ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 66 за 2015 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.

Эквивалентность по Чернову применительно к уравнениям эволюции матрицы плотности и функции Вигнера для линейного квантования

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. Эквивалентность по Чернову применительно к уравнениям эволюции матрицы плотности и функции Вигнера для линейного квантования // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 66. 28 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-66

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Л.А. Борисов, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев

Эквивалентность по Чернову применительно к уравнениям эволюции матрицы плотности и функции Вигнера для линейного квантования

Москва — 2015

Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.
Эквивалентность по Чернову применительно к уравнениям эволюции матрицы плотности и функции Вигнера для линейного квантования

Предложено расширение понятия эквивалентности по Чернову для операторнозначных функций на решения квантовых уравнений эволюции относительно матрицы плотности и функции Вигнера. Проанализированы эволюционные уравнения, получающиеся в результате произвольного линейного квантования. Показано, что в общем случае уравнение Вигнера имеет специфический диффузионный член, обусловленный расплыванием пакета квантовых мод.

Ключевые слова: однопараметрическая полугруппа, гамильтониан, функция Вигнера, эквивалентность по Чернову, квантовое уравнение Лиувилля

Borisov L.A., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh.
Equivalence by Chernoff and evolution equations for density matrix and Wigner function for linear quantization

The Chernoff equivalence notice for operator-functions is generalized for the solutions of quantum evolution equations for statistical operators – density matrix and Wigner function. The evolution equations are derived and investigated for arbitrary linear quantization. In general case Wigner equation has a diffusion part due to quantization packet effects.

Key words: one-parametric semigroup, Hamiltonian, Wigner function, Chernoff equivalence, quantum Liouville equation

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 14-01-00145, и гранта РНФ, проект № 14-11-00687

Содержание

1. Введение 3
2. Линейное квантование динамических систем 7
3. Уравнения эволюции матрицы плотности и функции Вигнера 12
4. Пример эволюции функции Вигнера для квантования Йордана 16
5. Эквивалентность по Чернову и квантовые статистические операторы .. 18
Литература 27

1. Введение

Настоящая работа является продолжением исследований по применению теоремы Чернова и понятия эквивалентной по Чернову оператор-функции [1-4] для описания эволюции квантовых систем. Развитие этого метода в последнее время связано с получением явных аналитических выражений [5-7] для решающих операторов задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных, таких как уравнение теплопроводности или Шредингера. Центральным математическим фактом, лежащим в основе этих исследований, является теорема Чернова [8], устанавливающая сходимость определенного итерационного процесса к полугруппе, которая представляет решение задачи Коши. Приведем здесь формулировку этой теоремы.

Теорема Чернова (Chernoff, 1968). Пусть X *– банахово пространство,* $B(X)$ *– банахово пространство линейных ограниченных операторов в* X *и пусть функция* $F: R_+ \to B(X)$ *удовлетворяет условию* $F(0)=I$*, непрерывна в сильной операторной топологии и удовлетворяет оценке при некотором α≥0:* $\|F(t)\|_{B(X)} \le e^{at}, t \ge 0$*. Тогда, если оператор* $F'(0)$ *замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов* $U(t), t>0$*, то* $\forall u \in X, \forall T>0$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0;T]} \left\| \left(U(t) - \left(F(t/n) \right)^n \right) u \right\|_X = 0. \qquad (1)$$

Интерес к применению теоремы Чернова для построения генераторов полугрупп связан не только с возможностью получения решения соответствующих уравнений в более явном виде, чем это позволяют теоремы существования, но и с приданием нового смысла некоторым математическим конструкциям, которые до этого воспринимались только как проявления определенной математической техники.

Например, при построении равновесного оператора плотности квантовой системы надо определить ядро оператора $\hat{\rho}(\beta) = \exp\left(-\beta \hat{H}\right)$, где $\hat{H}$ есть линейный самосопряженный оператор, символом которого является функция Гамильтона $H(q,p)$ классической динамической системы, заданная в фазовом пространстве координат q и импульсов p. Сопоставление классической динамической величине (т.е. такой, эволюция которой определяется уравнениями Гамильтона) квантового оператора, т.е. линейного оператора, действующего в Гильбертовом пространстве, называется квантованием. Математические аспекты процедуры квантования (в частности, линейного квантования) подробно описаны в трудах Ф.А. Березина [9]. Ядра соответствующих интегральных преобразований, связывающих между собой символы и операторы, содержатся в [10]. С технической точки зрения проквантовать можно любую функцию от координат и импульсов, преобразование Фурье которой по импульсам является обобщенной функцией (либо регулярной, либо с точечным носителем, либо медленного роста). В частности, можно построить оператор $\hat{f}(\beta)$, которому отвечает символ в виде классического равновесного распределения $f(\beta)=\exp(-\beta H)$. Однако оператор $\hat{f}(\beta)$ не описывает статистические свойства квантовой системы. Аналогично и классический символ, отвечающий квантовому оператору плотности $\hat{\rho}$, не является классическим равновесным распределением, т.е. не имеет статистического и механического смысла. Согласно же теореме Чернова, можно рассмотреть итерационный процесс, состоящий в построении оператора $\hat{D}_n(\beta)=\left(\hat{f}(\beta/n)\right)^n$, после чего перейти к пределу в сильной операторной топологии и получить оператор $\hat{D}(\beta)=\lim\limits_{n\to\infty}\hat{D}_n(\beta)$, обладающий полугрупповым свойством. В работе О.Г. Смолянова и соавторов [11] было показано, что этот предельный оператор совпадает с оператором плотности $\hat{\rho}$. Следовательно, чтобы получить статистический оператор, надо проквантовать классическую плотность функции распределения как динамическую величину, притом, что собственно квантование классического распределения физически бессмысленно, и бесконечное число раз свернуть полученный оператор с самим собой. Тем самым квантовая статистика получилась как предел итераций квантовой динамики. Поскольку же ядро оператора $\hat{D}_n(\beta)$ определено явно и представляет собой сверточное произведение, его можно рассматривать как усреднение известных функций, заданных в классическом фазовом пространстве, по известной мере. В пределе при $n\to\infty$ это позволяет трактовать квантовый статистический оператор как результат статистического усреднения бесконечного числа независимых случайных сдвигов в классическом пространстве, т.е., в сущности, как результат усреднения случайных полугрупп.

