



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Гасилов В.А., Круковский А.Ю.,  
Повещенко Ю. А.,  
Цыгвинцев И.П., Бойков Д.С.

Неявная двухслойная  
лагранжево-эйлерова  
разностная схема газовой  
динамики на основе  
согласованных  
аппроксимаций уравнений  
балансов массы и импульса

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Неявная двухслойная лагранжево-эйлерова разностная схема газовой динамики на основе согласованных аппроксимаций уравнений балансов массы и импульса / В.А.Гасилов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 38. 22 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-38>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**В.А.Гасилов, А.Ю.Круковский, Ю.А.Повещенко,  
И.П. Цыгвинцев, Д.С.Бойков**

**Неявная двухслойная лагранжево-  
эйлерова разностная схема газовой  
динамики на основе согласованных  
аппроксимаций уравнений балансов  
массы и импульса**

**Москва — 2015**

*В.А. Гасилов, А.Ю. Круковский, Ю.А. Повещенко, И.П. Цыгвинцев, Д.С. Бойков*

**Неявная двухслойная лагранжево-эйлерова разностная схема газовой динамики на основе согласованных аппроксимаций уравнений балансов массы и импульса**

Предложен вариант двухслойной эйлерово-лагранжевой разностной схемы газовой динамики для расчетов в двумерном приближении. Уравнение энергоданса в исходной газодинамической системе уравнений записано в “энтропийной” форме — относительно внутренней энергии газа. Исходные уравнения неразрывности и импульса дивергентно-консервативны и аппроксимируются также консервативными балансными уравнениями. Из системы разностных уравнений получено уравнение баланса кинетической энергии, не содержащее источников разностного происхождения, которые могут значительно повлиять на качество численного решения. Такие источники пропорциональны шагу по времени и могут накапливаться в течение расчета. Балансы кинетической и внутренней энергий преобразуются к уравнению, выражающему закон сохранения полной энергии. В соответствии с происходящими физическими процессами внутренняя и кинетическая энергии могут переходить одна в другую без влияния “источниковых членов”, вызванных аппроксимационными эффектами.

**Ключевые слова:** газовая динамика, смешанный лагранжево-эйлеров метод, согласованная аппроксимация, полностью консервативная разностная схема

*V.A.Gasilov, A.Yu.Krukovskiy, Yu.A.Poveschenko, I.P.Tsygvintsev, D.S. Boykov*

**Implicit two-stage Lagrangian-Euler difference scheme for gasdynamics calculations using concerted approximations to mass and momentum balance equations**

We propose a variant of the two-stage Eulerian-Lagrangian difference scheme for gas dynamics calculations in the two-dimensional approximation. Energy balance equation in the original gas-dynamic system of equations is written in the "entropy" form – with respect to the gas medium internal energy. The initial equations of continuity and momentum are divergent-conservative, therefore they are approximated as conservative balance equations. Using the constructed difference approximations to gasdynamics equations we derive a kinetic energy balance equation that does not contain nonphysical source terms which in some other difference constructions can appear due to the method of differencing. Such sources usually are proportional to the time step, and may accumulate during the calculation. The kinetic energy balance can be combined with that of the internal energy thus producing the equation which is a gasdynamic form of the total energy conservation law. In accordance with the physical processes occurring inside the gas flow an internal energy and kinetic energy can pass through the mutual transformations without the influence of "source terms" caused by approximation effects.

**Key words:** gasdynamics, mixed Euler-Lagrange method, concerted approximation, implicit two-stage totally conservative finite-difference scheme

Работа была выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках грантов 14-01-00678, 15-07-05025 и 14-11-00699.

## Введение

Работа по созданию программных комплексов для проведения широкомасштабного моделирования физических процессов, наряду с использованием современных средств графической и информационной поддержки, включает такие традиционные элементы, как выбор и анализ математических моделей и численных методик, их реализующих. Для моделирования течений плотной импульсной плазмы давно и успешно применяются полностью консервативные разностные схемы газовой динамики (ПКРС) [1]. ПКРС позволяют получать физически содержательные и достаточно точные численные решения на разностных сетках умеренной размерности, что является привлекательным свойством в отношении выполнения многовариантных вычислительных экспериментов, включающих большие серии расчетов. Для задач, возникающих при сопровождении экспериментов в области физики плазмы высокой плотности энергии, особенно важно, что такие серии расчетов зачастую сопровождаются модификациями моделей и соответствующих разностных схем. Поэтому разработки различных вариантов консервативных однородных разностных схем, на основе которых можно создавать робастные алгоритмы решения практических задач, остаются актуальными и в настоящее время.

Величина временного шага, с которым выполняется численное интегрирование системы разностных уравнений, в общем случае определяется требованием устойчивости и точности. Если в области течения плотность вещества, его температура и ионизационный состав и т.д. распределены по пространству в высокой степени неоднородно ( $\min f$  и  $\max f$  отличаются на несколько порядков по величине), то шаг по времени системы разностных уравнений газовой динамики (ГД), определяемый критерием Куранта, может оказаться существенно меньше значения, допускаемого приемлемым уровнем точности [2].

Расчёт динамики системы, например, в условиях, соответствующих экспериментам с взрывающимися проволочками [3,4], в случае использования явной численной процедуры потребовал бы такого ограничения на временной шаг, что проведение серийных двумерных расчётов для анализа экспериментальных данных за разумное время становится практически невозможным.

Подобные затруднения обычно преодолеваются использованием неявных разностных схем. Теория и различные прикладные аспекты реализации неявных схем ГД к настоящему времени достаточно подробно разработаны и представлены как в монографиях, так и в периодических изданиях. Весьма эффективные вычислительные алгоритмы были созданы на базе неявных схем, аппроксимирующих уравнения ГД и магнитной газовой динамики в форме Лагранжа [1].

Для ПКРС в лагранжевых переменных, наряду с разностными аналогами законов сохранения массы, импульса и полной энергии, выполняются балансовые соотношения между различными компонентами энергии (внутренней и кинетической). Применение ПКРС к расчетам течений, сопровождающихся нелинейными и разномасштабными физическими процессами, такими как взаимодействие вещества с электромагнитным полем, кондуктивная теплопроводность, ионизация, лучистый теплообмен и т.д., позволяет физически адекватно воспроизвести балансы тепловой и кинетической энергии и получить приемлемые по точности данные о динамике быстропеременных газодинамических структур при минимальных ограничениях на уровень дискретизации расчетной области.

Хорошо известно, что при разработке алгоритмов решения задач ГД на подвижных «лагранжевых» сетках возникает необходимость коррекции расчетной сетки, если сдвиговые деформации в потоке сильны и ячейки в процессе счета сильно искажаются. Известные способы сдерживания темпа искажений формы ячеек, такие как регуляризация разностной схемы с помощью специально сконструированной искусственной вязкости тензорного типа [5], учет неоднородности распределения параметров вещества (плотности, давления) в пределах ячейки и другие подобные меры, помогают бороться с деформацией лагранжевых сеток лишь на короткое время, например, при прохождении по сетке быстро распространяющихся волн давления. Отказ от «строго лагранжевой» процедуры расчета приводит к необходимости учета, частичного или полного конвективных потоков. Теоретической основой такого рода алгоритмов является смешанное эйлерово-лагранжевое (СЭЛ) описание движения вещества [6, 7].

