



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 55 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Сидоренко В. В.

«Прыгающие» троянцы

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Сидоренко В. В. «Прыгающие» троянцы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 55. 24 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-55>

**Ордена Ленина**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В.Келдыша**  
**Российской академии наук**

**В.В.Сидоренко**

**«Прыгающие» троянцы**

**Москва — 2015**

***Сидоренко В.В.***

**«Прыгающие» троянцы**

«Прыгающими» троянцами называют астероиды, пребывающие достаточно длительное время в окрестности одной треугольной точки либрации, а затем перемещающиеся в окрестность другой треугольной точки либрации. Мы исследуем динамику таких астероидов в рамках ограниченной плоской эллиптической задачи трех тел. Двойное численное усреднение позволяет построить эволюционные уравнения, описывающие переходы между разными режимами орбитального движения.

**Ключевые слова:** ограниченная задача трех тел, резонанс средних движений, астероиды-«троянцы»

***Vladislav Viktorovich Sidorenko***

**“Jumping” Trojans**

The term “jumping” Trojans is used to specify those asteroids that pass at time to time from the motion around one triangular libration point to another one. We explore the motion of “jumping” Trojans under the scope of the restricted planar elliptical three-body problem. Via double numerical averaging we construct evolutionary equations which allow to analyze the details of the transition between different regimes of the orbital motion.

**Key words:** restricted three-body problem, mean motion resonance, Trojan asteroids

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 13-01-00251.

## 1. Введение

При резонансе средних движений (РСД) 1:1 орбита астероида чаще всего имеет тип T (tadpole - «головастик»; орбита охватывает одну из треугольных точек либрации) или тип HS (horseshoe - «подкова»; орбита охватывает обе треугольные точки либрации и коллинеарную точку либрации  $L_3$ ). Существуют и другие, более редкие типы резонансных орбит (в частности, квазиспутниковые (QS) и составные QS+HS), различающиеся поведением резонансной фазы  $\varphi = \lambda - \lambda'$  ( $\lambda$  и  $\lambda'$  - средние долготы астероида и планеты соответственно) [11].

Если у гамильтоновой системы при резонансе возможны несколько режимов движения, то при определенных условиях могут наблюдаться переходы из одного режима в другой. В [20] был приведен пример перехода  $T_L \rightarrow T_T$  (здесь  $T_L$  и  $T_T$  обозначают орбиты-«головастики», охватывающие «ведущую» точку либрации  $L_4$  и «отстающую» точку  $L_5$  соответственно) у реального резонансного астероида (1868) Thersites. Численное интегрирование свидетельствует о наличии переходов между колебаниями в окрестности точек либрации  $L_4$  и  $L_5$  у астероида 2010TK<sub>7</sub> - первого астероида-троянца Земли [5].

Вековая эволюция движения астероидов-троянцев изучалась многими специалистами (подробная библиография приведена в [8,16]). Тем не менее, вероятно, только К.Оshima и Т.Уаhao [15] предприняли попытку теоретического анализа переходов

$$T_L \rightarrow T_T, T_T \rightarrow T_L, T_{L,T} \rightarrow HS, HS \rightarrow T_{L,T}. \quad (1)$$

Движения с переходами (1) К.Оshima и Т.Уаhao разыскивали в области хаотической динамики, порождаемой пересечениями устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий периодических решений задачи трех тел, охватывающих точку либрации  $L_3$ . Недостатком предложенной в [15] интерпретации переходов (1) как некоторого гомоклинического эффекта является малая мера начальных условий, соответствующих движениям с переходами ( $\sim e^{-1/\mu^c}$ , где  $\mu$  - доля массы планеты в общей массе системы,  $c$  - некоторая положительная постоянная).

В данной работе в рамках плоской ограниченной задачи трех тел «звезда-планета-астероид» мы изучаем переходы (1), основываясь на описанной в [21] схеме исследования возможных трансформаций резонансных режимов движения. В [19] мы уже использовали подобный подход при рассмотрении формирования и разрушения квазиспутниковых движений. В общем случае трансформация резонансных движений является грубым эффектом – мера множества начальных значений, при которых она происходит, не зависит от  $\mu$ .

Проведенное нами исследование служит естественным дополнением к предшествующим исследованиям вековых эффектов в динамике астероидов-троянец, проведенных методами современной теории резонансных явлений в гамильтоновых системах [3, 10]. Рассматривая задачу трех тел, мы не можем объяснить возможный переход  $T_L \rightarrow T_T$  астероида (1868) Thersites: приведенные в [20] результаты численных исследований свидетельствуют о существенном влиянии вековых резонансов на динамику данного астероида. Обсуждаемый в нашей работе механизм трансформации резонансных режимов реализуется, вероятно, в динамике «временных» троянцев – разнообразные примеры переходов (1) у таких астероидов можно найти в [6]: относительно малая длительность пребывания в каком-то режиме движения позволяет пренебречь вековыми резонансами.

## 2. Усредненные уравнения для изучения динамики астероида при резонансе средних движений 1:1

**Усреднение вдоль орбитального движения.** Будем предполагать, что в качестве единицы длины взята большая полуось орбиты планеты, а единицей массы является сумма масс звезды и планеты. Единица времени такова, что период обращения планеты и звезды вокруг их барицентра равен  $2\pi$ . Масса планеты  $\mu$  существенно меньше массы звезды и в дальнейшем рассматривается как малый параметр задачи.

Нас будет интересовать область  $\mathfrak{R}$  в фазовом пространстве системы, выделяемая условием

$$|n - n'| \lesssim \sqrt{\mu},$$

где  $n$  и  $n'$  - средние движения астероида и планеты соответственно. Уравнения движения астероида запишем в переменных  $x, y, L, \varphi$ , где  $x, y, L$  являются элементами второй канонической системы Пуанкаре и связаны с оскулирующими элементами формулами

$$x = \sqrt{2\sqrt{(1-\mu)a[1-\sqrt{1-e^2}]}} \cos \varpi,$$

$$y = -\sqrt{2\sqrt{(1-\mu)a[1-\sqrt{1-e^2}]}} \sin \varpi,$$

$$L = \sqrt{(1-\mu)a}.$$

Здесь  $\varpi, e, a$  - долгота периастра, эксцентриситет и большая полуось орбиты астероида.

Уравнения движения имеют каноническую форму

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x}, \\ \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \varphi}, & \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial L}\end{aligned}\quad (1)$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{K} = -\frac{(1-\mu)^2}{2L^2} - L - \mu R. \quad (2)$$

Возмущающая функция  $R$  в выражении для  $\mathcal{K}$  определена следующим образом:

$$R = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{r'^3},$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  - радиус-вектор астероида и радиус-вектор планеты относительно звезды.

Формальное усреднение уравнений (1) по орбитальному движению планеты и астероида состоит в замене функции  $R$  в выражении для гамильтониана (2) функцией

$$W(x, y, L, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(x, y, L, \lambda(\lambda', \varphi), \lambda') d\lambda'.$$

После усреднения уравнения движения становятся автономными – их правые части теперь не зависят от средней долготы планеты  $\lambda' = t + \lambda'_0$ . Усреднение проводится численно; технические детали данной процедуры несложно восстановить на основе подробного описания усреднения возмущающей функции при РСД 3:1, приведенного в [18]. Стоит отметить, что численное усреднение возмущающей функции при РСД является достаточно распространенным приемом ([17] и др.).

