было указано, во время измерений платформа с датчиком совершала запрограммированные движения относительно земной поверхности. Движение, представленное на рис. 3, 4, представляло собой плавные периодические колебания, движение на рис. 5, 6 состояло из периодически чередующихся коротких участков покоя, разгона и торможения. Движение на рис. 1, 2 – покой платформы. Во всех этих движениях датчик визировал реальные звезды на ночном небе. Пики на рис. 2 расположены на гораздо более высоких частотах, в то время как датчик относительно звезд двигался намного медленнее. Эти пики невозможно непосредственно соотнести с движением датчика. Согласно результатам работы [2], они обусловлены методической ошибкой определения координат звезд на ПЗС-матрице, вызванной микродисторсией.

Вообще, микродисторсия влияет на определение координат каждой звезды по отдельности, и, поскольку движение матрицы определяется по нескольким звездам, ошибки для разных звезд могут компенсировать друг друга. Так, по-видимому, и произошло в достаточно интенсивных движениях на рис. 3 – 6. Во всяком случае, в спектрах этих движений отсутствуют заметные пики, которые нельзя было бы объяснить движением матрицы. Движение на рис. 1, 2 было очень медленным. Там указанные ошибки в определении координат отдельных звезд дали заметную совокупную ошибку – «сложились в одном направлении». В такой ситуации следует перейти к исследованию временной зависимости координат отдельных звезд.

4. Анализ изменения координат отдельных звезд. Движение отдельных звезд в кадрах, полученных при покое платформы (рис. 1, 2), иллюстрируется

рис. 7 – 10. Максимальное число звезд в кадре было равно 7. Движение 6 звезд удалось проследить на всем рассматриваемом отрезке движения, движение одной звезды прослежено только на первой половине отрезка. Движения 4 звезд представлено на указанных рисунках. Рисунки устроены одинаково. В их левых частях приведены графики координат звезды $X(t)$, $Y(t)$. Как и в случае функций (6), функции $X(t)$, $Y(t)$ заданы в узлах сетки, образованной моментами получения кадров. В промежутках между узлами эти функции доопределяются с помощью линейной интерполяции. Интерполяция используется только для рисования графиков. Все расчеты выполняются со значениями функций в узлах сетки.

Из приведенных графиков видно, что отличие функций $X(t)$, $Y(t)$ от линейных мало. Чтобы исследовать это отличие, удалим линейные составляющие из рассматриваемых функций. По значениям функций в узлах сетки методом наименьших квадратов построим линейные аппроксимации

$$X_{\text{apr}}(t) = a_X + b_X(t - t_0), \quad Y_{\text{apr}}(t) = a_Y + b_Y(t - t_0), \quad (7)$$

где a_X , b_X , a_Y , b_Y – постоянные коэффициенты. Затем составим функции

$$\delta X(t) = X(t) - X_{\text{apr}}(t), \quad \delta Y(t) = Y(t) - Y_{\text{apr}}(t). \quad (8)$$

Их графики приведены в средних частях рис. 7 – 10. Функции (8) имеют ярко выраженный колебательный характер. Количественные характеристики их частотных свойств иллюстрируются графиками соответствующих амплитудных спектров $A_X(f)$, $A_Y(f)$ в левых частях рис. 7 – 10. Частоты f_X и f_Y наиболее значимых пиков (максимумов) спектров $A_X(f)$, $A_Y(f)$ приведены в подписях к рисункам.

На первый взгляд в частотах f_X и f_Y отсутствует какая-либо закономерность, но закономерность прослеживается в отношениях f_X/b_X и f_Y/b_Y . Чтобы пояснить это обстоятельство, построим графики функций

$$\delta X'(\Delta X) = \delta X(t_0 + \Delta X/b_X), \quad \delta Y'(\Delta Y) = \delta Y(t_0 + \Delta Y/b_Y) \quad (9)$$

и их амплитудных спектров $A'_X(f')$, $A'_Y(f')$. Эти графики приведены соответственно в левых и правых частях рис. 11 – 14. Значимые пики обоих амплитудных спектров с высокой точностью соответствуют частоте $f' = 1$. Заметим, что частота Найквиста для функций (9) различна и составляет F/b_X и F/b_Y соответственно. Аргумент спектров f' – это по существу волновое число.

С учетом полученных результатов функции (8) можно аппроксимировать выражениями

$$\begin{aligned} \delta X_E(t) &= a_{X0} + a_{X1} \cos 2\pi \Delta X + a_{X2} \sin 2\pi \Delta X, & \Delta X &= b_X(t - t_0), \\ \delta Y_E(t) &= a_{Y0} + a_{Y1} \cos 2\pi \Delta Y + a_{Y2} \sin 2\pi \Delta Y, & \Delta Y &= b_Y(t - t_0). \end{aligned} \quad (10)$$

В этих выражениях учтены члены только с частотой $f' = 1$, поскольку спектры на рис. 11 – 14 имеют только по одному ярко выраженному пику. Коэффициенты выражений (10) находились методом наименьших квадратов. Графики функций

$$\delta\hat{X}(t) = \delta X(t) - \delta X_E(t), \quad \delta\hat{Y}(t) = \delta Y(t) - \delta Y_E(t) \quad (11)$$

и их амплитудных спектров $\hat{A}_X(f)$, $\hat{A}_Y(f)$ приведены соответственно в левых и правых частях рис. 15 – 18. Среднеквадратичные значения функций (11) уменьшились примерно в два раза по сравнению с функциями (8), спектры $\hat{A}_X(f)$, $\hat{A}_Y(f)$ не имеют значимых пиков и намного меньше спектров $A_X(f)$, $A_Y(f)$.

Для колебаний платформы с датчиком (ср. рис. 3 – 6) получить аналогичные результаты не удалось. По-видимому, в этих движениях отдельные звезды находились в поле зрения датчика слишком короткое время.

Траектории движения изображений звезд по матрице, представленные на рис. 7 – 18, также нельзя назвать продолжительными. Проверим полученные результаты на данных, полученных на более длинном отрезке времени. На этом отрезке датчик по-прежнему покоился относительно поверхности Земли и был ориентирован так, что некоторые звезды находились в его поле зрения продолжительное время. Рис. 19, 20 аналогичны рис. 1, 2 и иллюстрируют движение матрицы как твердого тела. При построении рис. 20 линейная аппроксимация функций (6) оказалась недостаточной, поэтому использовалась их квадратичная аппроксимация. На графиках спектров (рис. 20) видны пики (максимумы), которые можно связать с дисторсией. Поскольку интервал движения – достаточно длинный – более двух часов, эти пики не такие большие, как на рис. 2. Ошибки от различных звезд в какой-то степени компенсировали друг друга.

Движения отдельных звезд по матрице иллюстрируется рис. 21 – 29. Эти рисунки организованы иначе, чем в предыдущем примере. Рис. 21 – 23 отвечает одной из звезд, рис. 24 – 26 – другой звезде, рис. 27 – 29 – третьей. Рис. 21, 24 и 27 аналогичны рис. 7 – 10, только при построении функций (8) линейные аппроксимирующие выражения (7) были заменены квадратичными выражениями

$$X_{\text{apr}}(t) = a_X + b_X(t - t_0) + c_X(t - t_0)^2, \quad Y_{\text{apr}}(t) = a_Y + b_Y(t - t_0) + c_Y(t - t_0)^2.$$

Коэффициенты новых выражений по-прежнему находились методом наименьших квадратов. При построении рис. 22, 25 и 28 (аналоги рис. 11 – 14) определение функций (9) было модифицировано – эти функции задавались параметрически формулами

$$\begin{aligned} \delta X'(\Delta X) &= X(t) - X_{\text{apr}}(t), & \Delta X &= b_X(t - t_0) + c_X(t - t_0)^2, \\ \delta Y'(\Delta Y) &= Y(t) - Y_{\text{apr}}(t), & \Delta Y &= b_Y(t - t_0) + c_Y(t - t_0)^2. \end{aligned}$$

Квадратичные выражения для ΔX , ΔY использовались и при задании аппроксимирующих функций (10). Полученные результаты находятся в полном соот-

ветствии с ранее полученными. Более того, наличие периодических составляющих проявляется в спектрах даже более четко. Сравнение формы спектров на рис. 21 и 22, 24 и 25 позволяет заключить, что рассматриваемая методическая ошибка является периодической функцией координат изображения звезды.

5. Происхождение методической ошибки. Проблему периодической составляющей в ошибке определения координаты звезды на ПЗС-матрице можно прояснить в рамках следующей модельной задачи. Будем рассматривать только одну координату x . Яркость измеряется в точках $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Распределение яркости изображения на матрице задается функцией $f(x-a)$. Функция $f(x)$ определена на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$, неотрицательная и четная: $f(x) \geq 0$, $f(-x) = f(x)$. Например, это может быть гауссова экспонента $f = A \exp(-Bx^2)$. По значениям величин $y_n \approx f(n-a)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – измерениям – надо оценить координату a центра яркости. Оценку будем выполнять по формуле

$$\hat{a} = Y \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n y_n, \quad Y = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \right)^{-1}.$$

Пусть для простоты ошибки в измерениях отсутствуют. Тогда

$$\hat{a} = F(a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n f(n-a), \quad F(a) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n-a) \right]^{-1}.$$

Ошибка такой оценки

$$\hat{a} - a = F(a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n f(n-a) - a \equiv S(a)$$

зависит от вида функции $f(x)$. Однако даже при сделанных весьма общих предположениях относительно этого вида ошибка $S(a)$ обладает интересными свойствами. Во-первых, $S(m) = 0$ при любом целом m :

$$\begin{aligned} S(m) &= F(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n f(n-m) - m = F(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-m+m) f(n-m) - m = \\ &= F(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-m) f(n-m) + m \left[F(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n-m) - 1 \right] = \\ &= F(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n f(n) = F(m) \sum_{n=1}^{+\infty} n [f(n) - f(-n)] = 0. \end{aligned}$$

Здесь выражение в первых квадратных скобках равно нулю в силу определения величины F , последнее равенство следует из четности функции f .

Во-вторых, функция $S(a)$ – периодическая с периодом 1. Заметим сначала, что при любом целом m имеет место равенство

$$F(a+m) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n-a-m) \right]^{-1} = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n-a) \right]^{-1} = F(a)$$

(суммировать по всему множеству целых чисел можно с произвольным целым сдвигом). Таким образом, функция $F(a)$ – периодическая с периодом 1. Далее

$$\begin{aligned} S(a+m) &= F(a+m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nf(n-a-m) - a - m = \\ &= F(a+m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-m+m)f(n-m-a) - a - m = \\ &= F(a+m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-m)f(n-m-a) - a + m \left[F(a+m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n-m-a) - 1 \right] = \\ &= F(a+m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-m)f(n-m-a) - a = F(a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nf(n-a) - a = S(a). \end{aligned}$$

В-третьих, функция $S(a)$ – нечетная: $S(-a) = -S(a)$. Имеем

$$F(-a) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+a) \right]^{-1} = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n-a) \right]^{-1} = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n-a) \right]^{-1} = F(a)$$

(суммировать по всему множеству целых чисел можно в любом направлении). Таким образом, функция $F(a)$ – четная. Далее

$$\begin{aligned} S(-a) &= F(-a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nf(n+a) + a = F(a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nf(-n-a) + a = \\ &= F(a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-n)f(n-a) + a = -F(a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nf(n-a) + a = -S(a). \end{aligned}$$

Первое из перечисленных свойств функции $S(a)$ – следствие второго и третьего.

В силу указанных свойств эта функция представляется рядом Фурье по синусам

$$S(a) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sin 2\pi ka.$$

Его первая гармоника была обнаружена в численных экспериментах [2] и при обработке реальных измерений, выполненных датчиком (п. 4 данной работы). Если изображение звезды на ПЗС матрице движется вдоль ее строки и имеет вид $a = vt$, то датчик «выдает» движение

$$\hat{a} \approx F(a_0 + vt) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nf(n-a_0 - vt) = a_0 + vt + S(a_0 + vt).$$

Слагаемое $S(a_0 + vt)$ обнаруживается спектральным анализом.

Как уже говорилось, функция $S(a)$ определяется видом функции f и, вообще говоря, индивидуальна для каждой звезды. Однако можно попытаться аппроксимировать ее какой-нибудь параметрической зависимостью. Как показывает изучение спектра функции $S(a_0 + vt)$, можно взять $S(a) = s_1 \sin 2\pi a$. Вклад второй и более высоких гармоник не существен. К сожалению, оценки коэффициента s_1 для разных звезд дают отличающиеся результаты. Этот коэффициент, как и функция $S(a)$, индивидуален для каждой звезды. Можно попытаться найти универсальный вид s_1 , представив его в функции какого-либо параметра, например, яркости звезды. Для определения s_1 имеются два способа: первый описан в [2], второй – по виду функции $S(a_0 + vt)$.

Рассмотрим теперь двумерный случай. Яркость измеряется в точках (x, y) с целочисленными координатами: $x, y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Распределение яркости изображения на матрице задается функцией $f(x, y) = f_x(x)f_y(y)$, где f_x и f_y – четные неотрицательные функции. Такой вид может показаться слишком специальным, но именно к нему относится обычно используемая в прикладных расчетах гауссова экспонента $f = A \exp(-B_x x^2 - B_y y^2)$. По измерениям $z_{n,m} \approx f_x(n-a)f_y(m-b)$, $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ надо оценить координаты (a, b) центра яркости. Оценка выполняется по формулам

$$\hat{a} = Z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n z_{n,m}, \quad \hat{b} = Z \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m z_{n,m} \quad Z = \left(\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} z_{n,m} \right)^{-1}.$$

Пусть ошибки в измерениях отсутствуют, т. е. $z_{n,m} = f_x(n-a)f_y(m-b)$.

Тогда

$$Z^{-1} = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} f_x(n-a)f_y(m-b) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_x(n-a) \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_y(m-b) \right) = \frac{1}{F_x(a)F_y(b)},$$

где по аналогии с одномерным случаем

$$\frac{1}{F_x(a)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_x(n-a), \quad \frac{1}{F_y(a)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_y(m-b).$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \hat{a} &= F_x(a)F_y(b) \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} n f_x(n-a)f_y(m-b) = \\ &= \left(F_x(a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n f_x(n-a) \right) \left(F_y(a) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_y(m-b) \right) = F_x(a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n f_x(n-a). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\hat{b} = F_y(b) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m f_y(m-b).$$

Полученные формулы показывают, что двумерный случай распадается на два одномерных. Соответственно, появляются две функции, характеризующие ошибки определения координат: $S_x(a)$ и $S_y(b)$. Вообще говоря, даже для одной звезды они могут быть различными.

Данная работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00423).

Литература

1. Теребиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М., Наука, 1992.
2. Аванесов Г.А., Кондратьева Т.В., Никитин А.В. Исследование смещения энергетического центра изображений звезд относительно геометрического центра на ПЗС-матрице и коррекция методической ошибки // Сборник трудов Всероссийской научно-технической конференции «Современные проблемы определения ориентации и навигации космических аппаратов», Россия, Таруса, сентябрь 2008 г., с. 421 – 445.