В работах [8, 9] предложен общий метод построения ПКРС для задач ГД в СЭЛ переменных, основанный на так называемой «каскадной» форме записи уравнений ГД. С помощью этого метода в [7] построены трёхслойные газодинамические ПКРС для случая подвижных криволинейных сеток.

В работе [10] с помощью нового подхода, основанного на использовании переменных весов по пространству, впервые были построены двухслойные неявные ПКРС ГД на произвольных сетках в СЭЛ переменных.

Настоящая работа выполнена в целях сохранения, развития и реализации с помощью современных средств программирования методического и алгоритмического фонда, который был накоплен авторами в течение многолетней практики применения разностных схем на подвижных сетках к моделированию течений плотной импульсной плазмы. В работе рассмотрено построение двухслойной неявной ПКРС в СЭЛ переменных. Выведены соотношения согласования потоков массы и импульса, необходимые для выполнения свойства полной консервативности. Обсуждается модификация согласованной аппроксимации потоков, целесообразная в отношении разработки робастного численного алгоритма на базе данной схемы. Анализ проведен для случая двумерных ГД-течений в декартовой системе координат.

## Система уравнений ГД в СЭЛ переменных

Будем рассматривать плоское двумерное нестационарное течение. Используя приемы работ [5, 8], запишем систему уравнений ГД для случая плоской  $(x,y)$ -геометрии посредством перехода к вспомогательным независимым переменным  $(\alpha,\beta)$ . Принимаем, что на отрезке времени, на котором выполняется расчет, исходные координаты  $(x,y)$  в области расчета  $G(x,y)$  связаны с координатами  $(\alpha,\beta)$  некоторым достаточно гладким взаимно-однозначным отображением [8]:

$$x = x(\alpha, \beta, t), y = y(\alpha, \beta, t), (\alpha, \beta) \in Q \subset R^2, t \in [0, T], \quad (1)$$

и дополнительно принимаем, что внутри области  $Q$  якобиан перехода  $J$  положителен:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} > 0. \quad (2)$$

Переменные  $(\alpha, \beta)$  назовём опорными, или, по терминологии работ [6 – 8], смешанными эйлера-лагранжевыми (СЭЛ) переменными. Мы будем считать, что вспомогательная система отсчета “подвижная”, причем скорости точек с фиксированными координатами  $(\alpha, \beta)$  в лабораторной системе определены локально. Компоненты скорости вспомогательной координатной системы на плоскости  $(x, y)$  обозначим

$$\dot{x} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{(\alpha, \beta) = \text{const}}, \quad \dot{y} = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{(\alpha, \beta) = \text{const}}. \quad (3)$$

Вектор  $\mathbf{W} = (W^x, W^y, 0) = (u - \dot{x}, v - \dot{y}, 0)$  представляет собой скорость газа в опорной (подвижной) системе отсчета, связанной с координатной сеткой  $(\alpha, \beta)$ .

Примем, что диссипативными процессами можно пренебречь. При сделанных допущениях система уравнений газодинамики во вспомогательных переменных принимает вид [8, 9]

$$\frac{d(\rho J)}{dt} + \frac{\partial(\rho W^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \rho W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d(\rho u J)}{dt} + \frac{\partial(\rho u W^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \rho u W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = - \frac{\partial(P, y)}{\partial(\alpha, \beta)}, \quad (5)$$

$$\frac{d(\rho v J)}{dt} + \frac{\partial(\rho v W^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \rho v W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = - \frac{\partial(x, P)}{\partial(\alpha, \beta)}, \quad (6)$$

$$\frac{d(\rho\varepsilon J)}{dt} + \frac{\partial(\rho\varepsilon W^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \rho\varepsilon W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = -P \left( \frac{\partial(u, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \right), \quad (7)$$

$$P = P(\rho, \varepsilon). \quad (8)$$

Здесь использованы обычные обозначения плотности, давления, скорости и внутренней энергии газа — соответственно:  $\rho$ ,  $P$ ,  $\mathbf{v}(u, v)$ ,  $\varepsilon$ .

Смысл использования опорных переменных состоит в том, что они создают дополнительные возможности для описания кинематики материальных частиц. В исходной системе уравнений (4) – (8) фигурирует скорость  $\mathbf{v} = (u, v, 0)$ , измеряемая в некоторой фиксированной (например, лабораторной) системе отсчета, с которой в нашем случае связана декартова координатная “сетка”. Скорость опорной системы отсчета относительно лабораторной системы можно варьировать, подбирать по некоторому критерию, исходя из целей расчета, способа моделирования движения газа, и т.д. Такой подход позволяет “подстраивать” перемещения точек опорной системы к перемещениям материальных частиц. Например, зафиксировав для материальных (газовых) частиц их координаты  $(\alpha, \beta)$ , мы придаем опорным координатам смысл переменных Лагранжа.

## Сетки. Дискретизация

Мы используем дискретизацию физических величин по пространству, развивавшуюся в работах [5 – 7], и в более поздних [8 – 10]. На плоскости  $(x, y)$  область  $G$ , занятую веществом, разобьём двумя семействами криволинейных линий на криволинейную сетку с четырёхугольными ячейками и кусочно-гладкой границей, так называемую разностную сетку. Обозначим множество узлов разностной сетки через  $\bar{\Omega}$ , а множество ячеек разностной сетки через  $\Omega$ . Ячейка  $\omega_{kl} \subset \Omega$  своими вершинами имеет узлы с номерами  $(i, j)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i+1, j+1)$ ,  $(i, j+1)$ . Для разностной аппроксимации используются сеточные функции, определённые в узлах и ячейках разностной сетки, соответствующие множества функций обозначим  $H_{\bar{\omega}}$  и  $H_{\omega}$ . Для записи функций  $f \in H_{\bar{\omega}}$  будем использовать индексы  $(i, j)$ :  $f_{ij} = f \in H_{\bar{\omega}}$ . Функции  $g \in H_{\omega}$  будем отмечать индексами  $(k, l)$ :  $g_{kl} \in H_{\omega}$ . Для связи узловых и ячейечных функций множеств  $H_{\bar{\omega}}$  и  $H_{\omega}$  используем простейшую интерполяцию

$$g_{ij} = 0.25 \sum_{k \in III_{node}(i, j)} g_k \quad (9)$$

Отнесём координаты  $(x, y)$  и скорости  $(u, v)$  к узлам разностной сетки, а функции плотности  $\rho$  и внутренней энергии  $\varepsilon$  отнесём к ячейкам разностной сетки.

