



Иванов Д.С., Овчинников М.Ю.,  
Пеньков В.И., Ролдугин Д.С.,  
Доронин Д.М., Овчинников А.В.

Использование магнитных  
катушек и магнитометра для  
обеспечения трехосной  
ориентации спутника

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Использование магнитных катушек и магнитометра для обеспечения трехосной ориентации спутника / Д.С.Иванов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 47. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-47>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**Д.С. Иванов, М.Ю. Овчинников, В.И. Пеньков,  
Д.С. Ролдугин, Д.М. Доронин, А.В. Овчинников**

**Использование магнитных катушек  
и магнитометра для обеспечения  
трехосной ориентации спутника**

**Москва — 2015**

**Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С., Доронин Д.М., Овчинников А.В.**

Использование магнитных катушек и магнитометра для обеспечения трехосной ориентации спутника

Рассматривается спутник, оснащенный магнитной системой ориентации в составе трех взаимно перпендикулярных магнитных катушек и трехкомпонентного магнитометра. Спутник стабилизируется в орбитальной системе координат в неустойчивом в гравитационном поле положении равновесия. Рассматриваются два подхода к реализации управления. Показана возможность обеспечения трехосной ориентации спутника с использованием минимального состава аппаратных средств. Исследуется влияние ошибок в знании моментов инерции аппарата и возмущающих моментов на точность ориентации.

**Ключевые слова:** магнитная система ориентации, магнитометр, трехосная ориентация, фильтр Калмана

**Danil Ivanov, Mikhail Ovchinnikov, Vladimir Penkov, Dmitry Roldugin, Dmitry Doronin, Andrey Ovchinnikov**

Three-axis satellite stabilization using only magnetorquers and magnetometer

Attitude motion of a satellite equipped with magnetic control system is considered. System comprises of three mutually orthogonal magnetorquers and one three-axis magnetometer. Satellite is stabilized in orbital reference frame in equilibrium position unstable in gravitational field. Two control strategies are presented. Three-axis attitude is shown to be achievable. Accuracy in presence of disturbing torques and inertia moments uncertainty is assessed.

**Key words:** magnetic attitude control system, three-axis magnetometer, three-axis attitude, Kalman filter

Работа поддержана грантом РФФИ № 15-31-20058.

## Содержание

Введение .....	3
1. Постановка задачи .....	4
2. Алгоритм определения углового движения по измерениям магнитометра.....	8
Принцип работы фильтра Калмана .....	8
Линеаризация уравнений.....	10
Моделирование работы алгоритма.....	12
3. Управление ориентацией с помощью магнитных катушек по измерениям магнитометра .....	19
Трехосное управление на основе скользящего режима .....	19
Трехосная ориентация на основе ПД-регулятора .....	22
Заключение.....	28
Библиография.....	29

## Введение

Магнитные системы активно применяются для ориентации и стабилизации малых спутников. Основной проблемой, возникающей при их использовании, является принципиальная невозможность создания любого заданного по направлению механического момента (отсутствует полная управляемость). В настоящей работе рассматривается спутник, оснащенный только магнитными катушками. Ранее авторами было показано [1,2], что в этом случае можно добиться трехосной ориентации аппарата. Для этого приходится либо точно подбирать параметры управления и ограничивать быстродействие системы ориентации, либо строить такую траекторию движения спутника (скользящую поверхность), которая могла бы быть обеспечена с помощью магнитной системы ориентации.

В настоящей работе проводится численное моделирование динамики спутника в условиях, приближенных к полетным. В частности, максимально ограничивается состав измерительной аппаратуры: определение ориентации осуществляется на основе измерений одного трехосного магнитометра. По одному измерению векторного направления невозможно определить трёхосную ориентацию спутника (возникает ненаблюдаемость). За счет использования модели геомагнитного поля становится возможным определение трехосного движения при учете уравнений движения спутника относительно центра масс. Так как для управления необходимо знание параметров углового движения в режиме реального времени, измерения магнитометра обрабатываются с использованием фильтра Калмана. Похожая схема системы ориентации для обеспечения трехосной стабилизации с использованием магнитных катушек и измерений магнитометра предложена в работе [3], однако алгоритм управления основан на линейно-квадратическом регуляторе.

Задача определения трехосного углового движения с использованием измерений только магнитометра широко исследуется в литературе. Psiaki и др. одними из первых предложили использовать расширенный фильтр Калмана для решения этой проблемы [4]. Кроме векторной части кватерниона и вектора угловой скорости авторы оценивают текущий вектор возмущений для гравитационно стабилизированного спутника. В работе исследуется влияние ошибок знания параметров модели движения и измерений на точность определения вектора состояния. Для решения проблемы сходимости фильтра при грубом начальном векторе состояния в [5,6] предложен подход, основанный на одновременном использовании множества фильтров, что позволяет гарантировать сходимость оценок при любом начальном векторе. Для определения движения быстровращающегося спутника в [7] предложена модификация расширенного фильтра Калмана. Интересный двухступенчатый подход рассматривается в [8], где на первом этапе оценивается вектор производной магнитного поля, который используется на втором этапе для определения углового движения. В работе [9] применяется нелинейный фильтр

Калмана для определения ориентации и орбиты спутника PROBA-2. Часто наряду с угловым движением оценивается и текущее орбитальное движение (в качестве примера можно привести [10]), однако такие алгоритмы требуют больших вычислительных ресурсов, зачастую недоступных для бортовых компьютеров малых спутников. В настоящей работе рассматривается применение расширенного фильтра Калмана с минимальным вектором состояния, состоящим из векторной части кватерниона и вектора угловой скорости, для космического аппарата, стабилизирующегося с помощью только магнитных катушек. Для настройки фильтра Калмана применяется метод, предложенный авторами в [11]. Исследуется зависимость точности оценок фильтра Калмана от ошибок знания тензора инерции и смещения нуля магнитометра.

Таким образом, рассматривается активная система ориентации минимального состава: магнитные катушки и магнитометр, в обоих случаях наиболее дешевые, простые и надежные средства, но при этом и наименее точные. В работе показано, что правильный подбор параметров управления и верная настройка фильтра Калмана позволяют добиться точности ориентации в несколько градусов даже при таком ограниченном наборе аппаратных средств. При этом обеспечивается такая ориентация в орбитальных осях, которая отвечает неустойчивому положению равновесия спутника в гравитационном поле. Дополнительно рассматривается влияние на точность ориентации возмущающих моментов неизвестной природы и неточности знания тензора инерции.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается движение спутника как твердого тела вокруг центра масс в дипольном магнитном поле. Спутник оснащен тремя взаимно перпендикулярными магнитными катушками и трехосным магнитометром. Катушки создают любой по направлению, но ограниченный по величине момент. На спутник действует гравитационный момент и возмущающий момент неизвестной природы, но заданной величины. Тензор инерции спутника известен с заданной точностью.

При построении модели движения аппарата орбита считается круговой, при проведении численных расчетов принимаются следующие значения параметров орбиты и спутника:

- высота орбиты 1000 км, радиус Земли 6371 км;
- наклонение орбиты  $82.5^\circ$ ;
- главные центральные моменты инерции спутника  $5750 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $2450 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $4000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;
- учитывается неточность знания возмущающих моментов на уровне  $\pm 5 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Параметры магнитометра следующие:

Диапазон измерения каждой компоненты вектора индукции магнитного поля  $\pm 60000$  нТл. Предел допускаемой абсолютной погрешности измерения компонент магнитной индукции – 100 нТл.

Максимальный магнитный момент катушек –  $250 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ .

Введем системы координат, которые будут использоваться в работе.

$OX_0Y_0Z_0$  – орбитальная система координат с началом в центре масс спутника. Ось  $OX_0$  направлена вдоль радиус-вектора спутника, ось  $OY_0$  располагается в плоскости орбиты по касательной к орбите и направлена в сторону движения спутника, ось  $OZ_0$  дополняет систему до правой;

$OXYZ$  – связанная система, ее оси совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

Ориентация связанной системы относительно орбитальной задается с помощью углов  $\varphi, \psi, \theta$  (последовательность поворотов 1-3-2). Матрица перехода  $\mathbf{A}$  от системы  $OX_0Y_0Z_0$  к системе  $OXYZ$  имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Изменение ориентации и скорости спутника описывается с помощью динамических уравнений Эйлера и кинематических соотношений, основанных на кватернионах, элементах матрицы направляющих косинусов или углах Эйлера. Вектор состояния спутника описывается с помощью компонент угловой скорости и различных наборов позиционных переменных. При этом может быть использована как абсолютная угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  и ее компоненты  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , так и угловая скорость относительно орбитальной системы координат  $\boldsymbol{\Omega}$  и ее компоненты  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ . Связь относительной и абсолютной скорости задается соотношением

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_{orb}, \quad (1.2)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_{orb}$  – угловая скорость вращения орбитальной системы координат. При движении по круговой орбите  $\boldsymbol{\omega}_{orb} = (0, 0, \omega_0)$ .

В качестве позиционных переменных используются кватернион  $\Lambda = (\mathbf{q}, q_0)$ , где  $\mathbf{q}$  – векторная часть кватерниона,  $q_0$  – скалярная, матрица ориентации  $\mathbf{A}$  и ее компоненты  $a_{ij}$ , углы ориентации  $\varphi, \psi, \theta$ . Динамические уравнения движения спутника с тензором инерции  $\mathbf{J}_x = \text{diag}(A, B, C)$  в связанных осях представлены в виде

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}, \quad (1.3)$$

либо при использовании относительной скорости

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_{отн}, \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{M}_{отн} = -\mathbf{J}\mathbf{W}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{орб} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{орб} - \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{орб} \times \mathbf{J}(\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{орб}),$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Механический момент может содержать как управление  $\mathbf{M}_{упр}$ , так и возмущающие моменты (гравитационный и неизвестной природы на уровне  $\pm 5 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м}$ ), то есть  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{упр} + \mathbf{M}_{гр} + \mathbf{M}_{возм}$ . Гравитационный момент выделен, так как далее всегда учитывается при исследовании. Возмущения другой природы в некоторых случаях, в особенности при проведении аналитических исследований, могут игнорироваться. Точкой обозначена операция дифференцирования по времени.

Динамические уравнения дополняются кинематическими соотношениями. При численном моделировании используется кватернион, описывающий ориентацию спутника, и кинематическое соотношение

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{q}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{C} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

При построении управления используется матрица направляющих косинусов и соотношение

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{W}\mathbf{A}. \quad (1.7)$$

При аналитических исследованиях используются кинематические уравнения для углов ориентации,

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos \theta} (\omega_1 \cos \varphi + \omega_3 \sin \varphi - \omega_0 \sin \theta \sin \psi),$$

$$\dot{\theta} = \omega_3 \cos \varphi - \omega_1 \sin \varphi - \omega_0 \cos \psi,$$

$$\dot{\varphi} = \omega_2 + \text{tg } \theta (\omega_1 \cos \varphi + \omega_3 \sin \varphi) - \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \omega_0,$$

при использовании относительной скорости принимающие вид

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos \theta} (\Omega_1 \cos \varphi + \Omega_3 \sin \varphi),$$

$$\dot{\theta} = \Omega_3 \cos \varphi - \Omega_1 \sin \varphi, \quad (1.8)$$

$$\dot{\varphi} = \Omega_2 + \text{tg } \theta (\Omega_1 \cos \varphi + \Omega_3 \sin \varphi).$$

При использовании магнитных катушек в качестве исполнительных элементов управляющий момент имеет вид

$$\mathbf{M}_{упр} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{m}$  – дипольный управляющий момент спутника,  $\mathbf{B}$  – вектор геомагнитной индукции в связанных осях. Гравитационный момент при движении по круговой орбите имеет вид

$$\mathbf{M}_{гп} = 3\omega_0^2 (\mathbf{Ae}_1) \times \mathbf{J}(\mathbf{Ae}_1), \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$  – вектор местной вертикали в орбитальной системе координат.