**«Быстро-медленная» система.** Следуя общей схеме исследования резонансных эффектов в гамильтоновых системах, в усредненной по  $\lambda'$  системе (1) переменную  $L$  заменим переменной  $\Phi = (1-L)/\sqrt{\mu}$ , выражающей нормированное отклонение  $L$  от резонансного значения, и введем новую независимую переменную  $\tau = \sqrt{\mu}t$ . Без потери точности усредненные уравнения движения в области  $\mathfrak{R}$  можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= 3\Phi, \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \\ \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{\mu}, \quad V(x, y, \varphi) = W(x, y, 1, \varphi).$$

Систему (3) далее будем называть быстро-медленной (БМ-системой), принимая во внимание разделение фазовых переменных на «быстрые» и «медленные» (в общем случае):

$$\frac{d\varphi}{d\tau}, \frac{d\Phi}{d\tau} \sim 1, \quad \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau} \sim \varepsilon.$$

Уравнения БМ-системы (3) включают «быструю» подсистему (первое и второе уравнения) и «медленную» подсистему (третье и четвертое уравнения). БМ-система является гамильтоновой с гамильтонианом

$$\Xi = \frac{3\Phi^2}{2} + V(x, y, \varphi). \quad (4)$$

Симплектическая структура в ее фазовом пространстве задается дифференциальной формой

$$\Psi = \varepsilon^{-1} dy \wedge dx + d\Phi \wedge d\varphi.$$

**Свойства усредненной возмущающей функции. Вспомогательные функции.** При  $\varepsilon = 0$  уравнения быстрой подсистемы совпадают с уравнениями движения гамильтоновой системы с одной степенью свободы, в которые  $x, y$  входят как параметры. Качественное поведение решений этих уравнений определяется свойствами функции  $V(x, y, \varphi)$ .

На рис. 1 представлены графики  $V(x, y, \varphi)$  при разных значениях  $x, y$ . Сокращения  $QS$ ,  $HS$  и  $T$  рядом с горизонтальными линиями характеризуют тип орбитального движения астероида в решениях, лежащих на соответствующих линиях уровня гамильтониана  $\Xi$  (в предельном случае  $\varepsilon = 0$ ). Если  $x \neq \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - e'^2})}$  и  $y \neq 0$  ( $e \neq e', \varpi \neq 0$ ), то тогда при изменении  $\varphi$  в интервале  $[0, 2\pi]$  у функции  $V(x, y, \varphi)$  будут две точки сингулярности  $\varphi = \varphi_{SL}(x, y)$  и  $\varphi = \varphi_{ST}(x, y)$  ( $\varphi = \varphi_{SL}(x, y) < \varphi = \varphi_{ST}(x, y)$ ); если  $x = \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - e'^2})}$  и  $y = 0$  ( $e = e', \varpi = 0$ ), то  $V(x, y, \varphi) \rightarrow +\infty$  при  $\varphi \rightarrow 0 \pmod{2\pi}$ .

Точки сингулярности соответствуют таким движениям астероида, в которых происходит его столкновение с планетой.

Нижний график на рис. 1 отличается от двух других отсутствием у функции  $V(x, y, \varphi)$  локального максимума. На рис. 2 изображена область  $\Lambda(e')$  значений параметров, при которых  $V(x, y, \varphi)$  имеет локальный максимум; значение резонансной фазы в точке локального максимума  $\varphi = \varphi^*(x, y) \in (\varphi_{SL}(x, y), \varphi_{ST}(x, y))$ . Принимая во внимание то, что  $V(x, y, \varphi) = V(x, -y, 2\pi - \varphi)$ , получим:  $\varphi^*(x, 0) = \pi$ .

В тех случаях, когда  $(x, y) \in \Lambda(e')$ , значения  $\varphi$ , при которых  $V(x, y, \varphi)$  достигает минимума на интервалах  $(\varphi_{SL}(x, y), \varphi^*(x, y))$  и  $(\varphi^*(x, y), \varphi_{ST}(x, y))$  обозначим  $\varphi_{*L}(x, y)$  и  $\varphi_{*T}(x, y)$  соответственно.

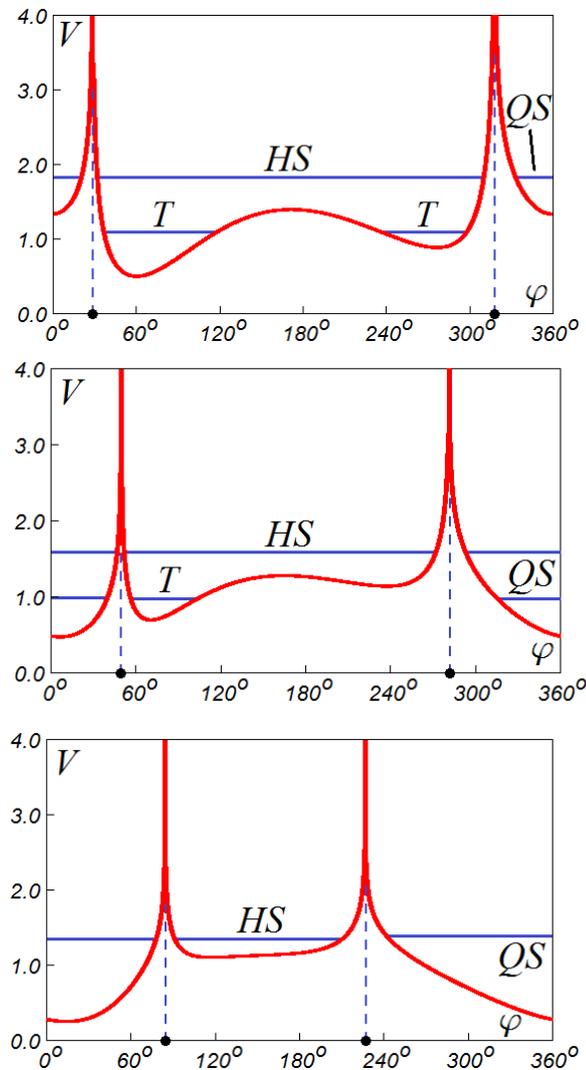


Рис. 1. Поведение функции  $V$  при фиксированных значениях  $x, y$ . Верхний график:  $x=0.15176, y=-0.26285$  ( $e=0.3, \varpi=60^\circ$ ). Средний график:  $x=0.31623, y=-0.54772$  ( $e=0.6, \varpi=60^\circ$ ). Нижний график:  $x=0.53100, y=-0.91987$  ( $e=0.9, \varpi=60^\circ$ ). Во всех случаях эксцентриситет планеты  $e'=0.3$ .