Используя методы аппроксимаций на “криволинейных” в физическом пространстве сетках [5 – 10], мы предполагаем, что гладкое взаимно-однозначное отображение  $O(G(x, y) \Leftrightarrow Q(\alpha, \beta))$  переводит расчетную область  $G(x, y)$  в единичный квадрат  $Q$  во вспомогательной плоскости переменных  $(\alpha, \beta)$ . Во вспомогательной расчетной области  $G(x, y)$  введена подвижная сетка, состоящая из четырехугольных ячеек, узлы которой образуют множество  $\overline{\Omega}(x_{ij}, y_{ij}, i = \overline{1, N_i}, j = \overline{1, N_j})$ . Принимаем также, что сетка  $\Omega(x_{ij}, y_{ij})$  из  $G$  взаимно однозначно переходит в прямоугольную сетку  $\Omega(\alpha_i, \beta_j)$  в  $Q$  с шагами  $h_\beta = \text{const}$ ,  $h_\alpha = \text{const}$ ,  $i = \overline{1, \dots, N_i}, j = \overline{1, \dots, N_j}$ . При этом сеточные линии  $i = \text{const}$ ,  $j = \text{const}$  в области  $G(x, y)$  переходят в линии  $\alpha = \alpha_i$  и  $\beta = \beta_j$  на плоскости  $Q(\alpha, \beta)$ . Мы предполагаем, что для рассматриваемых нами движений сетки в лагранжевой фазе алгоритма условие взаимной однозначности выполнено.

Мы будем использовать сеточные функции, определенные в ячейках сетки  $\Omega$ , а также сеточные функции, определенные в узлах.

Разобьём временную ось  $t_0 < t < \infty$  на отрезки длины  $\tau_n$  точками  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ , где  $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ . Сеточные величины, входящие в разностную аппроксимацию уравнений ГД, будем относить к узлам  $t_n$  этой сетки по времени. В ряде формул будут использованы безындексные обозначения [1]

$$f = f(t_n), \quad \hat{f} = f(t_{n+1}).$$

Аппроксимацию системы уравнений (4) – (8) по времени проведём в два этапа: первый — этап расчета по лагранжевой методике, второй — этап “remeshing”, или перестройки подвижной сетки и учёта потоков массы, импульса и энергии при движении вещества относительно “сеточной” координатной системы.

## Уравнения первого этапа

На первом этапе алгоритма газодинамические уравнения в опорной координатной системе записываются при условии, что опорные координаты связаны с фиксированными материальными частицами, т.е. используется лагранжево описание движения. Соответственно, относительная скорость газа равна нулю.

Тогда в уравнениях (4) – (8) будет фигурировать субстанциональная производная по времени. Будем рассматривать плоские двумерные нестационарные адиабатические течения совершенного газа. Газодинамическая система уравнений, дополненная уравнением состояния, при сделанных допущениях примет вид



$$w^x = w^y = 0, \quad \dot{x}(\alpha, \beta) = u, \quad \dot{y}(\alpha, \beta) = v. \quad (10)$$

$$m = \rho J = \hat{\rho} \hat{J} = \text{const}, \quad (11)$$

$$m \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_L = - \frac{\partial(P, y)}{\partial(\alpha, \beta)}, \quad (12)$$

$$m \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_L = - \frac{\partial(x, P)}{\partial(\alpha, \beta)}, \quad (13)$$

$$m \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right)_L = -P \left( \frac{\partial(u, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \right), \quad (14)$$

$$P = P(\rho, \varepsilon). \quad (15)$$

Система уравнений (10) – (15) рассмотрена в [8], где для нее построена полностью консервативная разностная схема.

Здесь мы приведем только ее дифференциально-разностную форму, дифференциальную по пространству, разностную по времени и соответствующую неявной по времени аппроксимации

$$m = \rho J = \tilde{\rho} \tilde{J} = \text{const}, \quad (16)$$

$$M \frac{\tilde{u} - u}{\tau_n} = - \left\{ \frac{\partial(P, y)}{\partial(\alpha, \beta)} \right\}^{[t]}, \quad (17)$$

$$M \frac{\tilde{v} - v}{\tau_n} = - \left\{ \frac{\partial(x, P)}{\partial(\alpha, \beta)} \right\}^{[t]}, \quad (18)$$

$$m \frac{\tilde{\varepsilon} - \varepsilon}{\tau_n} = - \hat{P} \left( \frac{\partial(u, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \right)^{[t]} \quad (19)$$

$$P = P(\rho, \varepsilon). \quad (20)$$

Здесь  $m$  — масса в объеме ячейки,  $M$  — масса в объеме приузлового домена, функция, отнесенная к множеству  $H_{\bar{\omega}}$  и вычисляемая как четверть суммы масс ячеек, которым инцидентен данный узел

$$M_{ij} = 0.25 \sum_{k \in \mathcal{N}_{node}(i,j)} m_k \quad (21)$$

Значок  $[t]$  означает взвешивание по времени при аппроксимации производных по пространству. В частности, взвешивание может соответствовать случаю неявной разностной схемы или симметричной по времени аппроксимации и т.п. В работе [8] показано, как на основе данной системы уравнений построить разностную схему, из которой получается уравнение баланса кинетической энергии, не содержащее источников разностного происхождения, величина которых локально может быть значительной, например, в областях больших градиентов или при высоком темпе вариации по времени. Кроме того, такие источники пропорциональны шагу по времени и могут накапливаться в процессе счета по времени. Балансы кинетической и внутренней энергий для схемы (16) – (20) преобразуются к уравнению, выражающему закон сохранения полной энергии. Это означает, что схема, аппроксимирующая уравнения (16) – (20), обладает свойством полной консервативности [1]. При этом в соответствии с происходящими физическими процессами внутренняя и кинетическая энергии могут переходить одна в другую без влияния “источниковых” аппроксимационных эффектов. Схему работы [8] мы приводить не будем, примем, однако, что именно она используется на лагранжевом этапе нашей схемы в СЭЛ переменных.