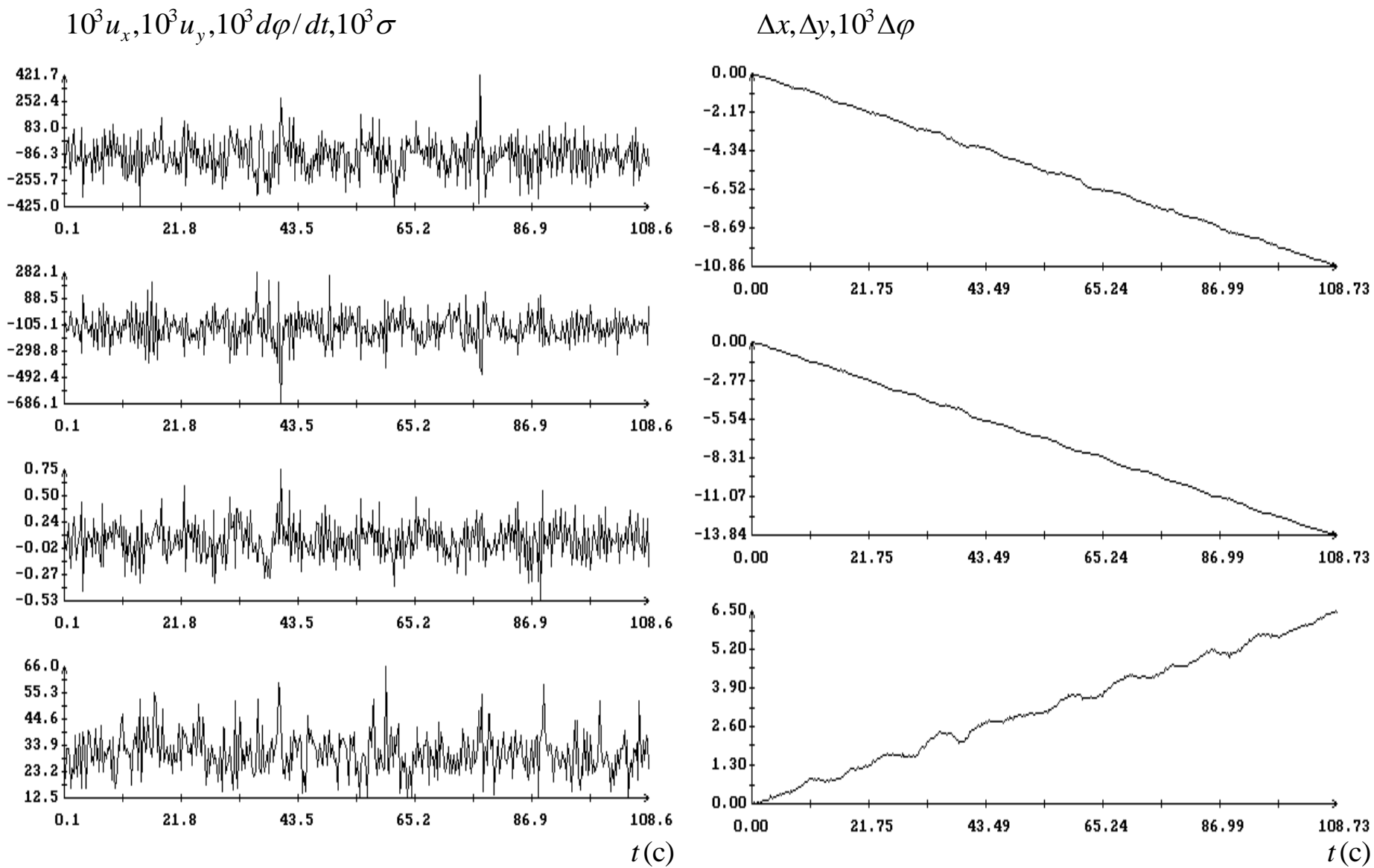


Рис. 1. Покой платформы. Параметры плоского движения ПЗС-матрицы.

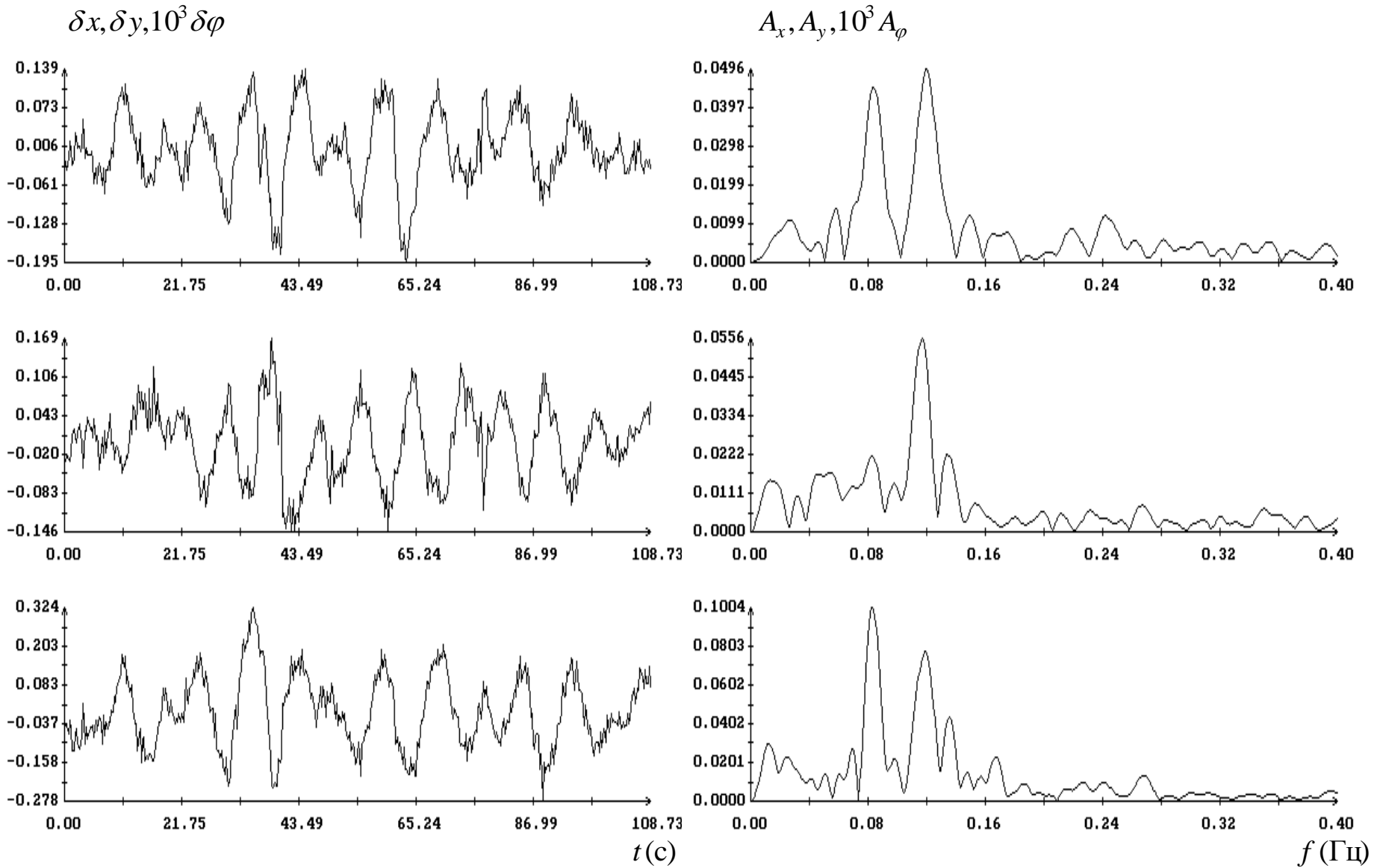


Рис. 2. Покой платформы. Колебательные составляющие параметров плоского движения ПЗС-матрицы. Слева – графики этих составляющих, справа – их амплитудные спектры.

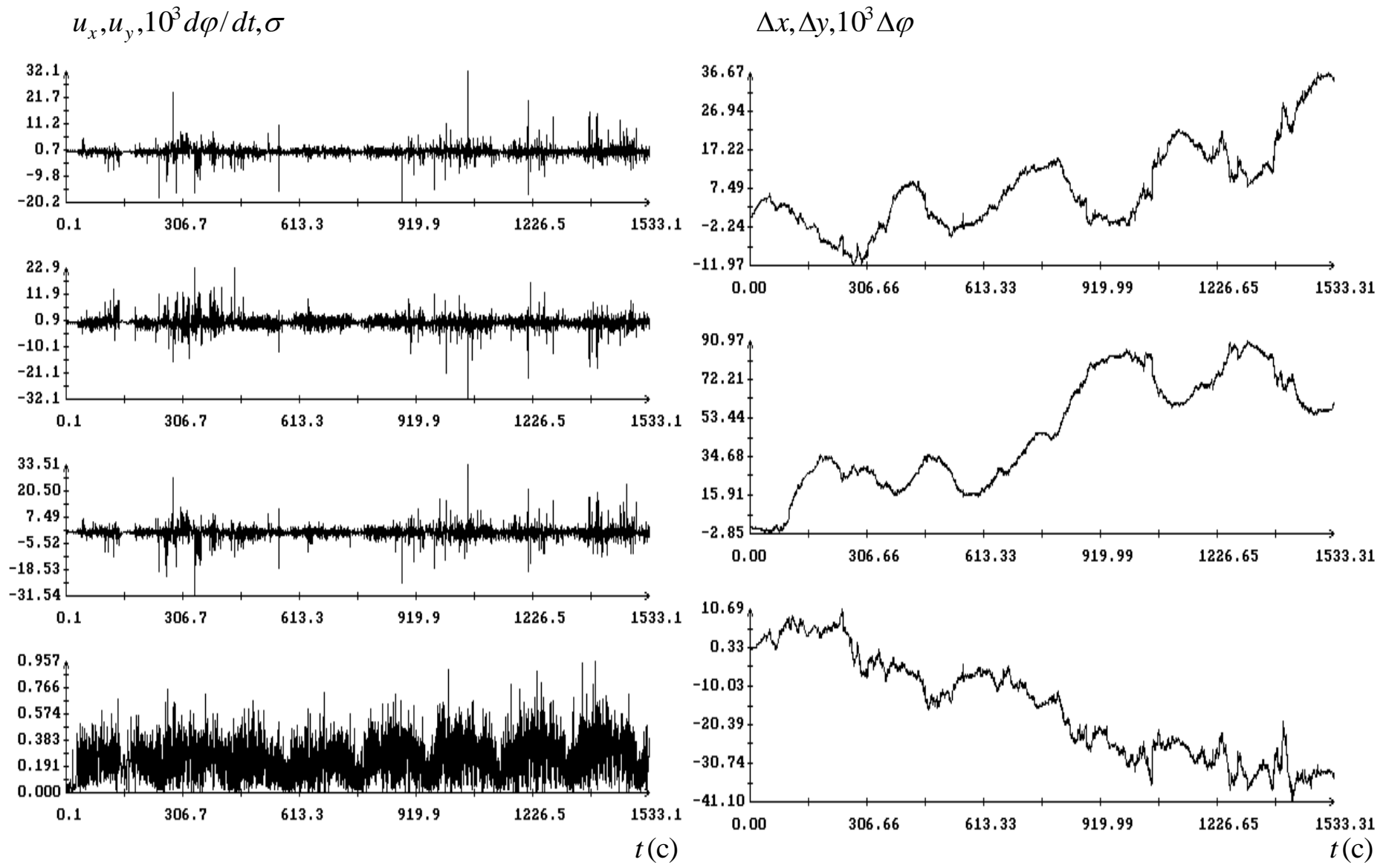


Рис. 3. Плавные колебания платформы. Параметры плоского движения ПЗС-матрицы.

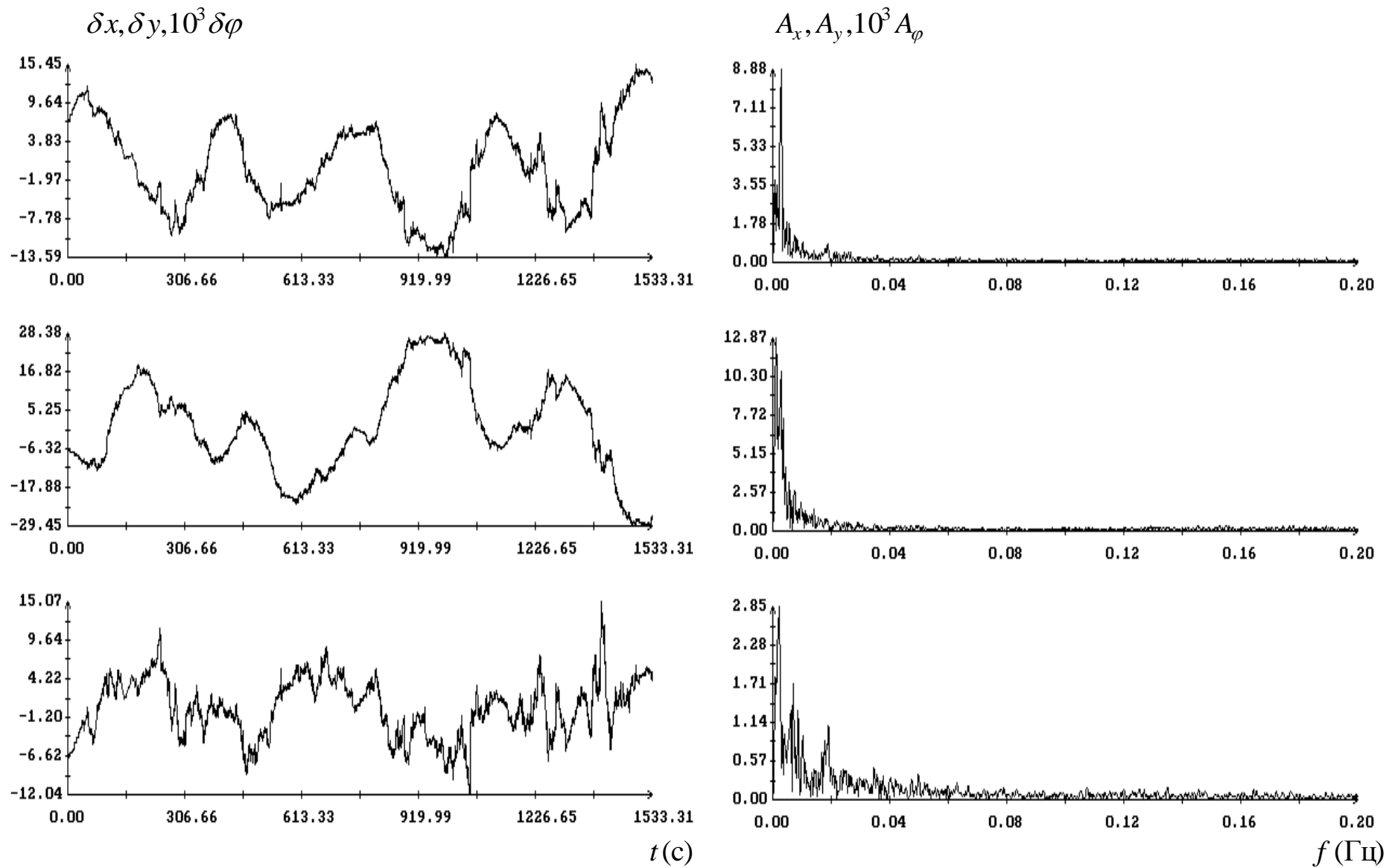


Рис. 4. Плавные колебания платформы. Колебательные составляющие параметров плоского движения ПЗС-матрицы. Слева – графики этих составляющих, справа – их амплитудные спектры.