Кроме того, при моделировании учитывается возмущающий момент неизвестной природы. Для его моделирования используются три разных варианта. В первом случае используется нормальное распределение около нуля. При таком подходе можно моделировать возмущения случайной природы, оказывающие незначительное влияние на движение спутника, так как величина управляющего момента больше на несколько порядков. Второй, промежуточный вариант – добавление постоянного возмущения на уровне  $10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Постоянный по направлению возмущающий момент может соответствовать, например, действию аэродинамики или солнечного давления на стабилизированный спутник, оснащенный солнечными панелями большой площади. Наконец, третий и худший вариант – постоянное в ССК возмущение на уровне  $5 \cdot 10^{-4} \text{ Н}\cdot\text{м}$ . В этом случае следует ожидать худшей точности ориентации.

В основном в работе для аппроксимации геомагнитного используется модель наклонного диполя, описывающая поле диполя, наклоненного под углом около 10-12 градусов к оси вращения Земли и направленного антипараллельно ей. Точное значение угла наклона постоянно меняется из-за перемещения северного и южного магнитных полюсов, в настоящее время наклон составляет около  $11.7^\circ$ . Вклад дипольной части в общее геомагнитное составляет более 90% на низких орбитах и увеличивается с увеличением высоты. Поскольку рассматриваемый в работе спутник находится на орбите высотой 1000 км, использование общепринятых моделей IGRF или WMM не представляется возможным. Вектор индукции в модели наклонного диполя можно задать выражением

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_e}{r^5} (\mathbf{k}r^2 - 3(\mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{r}).$$

Такое простое выражение дополнительно позволяет добиться значительного уменьшения времени численных расчетов. При дальнейшем упрощении до модели прямого диполя геомагнитное поле моделируется полем диполя, расположенного в центре Земли и антипараллельного ее оси вращения. В орбитальной системе координат геомагнитное поле записывается особенно компактно,

$$\mathbf{B}_{ОСК} = B_0 \begin{pmatrix} -2\sin u \sin i \\ \cos u \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

где  $B_0 = \frac{\mu_e}{r^3}$ , величина вектора индукции  $|\mathbf{B}| = B_0 \sqrt{1 + 3\sin^2 i \sin^2 u}$ . Модель прямого диполя будет использоваться при аналитических исследованиях.

Для имитации измерений магнитометра будем использовать модель измерений

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}\mathbf{B}_{ОСК} + \Delta\mathbf{B} + \boldsymbol{\eta}_B, \quad (1.11)$$

$$\Delta\mathbf{B} = \boldsymbol{\eta}_{\Delta B},$$

где  $\tilde{\mathbf{B}}$  – измерения магнитометра,  $\mathbf{B}_{ОСК}$  – модельное значение магнитного поля в орбитальной системе координат (при работе фильтра Калмана используется модель наклонного диполя),  $\Delta\mathbf{B}$  – смещение поля измерений,  $\boldsymbol{\eta}_B$  и  $\boldsymbol{\eta}_{\Delta B}$  – нормально распределенные векторы магнитного поля и скорости изменения смещения поля соответственно с нулевым математическим ожиданием  $M\langle\boldsymbol{\eta}_B\rangle = 0$  и  $M\langle\boldsymbol{\eta}_{\Delta B}\rangle = 0$ .

## 2. Алгоритм определения углового движения по измерениям магнитометра

### *Принцип работы фильтра Калмана*

Фильтр Калмана – последовательный рекурсивный алгоритм, использующий модель динамической системы и измерения датчиков для получения оценки вектора состояния системы. В случае, если измерения поступают дискретно в некоторые моменты времени  $t_k$ , то для этих моментов времени необходимо сделать оценку вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}(t_k)$ . Дискретный фильтр Калмана работает по системе прогноз-коррекция [12,13]. Пусть на некотором шаге  $k-1$  известна оценка  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$  и ковариационная матрица ошибки  $P_{k-1}^+$ . Требуется найти оценку вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ . Для этого на этапе прогноза путем интегрирования модели движения вычисляется априорная оценка  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ , а на этапе коррекции с помощью обработки вектора измерений  $\mathbf{z}_k$  вычисляется апостериорная оценка  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ . Ковариационная матрица ошибок вектора состояния  $P_k^-$  прогнозируется с помощью дискретного уравнения Риккати. После получения измерения вычисляется апостериорная матрица  $P_k^+$ .

Фильтр Калмана находит наилучшую по среднеквадратическому критерию оценку вектора состояния для линейных систем, но может быть построен и в случае, если уравнения движения и уравнения измерений являются нелинейными функциями времени и вектора состояния,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w}(t), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(t), \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{w}(t)$  – нормально распределенная ошибка модели движения с ковариационной матрицей  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{v}(t)$  – нормально распределенная ошибка измерений с ковариационной матрицей  $\mathbf{R}$ .

Для построения фильтра функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  представляются в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности оценки текущего вектора состояния. После этого удерживаются только линейные члены разложения. Матрица динамики системы и матрица модели измерений вычисляются как

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-, t=t_k}, \quad \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_k^-, t=t_k}. \quad (2.3)$$

Для расширенного фильтра Калмана при дискретно поступающих измерениях вектор состояния на этапе прогноза вычисляется путём интегрирования нелинейных уравнений движения (2.1) и на этапе коррекции используется нелинейная модель измерений (2.2) [14].

Этап прогноза:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, t) dt, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{\Phi}_k^T + \mathbf{Q}_k.$$

Этап коррекции:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1},$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-, t_k)], \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = [\mathbf{E} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^-,$$

где  $\mathbf{\Phi}_k$  – матрица перехода из состояния  $k-1$  в состояние  $k$ ,  $\mathbf{E}$  – единичная матрица,  $\mathbf{K}$  – весовая матрица.

Построим фильтр Калмана для оценки кватерниона ориентации относительно ОСК и вектора угловой скорости по измерениям магнитометра. Примем вектор состояния

$$\mathbf{x} = [\mathbf{q} \ \boldsymbol{\omega}].$$

Рассмотрим динамическую модель движения спутника при управлении с помощью магнитных катушек

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} + 3\alpha_0^2 \mathbf{Ae}_1 \times \mathbf{J}\mathbf{Ae}_1 - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \quad (2.6)$$

В качестве кинематических уравнений воспользуемся уравнениями (1.6) для кватерниона.

### Линеаризация уравнений

Проведем линеаризацию динамических и кинематических уравнений движения в окрестности текущего положения. Запишем уравнения (1.6) и (2.6) в виде

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \delta \mathbf{x}(t), \quad (2.7)$$

где  $\delta \mathbf{x}(t)$  – малое приращение вектора состояния,  $\mathbf{F}(t)$  – линеаризованная матрица уравнений движения в окрестности состояния  $\mathbf{x}(t)$ .

Линеаризация учитывает малое отклонение от точки, в окрестности которой мы рассматриваем движение. Вектор состояния  $\mathbf{x}(t)$  можно записать как сумму оцениваемого значения вектора  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  и отклонения  $\delta \mathbf{x}(t)$ . Таким образом, вектор состояния равен

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) + \delta \mathbf{x}(t). \quad (2.8)$$

Линеаризуем кинематические уравнения (1.6). В уравнении (2.8) сложение кватернионов подразумевает собой сложение вращений, а сложение вращений, выраженных кватернионами, есть произведение кватернионов

$$\Lambda = \delta \Lambda \circ \hat{\Lambda}.$$

Продифференцируем это выражение и примем во внимание (1.6),

$$\dot{\Lambda} = \delta \dot{\Lambda} \circ \hat{\Lambda} + \delta \Lambda \circ \dot{\hat{\Lambda}} = \frac{1}{2} \mathbf{C} \delta \Lambda \circ \hat{\Lambda}.$$

Далее подставим кинематические уравнения для оценки кватерниона  $\hat{\Lambda}$

$$\delta \dot{\Lambda} \circ \hat{\Lambda} + \delta \Lambda \circ \frac{1}{2} \hat{\mathbf{C}} \hat{\Lambda} = \frac{1}{2} \mathbf{C} \delta \Lambda \circ \hat{\Lambda}.$$

Умножим это выражение слева на обратный кватернион  $\hat{\Lambda}^{-1}$ . По определению  $\hat{\Lambda} \circ \hat{\Lambda}^{-1} = e$ , где  $e$  – кватернион с единичной скалярной и нулевой векторной частью. Принимая во внимание  $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}} + \delta \mathbf{C}$  получим

$$\delta \dot{\Lambda} = -\delta \Lambda \circ \frac{1}{2} \mathbf{C} e + \delta \Lambda \circ \frac{1}{2} \delta \mathbf{C} e + \frac{1}{2} \mathbf{C} \delta \Lambda$$

или

$$2\delta \dot{\Lambda} = \begin{pmatrix} -\mathbf{W} & \boldsymbol{\Omega} \\ -\boldsymbol{\Omega}^T & 0 \end{pmatrix} \delta \Lambda + \begin{pmatrix} -\delta \mathbf{W} & \delta \boldsymbol{\Omega} \\ -\delta \boldsymbol{\Omega}^T & 0 \end{pmatrix} \delta \Lambda - \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \boldsymbol{\Omega} \\ -\boldsymbol{\Omega}^T & 0 \end{pmatrix} \delta \Lambda.$$

Пренебрегая членами второго порядка и считая, что скалярная часть кватерниона  $\delta \Lambda = (\delta \mathbf{q} \ 1)$  равна единице, получаем линеаризованные кинематические уравнения

$$\delta \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{W} \delta \mathbf{q} + \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.9)$$

$$\delta \dot{q}_0 = 0.$$

Выражение (2.9) преобразуется следующим образом:

$$\delta\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{W}\delta\mathbf{q} + \mathbf{W}_{A\omega_0}\delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\delta(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0),$$

где  $\mathbf{W}_{A\omega_0}$  – кососимметрическая матрица от вектора  $\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0$ , аналогичная (1.5).