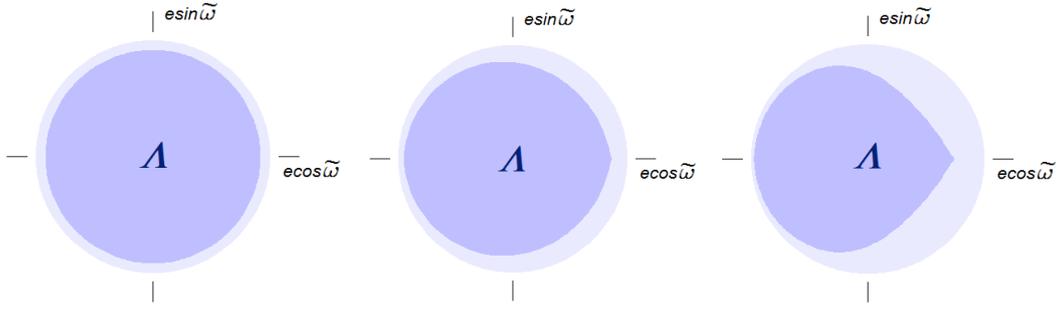


Рис. 2. Область  $\Lambda$  при разных значениях эксцентриситета планеты: левый рисунок -  $e' = 0$ , в центре -  $e' = 0.3$ , правый рисунок -  $e' = 0.6$

Если эксцентриситеты орбит астероида и планеты имеют малые значения, то тогда можно пользоваться приближенной формулой

$$V(\varphi, x, y) \approx V_0(\varphi) + V_1(\varphi, x, y), \quad (5)$$

где  $\varphi \in (c_*, 2\pi - c_*)$ ,  $c_*$  - положительное число, удовлетворяющее условию  $\max\{e, e'\} \ll c_* \ll 1$ ,

$$V_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi)}} - \cos \varphi,$$

$$V_1(\varphi, x, y) = (x^2 + y^2 + e'^2)g_1(\varphi) + e'(xg_2(\varphi) + yg_3(\varphi)),$$

$$g_1(\varphi) = \frac{\cos \varphi}{2} - \frac{1}{4} \frac{(-9 + 5\cos^2 \varphi + 4\cos \varphi)}{(2 - 2\cos \varphi)^{5/2}},$$

$$g_2(\varphi) = 1 - 2\cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \frac{(\cos^3 \varphi + 8\cos^2 \varphi - 5\cos \varphi - 4)}{(2 - 2\cos \varphi)^{5/2}},$$

$$g_3(\varphi) = 2\cos \varphi \sin \varphi + \frac{\sin \varphi}{2} \frac{(9 - \cos^2 \varphi - 8\cos \varphi)}{(2 - 2\cos \varphi)^{5/2}}.$$

Выписанное приближенное выражение для возмущающей функции является фактически частным случаем более общей формулы, полученной в [9] (отметим, что в разложении, приведенном в [9], отсутствует член  $\sim e'^2$ ).

В дальнейших построениях нам потребуются вспомогательные функции, определенные следующим образом:

$$H_*(x, y) = \min_{\varphi \in (\varphi_{SL}(x, y), \varphi_{ST}(x, y))} V(x, y, \varphi),$$

$$H_{**}(x, y) = \max\{V(x, y, \varphi_{*L}(x, y)), V(x, y, \varphi_{*T}(x, y))\}, (x, y) \in \Lambda(e').$$

$$H^*(x, y) = V(x, y, \varphi^*(x, y)), (x, y) \in \Lambda(e').$$

На рис. 3 представлены графики функций  $H^*(x, y)$ ,  $H_*(x, y)$  и  $H_{**}(x, y)$  в случае  $e' = 0.3$ . При  $e' \neq 0$  глобальный максимум функции  $H^*(x, y)$  достигается при  $x^* = -\sqrt{2(1-\sqrt{1-e'^2})}$ ,  $y^* = 0$ ; стационарное решение уравнений (3)

$$x \equiv x^*, y \equiv 0, \varphi \equiv \pi, \Phi \equiv 0$$

соответствует в принятом приближении нахождению астероида в коллинеарной точке либрации  $L_3$ . Функция  $H_*(x, y)$  имеет минимальное значение при

$$x_* = \pm \sqrt{\frac{3(1-\sqrt{1-e'^2})}{2}}, y_* = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-e'^2}}{2}},$$

соответствующим положению астероида в «ведущей» и «догоняющей» точках либрации. Более подробное исследование критических точек вспомогательных функций лежит за рамками данной работы.

При  $e' = 0$  значение функции в точке  $(x, y)$  определяется ее расстоянием до начала координат:

$$H^*(x, y) = H^*(r), H_*(x, y) = H_*(r), H_{**}(x, y) = H_{**}(r),$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Так как с точностью  $\sim \varepsilon$

$$e = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{r^2}{2}\right)^2},$$

то при  $e' = 0$  значение вспомогательных функций фактически зависит только от значения эксцентриситета астероида. Графики функций  $H^*(e)$ ,  $H_*(e)$  представлены на рис. 4. График третьей вспомогательной функции не приведен, так как при  $e' = 0$   $H_{**} = H_*$  для всех  $(x, y) \in \Lambda(0)$ .

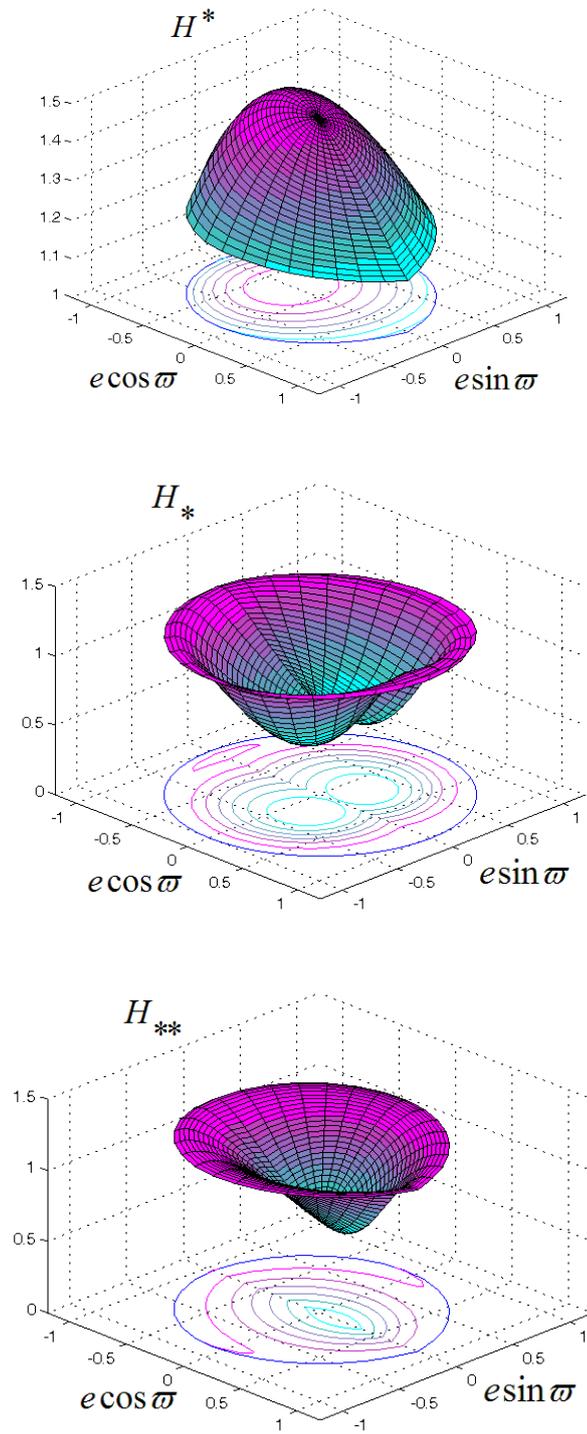


Рис. 3. Графики функций  $H^*$ ,  $H_*$  и  $H_{**}$  ( $e' = 0.3$ )