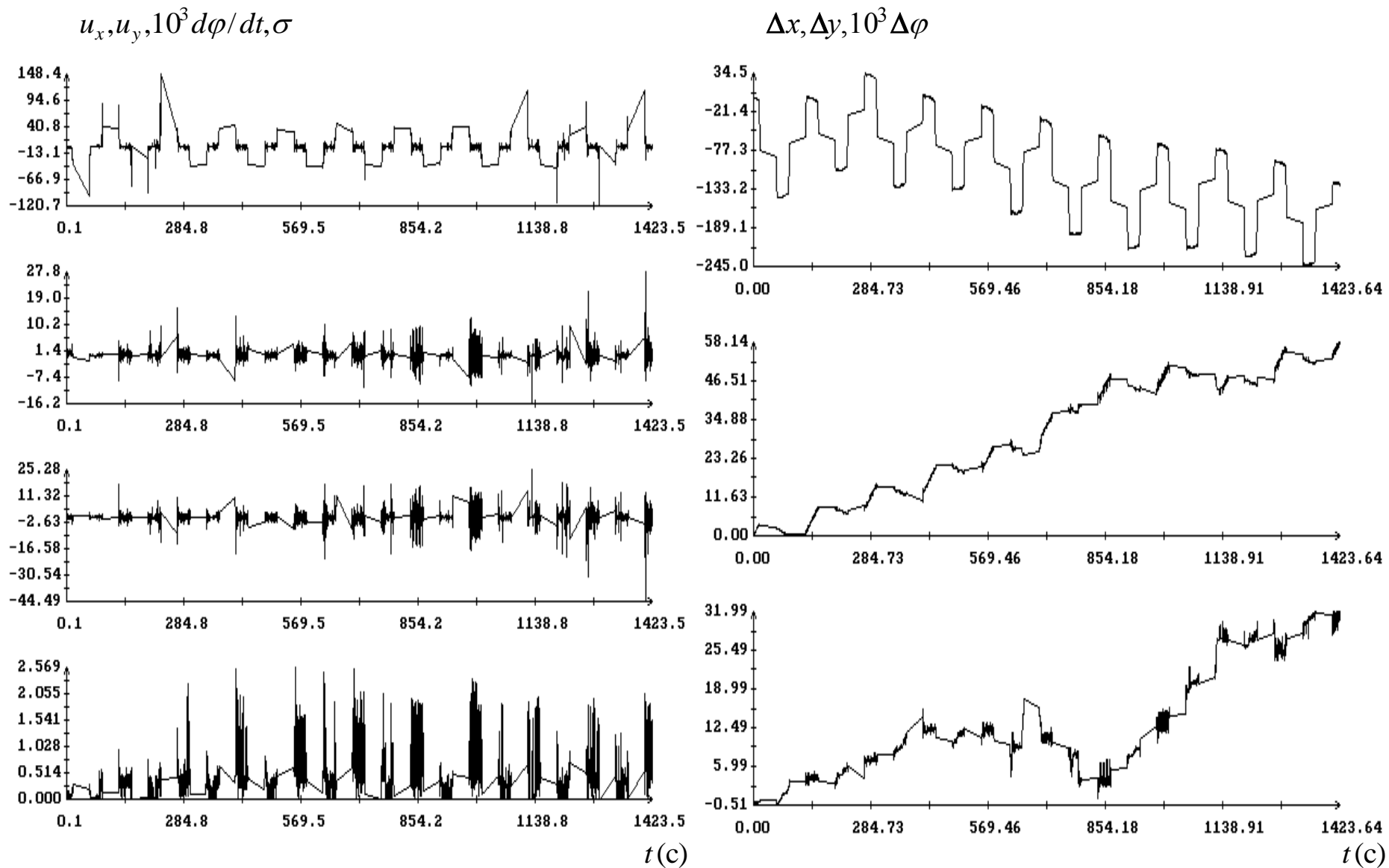


Рис. 5. Колебания платформы с участками покоя, разгона и торможения.
 Параметры плоского движения ПЗС-матрицы.

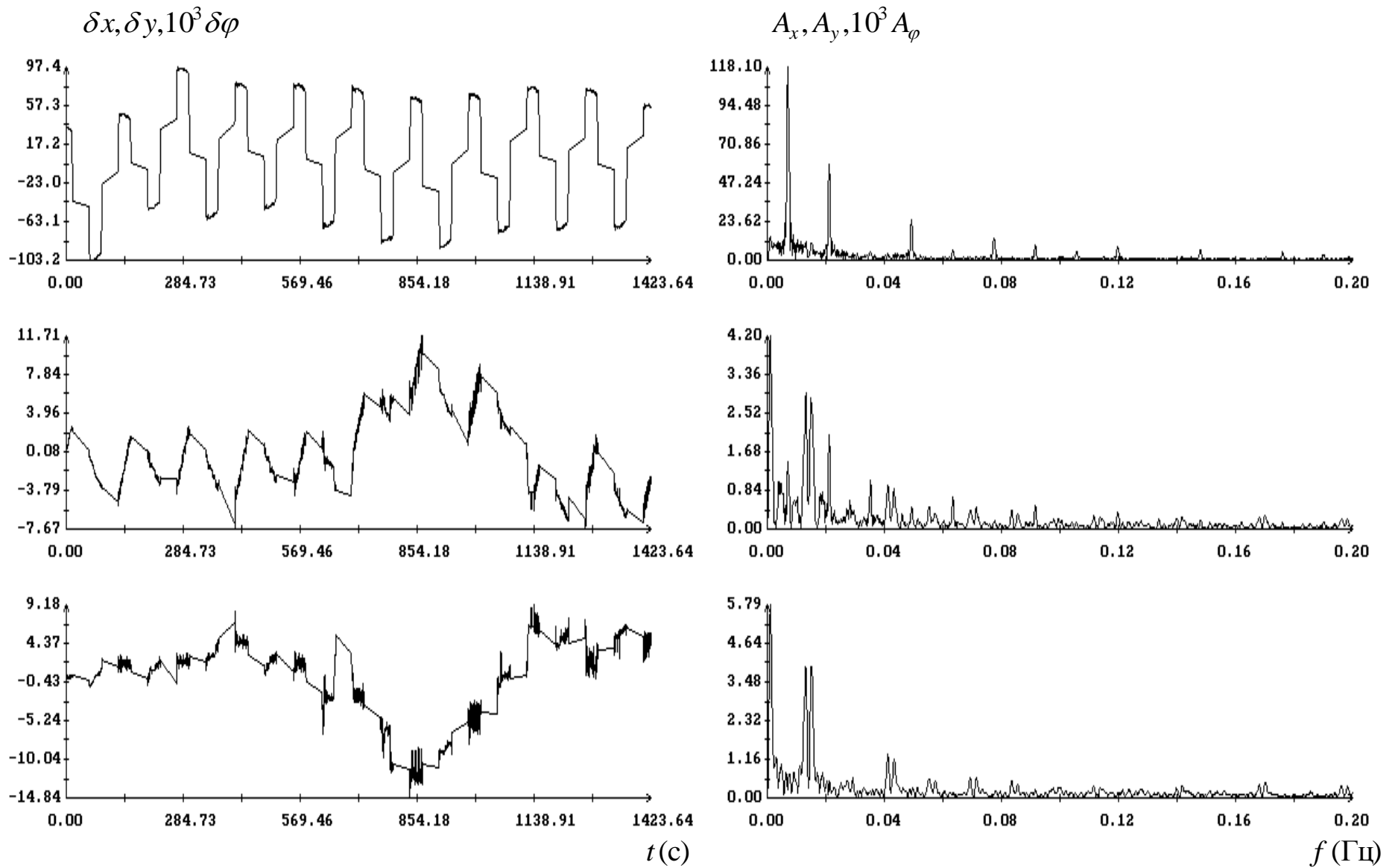


Рис. 6. Колебания платформы с участками покоя, разгона и торможения. Колебательные составляющие параметров плоского движения ПЗС-матрицы. Слева – графики этих составляющих, справа – их амплитудные спектры.

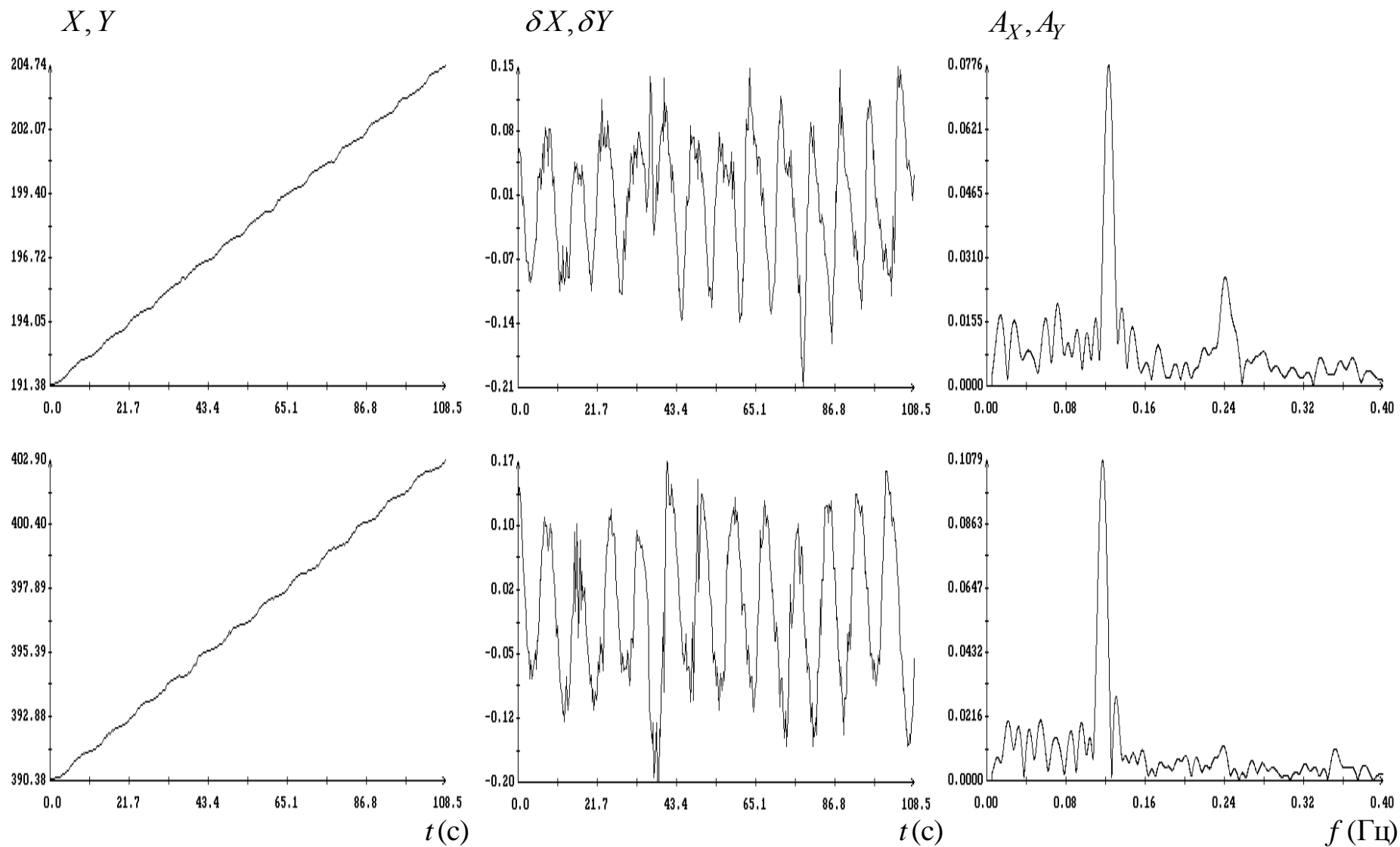


Рис. 7. Покой платформы. Движение по ПЗС-матрице звезды № 1. Слева – графики координат звезды, в центре и справа – колебательные составляющие и их амплитудные спектры, $f_X = 0.123$ Гц, $f_Y = 0.117$ Гц.

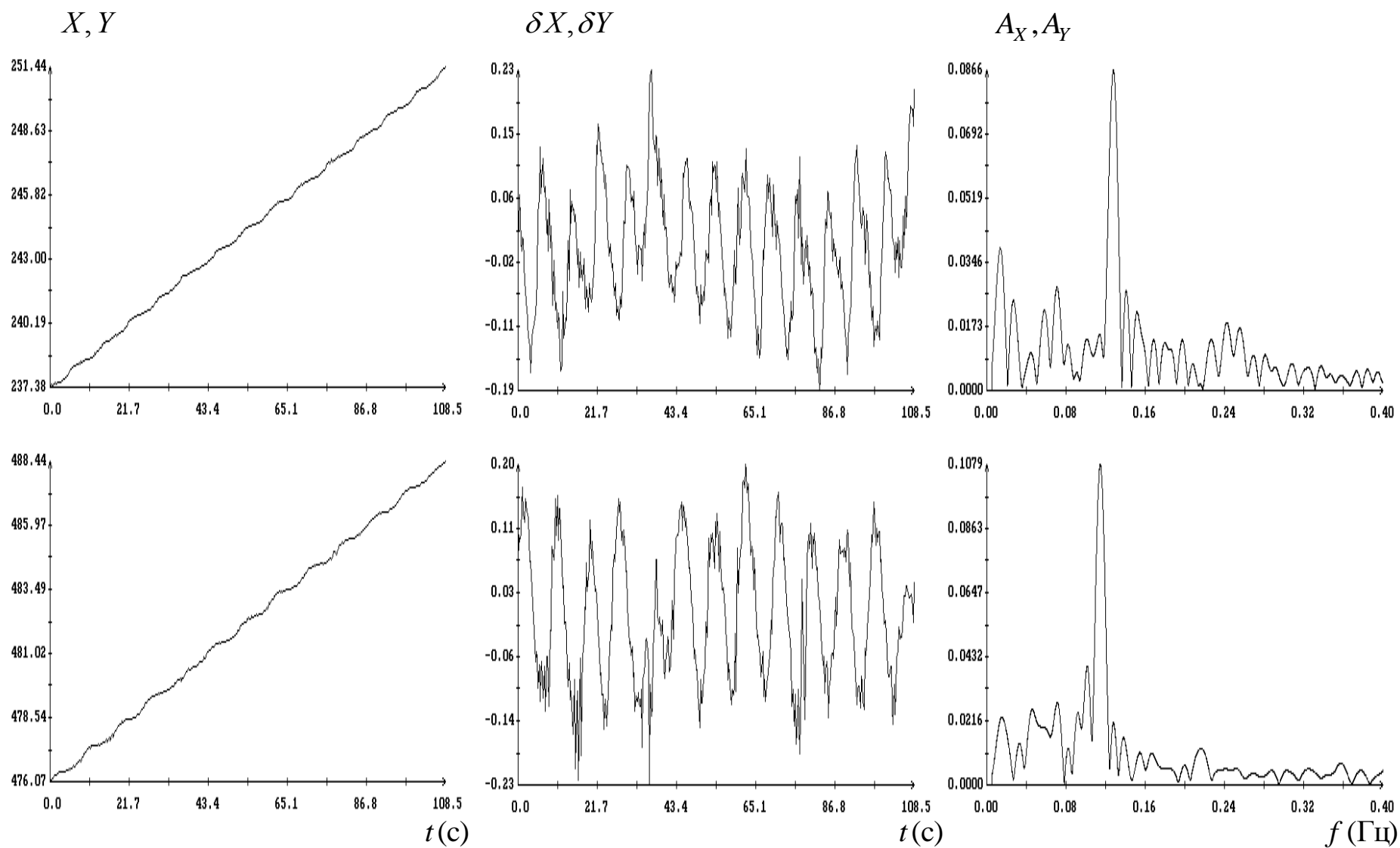


Рис. 8. Покой платформы. Движение по ПЗС-матрице одной из звезд (№ 3). Слева – графики координат звезды, в центре и справа – колебательные составляющие и их амплитудные спектры, $f_X = 0.128$ Гц, $f_Y = 0.115$ Гц.