Учитывая, что вектор орбитальной угловой скорости постоянен на круговых орбитах, можно записать

$$\delta(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0) = \mathbf{A}(\delta\mathbf{q})\mathbf{A}(\hat{\mathbf{q}})\boldsymbol{\omega}_0.$$

Используя приближенную формулу связи матрицы малого поворота  $\mathbf{A}$  и кватерниона  $\mathbf{A}(\delta\mathbf{q}) = \mathbf{E} - 2\mathbf{W}_{\delta\mathbf{q}}$ , последнее выражение преобразуем к виду

$$\delta(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_0) = 2\mathbf{W}_{A(\hat{\mathbf{q}})\boldsymbol{\omega}_0}\delta\mathbf{q}.$$

Если пренебречь различием векторов  $\mathbf{A}(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega}_0$  и  $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{q}})\boldsymbol{\omega}_0$ , можно получить линеаризованное уравнение

$$\delta\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{W}\delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\omega}. \quad (2.10)$$

Теперь линеаризуем динамические уравнения (2.6). Гравитационный момент (1.9) записывается в виде

$$\mathbf{M}_{\text{грав}} = 3\omega_0^2 \mathbf{A}(\Lambda)\mathbf{e}_1 \times \mathbf{J}\mathbf{A}(\Lambda)\mathbf{e}_1.$$

При линеаризации гравитационного момента воспользуемся формулой для малого поворота относительно текущей оценки, записанного через матрицу направляющих косинусов,

$$\mathbf{A}(\Lambda) = \mathbf{A}(\delta\Lambda\hat{\Lambda}) = \mathbf{A}(\delta\Lambda)\mathbf{A}(\hat{\Lambda}).$$

В результате преобразований получим

$$\delta\mathbf{M}_{\text{грав}} = 3\omega_0^2 (\mathbf{W}_{\mathbf{e}_1} \mathbf{J} \mathbf{W}_{\mathbf{e}_1} - \mathbf{W}_{\mathbf{J}\mathbf{e}_1} \mathbf{W}_{\mathbf{e}_1}) \delta\boldsymbol{\lambda}.$$

Таким образом, линеаризованный гравитационный момент имеет вид

$$\delta\mathbf{M}_{\text{грав}} = 6\omega_0^2 \mathbf{F}_{\text{грав}} \delta\boldsymbol{\lambda}, \quad (2.11)$$

где

$$\mathbf{F}_{\text{грав}} = \begin{pmatrix} (e_y^2 - e_z^2)(B-C) & -e_x e_y (B-C) & e_z e_x (B-C) \\ e_x e_y (C-A) & (e_z^2 - e_x^2)(C-A) & -e_z e_y (C-A) \\ -e_x e_z (A-B) & e_y e_z (A-B) & (e_x^2 - e_y^2)(A-B) \end{pmatrix},$$

$e_x, e_y, e_z$  – компоненты орта радиус-вектора центра масс спутника в ССК.

Запишем гироскопический момент

$$\mathbf{M}_{\text{гир}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}.$$

Его линеаризация приводит к виду

$$\delta\mathbf{M}_{\text{гир}} = \mathbf{F}_{\text{гир}} \delta\boldsymbol{\omega}, \quad (2.12)$$

где

$$\mathbf{F}_{sup} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3(B-C) & \omega_2(B-C) \\ \omega_3(C-A) & 0 & \omega_1(C-A) \\ \omega_2(A-B) & \omega_1(A-B) & 0 \end{pmatrix},$$

Линеаризуем управляющий момент магнитных катушек  $\mathbf{M}$  в окрестности текущей оценки кватерниона  $\hat{\Lambda}$ ,

$$\mathbf{M} = \delta\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}} = \mathbf{m} \times \mathbf{A}(\delta\Lambda \circ \hat{\Lambda}) \mathbf{B}_{оск}.$$

Используем тот факт, что матрица поворота от произведения кватернионов есть произведение двух матриц

$$\mathbf{A}(\delta\Lambda \circ \hat{\Lambda}) = \mathbf{A}(\delta\Lambda)\mathbf{A}(\hat{\Lambda}). \quad (2.13)$$

Также примем, что кватернион  $\delta\Lambda$  имеет единичную скалярную часть  $\delta\Lambda = (1 \ \delta\mathbf{q})$ . Тогда можно приближенно записать

$$\mathbf{A}(\delta\Lambda) = \mathbf{E} - 2\mathbf{W}_{\delta\mathbf{q}}. \quad (2.14)$$

Отсюда получим:

$$\delta\mathbf{M} = \mathbf{m} \times (-2\mathbf{W}_{\delta\mathbf{q}} \mathbf{A}(\hat{\Lambda}) \mathbf{B}_{оск}) = \mathbf{m} \times (-2\mathbf{W}_{\delta\mathbf{q}} \hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{m} \times (2\mathbf{W}_{\mathbf{B}} \delta\mathbf{q}) = 2\mathbf{W}_{\mathbf{m}} \mathbf{W}_{\mathbf{B}} \delta\mathbf{q}, \quad (2.15)$$

где  $\mathbf{W}_{\mathbf{m}}$  и  $\mathbf{W}_{\mathbf{B}}$  – кососимметрические матрицы дипольного момента и оценки вектора магнитного поля в связанной системе координат.

Окончательно запишем линеаризованные уравнения в виде

$$\frac{d}{dt} \delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \delta\mathbf{x}(t),$$

где матрица динамики  $\mathbf{F}$  записывается с использованием (2.10), (2.11), (2.12) и (2.15) как

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -\mathbf{W} & \frac{1}{2} \mathbf{E} \\ \mathbf{J}^{-1} (6\omega_0^2 \mathbf{F}_{прав} + 2\mathbf{W}_{\mathbf{m}} \mathbf{W}_{\mathbf{B}}) & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}_{sup} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим модель измерений магнитометра

$$\mathbf{z} = \mathbf{A} \mathbf{B}_{оск} + \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{B}}, \quad (2.17)$$

где  $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{B}}$  – нормально распределенные векторы магнитного поля с нулевым математическим ожиданием. Линеаризуем модель измерений (2.17),

$$\mathbf{z} = \delta\mathbf{z} + \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(\delta\Lambda \hat{\Lambda}) \mathbf{B}_{оск}.$$

Используя соотношения (2.13) и (2.14), получим

$$\delta\mathbf{z} = 2\mathbf{W}_{\delta\mathbf{q}} \hat{\mathbf{B}} = 2\mathbf{W}_{\mathbf{B}} \delta\mathbf{q}.$$

Таким образом, матрица измерений есть

$$\mathbf{H} = 2\mathbf{W}_{\mathbf{B}}. \quad (2.18)$$

### *Моделирование работы алгоритма*

Промоделируем работу алгоритма определения углового движения при управлении ориентацией с помощью магнитных катушек. Для работы

алгоритма необходимо, чтобы были заданы ковариационная матрица ошибок измерений  $\mathbf{R}$ , матрица ошибок модели  $\mathbf{Q}$  и матрица ошибок начальной оценки вектора состояния  $\mathbf{P}_0$ .

Погрешность измерений магнитометра задается на уровне  $\sigma_{изм}=100$  нТл. Однако известно, что ошибка модели магнитного поля Земли даже при использовании модели IGRF составляет около 200 нТл [15], поэтому разумно принять  $\sigma_{изм}=300$  нТл. Матрица ошибок измерений равна

$$\mathbf{R} = \text{diag}(\sigma_{изм}^2, \sigma_{изм}^2, \sigma_{изм}^2).$$

На спутник действует возмущающий момент неизвестной природы на уровне  $D=5 \cdot 10^{-4}$  Н·м. Предположим сначала, что возмущающий момент распределен по нормальному закону. Тогда на спутник будет действовать возмущение вида

$$\sigma_{\omega} = I^{-1} \cdot D \cdot \Delta t, \quad (2.19)$$

где  $I$  – наименьший момент инерции,  $\Delta t$  – время между получениями измерений. Для кинематических уравнений возникает ошибка вида

$$\sigma_q = I^{-1} \cdot D \cdot \Delta t^2 / 2.$$

Предполагая, что возмущения не коррелированы, запишем матрицу ошибок модели движения

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(\sigma_q^2, \sigma_q^2, \sigma_q^2, \sigma_{\omega}^2, \sigma_{\omega}^2, \sigma_{\omega}^2). \quad (2.20)$$

В качестве начальной оценки векторной части можно взять нулевой вектор. Предполагая, что ошибка максимальна, примем  $\sigma_{q_0} = \pi/2$ . Так как вектор угловой скорости в начальный момент неизвестен, возьмем начальную оценку  $\mathbf{\Omega}(t=0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ . Предположим, что ошибка в знании вектора угловой скорости в начальный момент составляет  $\sigma_{\omega_0} = 10$  град/с. Зададим начальное значение матрицы ошибок  $\mathbf{P}_0$  следующим образом:

$$\mathbf{P}_0 = (\sigma_{q_0}^2, \sigma_{q_0}^2, \sigma_{q_0}^2, \sigma_{\omega_0}^2, \sigma_{\omega_0}^2, \sigma_{\omega_0}^2).$$

Проведем моделирование работы алгоритма определения углового движения. Особенность моделирования заключается в том, что магнитные катушки создают поле, которое вносит искажения в измеряемое магнитометром геомагнитное поле. Возможны два варианта разрешения этой проблемы. Либо измерения магнитометра проходят наземную калибровку при включенных катушках и тогда можно одновременно определять угловое движение и управлять спутником, либо определение углового движения и управление разносятся во времени. Примем второй, наиболее распространенный, вариант для моделирования управляемого движения. На интервале времени, когда катушки выключены, будет производиться оценка углового движения, управление будет использовать эту оценку для создания магнитного момента на интервале управления. Пусть интервал управления составляет 5 секунд, а

интервал определения – одну секунду при частоте съема измерений  $1 \text{ Гц}$ , т.е. одно измерение на интервале измерения. Пусть в начальный момент времени спутник вращается со скоростью  $1 \text{ град/с}$ . Сходимость фильтра Калмана неразрывно связана с процессом стабилизации аппарата. На рис. 2.1 представлен график стабилизации спутника в ОСК под управлением магнитных катушек. Из графика видно, что спутник стабилизировался за время около 5 часов. На рис. 2.2 представлен график ошибки оценки углов, а на рис. 2.3 – график ошибки оценки угловой скорости. Оценки фильтра Калмана сошлись примерно за 4 часа работы, причем по мере стабилизации точность значительно улучшилась и составила около  $\sigma = 0.2^\circ$  по углу и  $\sigma = 7 \cdot 10^{-4} \text{ град/с}$  по скорости.