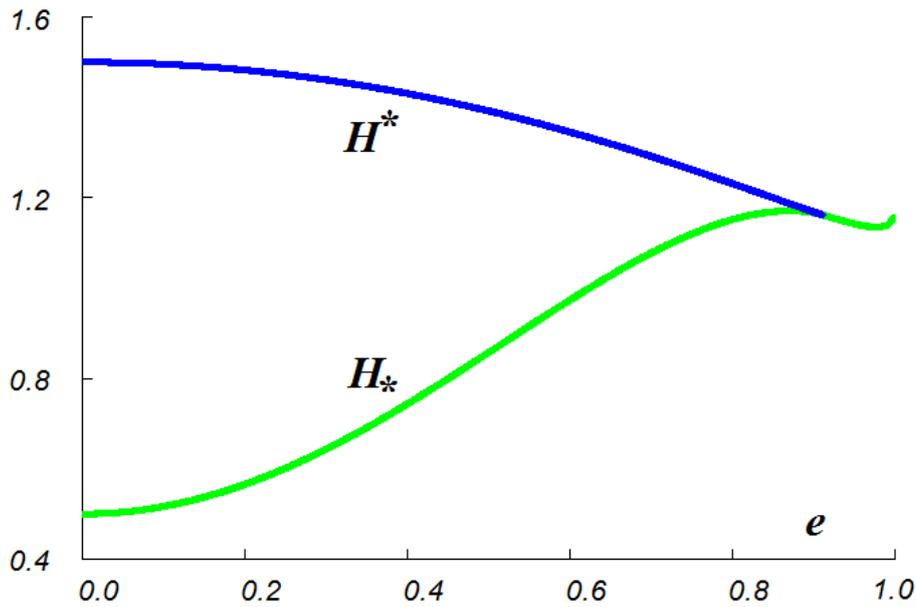


Рис. 4. Графики функций  $H^*$  и  $H_*$  в случае  $e' = 0$

Если эксцентриситет планеты  $e'$  мал или равен нулю, то формула (5) позволяет получить приближенное выражение для функции  $H^*(x, y)$  в окрестности начала координат:

$$H^*(x, y) \approx \xi^* + (x^2 + y^2 + e'^2)g_1(\pi) + e'xg_2(\pi) = \xi^* - \frac{7}{16}[(x + e')^2 + y^2]. \quad (6)$$

Здесь

$$\xi^* = V_0(\pi) = \frac{3}{2}.$$

Своего максимума функция  $H^*(x, y)$  достигает при  $x^* \approx -e'$ ,  $y^* = 0$ . Воспользовавшись тем, что

$$\frac{\partial H^*}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{\varphi=\varphi^*(x,y)}, \quad \frac{\partial H^*}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{\varphi=\varphi^*(x,y)}, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi^*(x,y)} = 0,$$

можно сделать вывод о наличии у системы (3) стационарного решения

$$\varphi \equiv \pi, \quad \Phi \equiv 0, \quad x \equiv x^*, \quad y \equiv 0.$$

Данное стационарное решение соответствует положению астероида в коллинеарной точке либрации  $L_3$ .

**Решения быстрой подсистемы при  $\varepsilon = 0$ .** Пусть

$$\varphi(\tau, x, y, \xi), \Phi(\tau, x, y, \xi) \quad (7)$$

является решением подсистемы из первых двух дифференциальных уравнений, входящих в систему (3), где  $x, y$  рассматриваются как параметры; параметр  $\xi$  в (6) равен значению гамильтониана  $\Xi$  вдоль данного решения:

$$\Xi(\varphi(\tau, x, y, \xi), \Phi(\tau, x, y, \xi), x, y) = \xi.$$

В общем случае в решении (7) угол  $\varphi$  осциллирует с периодом  $T(x, y, \xi)$ .

Если  $(x, y) \in \Lambda(e')$ , то при  $\xi \in (H_{**}(x, y), H^*(x, y))$  на уровне  $\Xi = \xi$  будут располагаться два периодических решения: одно отвечает движению астероида по Т-орбите, опережающей планету, а другое – по догоняющей Т-орбите. Во всех остальных случаях решение, в котором  $\varphi \in (\varphi_{SL}(x, y), \varphi_{ST}(x, y))$  для  $\forall \tau$ , или одно, или не существует ( $\xi < H_*(x, y)$ ).

Решению (7) сопоставим интеграл действия

$$I(x, y, \xi) = \frac{3}{2\pi} \int_0^{T(x, y, \xi)} \Phi^2(\tau, x, y, \xi) d\tau. \quad (8)$$

При  $\varepsilon \neq 0$  переменные  $x(\tau), y(\tau)$  можно интерпретировать как медленно изменяющиеся параметры быстрой подсистемы. Это означает, что соотношение (8) определяет адиабатический инвариант (АИ) БМ-системы (3).

**Усреднение вдоль решений быстрой подсистемы. Кривая неопределенности.** Усредняя правые части уравнений медленной подсистемы вдоль решений быстрой подсистемы (7), получим эволюционные уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon \left\langle \frac{\partial V}{\partial y} \right\rangle, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\varepsilon \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle, \quad (9)$$

где

$$\left\langle \frac{\partial V}{\partial \xi} \right\rangle = \frac{1}{T(x, y, \xi)} \int_0^{T(x, y, \xi)} \frac{\partial V}{\partial \xi}(x, y, \varphi(\tau, x, y, \xi)) d\tau. \quad (10)$$

При построении эволюционных уравнений необходимо учитывать, что решение (7), лежащее на выбранном уровне  $\Xi = \xi$ , может оказаться непериодическим (соответствовать сепаратрисе на фазовом портрете быстрой подсистемы). Очевидно, что множество

$$\Gamma(\xi) = \{(x, y) \in \Lambda(\xi), H^*(x, y) = \xi\}$$

состоит из точек с такими координатами  $x, y$ , что решение  $\varphi(\tau, x, y, \xi), \Phi(\tau, x, y, \xi)$  является асимптотическим. Следуя [21, 12], множество  $\Gamma(\xi)$  будем называть кривой неопределенности. Подробное обсуждение динамических эффектов, обусловленных пребыванием проекции фазовой точки  $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t), L(t), \varphi(t))^T$  на плоскость  $(x, y)$  в окрестности  $\Gamma(\xi)$  можно найти в [13, 14, 19].

При изучении вековой эволюции орбитального движения астероида мы ограничимся рассмотрением только таких ситуаций, когда кривая неопределенности  $\Gamma(\xi)$  является овалом. В этом случае  $\xi \in (\xi^{**}, \xi^*)$ , где  $\xi^{**} = \max_{(x,y) \in \partial\Lambda} \bar{H}^*(x, y)$ ,  $\bar{H}^*(x, y)$  - продолжение по непрерывности функции  $H^*(x, y)$  на границу множества  $\Lambda(e')$ . Из формулы (6) следует, что при малых значениях эксцентриситета планеты и при условии

$$0 < \xi^* - \xi \ll 1$$

кривая неопределенности близка к окружности радиуса

$$R(\xi) = 4\sqrt{\frac{(\xi^* - \xi)}{7}}$$

с центром в точке  $(-e', 0)$ .