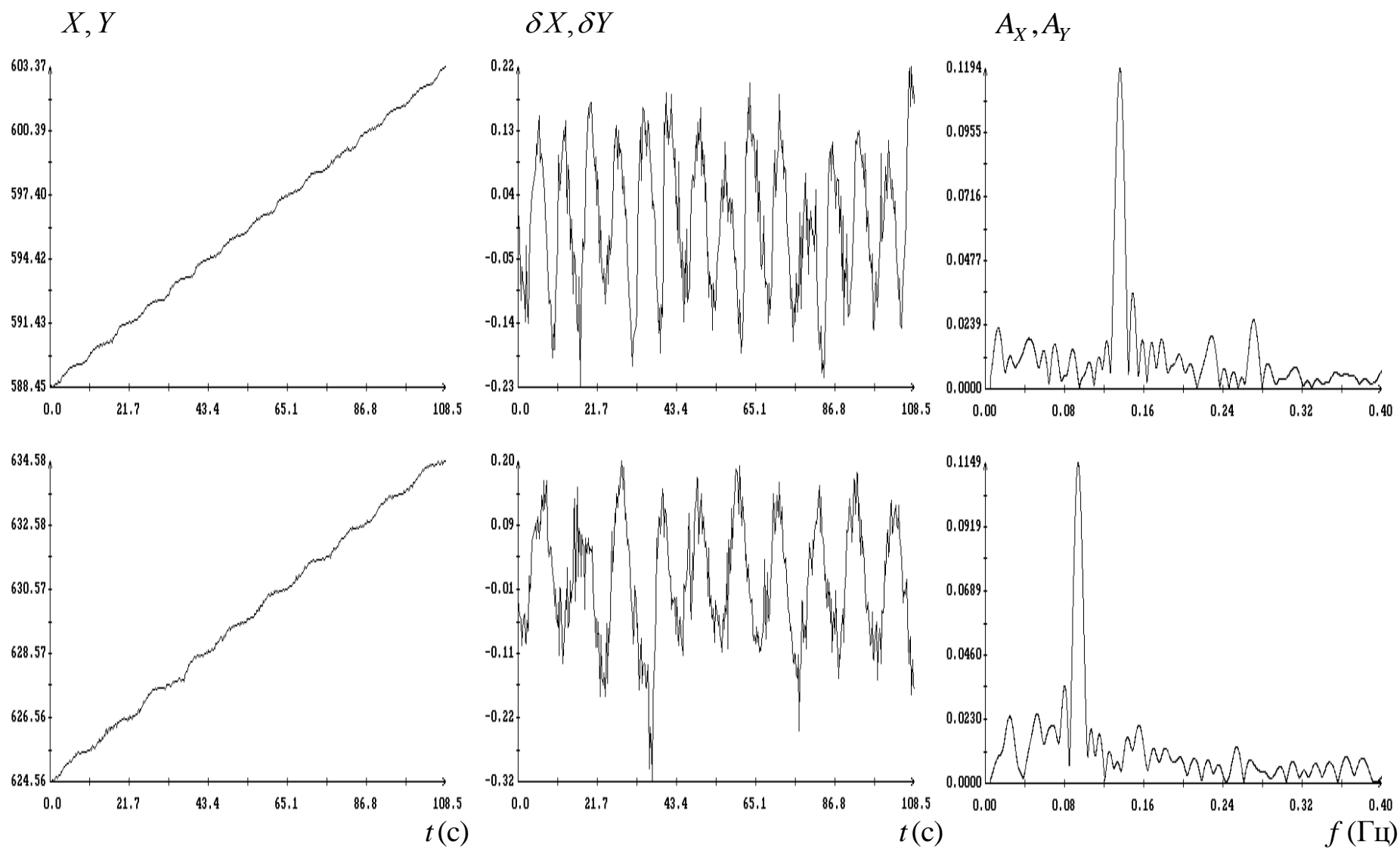


Рис. 9. Покой платформы. Движение по ПЗС-матрице звезды № 5. Слева – графики координат звезды, в центре и справа – колебательные составляющие и их амплитудные спектры, $f_X = 0.136$ Гц, $f_Y = 0.0937$ Гц.

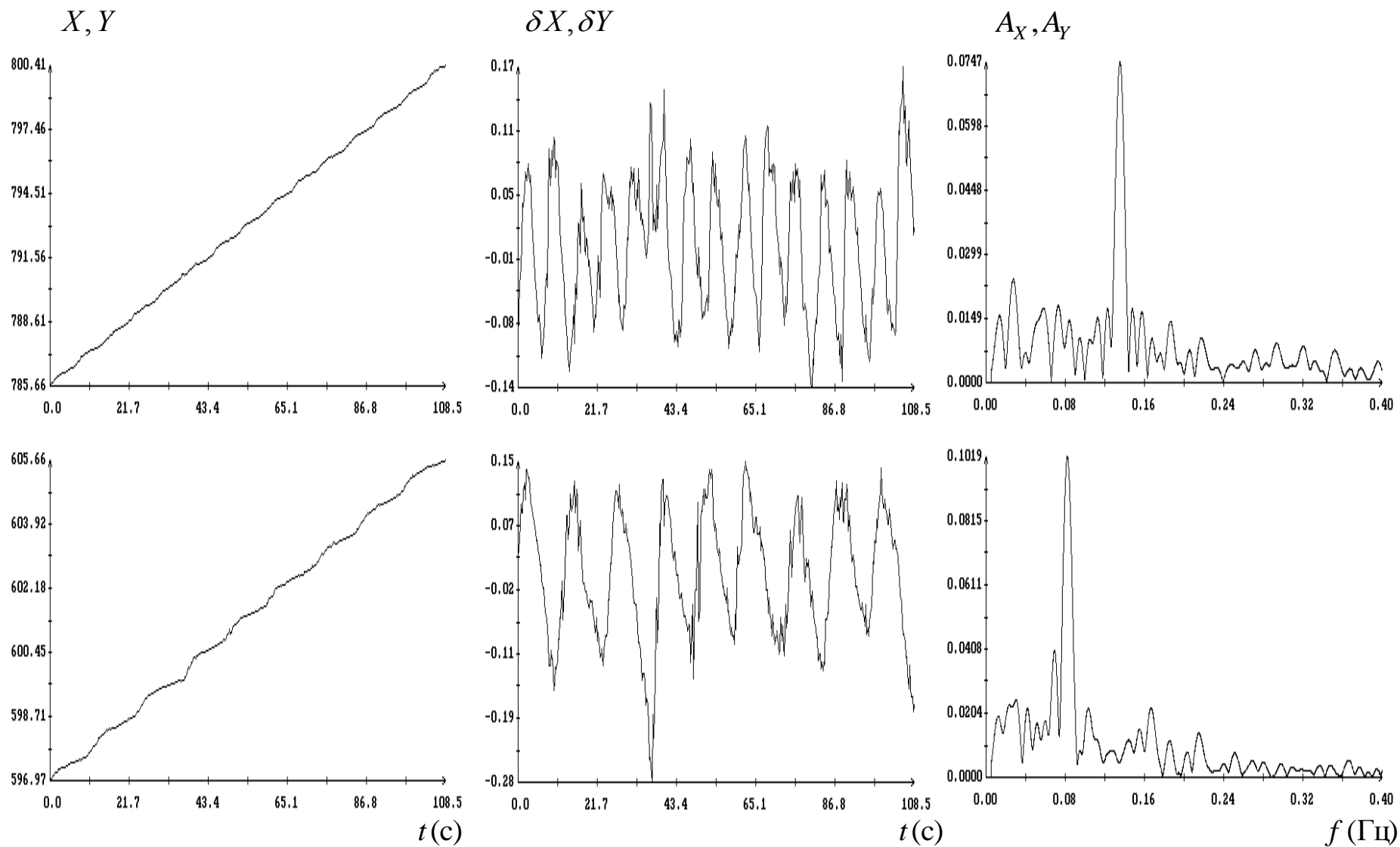


Рис. 10. Покой платформы. Движение по ПЗС-матрице звезды №7. Слева – графики координат звезды, в центре и справа – колебательные составляющие и их амплитудные спектры, $f_X = 0.135$ Гц, $f_Y = 0.0821$ Гц.

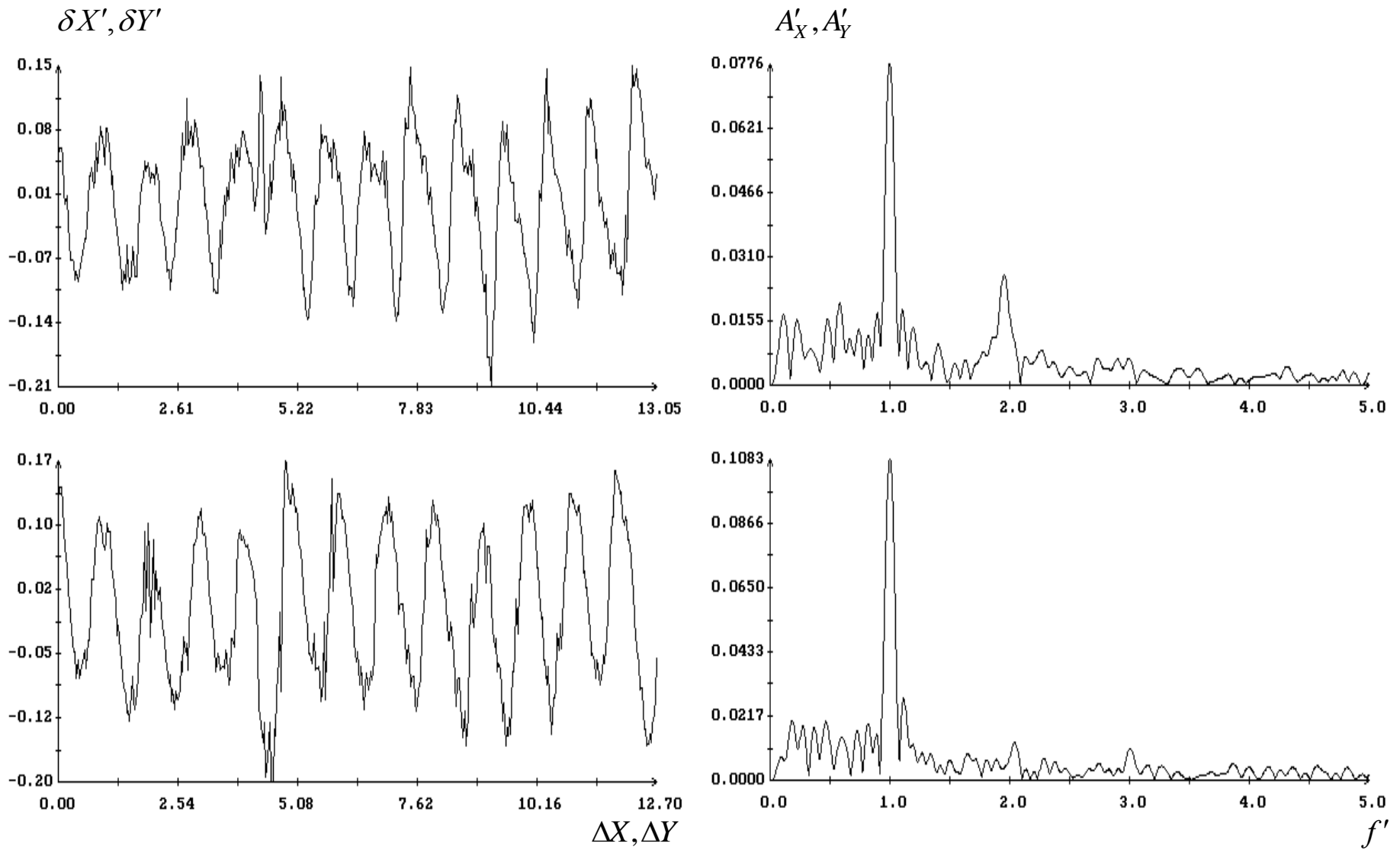


Рис. 11. Покой платформы. Движение по ПЗС-матрице звезды № 1. Слева – графики колебательных составляющих координат звезды, справа – их амплитудные спектры.

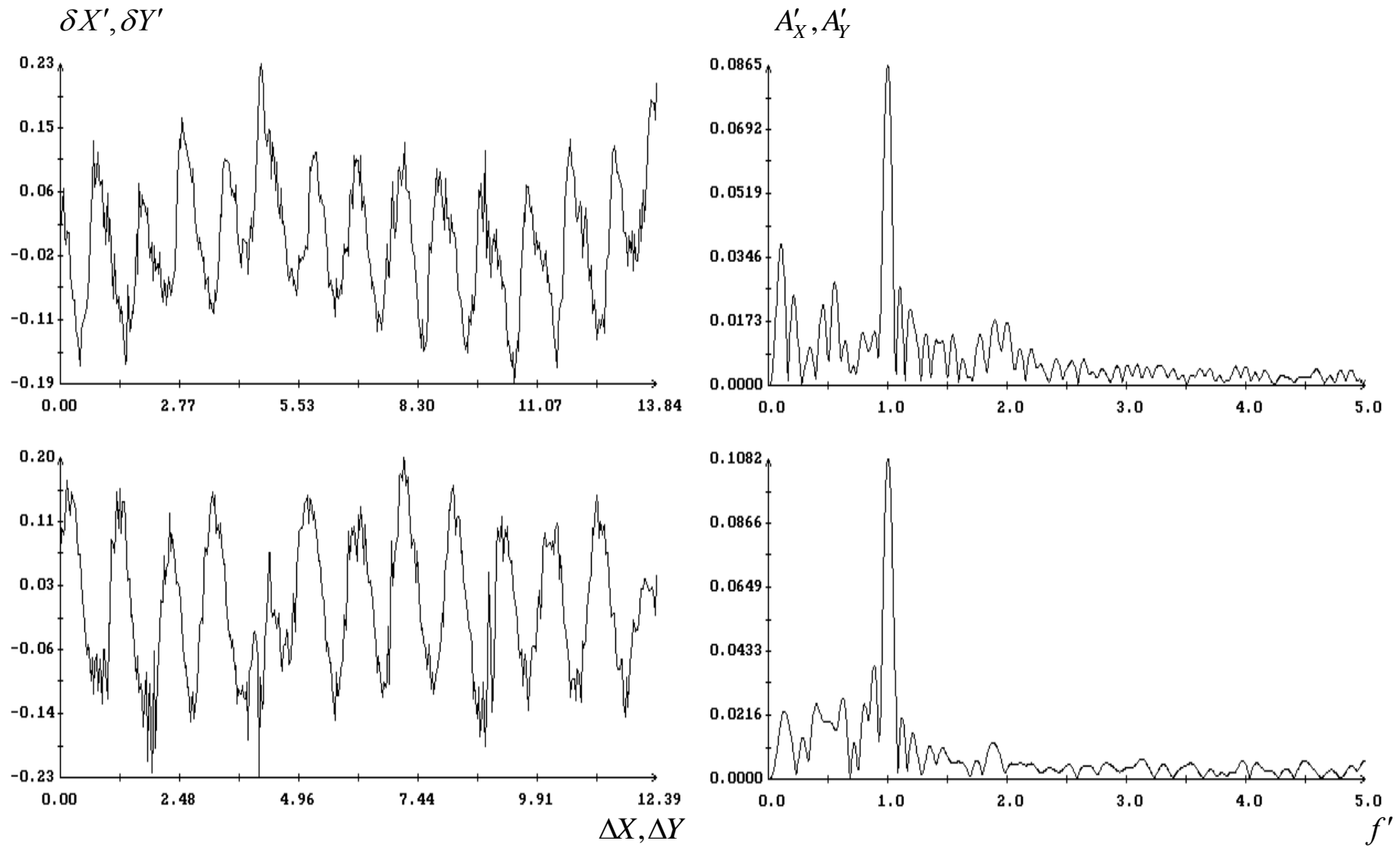


Рис. 12. Покой платформы. Движение по ПЗС-матрице звезды № 3. Слева – графики колебательных составляющих координат звезды, справа – их амплитудные спектры.

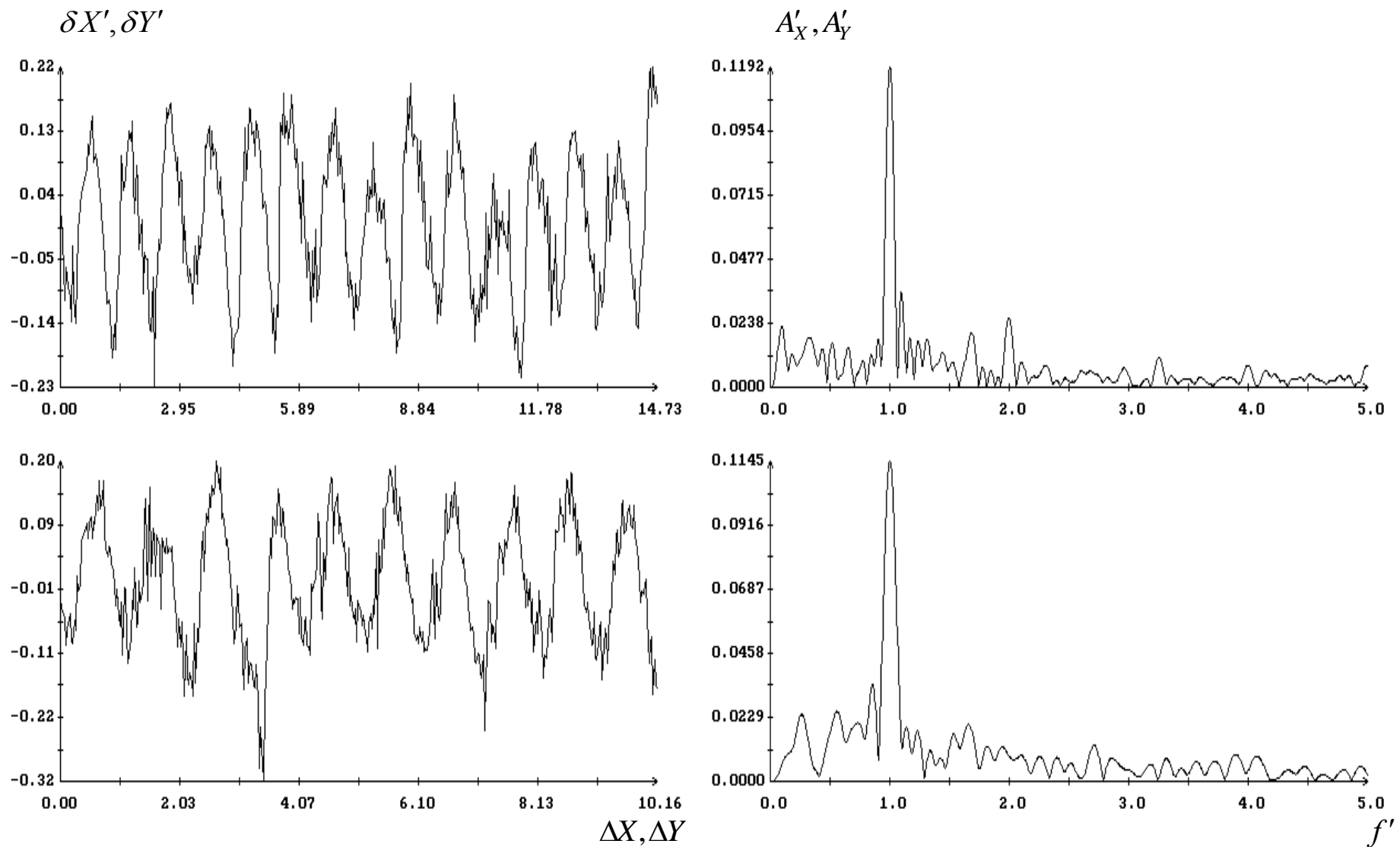


Рис. 13. Покой платформы. Движение по ПЗС-матрице звезды № 5. Слева – графики колебательных составляющих координат звезды, справа – их амплитудные спектры.