Указанная трактовка выводит нас на следующую задачу, связанную с усреднением полугрупп и с приданием смысла таким операциям. Очевидно, что линейная комбинация полугрупп не обязана быть полугруппой. Но если в результате итераций, аналогичных описанным выше, можно получить сходимость к полугруппе, то такая полугруппа объявляется эквивалентной по Чернову данной линейной комбинации полугрупп. Строгое определение эквивалентности по Чернову было дано О.Г. Смоляновым в [12] и обобщено на несколько более широкий класс операторов в [2].

Определение 1. Пусть X *– банахово пространство,* $B(X)$ *– банахово пространство линейных ограниченных операторов в* X, $\Pi(X)$ *– множество сильно непрерывных отображений* F *полуоси* $[0,+\infty)$ *в банахово пространство B(X), удовлетворяющих условию* $F(0)=I$. *Тогда* *операторнозначные функции* $F, G \in \Pi(X)$, *называются эквивалентными по Чернову, если для любого* $T > 0$ *и любого* $u \in X$ *выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0;T]} \left\| \left((F(t/n))^n - (G(t/n))^n \right) u \right\|_X = 0. \qquad (2)$$

На основе этого определения в [2-4] были построены примеры эквивалентных по Чернову операторов, отвечающих статистической смеси генераторов полугрупп. Теоретическое обобщение описываемого подхода позволило в [2] дать следующее определение обобщенного среднего значения случайной полугруппы.

Определение 2. Сильно непрерывная однопараметрическая полугруппа U *ограниченных линейных преобразований банахова пространства* X *является обобщенным средним значением случайной полугруппы* ξ, *если полугруппа* U *эквивалентна по Чернову математическому ожиданию* $M\xi$.

В работе [2] были доказаны теоремы об эквивалентности по Чернову для средних значений случайных полугрупп, в которых сформулированы достаточные условия того, чтобы эти средние значения, не будучи сами полугруппами, порождали полугруппу, эквивалентную им по Чернову. Приведем здесь соответствующие формулировки.

Теорема 1. Пусть $\{\hat{H}_n\}$ *– последовательность генераторов сильно непрерывных полугрупп в банаховом пространстве* X. *Пусть* $\{p_n\}$ *– последовательность неотрицательных чисел, сумма ряда из которых равна единице. Пусть также существует линейное подпространство* $D \subset X$, *являющееся существенной областью определения каждого из генераторов* $\hat{H}_n$, $n \in N$ *и такое, что для любого* $x \in D$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n \|\hat{H}_n x\|_X$ *сходится. Тогда, если оператор* $\hat{H}$ *определен на* D *формулой* $\hat{H}x = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \hat{H}_n x$ *и такой, что замыкание оператора* $\hat{H}$ *является генератором сильно непрерывной полугруппы* $\hat{U} = e^{t\hat{H}}$, $t \ge 0$, *то среднее значение* $\hat{F}(t)$ *случайной полугруппы* $\hat{U}_n = e^{t\hat{H}_n}$, *определяемое формулой* $\hat{F}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{t\hat{H}_n}$, $t \ge 0$, *эквивалентно по Чернову полугруппе* $\hat{U} = e^{t\hat{H}}$.

В частности, пусть $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$ – эрмитовы операторы (гамильтонианы), порождающие полугруппы $\hat{U}_1 = e^{t\hat{H}_1}$ и $\hat{U}_2 = e^{t\hat{H}_2}$, $t \ge 0$. Рассмотрим оператор $\hat{H} = p_1\hat{H}_1 + p_2\hat{H}_2$, $p_1 \ge 0,\ p_2 \ge 0,\ p_1 + p_2 = 1.$ Например, эта ситуация возникает тогда, когда гамильтониан проквантован частично по Йордану, а частично по Вейлю (см. далее п.2). Пусть операторы $\hat{H}_{1,2}$ таковы, что условия теоремы 1 выполнены. Тогда в соответствии с формулой (2) полугруппа $\hat{U}=e^{t\hat{H}}$ эквивалентна по Чернову линейной комбинации полугрупп $p_1\hat{U}_1+p_2\hat{U}_2$.

Аналогично формулируется и вторая теорема об эквивалентности, применяемая тогда, когда усреднение случайных полугрупп проводится по некоторой счетно-аддитивной мере, заданной на σ-алгебре подмножеств некоторого множества E.