Далее для множества точек, лежащих внутри кривой  $\Gamma(\xi)$ , будет использоваться обозначение  $D(\xi)$ . Если  $(x, y) \in D(\xi)$ , то на уровне  $\Xi = \xi$  располагаются два периодических решения, отвечающих движению астероида по  $T_L$ -орбите и  $T_T$ -орбите. Усреднение (10) вдоль этих решений в общем случае приводит к разным результатам. Таким образом, в области  $D(\xi)$  уравнениям (9) можно сопоставить два семейства фазовых траекторий, описывающих вековую эволюцию  $T_L$ -орбит и  $T_T$ -орбит соответственно.

### **3. Применение усредненных уравнений для анализа различных вариантов вековой эволюции, включающих переходы между разными типами орбитального движения**

Наглядное представление о вековой эволюции движения астероида дают фазовые портреты уравнений (9) при разных значениях  $\xi$ . При построении фазовых портретов траектории, приближающиеся к кривой неопределенности, «склеиваются» с траекториями, стартующими с этой кривой. Из приведенных

ниже примеров следует, что в некоторых случаях такую «склепку» можно произвести разными способами<sup>1</sup>.

Численное исследование поведения фазовых траекторий указывает на то, что при  $\xi = \xi_b \approx \xi^* - \frac{7}{4}e'^2$  происходит бифуркация, заключающаяся в слиянии неподвижных точек системы (9).

Типичный фазовый портрет системы (9) при  $\xi \in (\xi^{**}, \xi_b)$  изображен на рис. 5. Фазовые траектории красного и зеленого цвета характеризуют вековую эволюцию при движении астероида по  $T_L$ -орбите и  $T_T$ -орбите соответственно, синие траектории соответствуют движению по орбите, относящейся к типу  $HS$  при  $(x, y) \in \Lambda(e')$ <sup>2</sup>. На фазовом портрете имеется 8 неподвижных точек: точки  $A, B$  лежат вне области  $D(\xi)$ , точки  $C_L, D_L, E_L$  являются неподвижными точками усредненных уравнений, описывающих эволюцию  $T_L$ -орбит, точки  $C_T, D_T, E_T$  - неподвижные точки уравнений, описывающих эволюцию  $T_T$ -орбит. На рис. 5 отмечены только неподвижные точки  $D_L$  и  $D_T$ . Так как остальные неподвижные точки располагаются на очень малом расстоянии от кривой  $\Gamma(\xi)$ , то для иллюстрации поведения фазовых траекторий в окрестности этих точек на рис. 6 приведены увеличенные фрагменты фазового портрета.

Рис. 6а демонстрирует поведение фазовых кривых в окрестности неустойчивой неподвижной точки  $B$ , лежащей вне области  $D(\xi)$ . Точка  $R \in \Gamma(\xi)$  является предельной для семейства траекторий, лежащих в криволинейном треугольнике, образованном сегментом кривой неопределенности  $\Gamma(\xi)$  и сепаратрисами седла  $B$ .

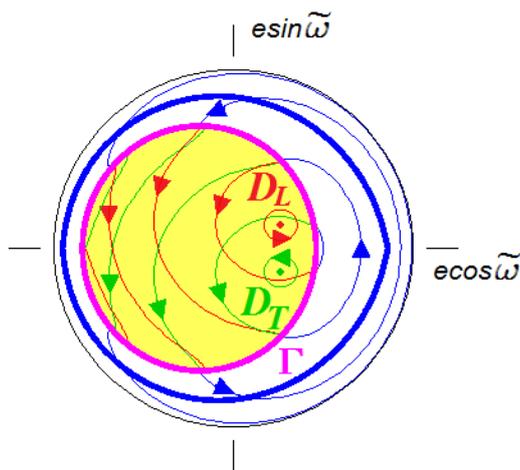


Рис. 5. Фазовый портрет эволюционных уравнений (9):  $\xi = 1.30$ ,  $e' = 0.3$ .

<sup>1</sup> Похожая ситуация возникает при изучении вековой эволюции движения астероидов в случае временных переходов на квазиспутниковые орбиты [19].

<sup>2</sup> Вне  $\Lambda(e')$  традиционная классификация орбит при РСД 1:1 теряет смысл.

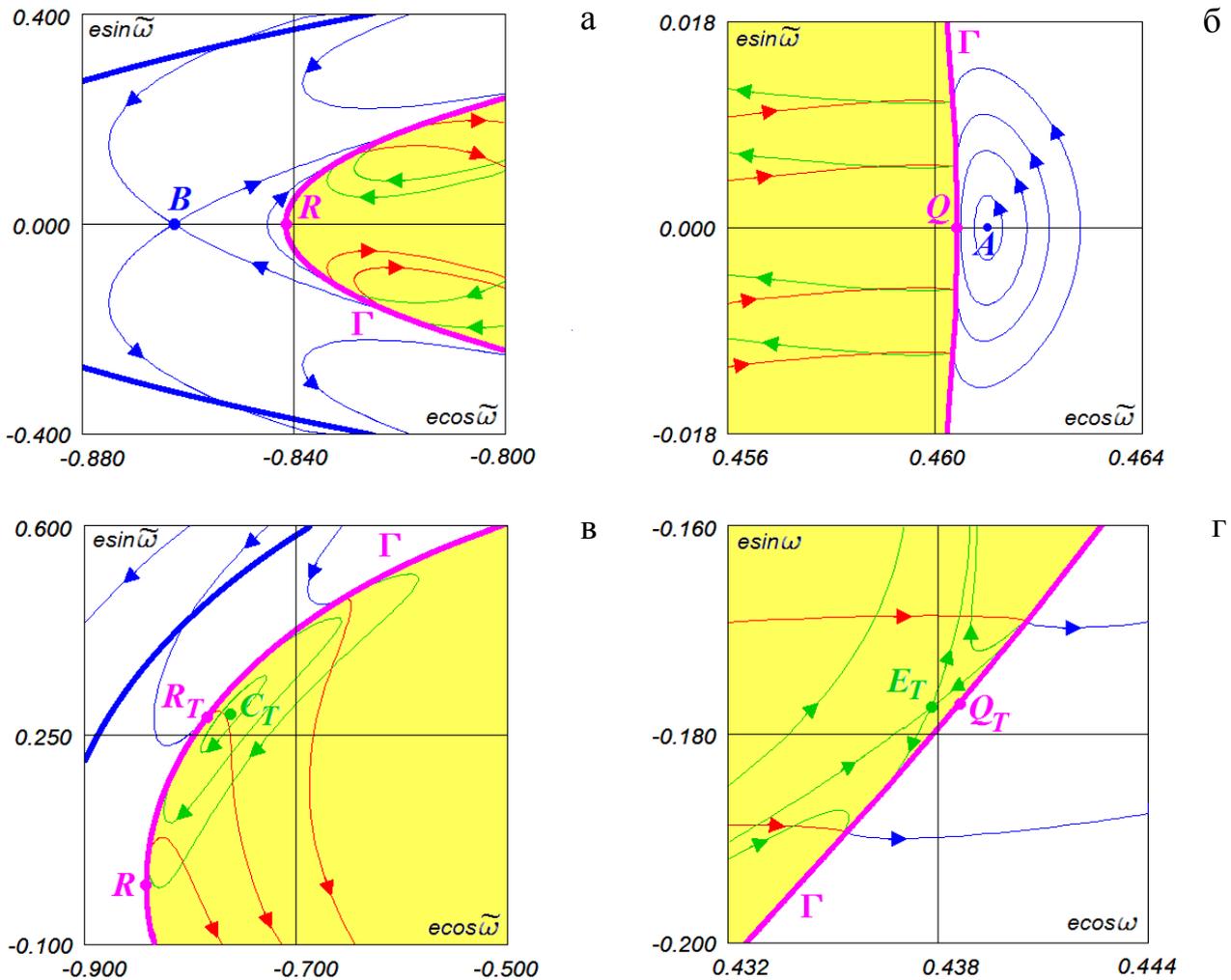


Рис. 6. Поведение фазовых кривых в окрестности неподвижных точек эволюционных уравнений ( $\xi = 1.30$ ,  $e' = 0.3$ )

На рис. 6б показано поведение траекторий в окрестности устойчивой неподвижной точки  $A$ , также лежащей вне области  $D(\xi)$ . Видно, что в качестве предела семейство замкнутых траекторий, охватывающих точку  $A$ , включает траекторию, касающуюся кривой  $\Gamma(\xi)$  в точке  $Q$ .