## Уравнения второго этапа

На этапе расчета конвективных потоков, обусловленного, как говорилось выше, коррекцией сетки (будем этот этап для краткости называть “ремешингом”, remeshing — см. [7]), вычисляются изменения параметров газа в ее узлах и ячейках при изменении координат  $(\alpha, \beta)$  материальных частиц, остающихся в точках физического пространства с фиксированными значениями их физических координат  $(x, y)$ . Ремешинг выглядит как конвекция газа в “сеточной” системе отсчета, с которой связаны координаты  $(\alpha, \beta)$  и которая “сдвигается” в лабораторной системе, а частицы газа, соответственно, сдвигаются относительно “сеточной” системы со скоростью  $\mathbf{W}(\alpha, \beta)$ . Уравнения дифференциально-разностной схемы этого этапа вычислений имеют вид

$$\frac{\hat{m} - m}{\tau_n} + \frac{\partial(\bar{\rho}W^x, \bar{y})}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(\bar{x}, \bar{\rho}W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\hat{m}\hat{u} - m\tilde{u}}{\tau_n} + \frac{\partial(\rho u W^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \rho u W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\hat{m}\hat{v} - m\tilde{v}}{\tau_n} + \frac{\partial(\rho v W^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \rho v W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\hat{m}\hat{\varepsilon} - m\tilde{\varepsilon}}{\tau_n} + \frac{\partial(\rho \varepsilon W^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \rho \varepsilon W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0, \quad (25)$$

$$W^x = \frac{\hat{x} - \tilde{x}}{\tau_n}, \quad W^y = \frac{\hat{y} - \tilde{y}}{\tau_n}, \quad (26)$$

$$\hat{m} = \hat{\rho} \hat{J}. \quad (27)$$

Отметим, что на лагранжевом этапе расчета массы в ячейках подвижной сетки не меняются (т.е.  $\hat{m} = m$ ). Сложив разностные уравнения первого этапа с соответствующими разностными уравнениями второго этапа и приведя подобные члены, мы получим суммарную аппроксимацию исходных газодинамических уравнений с первым порядком по времени.

## ПКРС в СЭЛ переменных

Дифференциальные уравнения второго этапа (22) – (27), аналогично [9], будем записывать в потоковой форме. Величины, полученные после расчёта лагранжевого этапа, будем обозначать «тильдой», а величины, полученные после этапа учета конвекции, будем обозначать символом «шляпка».

Уравнение баланса массы в ячейке запишем в форме

$$\frac{\hat{m} - m}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_{st} \in \mathcal{H}_{cell}(k,l)} f_{st} = 0, \quad (28)$$

Где  $m = m_{kl}$  — масса в ячейке  $(k, l)$ ,  $f_{st}$  — поток массы через грань, которой на локальном шаблоне ячейки инцидентны узлы с номерами  $s, t$  (см. Рис.1). Это уравнение является базовым для уравнений второго этапа, поскольку функции потоков других величин выражаются через потоки массы  $f$ .

Уравнение аппроксимировано на шаблоне ячейки  $\mathcal{H}_{cell}$  (см. Рис.1).

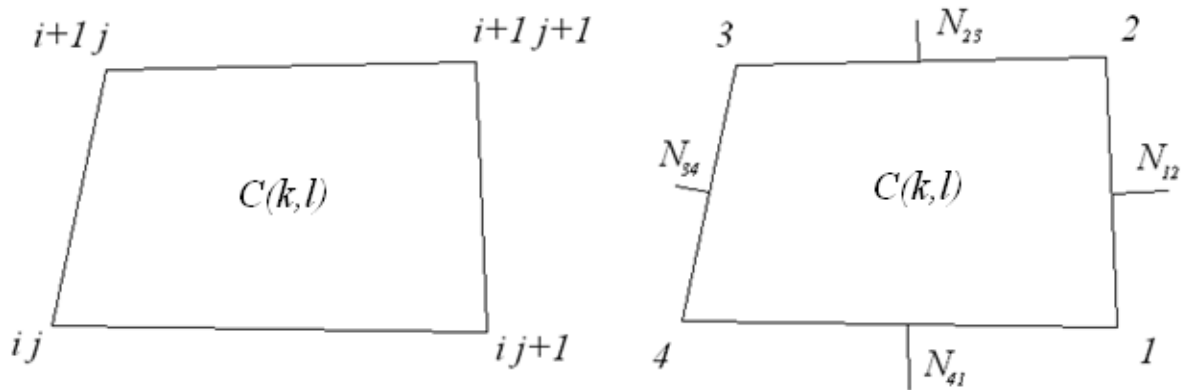


Рис.1. Шаблон  $\mathcal{M}_{cell}(k,l)$  ячейки  $C(k,l)$ . Слева – глобальная нумерация узлов, справа – локальная нумерация узлов, граней и нормалей.

На Рис.1 показана локальная нумерация граней ячейки  $C(k,l)$  — с помощью номеров двух инцидентных грани узлов сетки. Теми же номерами помечаются нормали  $\mathbf{N}_{st}$  к ребрам ячейки  $C(k,l)$  и потоки массы через эти грани  $f_{st}$ . Отметим, что, как обычно принято при составлении балансных уравнений методом контрольного объема [11], на гранях ячейки используются внешние нормали. Поток  $f_{st}$  вычисляется по обычной формуле

$$f_{st} = (\mathbf{W}_{st} \cdot \mathbf{N}_{st}) \langle \rho \rangle_{st}, \quad (29)$$

где  $\mathbf{W}_{st}$  — вектор относительной скорости переноса, относящийся к середине грани  $\Gamma_{st}$ :

$$\mathbf{W}_{st} = \frac{1}{2} (\mathbf{W}_s^x + \mathbf{W}_t^x, \mathbf{W}_s^y + \mathbf{W}_t^y),$$

$\mathbf{N}_{st}$  — вектор нормали к грани  $(s,t)$ , равный по величине площади этой грани:

$$\mathbf{N}_{st} = ((y_s - y_t), -(x_s - x_t)).$$

Значение плотности  $\langle \rho \rangle_{st}$  на грани соответствует плотности в одной из двух прилегающих к грани ячеек, а именно той ячейки, откуда идёт поток вещества через эту грань. Такой алгоритм соответствует методу “донорных ячеек” [11] и обеспечивает в (22)–(26) первый порядок аппроксимации конвективных потоков.

Очевидно, уравнение (22) обеспечивает консервативность схемы по массе (оно дивергентно-консервативно). Порядок аппроксимации потоков массы  $f_{st}$  можно повысить, для чего существует много возможностей [12], но это потребует расширения шаблона аппроксимации. Здесь мы используем одну из

самых простых и распространенных аппроксимаций потоков массы, поскольку, как будет показано далее, основной результат нашей работы в виде конструкции полностью консервативной схемы от конкретной аппроксимации массовых потоков не зависит.

Для практических вычислений полезно ввести совместно с (28) уравнение для изменения объёмов ячеек:

$$\frac{\hat{V}_{ml} - \tilde{V}_{ml}}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_{st} \in \mathcal{III}_{cell}(k,l)} \Theta_{st} = 0, \quad (30)$$

где поток объёма через соответствующую грань ячейки строится по “донорному” принципу:

$$\Theta_{st} = (\mathbf{W}_{st} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_{st}).$$

В нашем случае поток объема связан с потоком массы простой формулой:

$$f_{st} = \Theta_{st} \langle \rho \rangle_{st}. \quad (31)$$

## Уравнение изменения импульса

Уравнения переноса импульса (23) – (24) аппроксимируются в приузловом объеме разностной сетки на шаблоне  $\mathcal{III}_{node}(i,j) = \mathcal{III}_{node}(0)$

$$\frac{\hat{M}_{ij} \hat{u}_{ij} - M_{ij} \tilde{u}_{ij}}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_{kl} \in \mathcal{III}_{node}(i,j)} F_{kl}^{Mu} = 0, \quad \frac{\hat{M}_{ij} \hat{v}_{ij} - M_{ij} \tilde{v}_{ij}}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_{kl} \in \mathcal{III}_{node}(i,j)} F_{kl}^{Mv} = 0. \quad (32)$$