Теорема 2. Пусть $\{\hat{H}_\varepsilon, \varepsilon\in E\}$ *– операторнозначная функция на множестве* E, *на* σ*-алгебре подмножеств* 2^E *которого задана неотрицательная нормированная счетно-аддитивная мера* μ, *такая, что ее значениями являются генераторы сильно непрерывных сжимающих полугрупп в банаховом пространстве* X. *Пусть существует линейное подпространство* $D\subset X$, *являющееся существенной областью определения каждого из генераторов* $\hat{H}_\varepsilon$ *и такое, что для любого* $x\in D$ *интеграл* $\int_E \left\|\hat{H}_\varepsilon x\right\|_X d\mu(\varepsilon)$ *сходится. Тогда, если оператор* $\hat{H}$ *определен на* D *формулой* $\hat{H}x=\int_E \hat{H}_\varepsilon x d\mu(\varepsilon)$ *и такой, что замыкание оператора* $\hat{H}$ *является генератором сильно непрерывной полугруппы* $\hat{U}=e^{t\hat{H}}$, $t\geq 0$, *то среднее значение случайной полугруппы* $\hat{F}(t)=\int_E e^{t\hat{H}_\varepsilon} d\mu(\varepsilon)$, $t\geq 0$ *эквивалентно по Чернову полугруппе* $\hat{U}=e^{t\hat{H}}$.

Отметим, что применительно к самой теореме Чернова введенное понятие эквивалентности означает, в частности, что при выполнении условий этой теоремы полугруппа, эквивалентная по Чернову операторной функции $\hat{f}(\beta)$, классическим символом которой является функция $f(\beta)=\exp(-\beta H)$, есть квантовый оператор плотности $\hat{\rho}(\beta)=\exp(-\beta\hat{H})$. Тем самым операторная функция, эквивалентная по Чернову некоторой «пробной» функции с неясным физическим смыслом, оказалась не просто оператором, удовлетворяющим определенным формальным условиям, но уже имеющим смысл как оператор плотности. Точно так же оператор $\hat{U}(t)$, классическим символом которого является функция $U(t)=\exp(-itH)$, эквивалентен по Чернову оператору $\exp(-it\hat{H})$, разрешающему задачу Коши для уравнения Шредингера. Поэтому теорема Чернова и введенные отношения эквивалентности позволяют обосновать процедуру аппроксимации квантовой полугруппы последовательностью итераций, на каждом шаге которых возникают операторы, которые не являются, вообще говоря, генераторами каких-либо полугрупп, но становятся таковыми в результате предельного перехода. Приведенные выше теоремы 1 и 2 обосновывают этот предельный переход.

Следовательно, приобретает самостоятельную ценность формирование набора операторных функций, получаемых в соответствии с введенным принципом эквивалентности по Чернову для различных эволюционных уравнений. Например, описываемая задача об усреднении полугрупп естественным образом возникает при решении квантового уравнения Лиувилля

$$i\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}=[\hat{H},\hat{\rho}],\quad \hat{\rho}\big|_{t\to+0}=\hat{\rho}_0 \tag{3}$$

относительно статистического оператора $\hat{\rho}$ в случае линейного квантования, когда оператор $\hat{H}$ представляется в виде статистической смеси операторов, как в примере, иллюстрирующем теорему 1 выше.

Для так называемого линейного квантования, определяемого в следующем разделе, актуальной является также и задача перехода к эквивалентным операторам в уравнении эволюции функции Вигнера. Эта функция является специальным преобразованием [10] матрицы плотности и имеет смысл квазивероятности (неположительной меры), по которой усредняется классический символ оператора, так что в результате получается среднее значение квантового оператора. Без такого перехода уравнение эволюции функции Вигнера оказывается в общем случае незамкнутым (исключение составляет только квантование Вейля). Цель настоящей работы состоит в исследовании эволюционного уравнения для функции Вигнера с использованием усреднения генераторов квантовых полугрупп в смысле определений 1 и 2.

2. Линейное квантование динамических систем

Опишем кратко концепцию линейного квантования, следуя [9, 10]. Для простоты формулы будем записывать для одномерного случая.

Пусть $\Gamma=R^2$ – классическое фазовое пространство одномерной динамической системы, записанной в терминах канонически сопряженных обобщенных координат q и p. Пусть также $A:\Gamma\to R$ – функция точки в Γ, E_A – гильбертово пространство функций A. Функция $A(q,p)$ в классической механике называется динамической величиной, или наблюдаемой. Одна из наблюдаемых $A=H$ называется функцией Гамильтона, она определяет семейство (группу) преобразований $U:\Gamma\to\Gamma$ фазового пространства. Задавая в Γ динамическую меру с плотностью $f(x,t)$, $x\equiv\{q,p\}\in\Gamma$ и гамильтониан H, можно построить уравнение эволюции плотности вероятности $f(x,t)$ (уравнение Лиувилля). Каждой наблюдаемой A сопоставляется ее среднее значение в момент времени t: $\langle A\rangle=\int\limits_{\Gamma}A(x)f(x,t)d\Gamma,\quad \langle A\rangle\in R.$

В квантовой механике вводится вещественное или комплексное гильбертово пространство L, полное по норме, определенной скалярным произведением в L. Определенные на L самосопряженные линейные операторы $\hat{A}$ называются наблюдаемыми. Самосопряженные положительные линейные операторы $\hat{\rho}$ с единичным следом называются состояниями. Среднее значение наблюдаемой $\hat{A}$ в состоянии $\hat{\rho}$ вычисляется по формуле

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr\hat{A}\hat{\rho}. \tag{4}$$