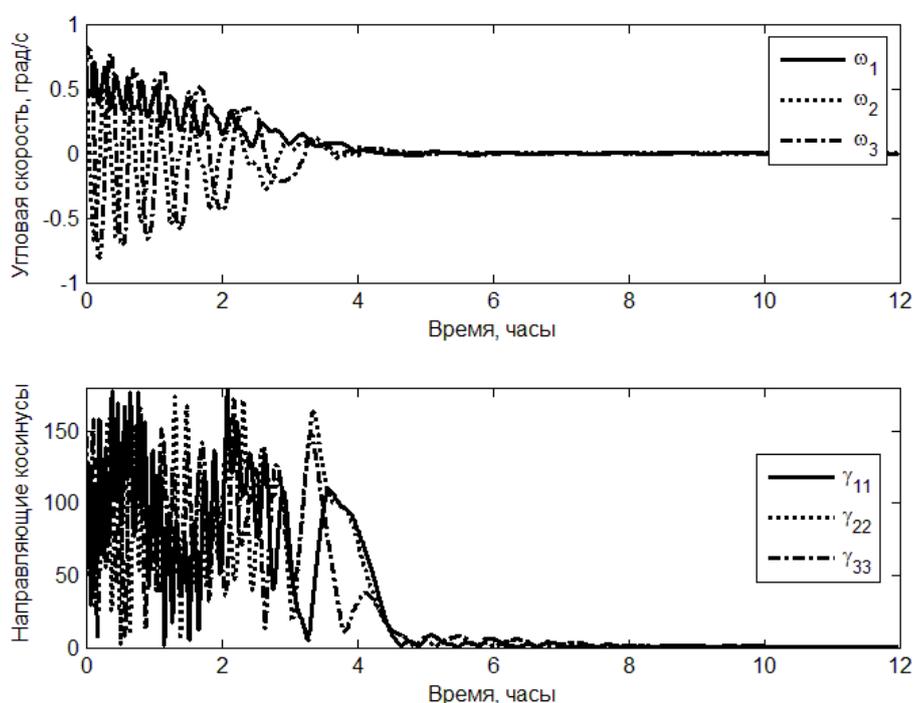


Рис. 2.1. Движение спутника во время стабилизации

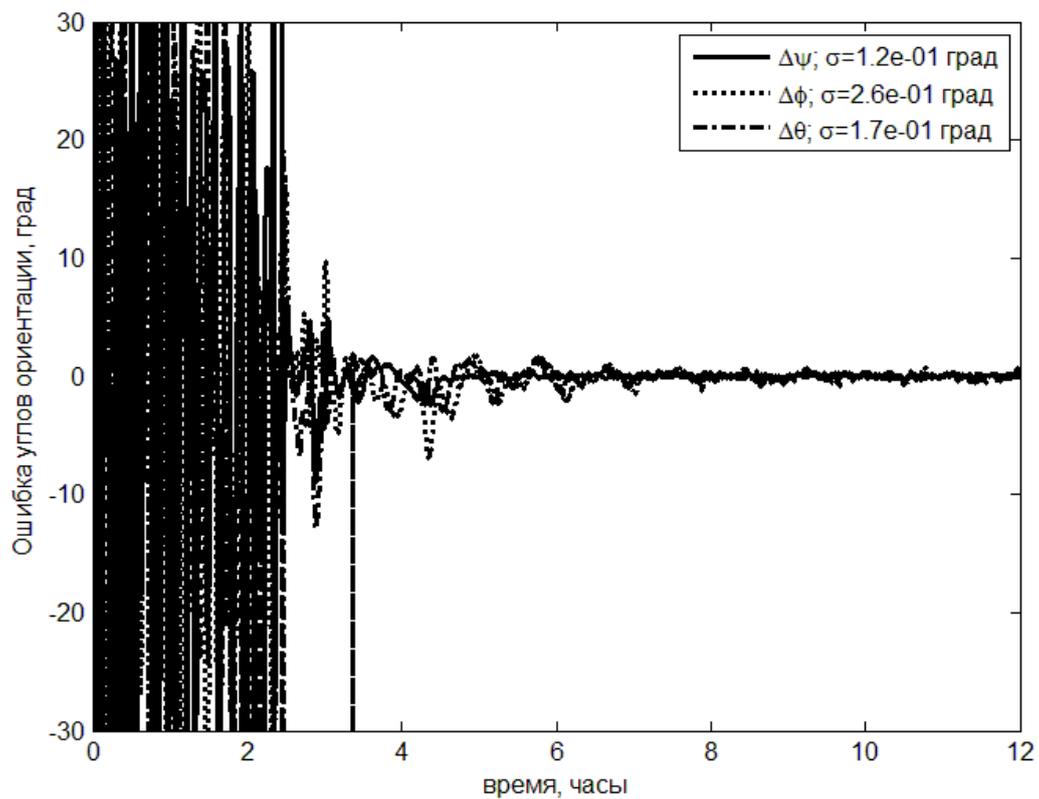


Рис. 2.2. Ошибка определения углов ориентации

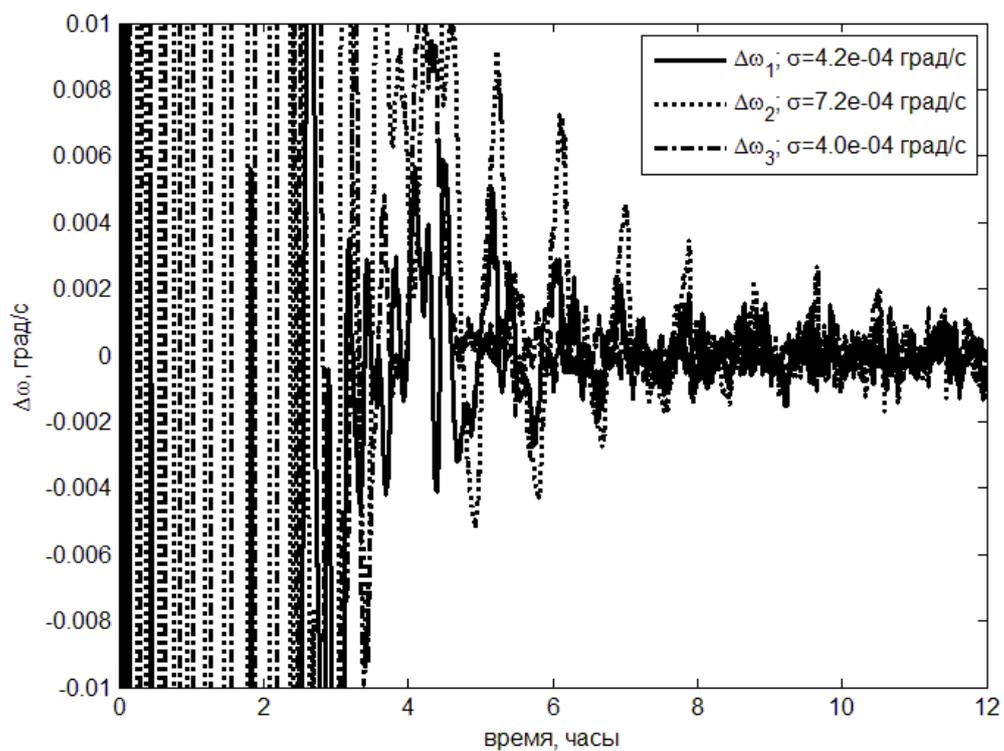


Рис. 2.3. Ошибка определения угловой скорости

Предположим теперь, что возмущающий момент  $D=5 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$  не распределен по нормальному закону, но имеет постоянную величину этого порядка. Проведем моделирование работы фильтра Калмана с прежними параметрами. На рис. 2.4 представлен график ошибки оценки фильтра Калмана по углу, на рис. 2.5 – по угловой скорости. На рисунках видно, что время сходимости фильтра увеличилось до 7 часов, но точность определения движения после сходимости уменьшилась незначительно и составляет  $\sigma=0.3^\circ$  по углу и  $\sigma=8 \cdot 10^{-4} \text{ град/с}$  по угловой скорости.

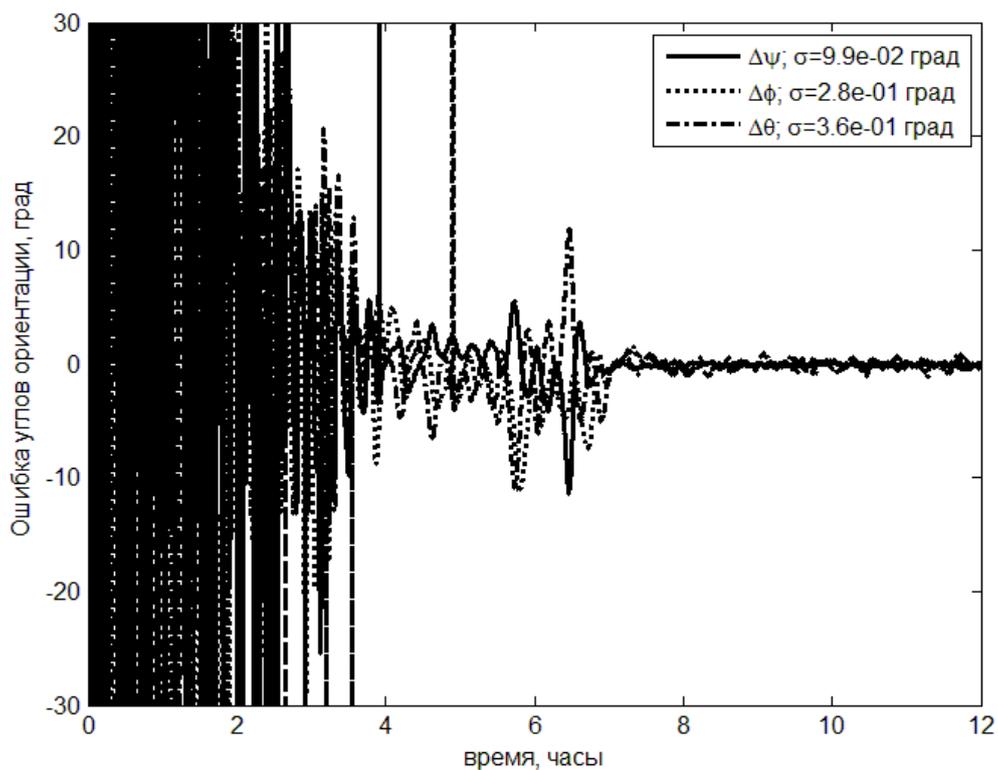


Рис. 2.4. Ошибка оценки углов при постоянном возмущении

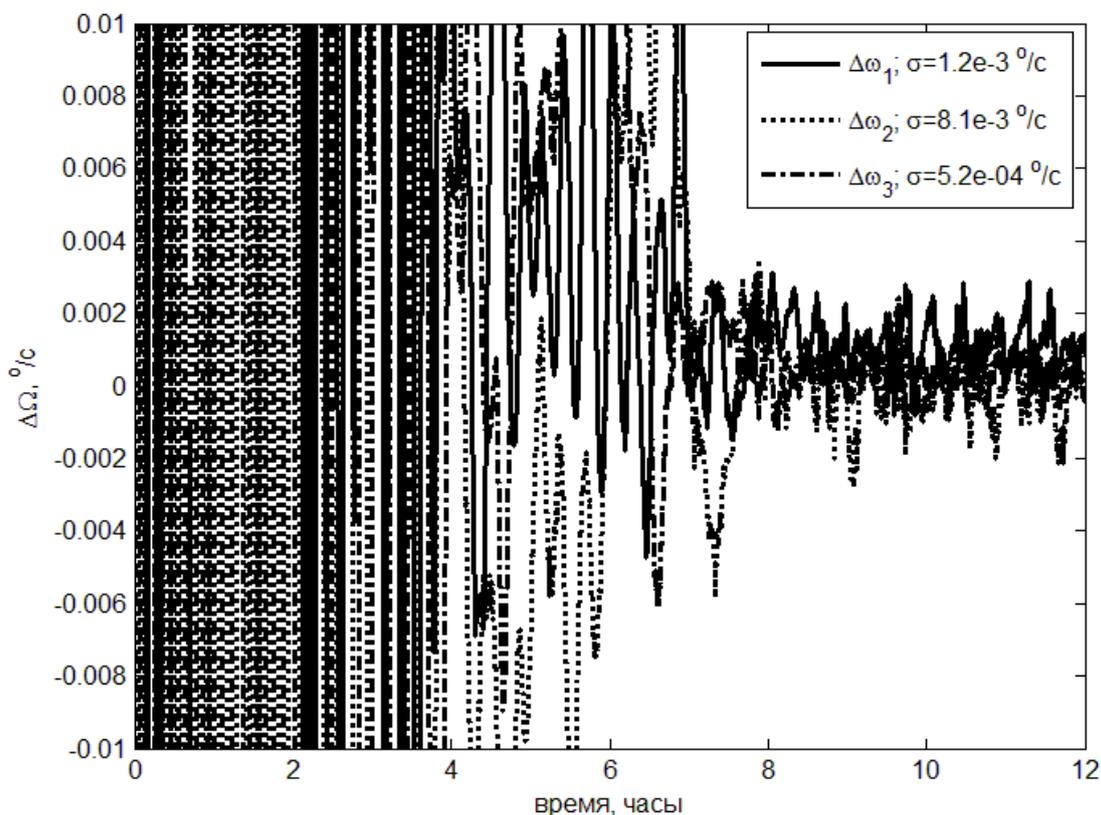


Рис. 2.5. Ошибка оценки угловой скорости при постоянном возмущении

Рассмотрим влияние ошибки знания моментов инерции аппарата на уровне  $\pm 10\%$  от номинальных на точность определения движения. Предположим снова, что возмущающий момент распределен нормально. Проведем моделирование работы фильтра Калмана с ошибочным номинальным тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(5750, 2450, 4000) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , используемым алгоритмом, тогда как «реальный» отличается от него. Если реальный момент инерции отличается случайным образом от предполагаемого, но с условием, что хотя бы один момент инерции отличается на 10%, то точность определения движения и скорость сходимости оценок практически не изменяются. Если взять «наихудший» вариант ошибки  $\mathbf{J} \approx \text{diag}(5836, 2468, 3600) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , когда тензор становится вырожденным, точность оценки после сходимости по углам составляет  $\sigma = 0.3^\circ$ ,  $\sigma = 8 \cdot 10^{-4} \text{ град/с}$  по угловой скорости. Добавление постоянного возмущения на уровне  $D = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$  с «наихудшей» ошибкой в тензоре инерции приводит к ухудшению точности оценки до  $\sigma = 0.4^\circ$  по углу и  $\sigma = 1 \cdot 10^{-3} \text{ град/с}$  по угловой скорости, а время сходимости увеличивается до 8 часов.