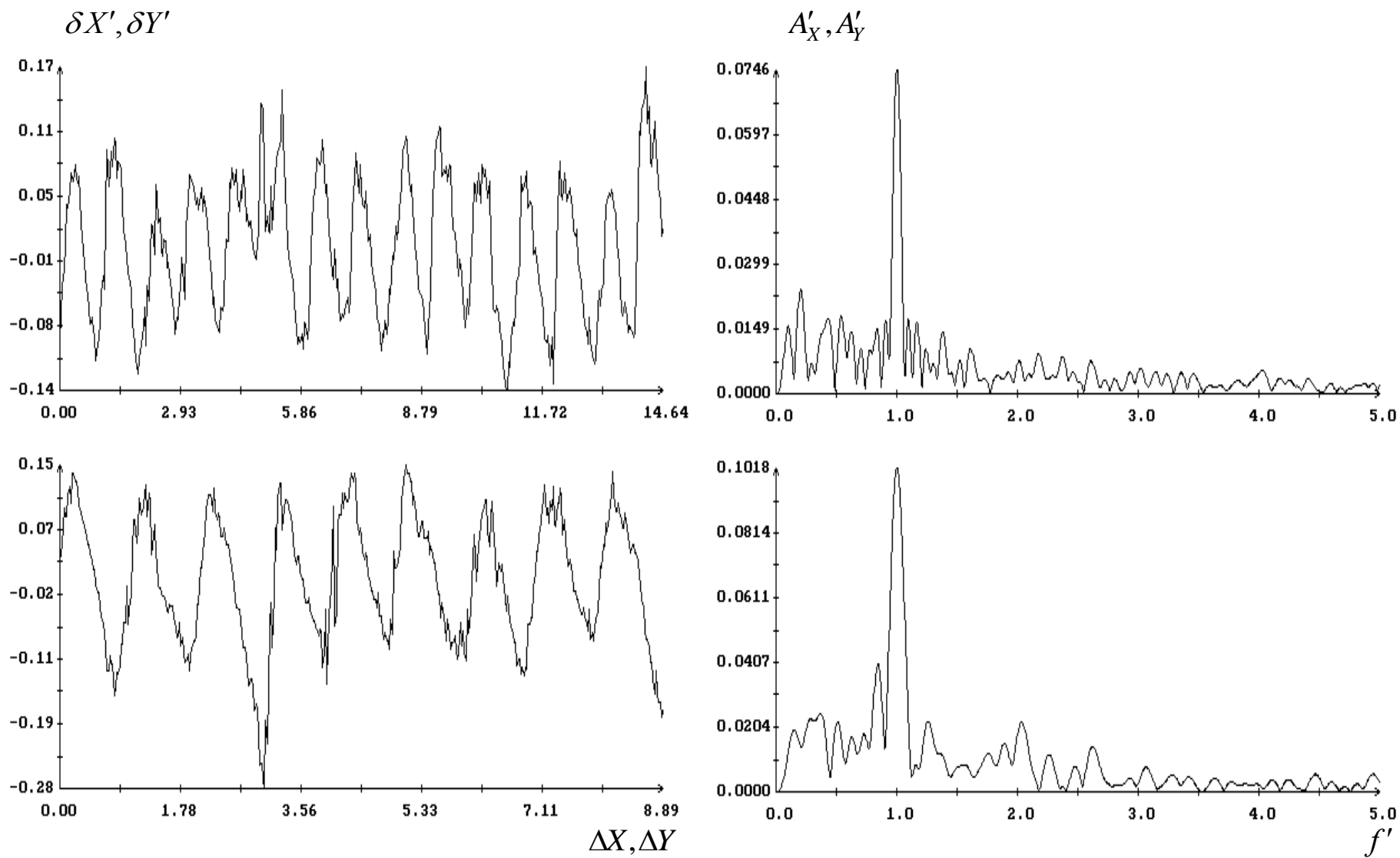


Рис. 14. Покой платформы. Движение по ПЗС-матрице звезды № 7. Слева – графики колебательных составляющих координат звезды, справа – их амплитудные спектры.

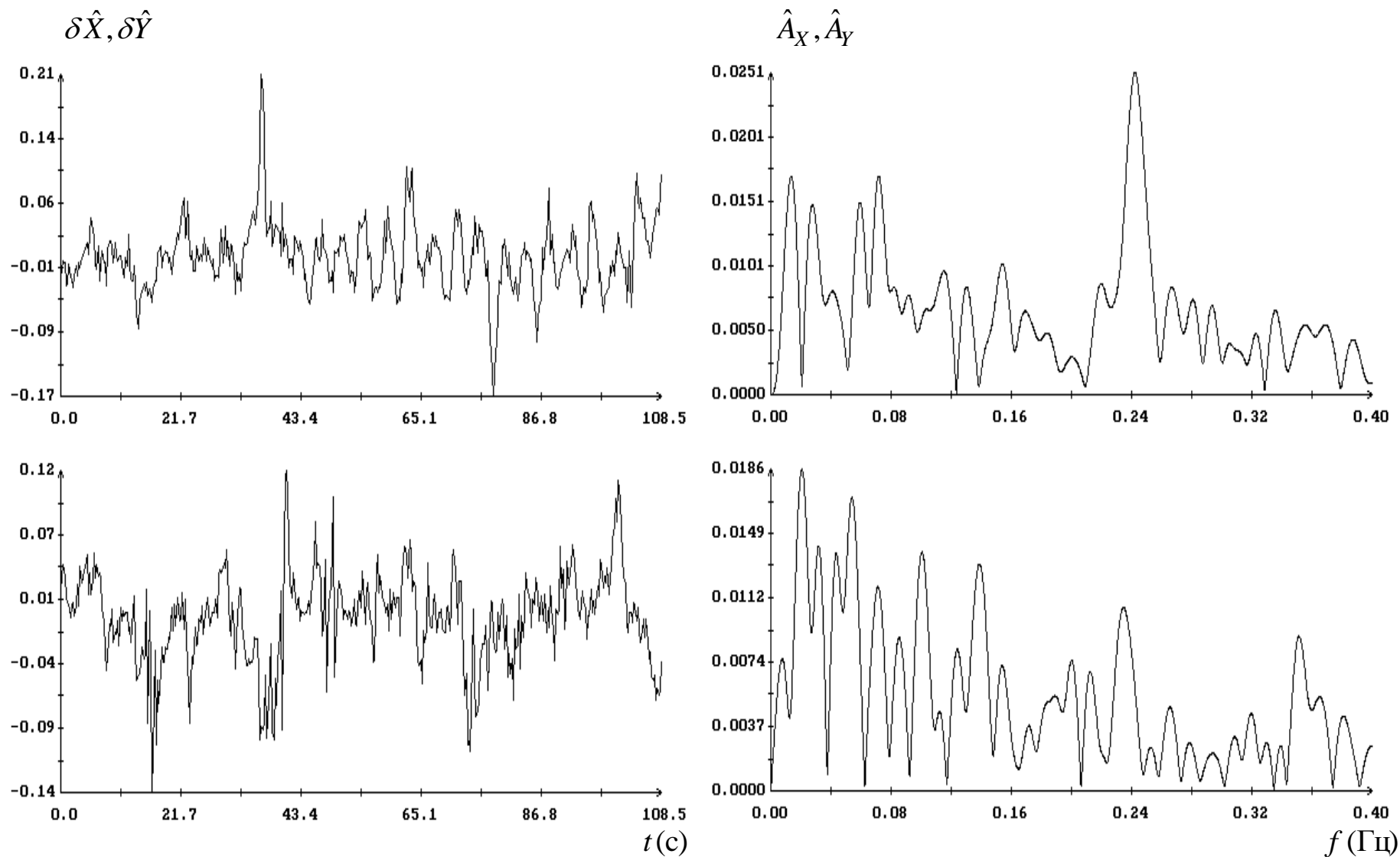


Рис. 15. Покой платформы. Скорректированные ошибки движения звезды № 1 по ПЗС-матрице.
 Слева – графики ошибок, справа – их амплитудные спектры.

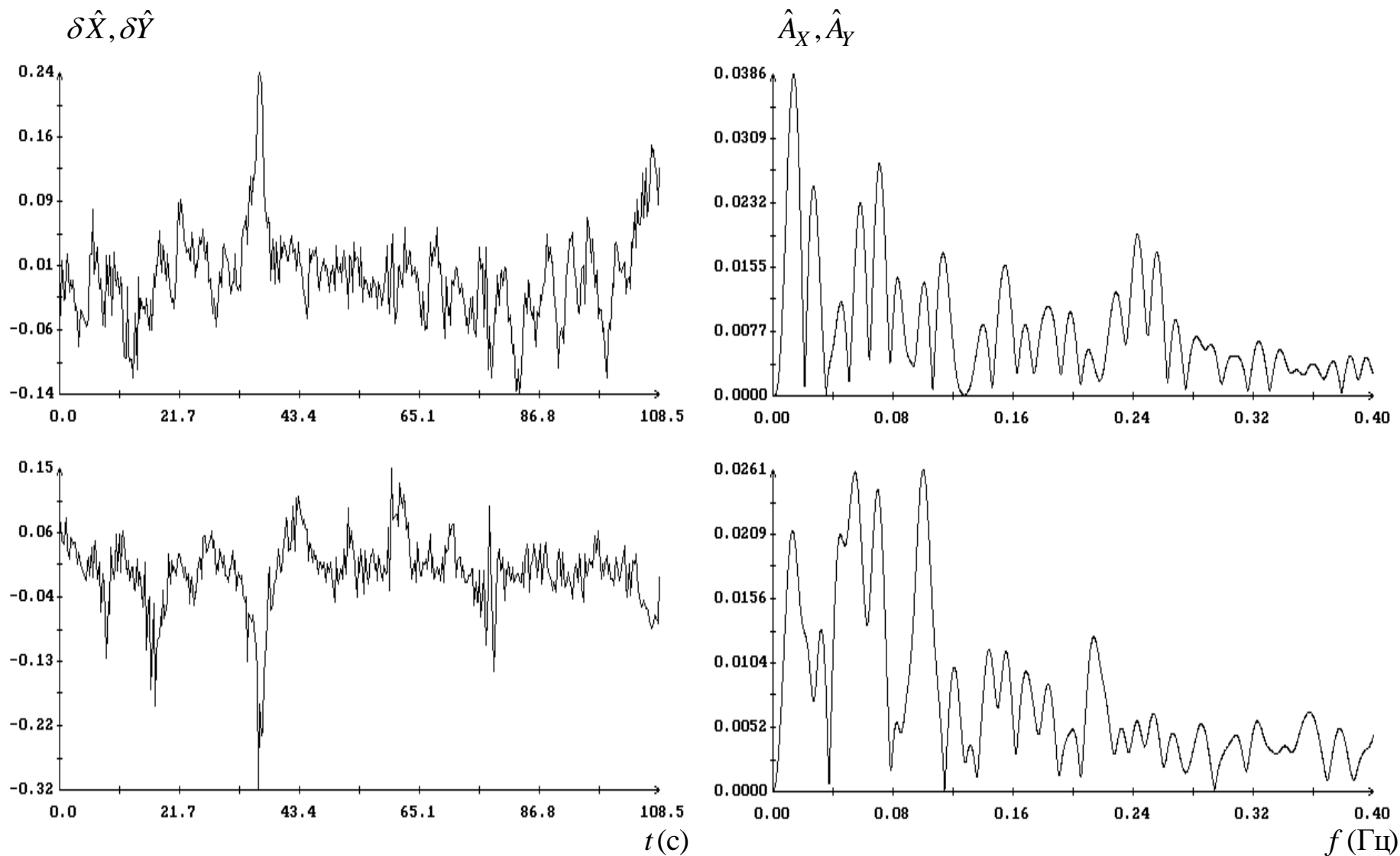


Рис. 16. Покой платформы. Скорректированные ошибки движения звезды № 3 по ПЗС-матрице.
 Слева – графики ошибок, справа – их амплитудные спектры.

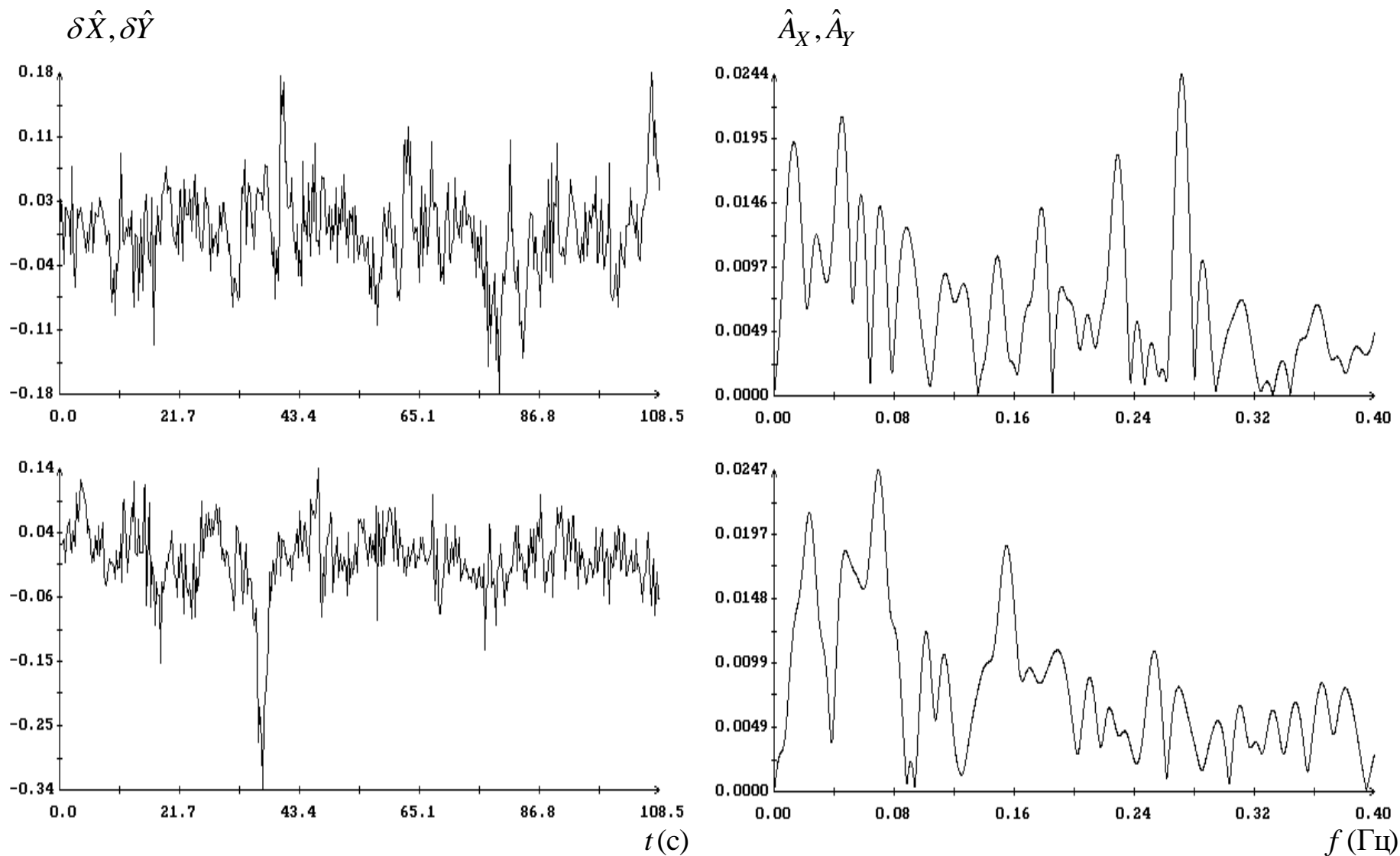


Рис. 17. Покой платформы. Скорректированные ошибки движения звезды № 5 по ПЗС-матрице.
 Слева – графики ошибок, справа – их амплитудные спектры.