Пусть L реализовано как пространство функций $\psi(x), x \in R,$ с интегрируемым квадратом модуля. Элемент $\psi(x) \in L$ называется волновой функцией и является аналогом точки в классической механике. Одна из наблюдаемых $\hat{A} = \hat{H}$ называется гамильтонианом; этот оператор задает эволюцию элемента $\psi(x) \in L$:

$$i\partial_t \psi = \hat{H}\psi. \tag{5}$$

Принципом соответствия называются условия, налагаемые на возможные двусторонние отношения между множествами функций $\{A\}$ и операторов $\{\hat{A}\}$. Соответствие $\hat{A} \to A$ называется переходом к классическому пределу; при этом A называется символом оператора $\hat{A}$. Соответствие $A \to \hat{A}$ называется квантованием. Для построения квантовой динамики по классической следует указать квантование функции Гамильтона. При этом, каково бы ни было квантование, потребуем выполнения обычного соответствия для операторов координаты и импульса:

$$q \leftrightarrow x, \quad p \leftrightarrow -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad q^n \leftrightarrow (\hat{q})^n, \quad p^n \leftrightarrow (\hat{p})^n. \tag{6}$$

Известно [9], что соответствие между операторами и символами операторов полностью определяется формулами, выражающими символы операторов $\hat{p}\hat{A}, \hat{A}\hat{p}, \hat{q}\hat{A}, \hat{A}\hat{q}$ через символ оператора $\hat{A}$. Квантование называется линейным, если эти формулы имеют вид линейных операторов с постоянными коэффициентами, например:

$$\hat{A} \leftrightarrow A, \quad \hat{A}\hat{q} \leftrightarrow \left(\alpha q + \beta p + \mu\frac{\partial}{\partial q} + \lambda\frac{\partial}{\partial p}\right)A. \tag{7}$$

Соответствие между матрицей $\tilde{A}(x, y)$ оператора $\hat{A}$ и его классическим символом $A(q, p)$ определяется в линейном квантовании определяется линейным интегральным преобразованием $\hat{K}$ с ядром $K(q, p|x, y)$, называемым ядром квантования:

$$\tilde{A} = \hat{K}A: \quad \tilde{A}(x, y) = \int A(q, p)K(q, p|x, y)dqdp. \tag{8}$$

Оператор $\hat{A}$ действует на элемент $\psi \in L$ по формуле

$$\hat{A}\psi(x) = \int \tilde{A}(x, y)\psi(y)dy. \tag{9}$$

Здесь интегрирование проводится от $-\infty$ до $+\infty$. Далее пределы интегрирования для краткости не указываются, если предполагается, что интегрирование проводится по всему пространству.

Представителя класса линейных квантований, задаваемого ядром

$$K_\tau(q,p|x,y)=\frac{1}{2\pi}\delta(q-\tau x-(1-\tau)y)\exp[ip(x-y)],\ \tau\in[0,1], \tag{10}$$

будем называть τ-квантованием. Соответствующую матрицу оператора, получаемую по формуле (8), будем обозначать $\widetilde{A}_\tau(x,y)$. Из (8) и (10) следует, что для τ-квантования связь между ядрами операторов и их символами дается формулой

$$\widetilde{A}_\tau(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int A(\tau x+(1-\tau)y,p)\exp(ip(x-y))dp\,. \tag{11}$$

При таком квантовании моному $q^n p^m$ отвечает оператор

$$A=q^n p^m\leftrightarrow\hat{A}_\tau=(-i)^m\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(1-\tau)^k n^{[k]}x^{n-k}\frac{\partial^{m-k}}{\partial x^{m-k}}\,, \tag{12}$$

матрица которого имеет вид

$$\widetilde{A}_\tau(x,y)=(i)^m(\tau x+(1-\tau)y)^n\frac{\partial^m}{\partial y^m}\delta(x-y). \tag{13}$$

Для примера применения τ-квантования установим вид символа для оператора $\hat{B}_\tau=\hat{p}_\tau\hat{A}_\tau$, где $\hat{A}_\tau$ задается формулой (12).

С использованием (10) из (13) получаем

$$\widetilde{B}_\tau(x,y)=\int\widetilde{p}_\tau(x,z)\widetilde{A}_\tau(z,y)dz=(i)^{m+1}\int\frac{\partial\delta(x-z)}{\partial z}(\tau z+(1-\tau)y)^n\frac{\partial^m}{\partial y^m}\delta(z-y)dz=$$

$$=-(i)^{m+1}\left[n\tau(\tau x+(1-\tau)y)^{n-1}\frac{\partial^m}{\partial y^m}\delta(x-y)-(\tau x+(1-\tau)y)^n\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}}\delta(x-y)\right].$$

Сравнивая полученное выражение с (13), заключаем, что оператору $\hat{B}_\tau$ отвечает символ

$$\hat{B}_\tau\leftrightarrow B=\left(p-i\tau\frac{\partial}{\partial q}\right)A\leftrightarrow\hat{p}_\tau\hat{A}_\tau\,.$$

Аналогично получаем сопоставления вида (7):

$$\hat{A}_\tau\hat{p}_\tau\leftrightarrow\left(p+i(1-\tau)\frac{\partial}{\partial q}\right)A,\quad \hat{q}_\tau\hat{A}_\tau\leftrightarrow\left(q+i(1-\tau)\frac{\partial}{\partial p}\right)A,\quad \hat{A}_\tau\hat{q}_\tau\leftrightarrow\left(q-i\tau\frac{\partial}{\partial p}\right)A.$$