Теперь проанализируем влияние смещения поля измерений магнитометра на точность оценки углового движения. Смещение поля не учтено в модели измерений магнитометра (2.17), используемой фильтром Калмана. Пусть в

полной модели (1.11) смещение ноля по всем компонентам магнитометра составляет  $\Delta\mathbf{B}=100$  нТл. На рис. 2.6 представлен график ошибки оценки по углам с неучтенным смещением измерений, а на рис. 2.7 – график ошибки оценки угловой скорости. Среднеквадратические отклонения оценок после сходимости ухудшились до  $\sigma=0.4^\circ$  по углу и почти не изменились по угловой скорости ( $\sigma=8\cdot 10^{-4}$  град/с), однако из рисунков видно, что распределение вероятности далеко от нормального, ошибки синусоидально изменяются со временем. Время сходимости алгоритма составляет около 6 часов.

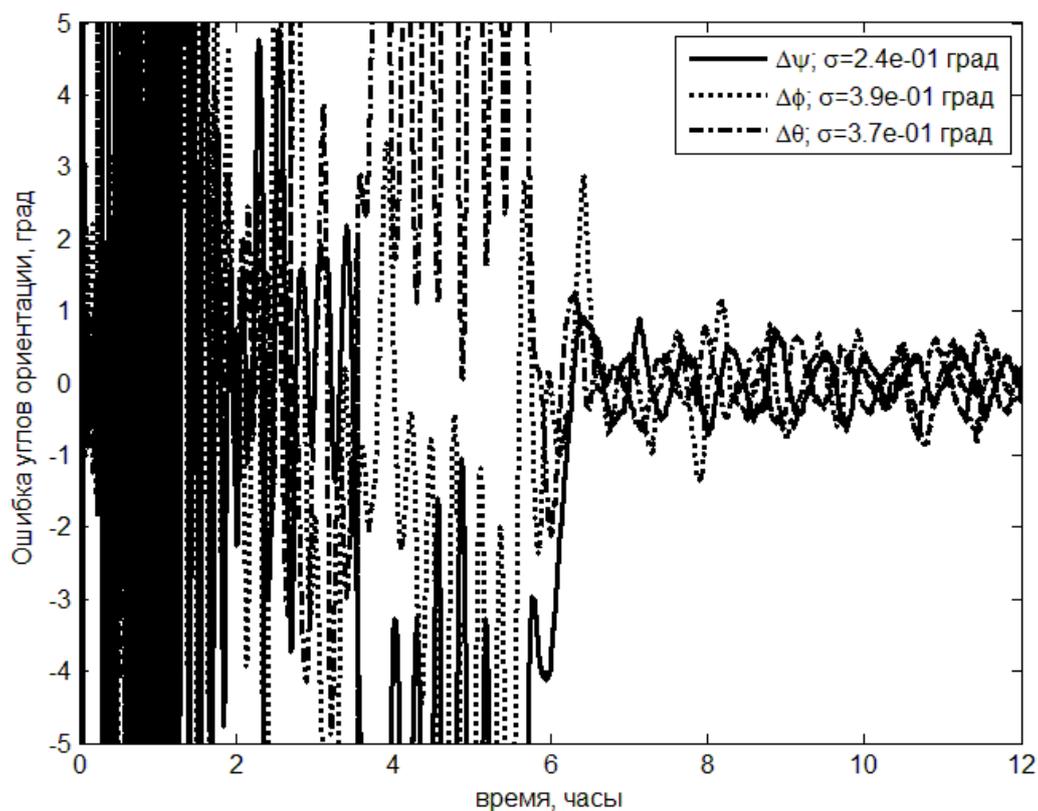


Рис. 2.6. Ошибка оценки углов при смещении ноля измерений магнитометра

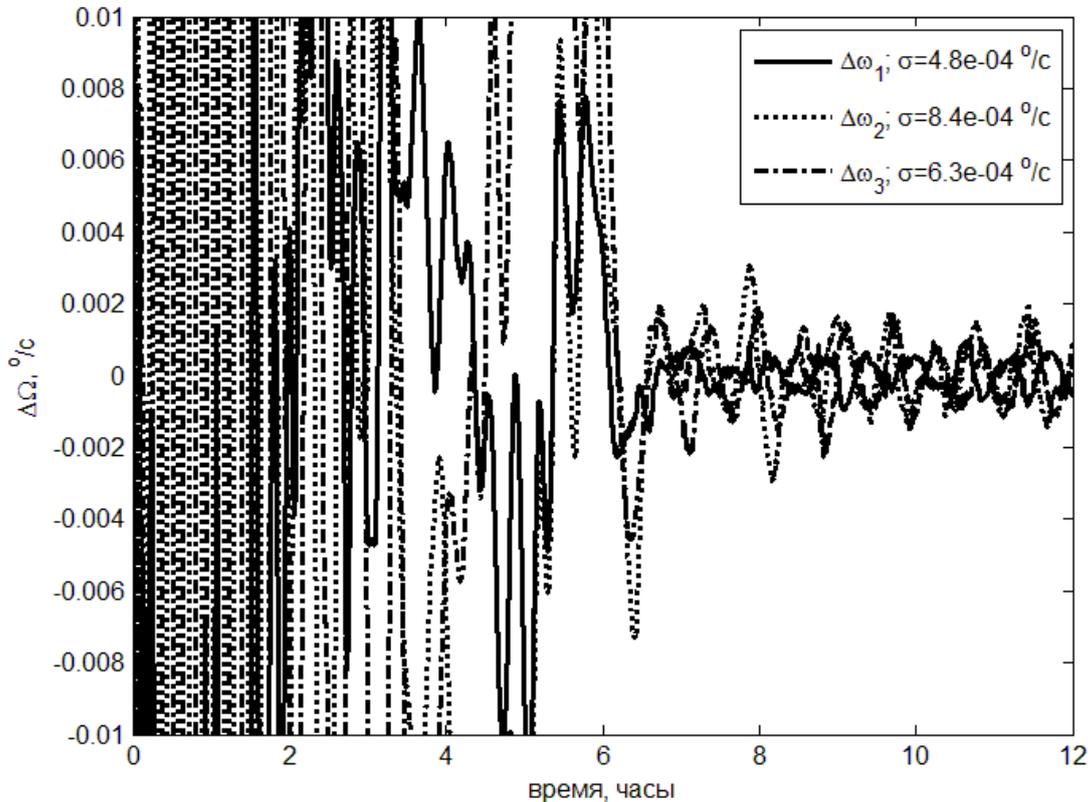


Рис. 2.7. Ошибка оценки угловой скорости при смещении поля измерений магнитометра

### 3. Управление ориентацией с помощью магнитных катушек по измерениям магнитометра

#### *Трехосное управление на основе скользящего режима*

Проблема ограниченности направления управляющего момента имеет в случае использования магнитной системы ориентации важную особенность. Вектор геомагнитной индукции вращается в пространстве, так что нет выделенного направления, вдоль которого ни в какой момент времени нельзя было бы создать механический момент. Это позволяет надеяться, что можно построить траекторию, приводящую спутник к требуемой ориентации, то есть в заданное положение и с заданной скоростью, причем в каждый момент времени управляющий механический момент должен быть перпендикулярен вектору геомагнитной индукции.

Перейдем к построению управления на основе скользящего режима [2]. Управление строится в два этапа. Вначале необходимо построить поверхность в фазовом пространстве  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{A}, t) = 0$ , по которой должен двигаться вектор состояния спутника. Если движение спутника удовлетворяет этому соотношению, требуемая ориентация оказывается асимптотически устойчивой. Зададим поверхность

$$\mathbf{x} = \lambda(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, t)\boldsymbol{\omega} + \Lambda(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, t)\mathbf{S} = 0,$$

где  $\mathbf{S} = (a_{23} - a_{32} \quad a_{31} - a_{13} \quad a_{12} - a_{21})^T$ ,  $\Lambda$  – положительно-определенная матрица,  $\lambda$  – положительное число, характеризующее вклад «демпфирующей» части в управление. Матрица  $\Lambda$  характеризует вклад «позиционной» части. Если движение спутника удовлетворяет  $\mathbf{x} = 0$ , то положение  $\boldsymbol{\omega} = 0$ ,  $\Lambda = \mathbf{E}$  является асимптотически устойчивым ( $\mathbf{E}$  – единичная матрица).

Для обеспечения движения спутника по скользящей поверхности будем искать управление, реализующее соотношение

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{x},$$

где  $\mathbf{P}$  – положительно-определенная матрица. Эта матрица характеризует быстродействие алгоритма приведения изображающей точки к скользящей поверхности управления. Основная задача при построении управления – поиск матрицы  $\Lambda$ . Далее рассматривается итерационный подход к ее конструированию.

Представим производную матрицы  $\Lambda$  в виде

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\Lambda(k+1) - \Lambda(k)}{\Delta t},$$

где  $\Delta t$  – шаг расчета выдачи управляющего воздействия магнитными катушками. Будем считать, что на  $k+1$  шаге известны матрица прошлого шага  $\Lambda(k)$ , вектор состояния системы и ориентация вектора геомагнитной индукции. Необходимо найти матрицу  $\Lambda(k+1)$ . Введем обозначения

$$\mathbf{a} = (-\lambda\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \lambda(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}) - \Lambda(\mathbf{J}\mathbf{S} + \mathbf{P}\mathbf{S}) - \lambda\mathbf{P}\boldsymbol{\omega})\Delta t + \Lambda\mathbf{J}\mathbf{S},$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{J}\mathbf{S},$$

$$\mathbf{d} = \lambda\Delta t\mathbf{B}$$

и новую систему координат, задаваемую базисом

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}, \quad \mathbf{y}_3 = \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{d} \times \mathbf{b}|}, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_3 \times \mathbf{y}_1.$$

Для построения матрицы  $\Lambda(k+1)$  в этом базисе сначала [2] выбираем  $\Lambda_{11}(k+1) > 0$ , например,  $\Lambda_{11}(k+1) = \Lambda_{11}(k)$ . Затем определяем

$$\Lambda_{12}(k+1) = \Lambda_{21}(k+1) = (-a_1 - \Lambda_{11}(k+1)b_1)/b_2,$$

$$\Lambda_{22}(k+1) = \Lambda_0 + \frac{\Lambda_{12}^2(k+1)}{\Lambda_{11}(k+1)},$$

где  $\Lambda_0$  – положительная величина. Наконец,  $\Lambda_{33}(k+1) = \Lambda_{33}(k)$ . В результате получаем матрицу  $\Lambda(k+1)$ , которая переводится в связанную систему. На первом шаге можно считать, что  $\Lambda(k+1) = \Lambda(k) = \Lambda_0\mathbf{E}$ .