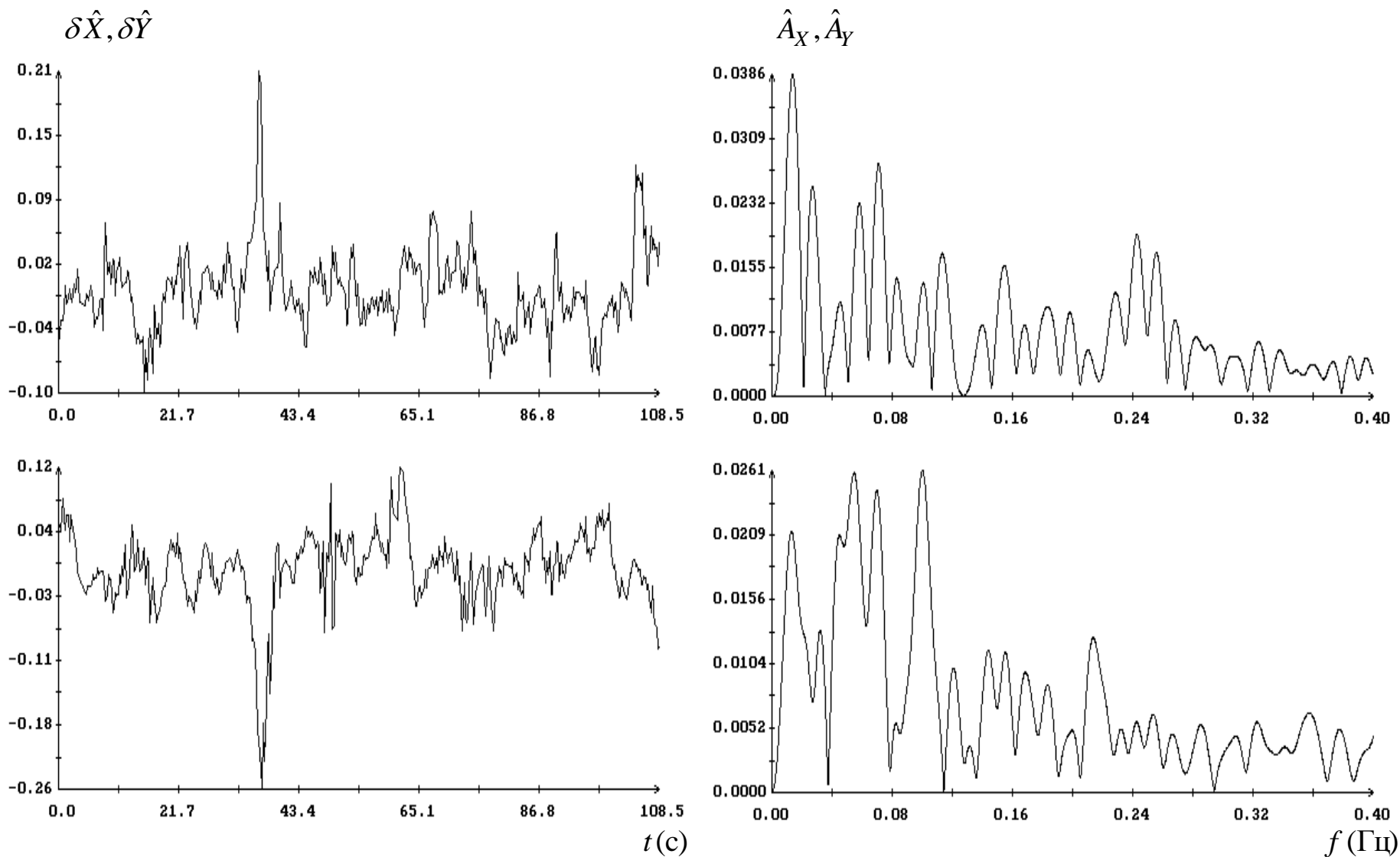


Рис. 18. Покой платформы. Скорректированные ошибки движения звезды № 7 по ПЗС-матрице.
 Слева – графики ошибок, справа – их амплитудные спектры.

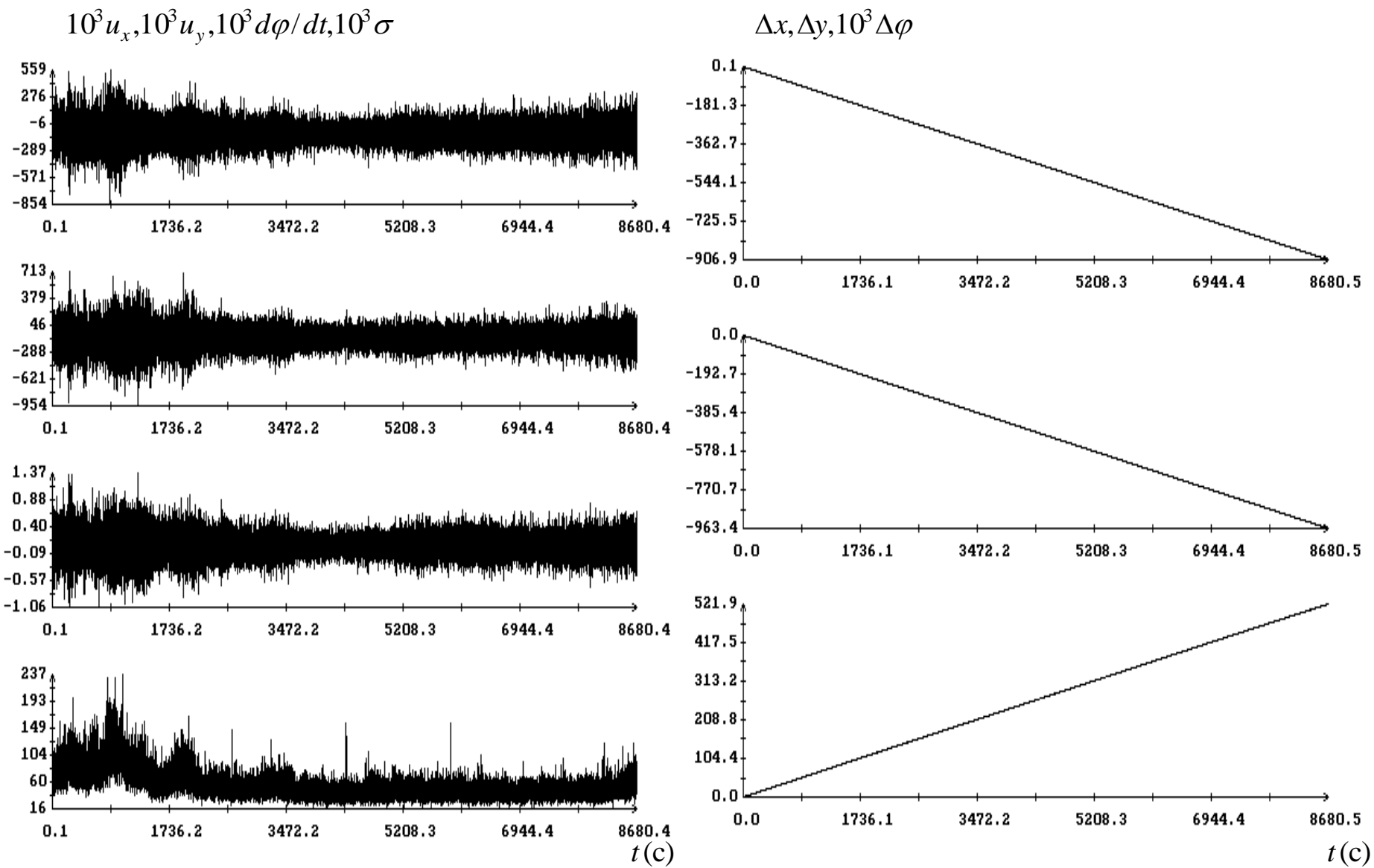


Рис. 19. Покой датчика. Параметры плоского движения ПЗС-матрицы.

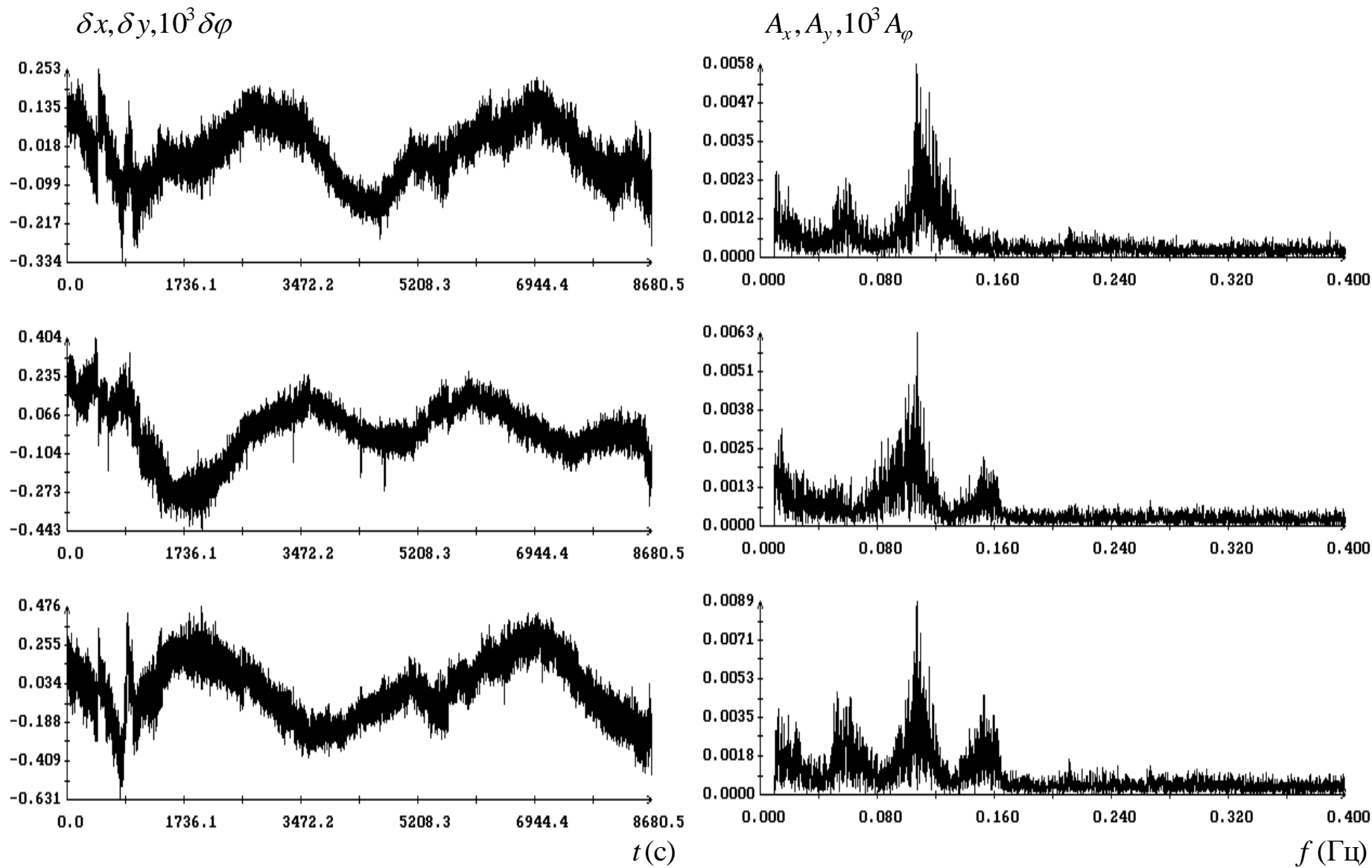


Рис. 20. Покой датчика. Колебательные составляющие параметров плоского движения ПЗС-матрицы. Слева – графики этих составляющих, справа – их амплитудные спектры.

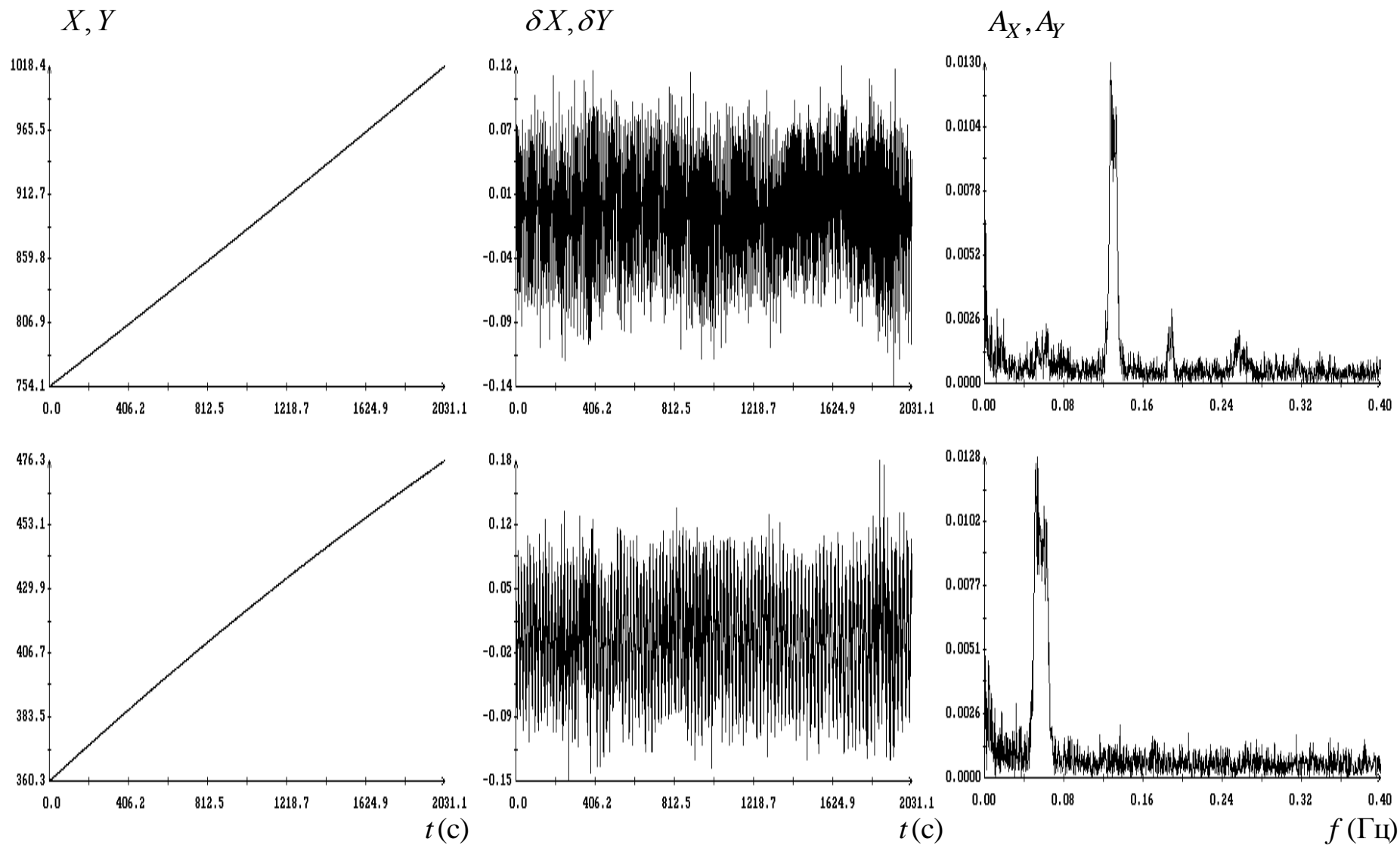


Рис. 21. Покой датчика. Движение по ПЗС-матрице звезды № 1. Слева – графики координат звезды, в центре и справа – колебательные составляющие и их амплитудные спектры.