Среди τ-квантований существует единственное эрмитово квантование, которое получается при $\tau = 1/2$. В этом случае формула (10) определяет так называемое квантование Вейля. Другие варианты линейных эрмитовых квантований можно получить с помощью линейной комбинации ядер вида (10), как это сделано в [10]. Такая комбинация может быть представлена в виде линейного интегрального преобразования ядра квантования (10) с некоторой обобщенной функцией $Q(\tau)$, обращающейся в ноль вне отрезка $[0;1]$ и удовлетворяющей условию

$$\int_0^1 Q(\tau)d\tau = 1. \qquad (14)$$

В результате ядро квантования и матрица оператора представляются в виде

$$K = \int_0^1 Q(\tau)K_\tau d\tau, \quad \widetilde{A} = \int_0^1 Q(\tau)\widetilde{A}_\tau d\tau. \qquad (15)$$

Пусть символ $A(q,p)$ имеет вид произведения монома по импульсу на дифференцируемую функцию координаты:

$$A(q,p) = f(q)p^m. \qquad (16)$$

Тогда при квантовании с ядром (15) ему отвечает оператор

$$\hat{A} = (-i)^m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \sigma_k f^{(k)}(x)\hat{p}^{m-k}, \;\; \hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad \sigma_k = \int_0^1 Q(\tau)(1-\tau)^k d\tau. \qquad (17)$$

Величины σ_k будем называть моментами функции симметризации $Q(\tau)$, а величину $G(s)$ – характеристической функцией квантования:

$$G(s) = \int_0^1 Q(\tau)\exp(i\tau s)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_k (is)^k}{k!}. \qquad (18)$$

Из (17-18) следует, что для того, чтобы задать оператор, отвечающий полиномиальному по импульсам классическому символу, достаточно указать моменты σ_k функции квантования или характеристическую функцию $G(s)$. Символы, не имеющие полиномиального вида, будем считать проквантованными с тем же правилом квантования, определяемым ядром (15).

Пусть задано некоторое линейное эрмитово квантование. Для эрмитовости оператора необходимо и достаточно, чтобы функция симметризации $Q(\tau)$ была симметрична относительно центра отрезка $[0;1]$. В этом случае не все моменты функции симметризации независимы. Именно, моменты четного порядка могут быть заданы произвольно, а для моментов нечетного порядка тогда получается рекуррентная формула:

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{2k+1} = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{2k} (-1)^n \binom{2k+1}{n} \sigma_n\right]. \qquad (19)$$

В результате все моменты нечетного порядка могут быть выражены через четные моменты. В частности, $\sigma_3 = \frac{3}{2}\sigma_2 - \frac{1}{4},\ \sigma_5 = \frac{1}{2}(1 - 5\sigma_2 + 5\sigma_4)$, и т.д.

Среди эрмитовых квантований общеупотребительным является квантование Вейля, но иногда используются и другие способы симметризации, поскольку нет теоретически выводимого требования на использование только какого-нибудь одного правила квантования. Приведем некоторые из квантований с указанием моментов σ_k функции симметризации и характеристической функции квантования $G(s)$.

Квантование Вейля: $Q(\tau) \equiv Q_W(\tau) = \delta\left(\tau - \frac{1}{2}\right),\quad \sigma_k = \frac{1}{2^k},\quad G(s) = e^{is/2}$.

Квантование Йордана: $Q(\tau) \equiv Q_J(\tau) = \frac{\delta(\tau) + \delta(1-\tau)}{2},\ \sigma_k = \frac{1}{2}, k \ge 1, G(s) = \frac{1 + e^{is}}{2}$.

Квантование Борна: $Q(\tau) \equiv Q_B(\tau) = 1,\ \sigma_k = \frac{1}{k+1},\ G(s) = i\frac{1 - e^{is}}{s}$.

Отметим, что для неотрицательной $Q(\tau)$ формула (15) может быть интерпретирована как усреднение τ-квантований с весом $Q(\tau)$. Для такой функции можно оценить границы, в которых лежит второй момент функции симметризации. Имеем

$$\sigma_2 = \int_0^1 Q(\tau)\tau^2 d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} Q\left(\frac{1}{2} - a\right)\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 da = \int_{-1/2}^{1/2} Q\left(\frac{1}{2} - a\right)\left(a^2 + a + \frac{1}{4}\right)da \ge$$
$$\ge \frac{1}{4} + \int_{-1/2}^{1/2} Q\left(\frac{1}{2} - a\right)\left(a^2 + a\right)da \ge \frac{1}{4}.$$

Знак равенства получается здесь при квантовании Вейля.

С другой стороны, поскольку на отрезке $[0;1]$ справедлива оценка $\tau^2 \le \tau$, то $\sigma_2 \le \frac{1}{2}$. Знак равенства в этой оценке достигается для квантования Йордана.

С учетом (19) аналогично можно получить оценки для моментов других порядков. Тем же методом показывается, что квантования Вейля и Йордана определяют соответственно нижнюю и верхнюю границы промежутков высших моментов функции симметризации: $\frac{1}{2^k} \le \sigma_k \le \frac{1}{2}$. Эти два крайние в указанном смысле квантования будут рассматриваться далее в качестве конкретных примеров разных эрмитовых квантований.