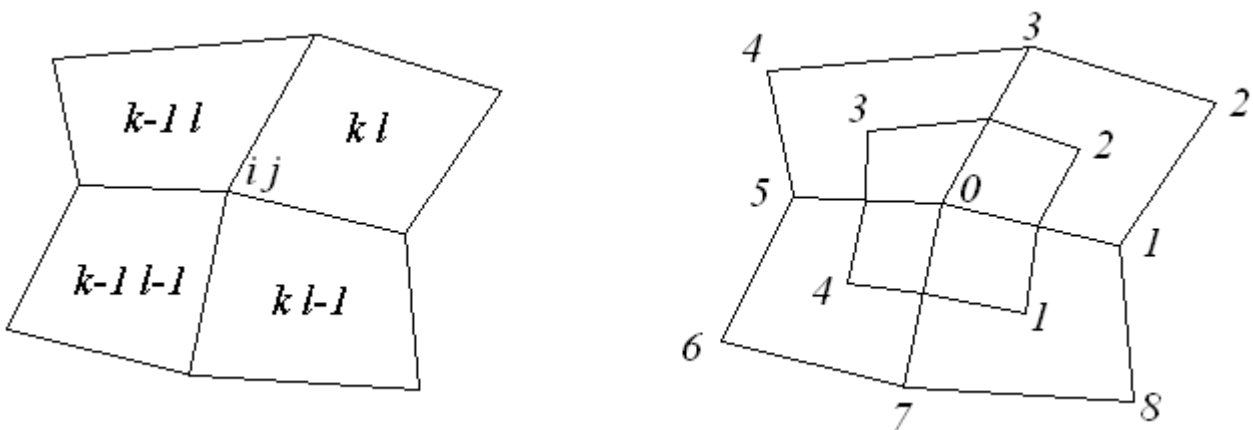


Рис.2. Разностный шаблон узла  $\mathcal{III}_{node}(i,j)$ : слева — глобальная нумерация узлов и ячеек на шаблоне, справа — локальная нумерация узлов, ячеек и граней приузлового контрольного объема, отнесенного к узлу “0”.

Соответствие глобальной и локальной нумерации показано на Рис.2.

Здесь мы не будем пока конкретизировать вид разностных потоков импульса. Отметим только, что потоки импульса  $F_{kl}^u$ ,  $F_{kl}^v$  в уравнениях (32) вычисляются таким образом, чтобы обеспечить консервативность схемы по импульсам. На какой-либо грани, разделяющей два приузловых объема, например, грани “2–3” между узлами “0” и “3” на рис.2, поток вычисляется по общей формуле, независимо от того, проводятся вычисления для приузлового объема “0” или приузлового объема “3”. Результат вычисления приписывается грани “2–3”. В соответствии с направлениями внешних нормалей к приузловым объемам, скалярное произведение нормали на поток будет одинаково по величине, но разных знаков для объемов, которым эта грань инцидентна. Другими словами, вклад от данного потока в один объем будет положительным, а в примыкающий — отрицательным. При суммировании эти потоки дадут ноль, что и требуется для соблюдения консервативности разностного уравнения импульсов. Конкретный вид потоков  $F_{kl}^u$ ,  $F_{kl}^v$  будет уточнен далее при рассмотрении уравнения баланса кинетической энергии.

### Уравнение изменения удельной внутренней энергии

Аппроксимируем уравнение переноса внутренней энергии в ячейке разностной сетки на шаблоне  $\mathcal{M}_{cell}$ :

$$\frac{\hat{m}_{kl}(\hat{\varepsilon})_{kl} - m_{kl}(\tilde{\varepsilon})_{kl}}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_{st} \in \mathcal{M}_{cell}(k,l)} \Phi_{st} = 0, \quad (33)$$

где, как и ранее, суммирование происходит по граням контрольного объема — ячейки  $C(k,l)$ ,  $\Phi_{st} = \Theta_{st} \langle \rho \varepsilon \rangle_{st}$ , а проекции на грани значения величины внутренней энергии  $\langle \rho \varepsilon \rangle_{st}$  вычисляются по формуле, аналогичной приведенной выше для проекции плотности —  $\langle \rho \rangle_{st}$ .

### Условие полной консервативности разностной схемы

Согласно [7], процедура “ремешинга” состоит в сдвиге узлов сетки (если это требуется) с тех позиций, которые они занимали после лагранжева этапа расчета, на некоторые новые позиции, определяемые в соответствии с выбранной стратегией расчета. Ремешинг обычно вызван необходимостью улучшения качества расчетной сетки. В частности, в результате ремешинга узлы сетки можно вернуть на те позиции, которые они занимали в начале расчета шага по времени. В последнем случае полный расчетный цикл одного шага по времени можно рассматривать как двухэтапный алгоритм реализации разностной схемы эйлера типа.

Разностная схема сохранит свойство полной консервативности, если на этапе “ремешинга” конвективные потоки массы, импульса и удельной

внутренней энергии плазмы будут аппроксимированы так, чтобы не менялись суммы соответствующих величин по расчетной области:

$$\Delta E_u^{kin} = \sum_{ij} \left( \hat{M}_{ij} \frac{\hat{u}_{ij}^2}{2} - M_{ij} \frac{\tilde{u}_{ij}^2}{2} \right) = 0, \quad (34)$$

$$\Delta E_v^{kin} = \sum_{ij} \left( \hat{M}_{ij} \frac{\hat{v}_{ij}^2}{2} - M_{ij} \frac{\tilde{v}_{ij}^2}{2} \right) = 0, \quad (35)$$

$$\Delta E^{int} = \sum_{ml} \left( \hat{m}_{ml} (\hat{\varepsilon})_{ml} - m_{ml} (\tilde{\varepsilon})_{ml} \right) = 0. \quad (36)$$

Для доказательства полной консервативности второго этапа нашей схемы суммарной аппроксимации и формулировки условий, при которых выполнено это свойство, предварительно, наряду с уравнением изменения массы ячейки (28), будем рассматривать уравнение изменения массы в приузловом домене  $M_{ij}$  в виде

$$\frac{\hat{M}_0 - M_0}{\tau_n} + \sum_{\Gamma_{st} \in \Pi_{node}(i,j)} F_{st} = 0, \quad F_{st} = 0.5(f_s^- + f_s^+ + f_t^- + f_t^+). \quad (37)$$

Уравнение (37) записано с использованием локальной индексации узлов и ячеек около центрального узла  $(i,j)$ , имеющего локальный номер “0”, как показано на Рис.2. При этом шаблон какой-либо ячейки образуют четыре инцидентных ей узла (вершины четырёхугольных ячеек), а шаблон около узла “0” образуют четыре ячейки, которым инцидентен этот узел.