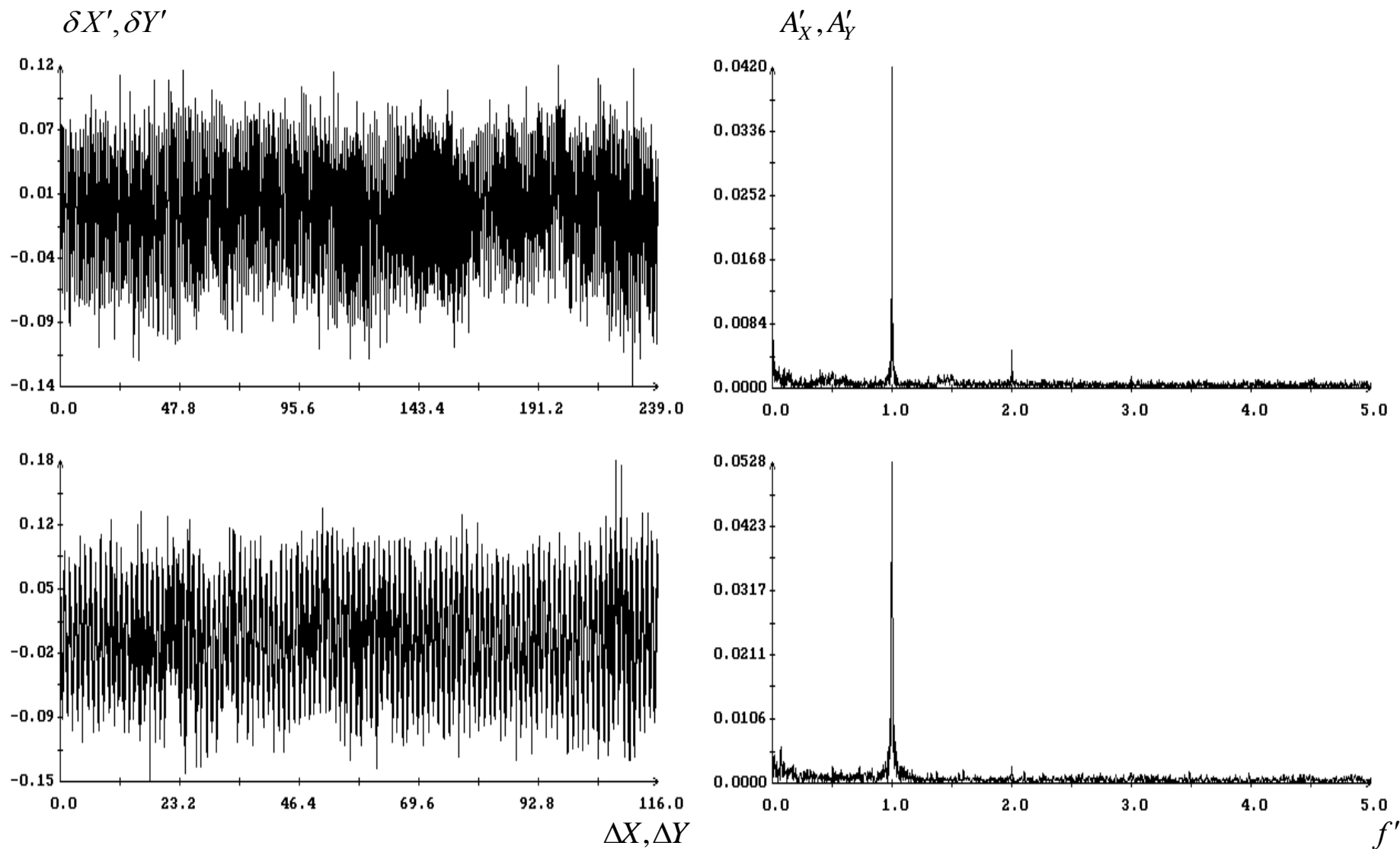


Рис. 22. Покой датчика. Движение по ПЗС-матрице звезды № 1. Слева – графики колебательных составляющих координат звезды, справа – их амплитудные спектры.

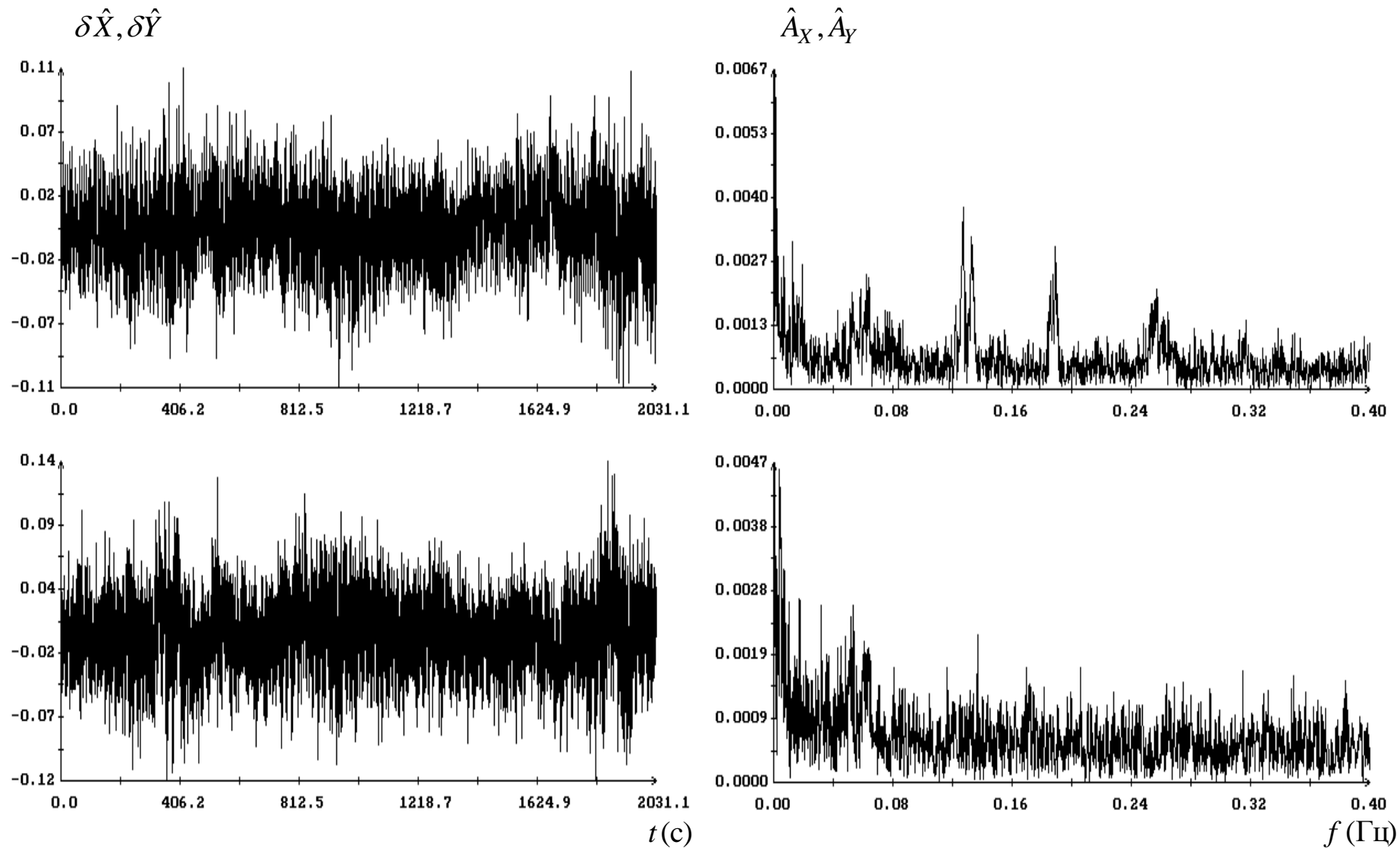


Рис. 23. Покой датчика. Скорректированные ошибки движения звезды № 1 по ПЗС-матрице.
 Слева – графики ошибок, справа – их амплитудные спектры.

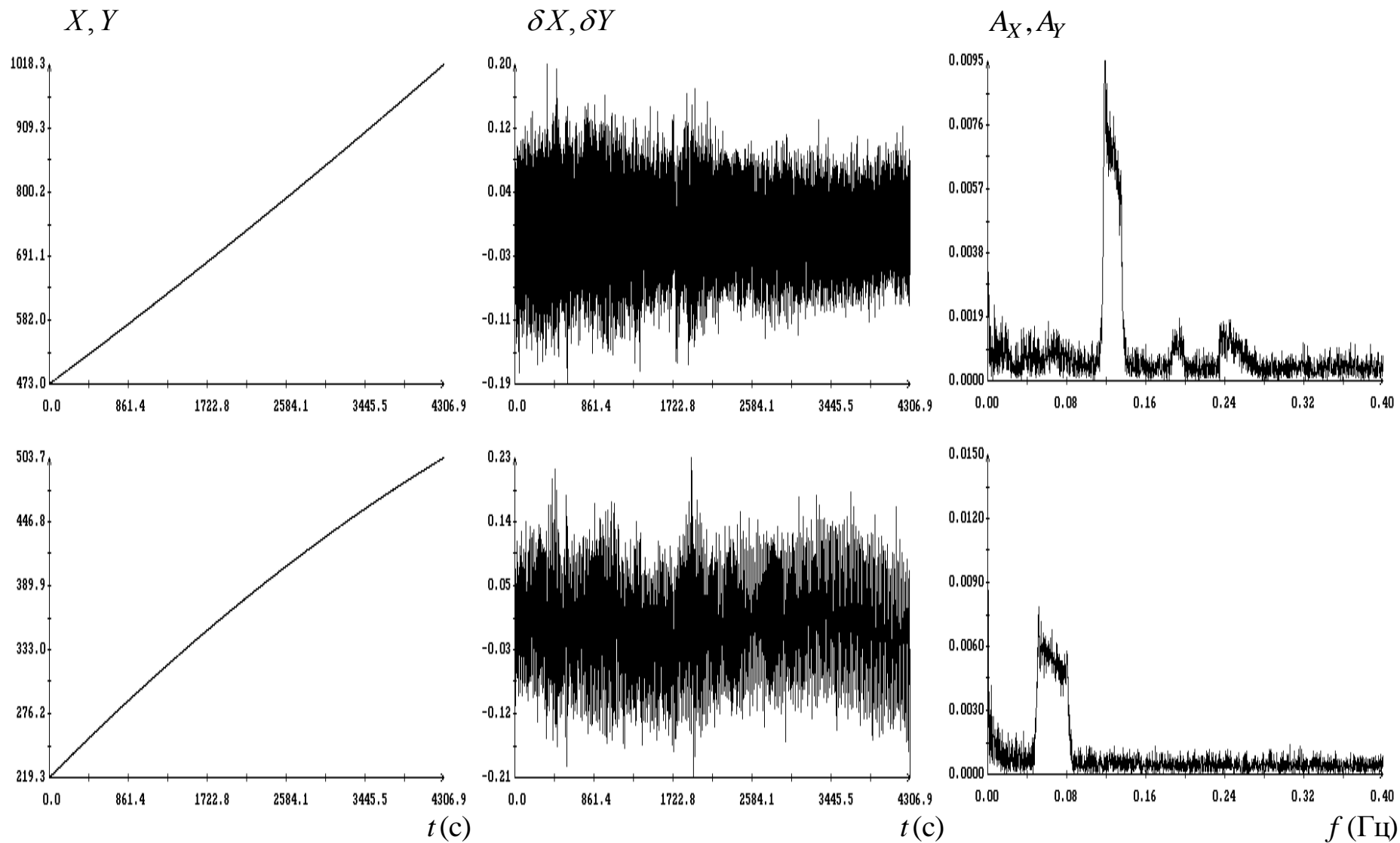


Рис. 24. Покой датчика. Движение по ПЗС-матрице звезды № 2. Слева – графики координат звезды, в центре и справа – колебательные составляющие и их амплитудные спектры.

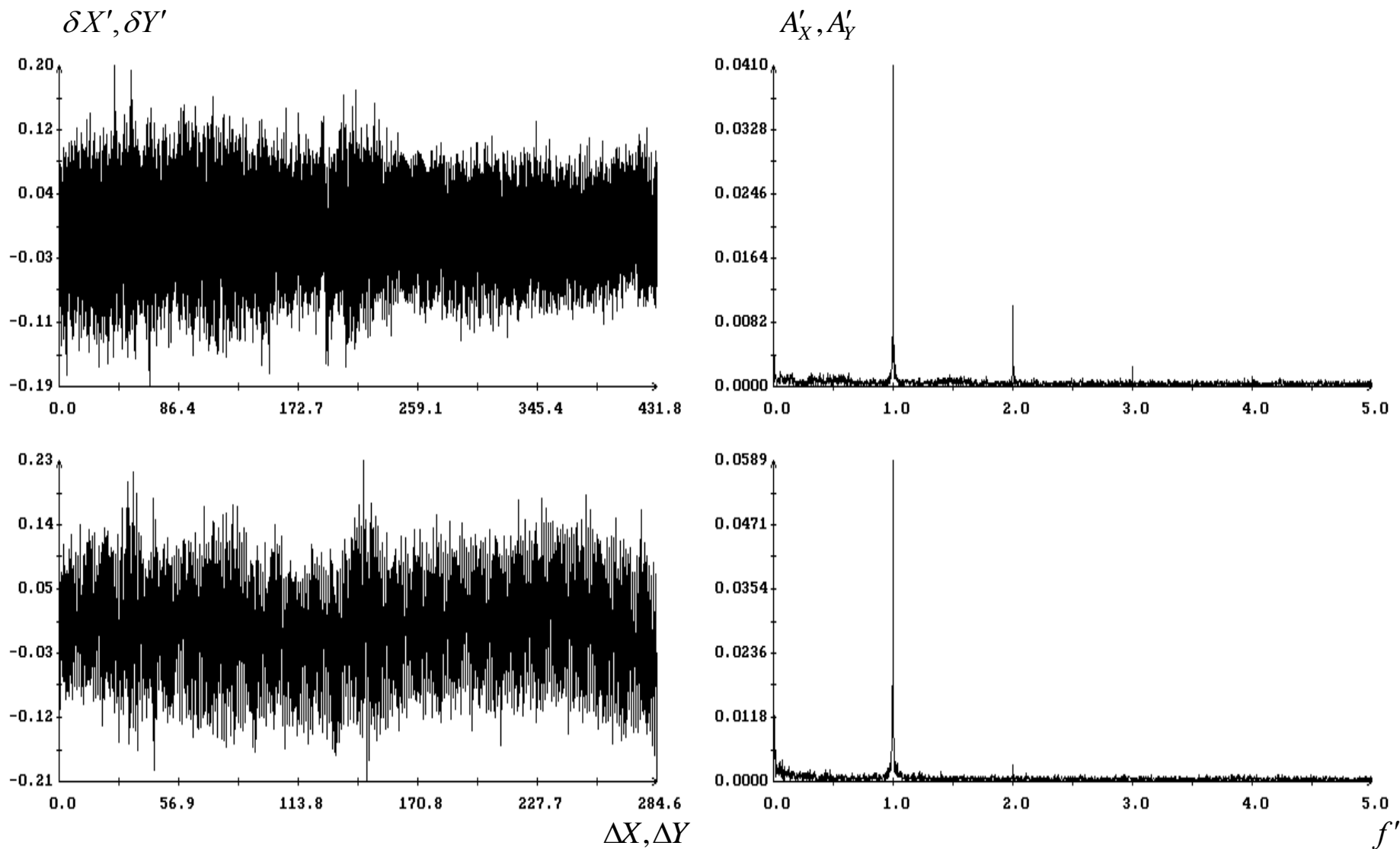


Рис. 25. Покой датчика. Движение по ПЗС-матрице звезды № 2. Слева – графики колебательных составляющих координат звезды, справа – их амплитудные спектры.