Итак, используя формулы (15), можно представить оператор Гамильтона в виде статистической смеси τ-квантований, в общем случае даже не эрмитовых. Можно рассмотреть также и суперпозицию эрмитовых квантований посредством нормированной на единицу суммы двух или более функций симметризации, симметричных относительно центра отрезка $[0;1]$. Квантовый гамильтониан, будучи генератором квантовой эволюции, представляет собой статистическую смесь τ-квантований, поэтому теоремы 1 и 2 об усреднении генераторов квантовых полугрупп имеют практическую важность.

Построим теперь для линейного эрмитового квантования уравнения эволюции квантовых статистических операторов.

3. Уравнения эволюции матрицы плотности и функции Вигнера

Обозначим через $\rho(x,y)$ матрицу оператора плотности. Тогда среднее значение оператора $\hat{A}$ в состоянии $\hat{\rho}$ определяется по формуле

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = Tr\hat{\rho}\hat{A} = \int \rho(x,y)\tilde{A}(y,x)dxdy. \tag{20}$$

Если подставить в (20) формулу (8) для матрицы оператора $\hat{A}$, то среднее значение оператора можно получить, интегрируя его классический символ с некоторой функцией $W(q,p)$, называемой функцией Вигнера:

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \int W(q,p)A(q,p)dqdp, \tag{21}$$

$$W(q,p) = \int \rho(x,y)K(q,p|y,x)dxdy \quad \Leftrightarrow W = \hat{K}^T \hat{\rho}. \tag{22}$$

В (22) верхний индекс T означает транспонирование, т.е. взаимную замену в ядре (10) x на y. Для τ-квантования формула (22) имеет вид

$$\begin{aligned} W_\tau(q,p) &= \hat{K}_\tau^T \hat{\rho} = \int \rho(x,y)K_\tau(q,p|y,x)dxdy = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int \rho(q-\tau\xi, q+(1-\tau)\xi)\exp(ip\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{23}$$

Обратно, для произвольного τ-квантования с ядром (10) имеем

$$\hat{\rho} = 2\pi\hat{K}_\tau^+ W \Leftrightarrow \rho(x,y) = \int W_\tau(\tau y + (1-\tau)x, p)\exp(ip(x-y))dp, \tag{24}$$

где «плюс» у ядра квантования означает эрмитово сопряжение. Поскольку же матрица плотности в (24) не зависит от τ, можно умножить это равенство на $Q(\tau)$ и усреднить по τ. Левая часть (24) при этом не изменится, и тогда получаем

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= \int V(x,y;p)\exp(ip(x-y))dp, \\ V(x,y;p) &= \int_0^1 W_\tau(\tau y + (1-\tau)x, p)Q(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{25}$$

Из вида ядра K_τ (10) и эрмитовости матрицы плотности следует, что функция V действительна и симметрична относительно замены x на y. Более того, если классический гамильтониан есть функция с разделенными переменными q и p, то матрица плотности не зависит от квантования, и тогда функция V инвариантна относительно выбора квантования Q.

В соответствии с (15), определим теперь полную функцию Вигнера, отвечающую квантованию с ядром K формулой

$$W(q,p)=\int_0^1 W_\tau(q,p)Q(\tau)d\tau\,. \qquad (26)$$

Из (22) следует, что функция Вигнера явно зависит от квантования, даже если матрица плотности от него не зависит.

С одной стороны, удобство представления средних значений квантовых операторов в терминах функции Вигнера состоит в том, что усреднение в (21) проводится в классическом фазовом пространстве. С другой стороны, помимо известного факта о неположительности функции Вигнера (в общем случае эрмитового квантования), т.е. о невозможности ее интерпретации как плотности совместной функции распределения координат и импульсов, существенным затруднением при ее использовании является то, что при вычислении среднего значения квантового оператора функция Вигнера сворачивается с классическим символом, отвечающим этому оператору при том или ином квантовании. Символ же, в отличие от оператора, для произвольного квантования не восстанавливается по виду оператора, поэтому формула (21) оказывается практически бесполезной. Для τ-квантования существует формула обращения

$$A(q,p)=\int \widetilde{A}_\tau\big(q-(1-\tau)\xi,\,q+\tau\xi\big)\exp(ip\xi)d\xi\,, \qquad (27)$$

но для общего квантования после проведения симметризации (15) восстановление символа неоднозначно.

Отправной точкой для вывода уравнения эволюции функции Вигнера является квантовое уравнение Лиувилля (3), которое при заданном гамильтониане $\hat{H}$ записывается через матричные элементы операторов в виде

$$i\partial_t\rho(x,y)=\int\Big(\widetilde{H}(x,z)\rho(z,y)-\widetilde{H}(z,y)\rho(x,z)\Big)dz. \qquad (28)$$

Подчеркнем, что в силу эрмитовости матрицы плотности ее эволюция генерируется гамильтонианом, который проквантован эрмитовым линейным квантованием. Используя представление ядра (10), с учетом (15) получаем из (28) более развернутую запись уравнения Лиувилля:

$$i\partial_t\rho(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 Q(\tau)\int H\big(\tau x+(1-\tau)z,\,p\big)\rho(z,y)e^{ip(x-z)}dz\,dp\,d\tau\,-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^1 Q(\tau)\int H\big(\tau z+(1-\tau)y,\,p\big)\rho(x,z)e^{ip(z-y)}dz\,dp\,d\tau.$$