Поток  $F_{qr}$  в формуле (37) вычисляется путем осреднения потоков массы через те грани ячеек сетки, которые во вспомогательной плоскости оказываются параллельными грани “ $q - r$ ” приузлового домена, а верхние значки “-” и “+” обозначают соответственно грани с меньшими и большими значениями вспомогательной координаты “ $\alpha$ ” или “ $\beta$ ”, в зависимости от того, как расположены их образы на вспомогательной плоскости. Например, для грани “2–3” фигурирующего в (37) шаблона узла с координатами  $\alpha = \alpha_i$ ,  $\beta = \beta_j$  (узел “0” на рис.2) поток формируется через грани ячеек “2” и “3”, образы которых параллельны образу грани “2–3”, и расположены на линиях  $\beta = \beta_j$  и  $\beta = \beta_{j+1}$ .

Доказательство полной консервативности второго этапа сводится к получению условий, при которых из уравнения неразрывности (28) (а также аналогичных ему уравнений (30) и (37)), уравнений движения (32) и уравнения энергии (33) следует выполнение соотношений (34)–(36) по сохранению кинетической и внутренней энергий системы.

Заметим, что соотношение (36) по сохранению внутренней энергии автоматически следует из уравнения (33) при суммировании его по всей расчётной области.

Доказательства выполнения соотношений (34) – (35) проведём в следующей последовательности.

Выпишем соотношения, при которых из уравнения неразрывности в форме (37) и уравнений движения (32) следуют уравнения для приращения кинетической энергии в узле после этапа “ремешинга” (remeshing). С этой целью разностное уравнение баланса массы в приузловом объеме узла  $(i,j)$  умножим на  $(-0.5\hat{u}_{ij}\tilde{u}_{ij})$ , уравнения баланса компонент импульса для того же узла умножим на  $0.5(\hat{u}_{ij} + \tilde{u}_{ij})$  и сложим получившиеся уравнения. После умножения суммированные левые части получившихся уравнений нетрудно привести к выражениям разностных производных по времени, которые в сумме можно трактовать как аппроксимацию производной по времени от кинетической энергии газа на этапе “ремешинга”

$$\frac{\hat{M}_{ij} - M_{ij}}{\tau_n} \left( -\frac{\hat{u}_{ij}\tilde{u}_{ij}}{2} \right) + \frac{\hat{M}_{ij}\hat{u}_{ij} - M_{ij}\tilde{u}_{ij}}{\tau_n} \left( \frac{\hat{u}_{ij} + \tilde{u}_{ij}}{2} \right) = \frac{\hat{M}_{ij}\hat{u}_{ij}^2 - M_{ij}\tilde{u}_{ij}^2}{2\tau_n}, \quad (38)$$

$$\frac{\hat{M}_{ij} - M_{ij}}{\tau_n} \left( -\frac{\hat{v}_{ij}\tilde{v}_{ij}}{2} \right) + \frac{\hat{M}_{ij}\hat{v}_{ij} - M_{ij}\tilde{v}_{ij}}{\tau_n} \left( \frac{\hat{v}_{ij} + \tilde{v}_{ij}}{2} \right) = \frac{\hat{M}_{ij}\hat{v}_{ij}^2 - M_{ij}\tilde{v}_{ij}^2}{2\tau_n}. \quad (39)$$

Уравнение для изменения кинетической энергии приузлового объема имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{M}_{ij}\hat{u}_{ij}^2 - M_{ij}\tilde{u}_{ij}^2}{2\tau_n} + \frac{\hat{M}_{ij}\hat{v}_{ij}^2 - M_{ij}\tilde{v}_{ij}^2}{2\tau_n} = - \left( \frac{\hat{u}_{ij}\tilde{u}_{ij}}{2} + \frac{\hat{v}_{ij}\tilde{v}_{ij}}{2} \right) \sum_{\Gamma_{st} \in \mathcal{M}_{node}(i,j)} F_{st} + \\ & + \left( \frac{\hat{u}_{ij} + \tilde{u}_{ij}}{2} \right) \sum_{\Gamma_{kl} \in \mathcal{M}_{node}(i,j)} F_{kl}^{Mu} + \left( \frac{\hat{v}_{ij} + \tilde{v}_{ij}}{2} \right) \sum_{\Gamma_{kl} \in \mathcal{M}_{node}(i,j)} F_{kl}^{Mv}. \end{aligned} \quad (40)$$

Суммируя балансные уравнения (40) по всей расчётной области, получаем в правых частях соотношения (38) и (39), которые будут выполняться, если согласовать разностные формулы для потоков компонент импульса в уравнениях движения (32) с потоками массы, фигурирующими в уравнении неразрывности (37). Принцип согласования достаточно показать на одном примере, для чего мы рассмотрим потоки компонент импульса через грань приузлового объема, имеющую локальную индексацию “2–3” на шаблоне  $\mathcal{M}_{node}$  узла  $(i,j)$ . Поток массы через грань балансного домена для узла “0” вычисляется в соответствии с предложенной в [8] аппроксимацией, посредством усреднения потоков массы через грани тех ячеек, в которых лежит данная грань приузлового домена. При этом осреднение проводится согласованно, по тем граням ячеек, которые при отображении на



вспомогательную плоскость  $\Pi(\alpha, \beta)$  располагаются параллельно образу соответствующей грани приузлового объема. Для показанного на Рис.2 приузлового объема, отнесенного к узлу “0”, приведем пример вычисления потока массы через его грань “2–3” (лежит в ячейках с локальными номерами 2 и 3) по формуле осреднения потоков массы через грани ячеек, окружающих узел “0”, и формирующую шаблон узла использованием по граням ячеек, ребрам 0 – 1, 2 – 3, 3 – 4, 0 – 5:

$$F_{23} = 0.25(f_{01} + f_{23} + f_{34} + f_{05}). \quad (41)$$

После умножения (37) на  $(-0.5\hat{u}_{ij}\tilde{u}_{ij})$ , т.е. в данном случае на  $(-0.5\hat{u}_0\tilde{u}_0)$ , получим

$$-(0.5\hat{u}_0\tilde{u}_0)F_{23} = -(0.5\hat{u}_0\tilde{u}_0)0.25(f_{01} + f_{23} + f_{34} + f_{05}). \quad (42)$$

Так как этот компонент уравнения баланса массы (с соответствующим множителем) относится к грани “2–3” приузлового объема “0”, то с ним надо согласовывать выражение для компоненты потока импульса  $F_{23}^{Mu}$ , умноженное на полусумму соответствующей компоненты скорости

$$0.5(\hat{u}_0 + \tilde{u}_0)F_{23}^{Mu}. \quad (43)$$

Если мы рассмотрим приузловой объем для узла “3”, то, в силу консервативности уравнений, аппроксимирующих уравнения неразрывности и импульса, мы будем иметь точно так же вычисленные потоки массы и импульса, только дающие вклад в приузловой объем “3” с иным знаком, чем в приузловой объем “0”. Соответственно, умножать эти потоки надо на  $(-0.5\hat{u}_3\tilde{u}_3)$  и на  $-0.5(\hat{u}_3 + \tilde{u}_3)$ :

$$(0.5\hat{u}_3\tilde{u}_3)F_{23} = (0.5\hat{u}_3\tilde{u}_3)0.25(f_{01} + f_{23} + f_{34} + f_{05}), \quad -0.5(\hat{u}_3 + \tilde{u}_3)F_{23}^{Mu}. \quad (44)$$