Приведенный способ построения  $\Lambda(k+1)$  неприменим в окрестности требуемой ориентации, так как  $b_1$  и  $b_2$  близки к нулю. Поэтому для поиска  $\Lambda_{12}(k+1)$  используется выражение

$$\Lambda_{12}(k+1) = -\frac{a_1 + \Lambda_{11}(k+1)b_1}{b_2 + \delta b_2},$$

где  $\delta b_2$  – положительная величина. Внесение этой ошибки в конструирование матрицы  $\Lambda(k+1)$  приводит к тому, что механический момент отклоняется от плоскости, перпендикулярной вектору геомагнитной индукции. Магнитная система реализует проекцию этого момента на плоскость. Это, как и сама итерационная процедура, приводит к возникновению неточности в обеспечении ориентации спутника.

Использование скользящего управления с описанной процедурой поиска поверхности позволяет добиться хороших результатов лишь для малых спутников [2]. На рис. 3.1 представлен результат моделирования с параметрами управления  $\Lambda_0 = 10^{-4}$ ,  $\delta b_2 = 10$ ,  $\lambda = 0.07$ ,  $\mathbf{P} = 5\mathbf{E}$ , магнитные катушки создают дипольный момент не более  $2500 \text{ A}\cdot\text{м}^2$ , шаг расчета и выдачи управляющих воздействий  $\Delta t = 1\text{с}$ . Отметим, что для определения параметров использовались результаты, полученные в [2].

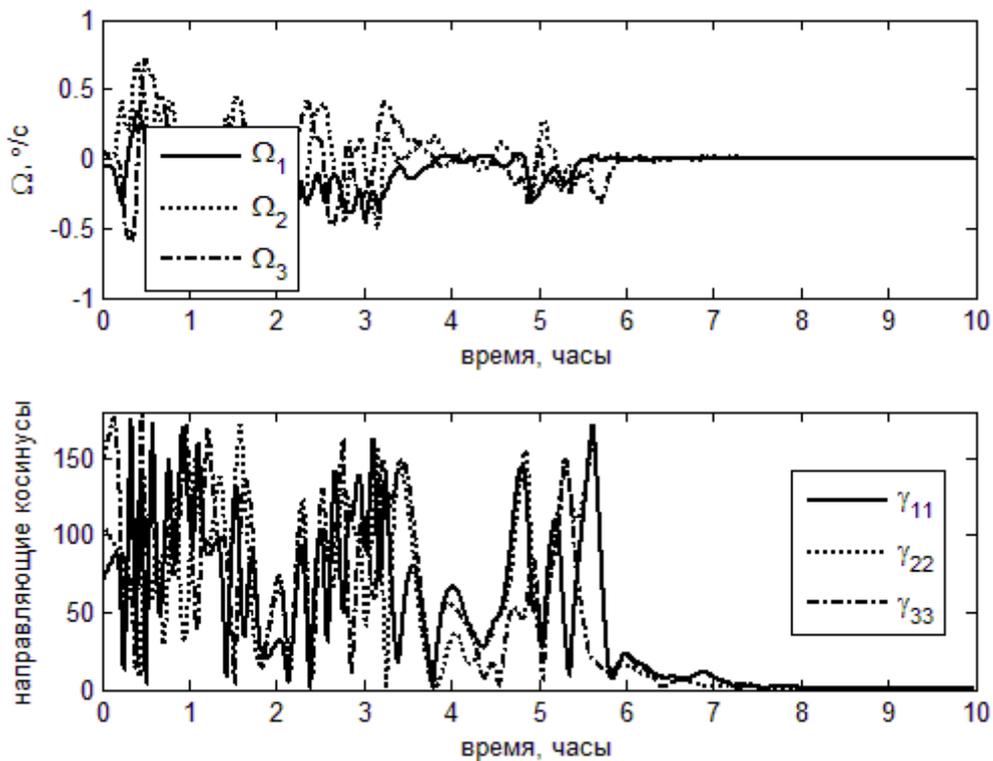


Рис. 3.1. Использование скользящего управления

Магнитные катушки с дипольным моментом не более  $250 \text{ А}\cdot\text{м}^2$  не позволяют использовать скользящее управление. При построении рис. 3.1 использовалась начальная угловая скорость  $\boldsymbol{\Omega} = (0.001, 0.001, 0.001) \text{ с}^{-1}$ . Катушки с дипольным магнитным моментом не более  $2500 \text{ А}\cdot\text{м}^2$  оказываются неспособны компенсировать более быстрые вращения при использовании скользящего управления. Таким образом, желательно использовать катушки с дипольным моментом в 100 раз выше; либо использовать катушки с дипольным моментом в 10 раз больше, вводя в контур управления предварительное демпфирование угловой скорости. Дальнейшее рассмотрение скользящего управления поэтому не проводится.

### ***Трехосная ориентация на основе ПД-регулятора***

Рассмотрим движение спутника под действием дипольного управляющего момента

$$\mathbf{m} = -k_{\omega} \mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{V} \times \mathbf{S}. \quad (3.1)$$

Важным вопросом реализации этого управления является выбор коэффициентов усиления. Необходимо иметь методику, позволяющую приблизительно оценить величины коэффициентов усиления, чтобы затем переходить к их подбору. Для анализа поведения системы в широком диапазоне параметров управления  $k_a$ ,  $k_{\omega}$  и величины гравитационного момента используем теорию Флоке [16]. Для этого линеаризуем уравнения движения (1.4)-(1.8) в окрестности нуля,

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{du} &= -k'_{\omega} \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} \left[ (B_2^2 + B_3^2)\omega_1 - B_1B_2\omega_2 - B_1B_3\omega_3 \right] - \\ &\quad - 2k_a \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} \left[ -B_1B_2\varphi - B_1B_3\theta + (B_2^2 + B_3^2)\psi \right] + \omega_2 + \frac{B-C}{A}(\omega_2 + \psi), \\ \frac{d\omega_2}{du} &= -k'_{\omega} \frac{B_0^2}{B\omega_0^2} \left[ -B_1B_2\omega_1 + (B_1^2 + B_3^2)\omega_2 - B_2B_3\omega_3 \right] - \\ &\quad - 2k_a \frac{B_0^2}{B\omega_0^2} \left[ (B_1^2 + B_3^2)\varphi - B_2B_3\theta - B_1B_2\psi \right] - \omega_1 + \frac{C-A}{B}(\omega_1 - 4\varphi), \quad (3.2) \\ \frac{d\omega_3}{du} &= -k'_{\omega} \frac{B_0^2}{C\omega_0^2} \left[ -B_1B_3\omega_1 - B_2B_3\omega_2 + (B_1^2 + B_2^2)\omega_3 \right] - \\ &\quad - 2k_a \frac{B_0^2}{C\omega_0^2} \left[ -B_2B_3\varphi + (B_1^2 + B_2^2)\theta - B_1B_3\psi \right] + 3\frac{A-B}{C}\theta, \\ \frac{d\varphi}{du} &= \omega_2, \quad \frac{d\theta}{du} = \omega_3, \quad \frac{d\psi}{du} = \omega_1. \end{aligned}$$

Здесь вместо параметра  $k_\omega$  используется  $k'_\omega = k_\omega \omega_0$ , что соответствует безразмерной угловой скорости в законе управления (3.1).  $B_i$  – компоненты единичного вектора геомагнитной индукции в орбитальной системе координат,  $\omega_i$  – безразмерные компоненты относительной угловой скорости, в уравнениях (3.2) совершен переход от дифференцирования по времени к дифференцированию по аргументу широты. Используется модель прямого диполя, так как в этом случае уравнения (3.2) оказываются периодическими с периодом  $2\pi$ . Для (3.2) можно применить теорию Флоке. На рис. 3.2 представлены характеристические показатели системы вблизи области устойчивости (3.2), то есть при показателях меньше единицы.

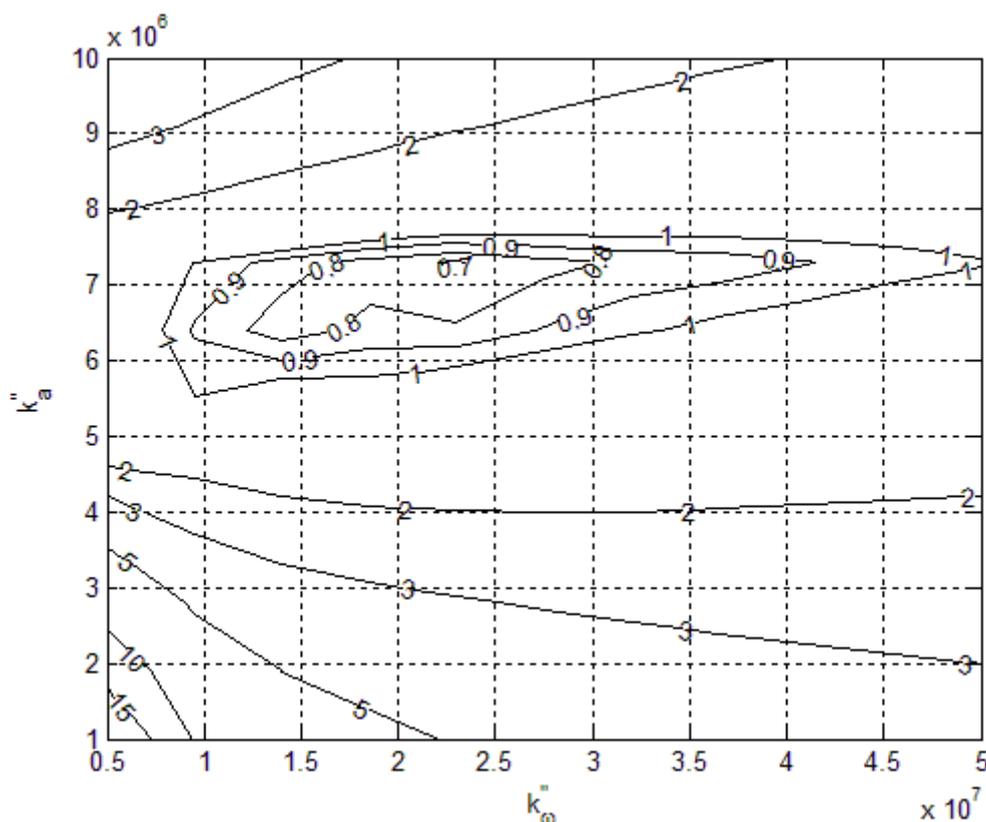


Рис. 3.2. Область устойчивости

Так как рис. 3.2 получен в упрощающих предположениях (линеаризованные уравнения движения, упрощенная модель геомагнитного поля, отсутствие ограничения на величину дипольного момента катушек), с его помощью можно лишь приблизительно определить коэффициенты управления. Тем не менее, использование такого подхода сужает область подбора параметров управления. Как оказалось, для рассматриваемых параметров спутника и его орбиты наилучшие точность и быстродействие достигаются при  $k_\omega = \frac{4 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{м}}{\omega_0 \text{ Тл}^2}$ ,  $k_a = 1.5 \cdot 10^7 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Тл}^2}$ . Таким образом, оба коэффициента усиления оказались примерно в два раза больше оптимальных, определяемых

по рис. 3.2. Результат моделирования с этими параметрами управления в предположении идеального знания ориентации, но с учетом гравитационного и случайного неизвестного возмущающего моментов, представлен на рис. 3.3.