Из последнего выражения видно, что при квантовании, определяемом равенством (10), происходит преобразование Фурье классического гамильтониана по импульсам. Обозначим соответствующий образ через $H_\omega(q)$, т.е. $H_\omega(q)=\frac{1}{2\pi}\int H(q,p)e^{-i\omega p}dp$. Тогда получаем

$$i\partial_t\rho(x,y)=\int_0^1 Q(\tau)\int H_{z-x}\big(\tau x+(1-\tau)z\big)\rho(z,y)dzd\tau -$$
$$-\int_0^1 Q(\tau)\int H_{y-z}\big(\tau z+(1-\tau)y\big)\rho(x,z)dzd\tau.$$

Используя представление (18) для характеристической функции квантования, в полученном выражении можно провести интегрирование по τ, если перейти к Фурье-образам гамильтониана не только по импульсам, но и по координатам, т.е. если положить

$$H_{k,\omega}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int H(q,p)e^{-ikq-i\omega p}dqdp. \qquad (29)$$

В этих обозначениях имеем

$$i\partial_t\rho(x,y)=\int\Big(G(-ku)H_{k,u}\rho(x+u,y)e^{ik(x+u)}-H_{k,-u}G(ku)\rho(x,y+u)e^{iky}\Big)dkdu. \quad (30)$$

В частности, если гамильтониан проквантован по Вейлю, то $G(ku)=e^{iku/2}$, после чего (30) принимает вид

$$i\partial_t\rho(x,y)=\int\big(H_u(x+u/2)\rho(x+u,y)-H_{-u}(y+u/2)\rho(x,y+u)\big)du. \qquad (31)$$

Для квантования Йордана уравнение Лиувилля будет отличаться от (31):

$$i\partial_t\rho(x,y)=\frac{1}{2}\int\rho(x+u,y)\cdot\big(H_u(x+u)+H_u(x)\big)du-$$
$$-\frac{1}{2}\int\rho(x,y+u)\cdot\big(H_{-u}(y+u)+H_{-u}(y)\big)du.$$

Таким образом, выбор квантования проявляется в квантовом уравнении Лиувилля как способ аппроксимации дифференциального оператора в классическом уравнении Лиувилля его конечно-разностным аналогом.

Получим теперь уравнение эволюции функции Вигнера (22). Поскольку функция Вигнера определяется как среднее значение τ-функции Вигнера $W_\tau(q,p)$ в соответствии с формулами (23), (26), сначала получим уравнение эволюции для $W_\tau(q,p)$, а потом усредним его по функции симметризации.

Дифференцируя (26) по времени t и подставляя вместо $i\partial_t\rho(x,y)$ правую часть уравнения Лиувилля (28), получаем

$$i\partial_t W_\tau(q,p)=\int K_\tau\big(q,p\big|y,x\big)\Big(\widetilde{H}(x,z)\rho(z,y)-\widetilde{H}(z,y)\rho(x,z)\Big)dxdydz. \qquad (32)$$

Проводя выкладки, аналогичные выводу уравнения (30), получаем

$$i\partial_t W_\tau(q,p)=\int H_{k,\omega}G(-k\omega)\exp(i(kq+\omega p+(1-\tau)k\omega))\Delta_\tau W_\tau dkd\omega, \qquad (33)$$

где для сокращения обозначений введен разностный оператор

$$\Delta_\tau W_\tau = W_\tau(q+(1-\tau)\omega, p-\tau k) - W_\tau(q-\tau\omega, p+(1-\tau)k). \qquad (34)$$

Уравнение для полной функции Вигнера получается отсюда посредством усреднения (34) по τ с функцией симметризации $Q(\tau)$:

$$i\partial_t W(q,p)=\int H_{k\omega}G(-k\omega)e^{i(kq+\omega p+k\omega)}dkd\omega\int_0^1 Q(\tau)\exp(-i\tau k\omega)\Delta_\tau W_\tau d\tau. \qquad (35)$$

Из (35) следует, что при произвольном линейном квантовании в виде статистической смеси ядер (15) уравнение эволюции для функции Вигнера не является замкнутым, так как выражается через усреднение разностного оператора, зависящего от τ, причем действует этот оператор не на саму функцию Вигнера $W(q,p)$, а на ее τ-компоненты. Исключением является случай квантования Вейля, когда справа и слева стоят одни и те же функции Вигнера:

$$i\partial_t W(q,p)=\int H_{k,\omega}e^{ikq+i\omega p}\big(W(q+\omega/2, p-k/2)-W(q-\omega/2, p+k/2)\big)dkd\omega. \qquad (36)$$

Для квантования Йордана уравнение эволюции полной функции Вигнера представляется в виде системы двух уравнений: одного для 0-квантования, а другого – для 1-квантования:

$$i\partial_t W_0(q,p)=\frac{1}{2}\int H_{k,\omega}e^{ikq+i\omega p}\left(1+e^{ik\omega}\right)\big(W_0(q+\omega,p)-W_0(q,p+k)\big)dkd\omega;$$

$$i\partial_t W_1(q,p)=\frac{1}{2}\int H_{k,\omega}e^{ikq+i\omega p}\left(1+e^{-ik\omega}\right)\big(W_1(q,p-k)-W_1(q-\omega,p)\big)dkd\omega; \qquad (37)$$

$$W_J(q,p)=\frac{1}{2}W_0(q,p)+\frac{1}{2}W_1(q,p).$$

Отметим, что τ-компоненты функции Вигнера в общем случае не являются не только положительными, но даже и вещественными, вещественной является лишь полная функция Вигнера – в примере (37) это функция $W_J(q,p)$.