Поскольку “ремешинг” не должен изменять величину кинетической энергии газа, т.е. должно выполняться уравнение (34) для части кинетической энергии, соответствующей компоненте скорости  $u$ , то рассматриваемые нами вклады в уравнение баланса кинетической энергии со стороны объемов “0” и “3” должны в сумме давать ноль. Компонуя соответствующим образом выражения (42) – (44), получим условие

$$(0.5\hat{u}_3\tilde{u}_3)F_{23} - 0.5(\hat{u}_3 + \tilde{u}_3)F_{23}^{Mu} - (0.5\hat{u}_0\tilde{u}_0)F_{23} + 0.5(\hat{u}_0 + \tilde{u}_0)F_{23}^{Mu} = 0,$$

из которого следует, что потоки массы и импульса должны быть согласованы следующим образом:

$$F_{23}^{Mu} = F_{23} \cdot \frac{1}{2} \frac{\hat{u}_0\tilde{u}_0 - \hat{u}_3\tilde{u}_3}{u_0^{(0.5)} - u_3^{(0.5)}}. \quad (45)$$

Окончательные формулы согласования для обеих компонент импульса запишем в несколько более удобной форме, заменив их индексацию по граням приузлового объема на индексы тех узлов, которые разделены данной гранью:

$$F_{0l}^{Mu} = F_{0l} \cdot \frac{1}{2} \frac{\tilde{u}_0 \hat{u}_0 - \tilde{u}_l \hat{u}_l}{u_0^{(0.5)} - u_l^{(0.5)}}, F_{0l}^{Mv} = F_{0l} \cdot \frac{1}{2} \frac{\tilde{v}_0 \hat{v}_0 - \tilde{v}_l \hat{v}_l}{v_0^{(0.5)} - v_l^{(0.5)}}, \quad l=1,3,5,7. \quad (46)$$

В формулах (46) индексом “ $l$ ” в локальной нумерации на приузловом шаблоне (см. Рис.2) обозначены узлы, инцидентные ребрам “ $0 - l$ ”, которые пересекают соответствующие границы приузлового контрольного объема (например, ребро “ $0-1$ ” пересекает грань “ $1-2$ ” приузлового объема, отнесенного к узлу “ $0$ ”, ребро “ $0-3$ ” пересекает грань “ $2-3$ ” и т.д.).

Для согласования аппроксимаций потоков массы и импульса возможен другой подход [10], в котором полусуммы скоростей, на которые домножаются компоненты потока импульса, берутся при осреднении не по времени, а по пространству, между соседними узлами, которые служат центрами смежных узловых доменов. Аналогично дело обстоит с аппроксимациями квадратов скоростей, на которые домножаются потоки массы. Соответствующие формулы балансных соотношений для внутренней энергии, аналогичные (38) – (39), имеют вид

$$\frac{\hat{M}_{ij} - M_{ij}}{\tau_n} \left( -\frac{[u_{ij}^{(\theta)}]^2}{2} \right) + \frac{\hat{M}_{ij} \hat{u}_{ij} - M_{ij} \tilde{u}_{ij}}{\tau_n} u_{ij}^{(\theta)} = \frac{\hat{M}_{ij} \hat{u}_{ij}^2 - M_{ij} \tilde{u}_{ij}^2}{2\tau_n}, \quad (47)$$

$$\frac{\hat{M}_{ij} - M_{ij}}{\tau_n} \left( -\frac{[v_{ij}^{(\theta)}]^2}{2} \right) + \frac{\hat{M}_{ij} \hat{v}_{ij} - M_{ij} \tilde{v}_{ij}}{\tau_n} v_{ij}^{(\theta)} = \frac{\hat{M}_{ij} \hat{v}_{ij}^2 - M_{ij} \tilde{v}_{ij}^2}{2\tau_n}, \quad (48)$$

$$u_{ij}^{(\theta)} = \theta \hat{u}_{ij} + (1-\theta) \tilde{u}_{ij}, \quad v_{ij}^{(\theta)} = \theta \hat{v}_{ij} + (1-\theta) \tilde{v}_{ij}, \quad \theta = \frac{\sqrt{\hat{M}_{ij}}}{\sqrt{\hat{M}_{ij}} + \sqrt{M_{ij}}}, \quad (49)$$

На границе приузлового домена “ $0$ ” потоки импульса связаны с потоками массы через ту же границу соотношениями

$$F_{0l}^{Mu} = F_{0l}^M u_{0l}^{(\theta)}, \quad u_{0l}^{(\theta)} = 0.5(u_0^{(\theta)} + u_l^{(\theta)}), \quad l=1,3,5,7.$$

Рассматриваемые нами подходы позволяют аппроксимировать кинетическую энергию в узле неотрицательной сеточной функцией.

## Заключение

Полная двухэтапная система разностных газодинамических уравнений (28) – (33), хотя и является неявной, позволяет провести вычисления второго этапа в частично явной форме. После определения значений потоков масс в объемах ячеек и приузловых доменов, а также потоков объёмов в соответствии с (29), (31) и (37), новые значения масс и удельной внутренней энергии в ячейках сетки вычисляются явно из уравнений (28) и (33). Уравнения для новых значений скоростей (32) решаются итерационно, до выполнения условия на значения новых скоростей

$$|V^{s+1} - V^s| \leq \varepsilon_v |V^s| + \varepsilon_0, \quad (50)$$

где  $s$  — номер итерации, а  $\varepsilon_v$  и  $\varepsilon_0$  — абсолютная и относительная погрешности расчета.

Отметим важную особенность, отличающую данный алгоритм учёта конвективных потоков для уравнений в СЭЛ переменных от ранее разработанных алгоритмов. Конструкция уравнений разностной схемы такова, что путем преобразований из них получается сеточное уравнение баланса кинетической энергии (40), в котором фигурирует неотрицательная величина

$$\hat{E}_{kin} = \sum_{ij} \left( \hat{M}_{ij} \frac{\hat{u}_{ij}^2}{2} + \hat{M}_{ij} \frac{\hat{v}_{ij}^2}{2} \right). \quad (51)$$

Для схем, построенных, например, в [9], с использованием «каскадного» представления конвективных производных, получены разностные аналоги энергобалансов, в которые входит кинетическая энергия, выраженная через сеточные функции, определённые на двух временных слоях:

$$\hat{E}_{kin} = \sum_{ij} \left( \hat{M}_{ij} \frac{\hat{u}_{ij} u_{ij}}{2} + \hat{M}_{ij} \frac{\hat{v}_{ij} v_{ij}}{2} \right). \quad (52)$$

Из (52) следует, что вычисленное по сеточным векторам скорости значение “разностной” кинетической энергии может быть отрицательно.