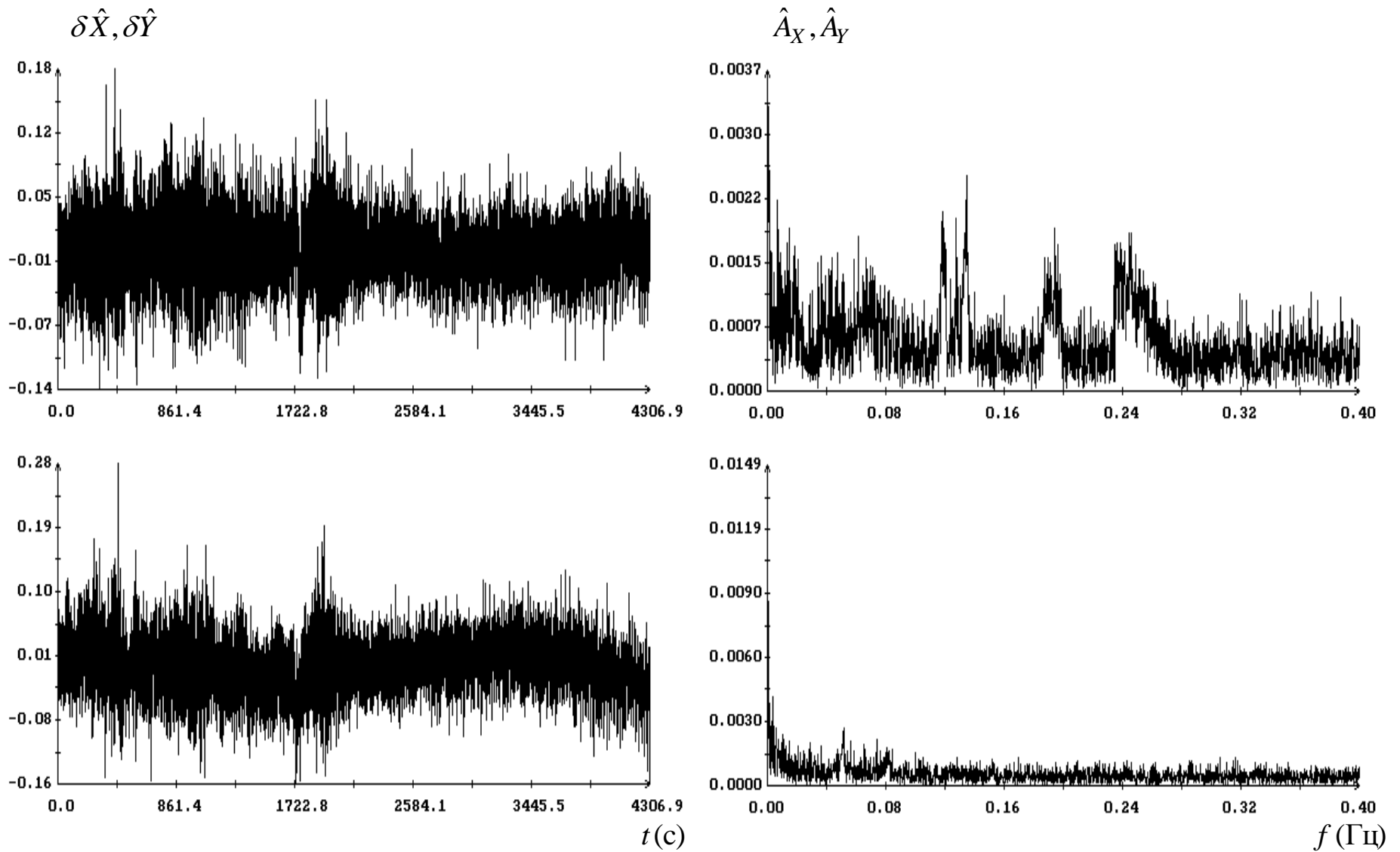


Рис. 26. Покой датчика. Скорректированные ошибки движения звезды № 2 по ПЗС-матрице.
 Слева – графики ошибок, справа – их амплитудные спектры.

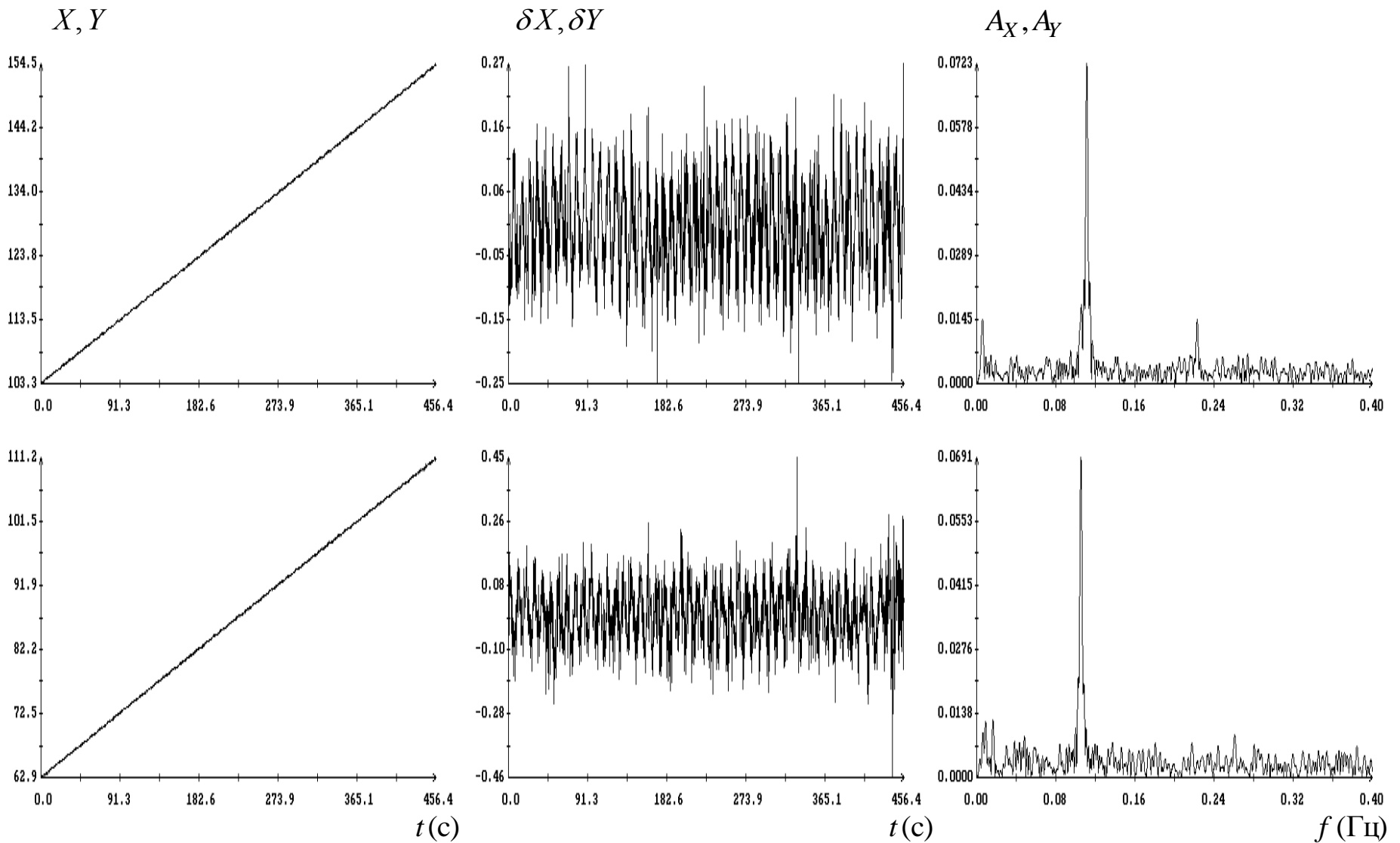


Рис. 27. Покой датчика. Движение по ПЗС-матрице звезды № 3. Слева – графики координат звезды, в центре и справа – колебательные составляющие и их амплитудные спектры.

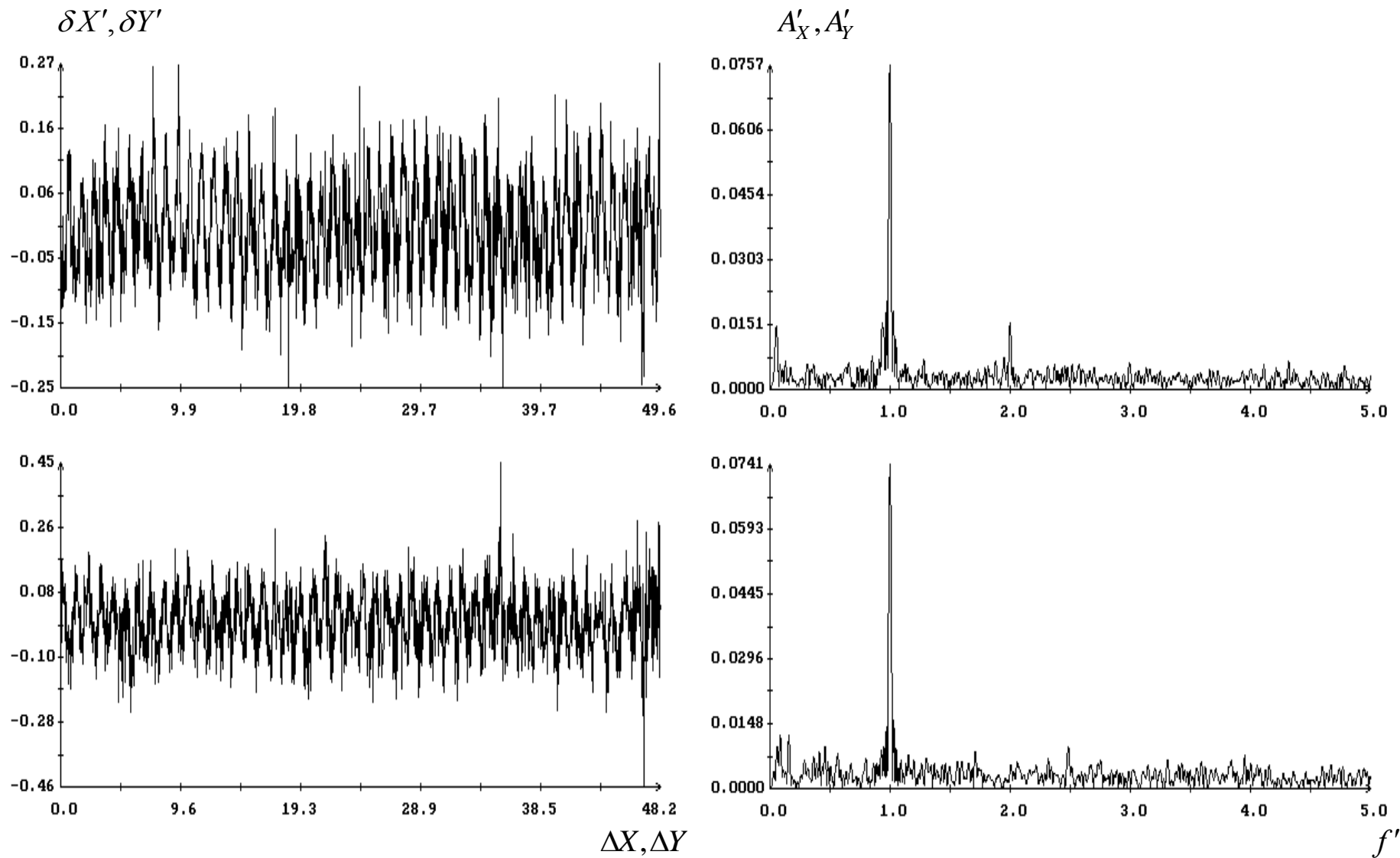


Рис. 28. Покой датчика. Движение по ПЗС-матрице звезды № 3. Слева – графики колебательных составляющих координат звезды, справа – их амплитудные спектры.

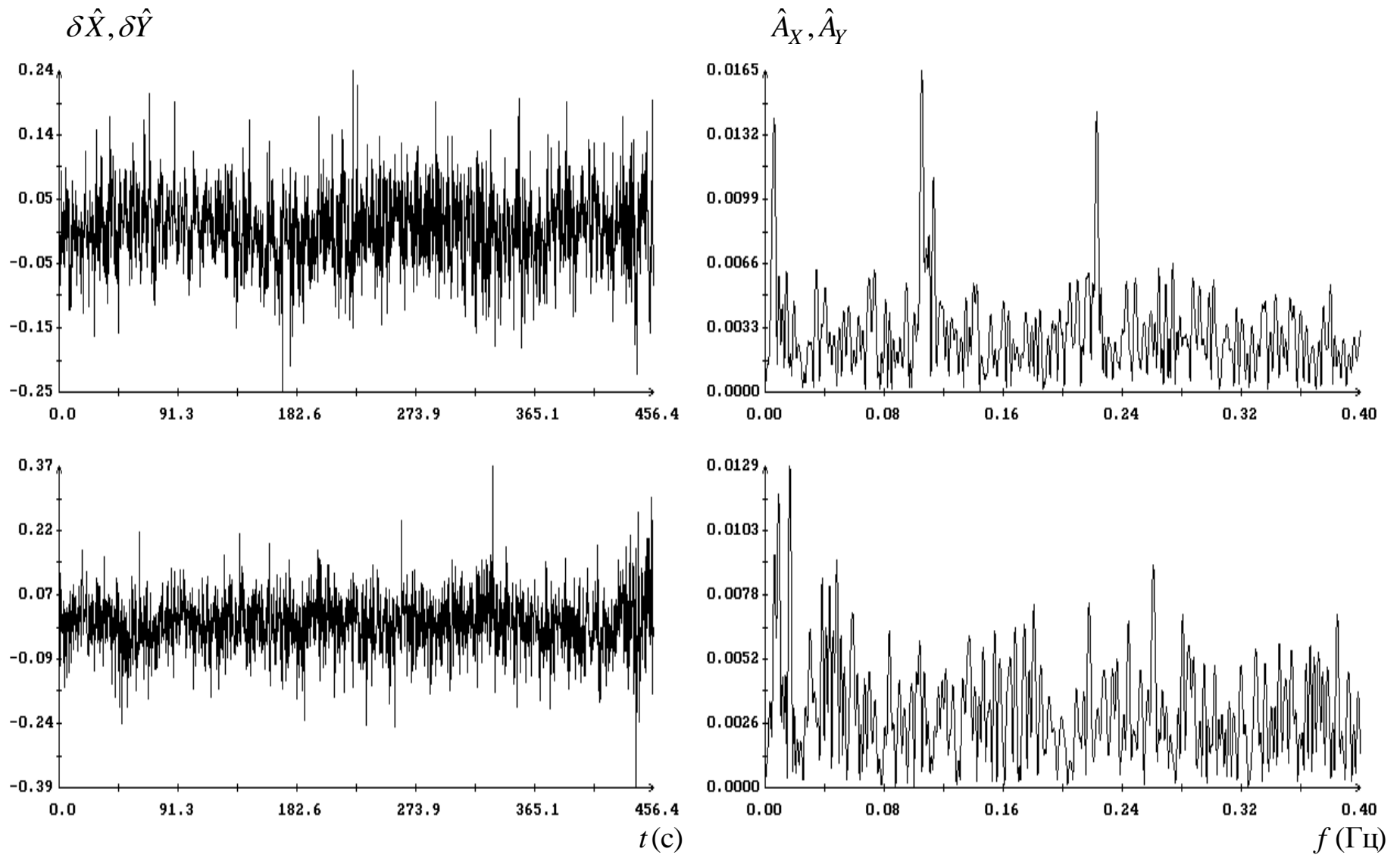


Рис. 29. Покой датчика. Скорректированные ошибки движения звезды № 3 по ПЗС-матрице.
 Слева – графики ошибок, справа – их амплитудные спектры.