На рис. 6в изображена устойчивая неподвижная точка  $C_T$  усредненных уравнений, описывающих эволюцию  $T_T$ -орбит. Семейство траекторий, охватывающих  $C_T$ , включает в качестве предела траекторию, касающуюся  $\Gamma(\xi)$  в точке  $R_T$ .

Поведение фазовых траекторий в окрестности неподвижной точки  $C_L$  описывается зеркальным отражением рис. 6в относительно оси  $x$  с соответствующей заменой цвета траекторий и направлений стрелок.

Рис. 6г иллюстрирует поведение фазовых траекторий в окрестности неустойчивой неподвижной точки  $E_T$  уравнений, усредненных вдоль  $T_T$ -орбит. Точка  $Q_T \in \Gamma(\xi)$  является предельной для семейства траекторий, лежащих в

криволинейном треугольнике, образованном сегментом кривой неопределенности  $\Gamma(\xi)$  и сепаратрисами седла  $E_T$ . Аналогично предыдущему случаю рис. 6г можно преобразовать в изображение фазовых траекторий в окрестности неустойчивой неподвижной точки  $E_L$ .

Свойства устойчивых стационарных решений  $A$ ,  $C_L$  и  $C_T$  усредненных уравнений (9) при разных значениях параметра, эквивалентного параметру  $\xi$ , подробно исследованы в [9].

Точки  $Q, Q_L, Q_T, R, R_L, R_T$  порождают разбиение кривой  $\Gamma(\xi)$  на сегменты (рис. 7), качественно различающиеся сценариями трансформации режимов движения астероида в их окрестности. Все возможные сценарии приведены в Табл. 1. В качестве примера на рис. 8 изображены результаты численного интегрирования исходных (неусредненных) уравнений движений, иллюстрирующие переход  $T_T \rightarrow T_L$  в окрестности сегмента  $R_T R$  кривой неопределенности.

Таблица 1

**Преобразование режимов движения в окрестности кривой неопределенности**

Сегмент	$QQ_L$	$Q_L R_T$	$R_T R$	$RR_L$	$R_L Q_T$	$Q_T Q$
Возможные переходы	$\begin{array}{l} HS \searrow \\ T_L \nearrow \end{array} T_T$	$\begin{array}{l} HS \nearrow \\ T_T \searrow \end{array} T_L$	$\begin{array}{l} HS \searrow \\ T_T \nearrow \end{array} T_L$	$\begin{array}{l} T_T \nearrow \\ T_L \searrow \end{array} HS$	$\begin{array}{l} T_L \searrow \\ T_T \nearrow \end{array} HS$	$\begin{array}{l} T_L \nearrow \\ T_T \searrow \end{array} HS$

Примечание: Численное исследование не выявило каких-либо других вариантов преобразования движения в окрестности кривой  $\Gamma(\xi)$  при  $\xi \in (\xi^{**}, \xi^*)$ . От значения  $\xi$  зависит только положение точек  $Q, Q_L, Q_T, R, R_L, R_T$  на кривой неопределенности и положение кривой неопределенности на плоскости медленных переменных.

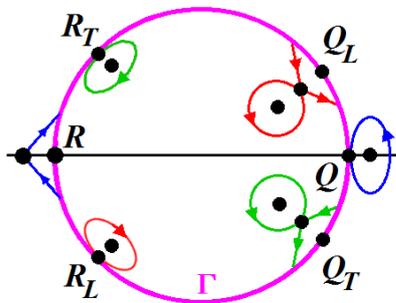


Рис. 7. Разбиение кривой  $\Gamma$  на сегменты, различающиеся трансформациями режимов движения астероида. Положение точек  $Q, Q_L, Q_T, R, R_L, R_T$  определяется поведением особых траекторий усредненных уравнений (9) в окрестности  $\Gamma$ .

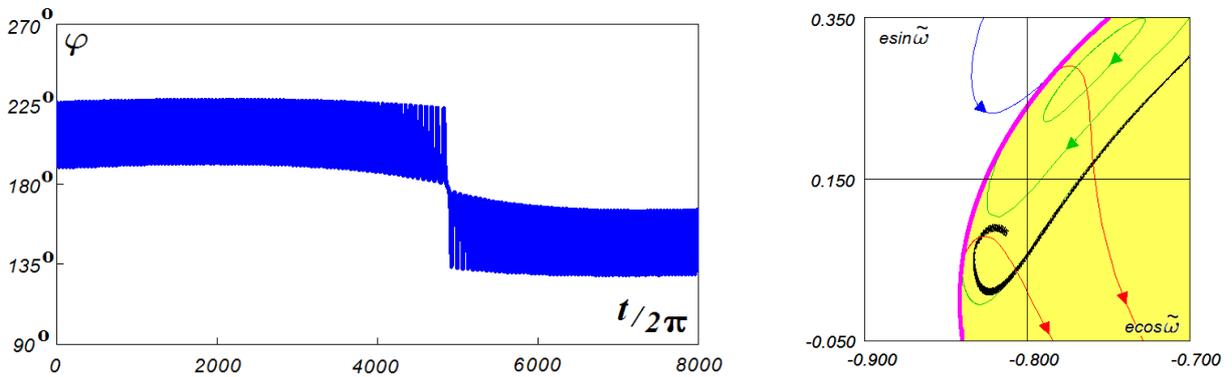


Рис. 8. Пример перехода  $T_T \rightarrow T_L$ , полученный численным интегрированием неусредненных уравнений движения ( $\mu=0.0001$ ). Черная кривая характеризует изменение медленных переменных в данном решении.

Если на плоскости медленных переменных кривая неопределенности охватывает начало координат  $(0,0)$ , то в качестве параметра, определяющего положение точки на  $\Gamma(\xi)$  удобно использовать значение долготы периастра:

$$\varpi = \begin{cases} 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & y \geq 0 \\ \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & y < 0 \end{cases} .$$

Фазовый поток усредненных уравнений (9) порождает отображение  $\Gamma \rightarrow \Gamma$ . Для траекторий, лежащих в области, ограниченной кривой неопределенности, несложно установить соответствие между начальным значением долготы периастра при движении по  $T$ -орбите и ее значением при переходе в другой режим движения (пример приведен на рис. 9). Это соответствие неоднозначное – некоторым «входным» значениям долготы соответствуют два возможных значения долготы при следующем сближении с кривой  $\Gamma$ .