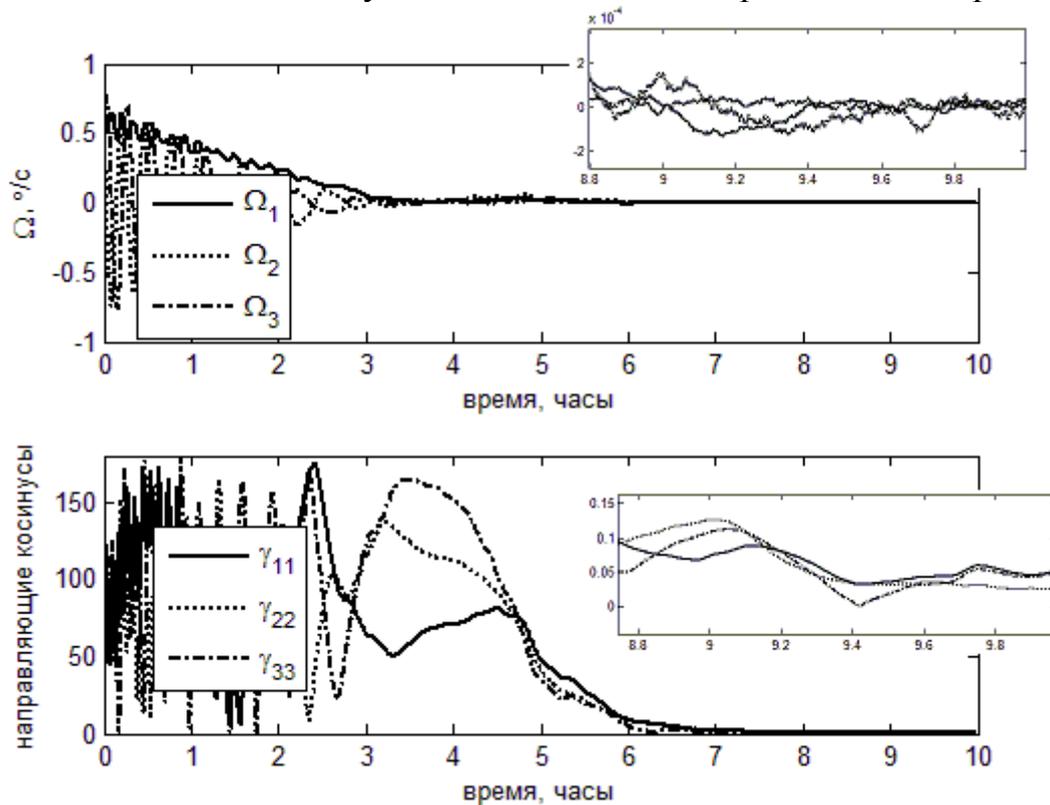


Рис. 3.3. Приведение спутника в требуемую ориентацию, случайное возмущение

Точность ориентации оказывается лучше 0.1 градуса. Учет особенностей процесса определения ориентации приводит к значительному ухудшению точности. Причиной этого служит как само по себе ухудшение точности знания ориентации, так и необходимость чередования циклов определения ориентации и управления, связанная с использованием в качестве датчика ориентации магнитометра, а в качестве исполнительных элементов катушек. На рис. 3.4 приведен результат моделирования при учете случайного возмущения. Цикл определения ориентации составляет 1 секунду, управления – 5 секунд.

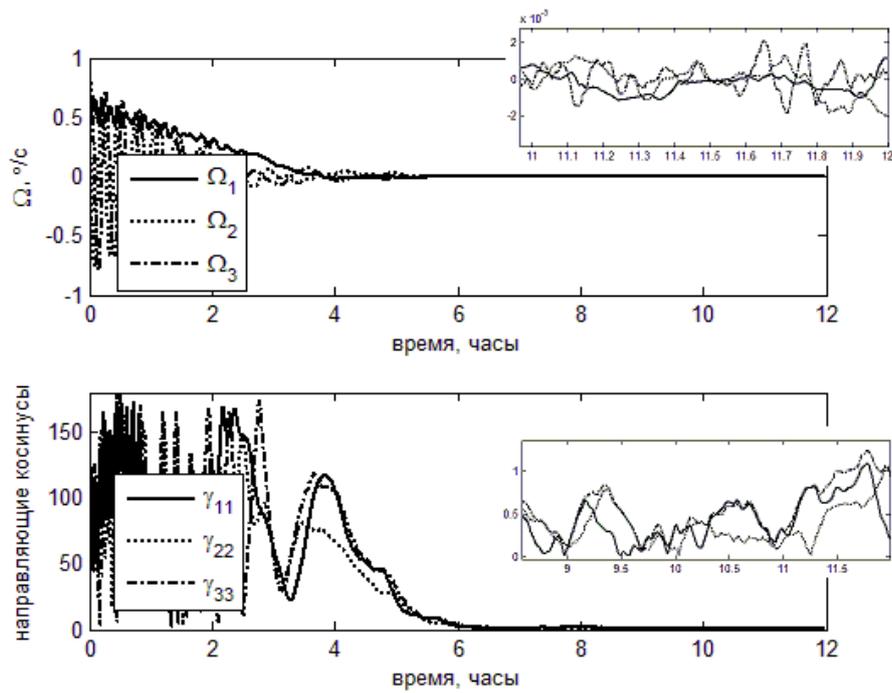


Рис. 3.4. Приведение спутника в требуемую ориентацию, учет ошибок определения ориентации, случайное возмущение

Точность оказывается в пределах  $1.5^\circ$ . На рис.3.5 представлен аналогичный результат, если неучтенное возмущение складывается из постоянной и случайной компонент.

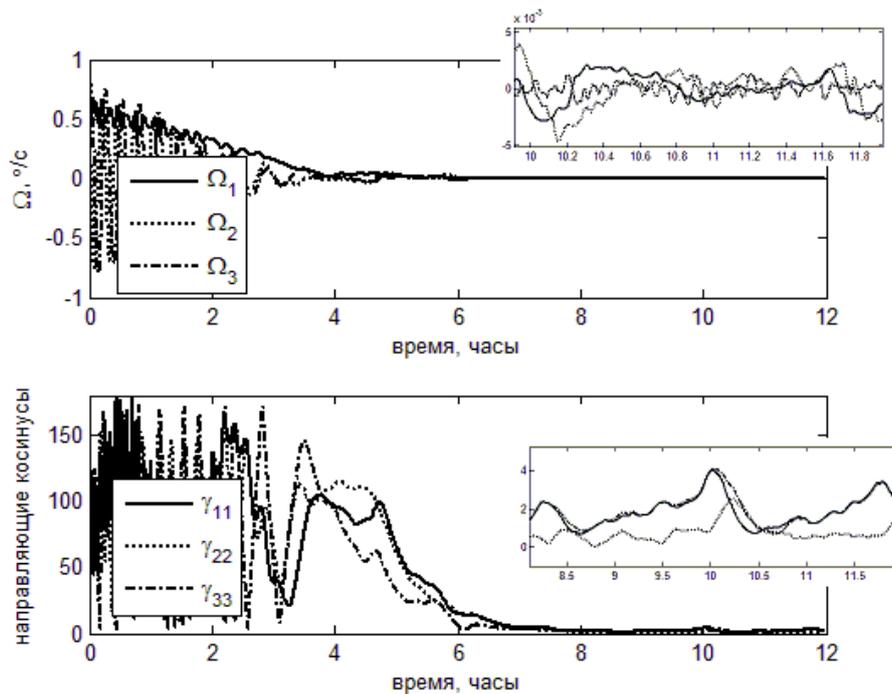


Рис. 3.5. Приведение спутника в требуемую ориентацию, учет ошибок определения ориентации, случайное и постоянное возмущение

Точность ухудшается до  $4^\circ$ . Наконец, на рис. 3.6 представлен результат моделирования при учете постоянного возмущения.

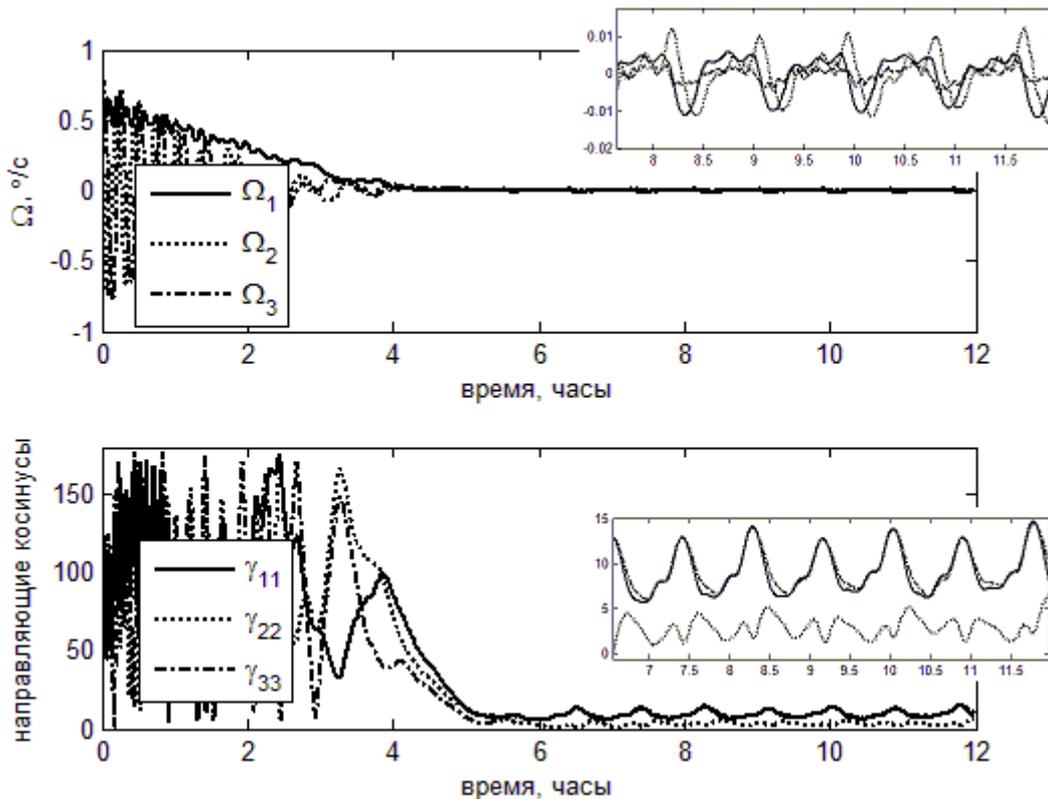


Рис. 3.6. Приведение спутника в требуемую ориентацию, учет ошибок определения ориентации, постоянное возмущение

Точность ориентации составляет около  $15^\circ$ . Время переходных процессов во всех случаях оказывается около 6 часов.