В работе [13] представленные результаты анализа устойчивости неявной разностной схемы лагранжева этапа подтверждают целесообразность неявности схем для определенного круга прикладных задач.

Что касается прикладных моделей плотной импульсной плазмы, изучаемой в экспериментах на лазерных и электрофизических установках, то они чаще всего строятся на основе одножидкостного приближения (см, напр., [14 – 17]). Если изучаются высокоскоростные плазменные течения, в ряде случаев может возникнуть необходимость учесть неравновесности по температурам ионной и электронной компонент плазмы. Кроме того, в плазме сильное влияние может оказывать электронная, а в определенных условиях — и ионная

теплопроводность. Соответствующие уравнения в “двухтемпературном” приближении [14] можно записать аналогично исходной системе (4) – (8)

$$\frac{d(\rho J)}{dt} + \frac{\partial(\rho W^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \rho W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = 0, \quad (53)$$

$$\frac{d(\rho u J)}{dt} + \frac{\partial(\rho u W^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \rho u W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = -\frac{\partial(P, y)}{\partial(\alpha, \beta)}, \quad (54)$$

$$\frac{d(\rho v J)}{dt} + \frac{\partial(\rho v W^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \rho v W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = -\frac{\partial(x, P)}{\partial(\alpha, \beta)}, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho \varepsilon_e J)}{dt} + \frac{\partial(\rho \varepsilon_e W^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \rho \varepsilon_e W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = J(Q_T + Q_{ei}) - \\ - P_e \left( \frac{\partial(u, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \right) - \left( \frac{\partial(\Pi_e^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \Pi_e^y)}{\partial(\alpha, \beta)} \right), \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho \varepsilon_i J)}{dt} + \frac{\partial(\rho \varepsilon_i W^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \rho \varepsilon_i W^y)}{\partial(\alpha, \beta)} = -JQ_{ei} - \\ - (P_i + q) \left( \frac{\partial(u, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \right) - \left( \frac{\partial(\Pi_i^x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{\partial(x, \Pi_i^y)}{\partial(\alpha, \beta)} \right), \end{aligned} \quad (57)$$

$$P = P_e(\rho, \varepsilon_e) + P_i(\rho, \varepsilon_i) + q. \quad (58)$$

Здесь использованы обычные обозначения плотности, давления и скорости — соответственно,  $\rho$ ,  $P$ ,  $\mathbf{v}(u, v)$ . В используемой нами форме записи “газ” состоит из электронов и ионов со своими давлениями  $P_{e,i}$  и удельными внутренними энергиями  $\varepsilon_{e,i}$ .

Обсуждение процессов теплопередачи в высокотемпературных средах, выражения для потоков тепла электронов и ионов  $\Pi_{e,i} = (\Pi_{e,i}^x, \Pi_{e,i}^y, 0)$ , источников членов  $Q_T$  в уравнении энергобаланса плазмы, описание теплообмена между электронами и ионами  $Q_{ei}$ , давление искусственной вязкости  $q$  можно найти в [14–17] и многих других публикациях, посвященных физике высокотемпературной плазмы. В контексте данной работы важен тот факт, что, как видно по структуре уравнений (53) – (58), полностью консервативная разностная схема для них может быть построена с

помощью точно такого согласования потоков массы и импульса, как и в рассмотренной выше однотемпературной модели.

Работа была выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках грантов 14-01-00678, 15-07-05025 и 14-11-00699.

## Список литературы

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
2. Федоренко Ф.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994.
3. Ткаченко С.И., Мингалеев А.Р., Пикуз С.А., Романова В.М., Хаттатов Т.А., Шелковенко Т.А., Ольховская О.Г., Гасилов В.А., Калинин Ю.Г. Исследования структуры керн-корона при взрыве алюминиевой проволоочки в вакууме. Физика плазмы, 2011, т. 37, No. 12, выпуск 8.
4. S. Tkachenko, T. Khattatov, V. Gasilov, O. Olkhovskaya, A. Mingaleev, S. Pikuz, V. Romanova, T. Shelkovenko. Distribution of Conducting and Nonconducting Matter in the Discharge Channel upon Wire Explosion.- Journal of the Korean Physical Society, Vol. 59, No. 6, December 2011, pp. 3472-3475.
5. Schultz W.D. Two-Dimensional Lagrangian Hydrodynamic Difference Equations // Methods of Computational Physics. New York: Academic Press, 1964. V.3.
6. Franck R.M. and Lazarus R.B. Mixed Eulerian-Lagrangian method. In: Methods in Computational Physics, Vol. 3: Fundamental methods in Hydrodynamics, Alder B, Fernbach S and Rotenberg M (eds). Academic Press: New York, 1964; pp. 47–67.
7. Hirt C.W., Amsden A.A., Cook J.L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. Journal of Computational Physics, 1974, v. 14, № 3, pp. 227 – 253.
8. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Вариационный принцип получения уравнений магнитной гидродинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **21**:2 (1981), 409–422.
9. Головизнин В.М., Рязанов М.А., Самарский А.А., Чернов С.Ю. Двумерная полностью консервативная разностная схема газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. М.: Препринт ИПМ №11, 1985.
10. Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Об одном подходе к расчёту задач газовой динамики с переменной массой квазичастицы. М.: Препринт ИПМ №157, 1980.
11. Роуч П. Вычислительные методы в газодинамике. М.: Мир, 1980.
12. Pieter Wesseling. Principles of Computational Fluid Dynamics. Springer: Springer series in computational mathematics, 2001.

13. Ткаченко С.И., Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Ольховская О.Г., Цыгвинцев И.П. Вычислительная модель и результаты численного анализа электровзрыва тонких алюминиевых проводников. *Mathematica Montisnigri. Podgorica, Montenegro* – V. XXVIII, 2013.
14. Дюдерштадт Дж., Мозес Г. Инерциальный термоядерный синтез. Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984.
15. Ядерный синтез с инерционным удержанием. / Под ред. Б.Ю.Шаркова. М., Физматлит, 2005.
16. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматлит, 2008.
17. Орешкин В.И. Излучение высокотемпературной плазмы. Пинч-эффект, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013, ISBN: 978-3-659-33619-5.

## Оглавление

Введение .....	3
Система уравнений ГД в СЭЛ переменных .....	5
Сетки. Дискретизация .....	6
Уравнения первого этапа .....	7
Уравнения второго этапа .....	9
ПКРС в СЭЛ переменных .....	10
Уравнение изменения импульса .....	12
Уравнение изменения удельной внутренней энергии .....	13
Условие полной консервативности разностной схемы .....	13
Заключение .....	18
Список литературы .....	20