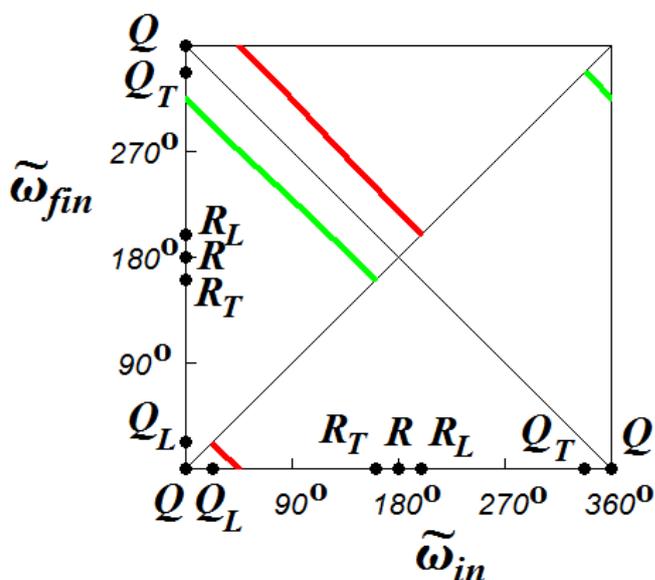


Рис. 9. Связь начального значения долготы периастра  $\tilde{\omega}_{in}$  с его значением  $\tilde{\omega}_{fin}$  перед переходом в другой режим при движении по  $T$ -орбите ( $\xi = 1.3, e' = 0.3$ ). Красная кривая соответствует  $T_L$ -режиму, зеленая -  $T_T$ -режиму.

Типичный фазовый портрет системы (9) при  $\xi \in (\xi_b, \xi^*)$  изображен на рис. 10. От фазового портрета на рис. 5 он отличается отсутствием неподвижных точек  $D_{L,T}$  и  $E_{L,T}$ . Тем не менее, попарное слияние этих неподвижных точек (при  $\xi = \xi_b$ ) не влияет на поведение фазовых траекторий в окрестности кривой неопределенности – нет каких-либо качественных изменений в разбиении  $\Gamma(\xi)$  на сегменты с разными вариантами трансформации движения.

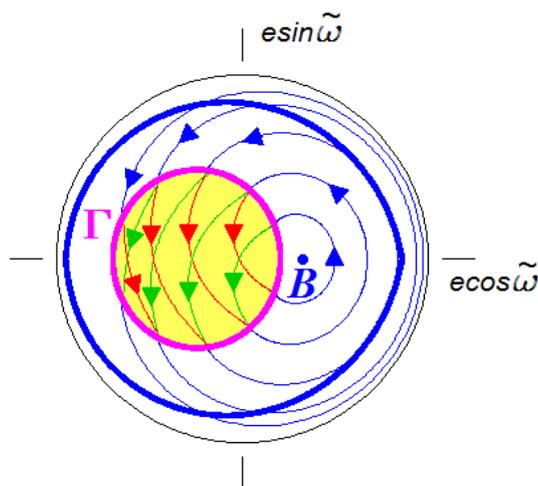
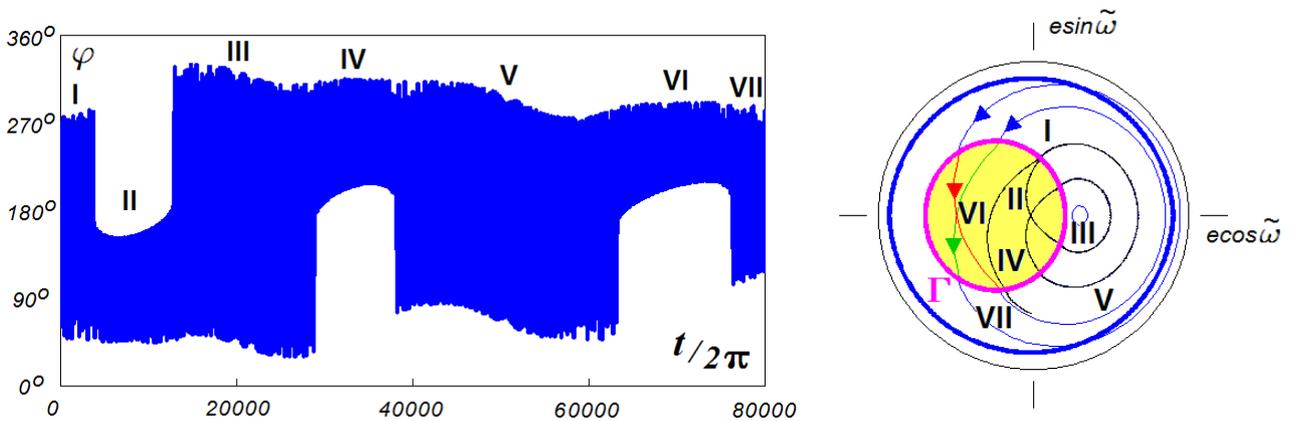


Рис. 9. Фазовый портрет эволюционных уравнений (9):  $\xi = 1.4, e' = 0.3$ .

#### 4. Вероятностное описание поведения фазовых траекторий в окрестности кривой неопределенности

На рис. 10 представлены результаты численного интегрирования исходных уравнений движения, демонстрирующие переход в различные режимы после пересечения кривой неопределенности практически в одном и том же месте. То, что после выхода фазовой точки из окрестности  $\Gamma(\xi)$  могут наблюдаться качественно различающиеся сценарии вековой эволюции, указывает на более быструю «хаотизацию» динамики системы в сравнении со случаем, когда «разбегание» траекторий в окрестности кривой неопределенности связано только с нарушением адиабатичности (см, например, [12, 13, 21]).



*Рис. 10.* Изменение режима движения при пересечении кривой неопределенности. Черная кривая характеризует изменение медленных переменных в некотором решении неусредненных уравнений ( $\mu=0.00002$ ). Участки I и V приведенного решения практически совпадают (с точностью до квазислучайной составляющей изменения АИ в окрестности  $\Gamma$ ) и завершаются в близких точках кривой неопределенности

Вероятностные оценки трансформаций движения в детерминистских системах основаны на сильной «перемешанности» начальных условий, соответствующих разным режимам движения. Поэтому даже небольшая неопределенность в начальных условиях не позволяет однозначно предсказать качественный характер движения на длительных временных интервалах. Вероятность реализации какого-либо режима определяется как относительная мера множества начальных значений, соответствующих этому режиму, в некоторой достаточно малой области фазового пространства. Строгое определение можно найти в [1,13].

Следуя [2,13], для отыскания вероятностей перехода вычислим значения вспомогательных величин, имеющих смысл производных площади областей, ограниченных сепаратрисами на фазовых портретах быстрой подсистемы, при описании изменения медленных переменных уравнениями (9), формально усредненными вдоль асимптотических решений  $\varphi_{L,T}^s(x, y, \tau)$ :

$$\Theta_{L,T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial H^*}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial H^*}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \right)_{\varphi=\varphi_{L,T}^s(x,y,\tau)} d\tau$$

Если проекция фазовой точки системы на плоскость медленных переменных приблизится к кривой неопределенности  $\Gamma$ , то вероятность возможных режимов дальнейшего движения вычисляется по формулам [2]

$$P_{L,T} = \frac{\hat{\Theta}_{L,T}}{\hat{\Theta}_L + \hat{\Theta}_T + \hat{\Theta}}, \quad P_{HS} = 1 - P_L - P_T,$$

где  $\hat{\Theta}_{L,T} = \max(\Theta_{L,T}, 0)$ ,  $\hat{\Theta} = \max(-\Theta_L - \Theta_T, 0)$ .