Ошибка знания моментов инерции аппарата на уровне  $\pm 10\%$  от номинальных может привести к заметному ухудшению точности стабилизации. В случае, когда тензор инерции становится практически вырожденным (первый диагональный момент инерции практически равен сумме второго и третьего), точность может ухудшиться до  $80^\circ$ . Применение нормального распределения около номинальных величин при условии обязательного отличия одного из моментов инерции на  $10\%$  от номинального, в основном приводит к незначительному падению точности и быстродействию. Тем не менее, для спутника с «реальным» тензором инерции  $\mathbf{J} \approx \text{diag}(5836, 2468, 3600) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  точность при учете случайного возмущения может составить  $60^\circ$ . «Идеальный» тензор  $\mathbf{J} \approx \text{diag}(5750, 2450, 4000) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  используется в фильтре Калмана, тогда как «реальный» тензор инерции – при моделировании движения спутника. Аналогично падает точность с тензором инерции  $\mathbf{J} \approx \text{diag}(6325, 2491, 4122) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , если принимается во внимание комбинация постоянного и случайного возмущений. Такое падение точности связано не

столько с ошибкой тензора инерции как таковой, сколько с чувствительностью управления на основе ПД-регулятора к моментам инерции аппарата. Они оказывают определяющее влияние на коэффициенты усиления, поэтому изменение моментов инерции может вывести параметры управления из области устойчивости. На рис. 3.7 приведен пример незначительного падения точности при случайном возмущении и тензоре инерции  $\mathbf{J} \approx \text{diag}(5440, 2241, 3600) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

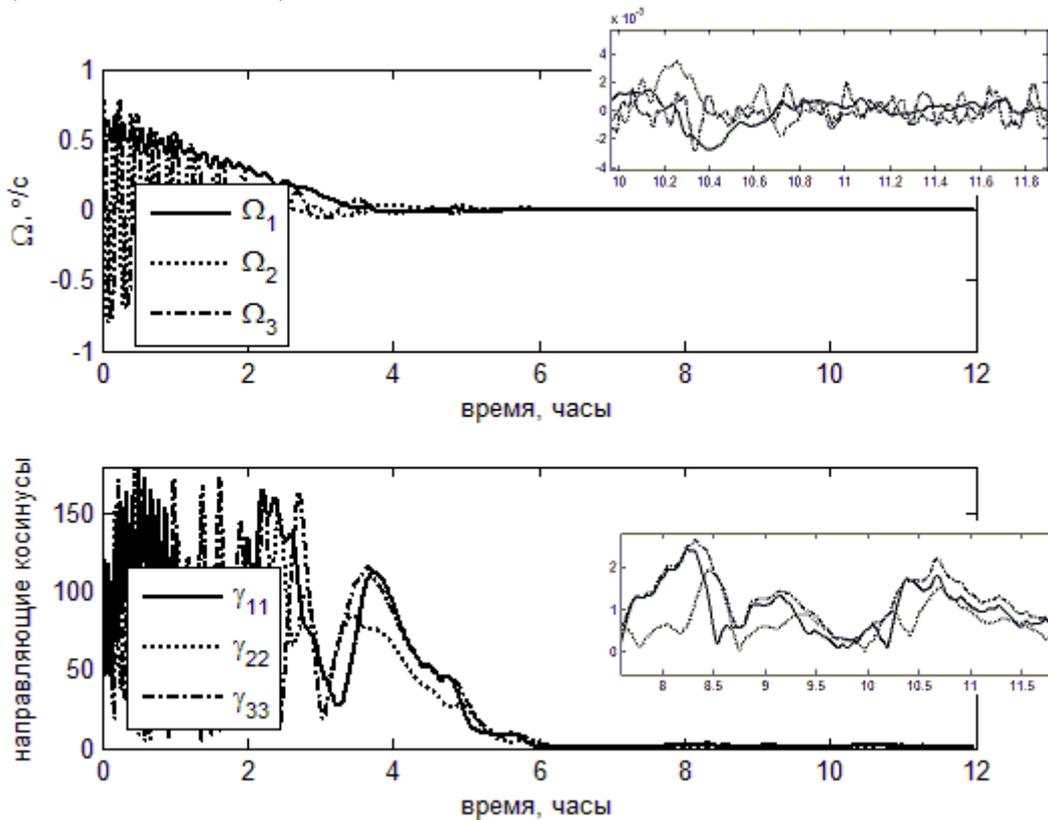


Рис. 3.7. Приведение спутника в требуемую ориентацию, учет ошибок определения ориентации, случайное возмущение, неточность знания моментов инерции

На рис. 3.7 видно ухудшение точности до  $2.5^\circ$ . Аналогичный результат при учете постоянного и случайного возмущения представлен на рис. 3.8.

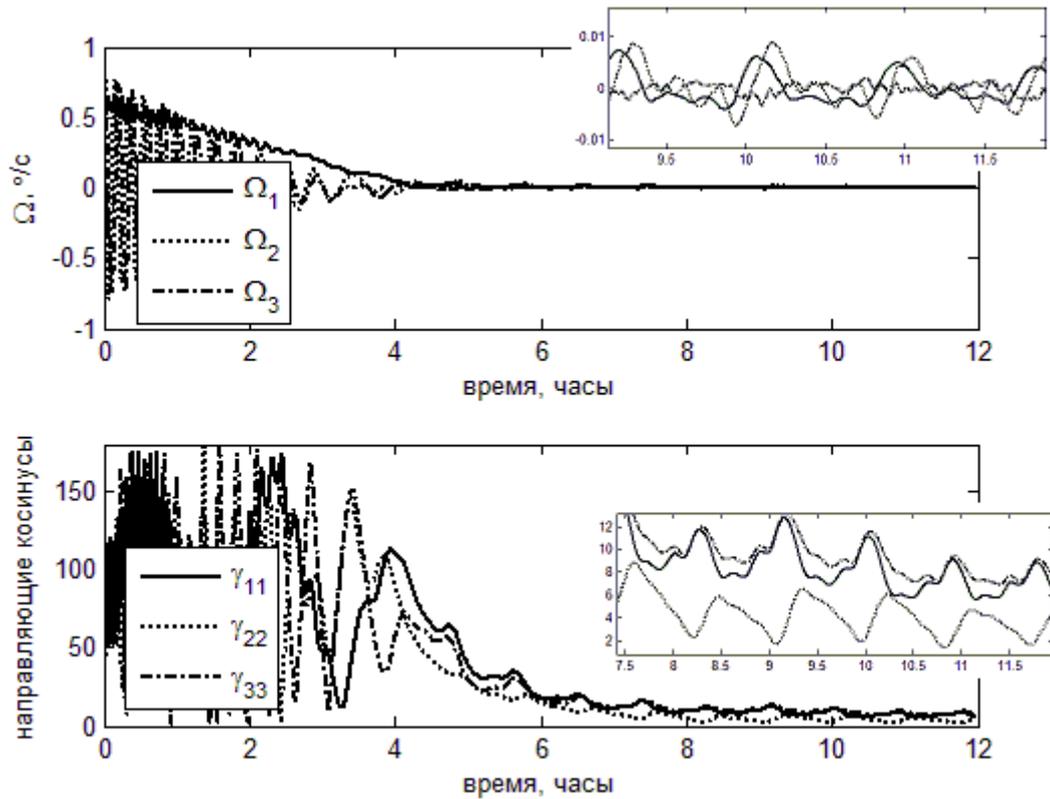


Рис. 3.8. Приведение спутника в требуемую ориентацию, учет ошибок определения ориентации, случайное и постоянное возмущение, неточность знания моментов инерции

Для спутника с тензором инерции  $\mathbf{J} \approx \text{diag}(6325, 2351, 4035) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  при учете постоянного и случайного возмущения точность составила  $10^\circ$ . При максимальном постоянном возмущении неточное знание моментов инерции зачастую приводит к неуправляемости аппарата с выбранными параметрами управления.

В большинстве случаев добавление ошибки знания моментов инерции приводит лишь к незначительному ухудшению точности стабилизации.

### Заключение

Показано, что применение магнитных катушек и магнитометра в качестве единственных исполнительных и измерительных элементов возможно для обеспечения требуемой трехосной ориентации аппарата. Точность при этом составляет от 1.5 до 15 градусов (в зависимости от геометрической формы аппарата и, соответственно, вида возмущающих моментов) при точном знании тензора инерции. При ошибке знания моментов инерции на уровне 10% от номинального точность по углам в основном падает не более чем в полтора раза, однако существует опасность неуправляемости аппарата. В случае геометрической конфигурации аппарата, подразумевающей действие

постоянного возмущающего (аэродинамического) момента, необходимо уточнять тензор инерции и параметры управления.

### Библиография

1. Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // *Acta Astronautica*. 2015. V. 110. p. 279–286.
2. Овчинников М.Ю. et al. Скользящее управление для трехосной магнитной ориентации спутника // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2014. № 56. 14 с.
3. Abdelrahman M., Park S.-Y. Integrated attitude determination and control system via magnetic measurements and actuation // *Acta Astronautica*. 2011. V. 69, № 3-4. pp. 168–185.
4. Psiaki M.L., Martel F., Pal P.K. Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data // *J. Guidance, Control and Dynamics*. 1990. V. 13, № 3. pp. 506–514.
5. Humphreys T.E. et al. Magnetometer-Based Attitude and Rate Estimation for Spacecraft with Wire Booms // *J. Guidance, Control and Dynamics*. 2005. V. 28, № 4. pp. 584–593.
6. Psiaki M.L. Global Magnetometer-Based Spacecraft Attitude and Rate Estimation // *J. Guidance, Control and Dynamics*. 2004. V. 27, № 2. pp. 240–250.
7. Ma H., Xu S. Magnetometer-only attitude and angular velocity filtering estimation for attitude changing spacecraft // *Acta Astronautica*. 2014. V. 102. pp. 89–102.
8. Searcy J.D., Pernicka H.J. Magnetometer-Only Attitude Determination Using Novel Two-Step Kalman Filter Approach // *J. Guidance, Control and Dynamics*. 2012. V. 35, № 6. pp. 1693–1701.
9. Cote J., Lafontaine J. Magnetic-only orbit and attitude estimation using the square-root unscented Kalman filter: application to the PROBA-2 spacecraft // *AIAAGuidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Hawaii, August 2008*, pp.1–24.
10. Abdelrahman M., Park S.-Y. Simultaneous spacecraft attitude and orbit estimation using magnetic field vector measurements // *Aerospace Science and Technology*. 2011. V. 15, № 8. pp. 653–669.
11. Ovchinnikov M., Ivanov D. Approach to study satellite attitude determination algorithms // *Acta Astronautica*. 2014. V. 98. pp. 133–137.
12. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // *Transactions ASME, Ser. D, J. Basic Engineering*. 1960. V. 82. pp. 35–45.
13. Kalman R.E., Bucy R.S. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // *Transactions ASME, Ser. D, J. Basic Engineering*. 1961. V. 83. pp. 95–108.
14. Wertz J.R. *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Dordrecht/Boston, London: Acad. press, 1990. 863 p.
15. Беляев М.Ю., Монахов М.И., Сазонов В.В. Оценка точности показаний магнитометра, установленного на Служебном модуле Международной космической станции // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2012. № 54. 33 с.

16. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 432 с.