На рис. 11 приведено распределение вероятностей различных переходов при достижении кривой неопределенности  $\Gamma$ . Вычисления произведены для случая  $\xi = 1.3$ ,  $e' = 0.3$ .

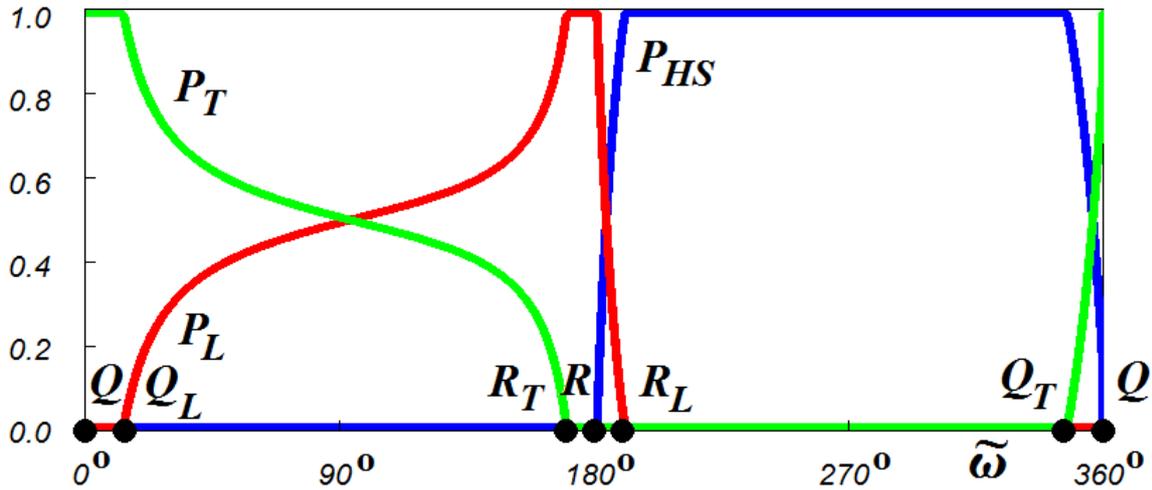


Рис. 11. Вероятности различных режимов после достижения кривой  $\Gamma$  ( $\xi = 1.3$ ,  $e' = 0.3$ )

## 5. Заключение

В данной работе достаточно подробно изучена трансформация резонансных движений астероида при РСД 1:1 в рамках плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел. Похожая трансформация резонансных режимов происходит и при других РСД (см., например, [4, 7]). В [4] такое поведение небесных тел названо «кивающим» (nodding behavior). Мы полагаем, что исследование трансформации режимов движения при других РСД вполне может быть направлением дальнейшей работы.

Автор выражает благодарность А.И.Нейштадту за неоднократные обсуждения используемых подходов и полученных результатов. Автор также благодарит С.С.Ефимова за прочтение рукописи и ряд полезных замечаний.

## Литература

- [1] Arnold, V.: Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russian Math. Surveys*, **18**, 86-191 (1963)
- [2] Artemyev, A.V., Neishtadt, A.I., Zelenyi, L.M.: Ion motion in the current sheet with sheared magnetic field – Part 1: Quasi-adiabatic theory. *Nonlin. Processes Geophys.*, **20**, 163-178 (2013).
- [3] Beauge, C., Roig, F.: A semianalytical model for the motion of the Trojan asteroids: proper elements and families. *Icarus*, **153**, 391-415 (2001).
- [4] Chiang, E.I., Jordan, A.B.: On the plutons and twotinos of the Kuiper belt. *Astron. J.*, **124**, 3430-3444 (2002)
- [5] Connors, M., Wiegert, P., Veillet, C.: Earth's Trojan asteroid. *Nature*, **475**, 481-483 (2011).
- [6] Karlsson, O.: Transitional and temporary objects in the Jupiter Trojan area. *Astron. Astrophys.*, **413**, 1153-1161 (2004).
- [7] Ketchum, J.A., Adams, F.C., Bloch, A.M.: Mean motion resonances in exoplanet systems: an investigation into nodding behavior. *Astrophys. J.*, **762**, 1-19 (2013).
- [8] Marzari, F., Scholl, H., Murray, C., Lagerkvist, C.: Origin and evolution of Trojan asteroids. *Asteroids III*, 725-738 (2002).
- [9] Morais, M.H.M.: A secular theory for Trojan-type motion. *Astron. Astrophys.*, **350**, 318-326 (1999).
- [10] Morais, M.H.M. Hamiltonian formulation of the secular theory for Trojan-type motion. *Astron. Astrophys.*, **369**, 677-689 (2001).
- [11] Namouni, F., Christou, A.A., Murray, C.D.: Coorbital dynamics at large eccentricity and inclination. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 2506-2509 (1999)
- [12] Neishtadt, A.I.: Jumps of the adiabatic invariant on crossing the separatrix and the origin of the 3:1 Kirkwood gap. *Sov. Phys. Dokl.*, **32**, 571-573 (1987)
- [13] Neishtadt, A.I.: On the change in the adiabatic invariant on crossing a separatrix in systems with two degrees of freedom. *J. Appl. Math. Mech.-USSR* **51**, 586-592 (1987)
- [14] Neishtadt, A.I., Sidorenko, V.V.: Wisdom system: dynamics in the adiabatic approximation. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **90**, 307-330 (2004).
- [15] Oshima, K., Yanao, T.: Jumping mechanisms of Trojan asteroids in the planar restricted three- and four-body problems. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **122**, 53-74 (2015)
- [16] Robutel, P., Souchay, J.: An introduction to the dynamics of Trojan asteroids. *Lect. Notes Phys.*, **790**, 195-227 (2010).
- [17] Schubart, J.: Long-period effects in nearly commensurable cases of the restricted three body problem. *Smithson. Astrophys. Obs. Spec. Report* **149** (1964)
- [18] Sidorenko, V.V.: Evolution of asteroid orbits at resonance 3:1 of their mean motions with Jupiter (planar problem). *Cosmic Research*, **44**, 440-455 (2006)

- [19] Sidorenko, V.V., Neishtadt, A.I., Artemyev, A.V., Zelenyi, L.M.: Quasi-satellite orbits in the general context of dynamics in the 1:1 mean motion resonance. Perturbative treatment. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **120**, 131-162 (2014).
- [20] Tsiganis, K., Dvorak, R., Pilat-Lohinger, E.: Thersites: a 'jumping' Trojan? *Astron. Astrophys.*, **354**, 1091-1100 (2000)
- [21] Wisdom, J. A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability. *Icarus*, **63**, 272-286 (1985).

## Оглавление

1. Введение .....	3
2. Усредненные уравнения для изучения динамики астероида при резонансе средних движений 1:1 .....	4
3. Применение усредненных уравнений для анализа различных вариантов вековой эволюции, включающих переходы между разными типами орбитального движения .....	13
4. Вероятностное описание поведения фазовых траекторий в окрестности кривой неопределенности.....	19
5. Заключение.....	21
Литература .....	22