Из (37) видно, что для того, чтобы решить начальную задачу для уравнения Вигнера (35), ее надо решить для τ-компонент соответствующей функции, начальные условия для которых определяются формулой

$$W_\tau(q,p)\big|_{t=0}=W_\tau^0(q,p)=\int \rho^0(x,y)K_\tau(q,p|y,x)dxdy \equiv \hat{K}_\tau^T\hat{\rho}^0 =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int \rho^0(q-\tau\xi, q+(1-\tau)\xi)\exp(ip\xi)d\xi,$$

после чего усреднить полученные решения по мере, плотность которой дается функцией симметризации $Q(\tau)$.

В физически важном случае, когда классический гамильтониан представляется в виде суммы $H(q,p)=\Phi(q)+\frac{p^2}{2}$, уравнение эволюции (35) для полной функции Вигнера преобразуется к виду

$$\begin{gathered}i\partial_t W(q,p)+ip\frac{\partial W(q,p)}{\partial q}=\\ \int_0^1 Q(\tau)\left(\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 W_\tau(q,p)}{\partial q^2}+\int \Phi_k e^{ikq}\left(W_\tau(q,p-\tau k)-W_\tau(q,p+(1-\tau)k)\right)dk\right)d\tau.\end{gathered}\tag{38}$$

Правая часть (38) содержит слагаемые двух типов. Первое слагаемое имеет диффузионный вид, а второе – силовой. Для квантования Вейля диффузионный член обращается в ноль, и в уравнении эволюции остается только силовой член, обусловленный действием потенциала $\Phi(q)$. Важным аспектом, требующим отдельного изучения, является в общем случае диффузионный характер уравнения эволюции функции Вигнера (33), в отличие от квантового уравнения Лиувилля (28), из которого оно и было получено путем определенного преобразования матрицы плотности. Указанный эффект можно назвать диффузией квантования, проявляющийся тогда, когда функция симметризации отлична от дельта-функции. Рассмотрим этот эффект более подробно на следующем примере.

4. Пример эволюции функции Вигнера для квантования Йордана

Рассмотрим гамильтониан $H(q,p)=cq+\frac{p^2}{2}$, где c есть некоторая постоянная. Для него уравнение эволюции (38) функции Вигнера принимает вид

$$\partial_t W(q,p)+p\frac{\partial W(q,p)}{\partial q}+c\frac{\partial W(q,p)}{\partial p}=-i\int_0^1 Q(\tau)\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^2 W_\tau(q,p)}{\partial q^2}d\tau.\tag{39}$$

Проанализируем влияние диффузионного члена в уравнении (39) для случая квантования Йордана, когда вещественная функция $W_J(q,p)$ представляется в виде полу-суммы комплекснозначных функций $W_0(q,p)$ и $W_1(q,p)$. В этом случае система уравнений (37) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\partial_t W_0(q,p)+p\frac{\partial W_0(q,p)}{\partial q}+c\frac{\partial W_0(q,p)}{\partial p}&=\frac{i}{2}\frac{\partial^2 W_0(q,p)}{\partial q^2},\\ \partial_t W_1(q,p)+p\frac{\partial W_1(q,p)}{\partial q}+c\frac{\partial W_1(q,p)}{\partial p}&=-\frac{i}{2}\frac{\partial^2 W_1(q,p)}{\partial q^2}.\end{aligned}\tag{40}$$

Каждое из уравнений системы (40) решается отдельно. Искомую функцию в каждом уравнении обозначим для краткости $f(q,p,t)$, $f(q,p,t)\big|_{t=0}=f^0(q,p)$.

Перейдем в (40) к лапласовским образам по времени, полагая $\tilde{f}(q,p,z)=\int\limits_0^\infty f(q,p,t)e^{-tz}dt$, и к образам Фурье по переменной q, полагая $f_k(p,t)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(q,p,t)e^{ikq}dq$. Тогда для первого уравнения из (40) получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение по переменной p с параметрами k и z относительно $\tilde{f}_k(p,z)$:

$$c\frac{d\tilde{f}_k(p,z)}{dp}=\left(-z-\frac{i}{2}k^2+ikp\right)\tilde{f}_k(p,z)+f_k^0(p). \tag{41}$$

Второе преобразованное уравнение из (40) отличается от (41) только знаком при члене с $ik^2/2$:

$$c\frac{d\tilde{f}_k(p,z)}{dp}=\left(-z+\frac{i}{2}k^2+ikp\right)\tilde{f}_k(p,z)+f_k^0(p).$$

Рассмотрим уравнение (41). Его общее решение имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{f}_k(p,z)&=\exp\left(-\frac{2zp+ik^2p-ikp^2}{2c}\right)\times\\&\times\left\{A(k,z)+\int f_k^0(p)\exp\left(\frac{2zp+ik^2p-ikp^2}{2c}\right)dp\right\},\end{aligned} \tag{42}$$

где $A(k,z)$ есть функция, определяемая из условий задачи при $p=0$. Будем для простоты считать, что функция $A(k,z)$ одна и та же для $W_0(q,p)$ и $W_1(q,p)$, а также и то, что в начальный момент времени матрица плотности $\rho_0(x,y)$ зависит только от разности $x-y$. Тогда, обозначая $\tilde{\rho}_0(p)=\dfrac{1}{2\pi}\int e^{ip\xi}\rho_0(\xi)d\xi$, получаем решение для фурье-лапласовского образа функции $W_J(q,p)$ в виде:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{J,k}(p,z)&=A(k,z)\exp\left(-\frac{2zp-ikp^2}{2c}\right)\cos\left(\frac{k^2p}{2c}\right)+\\&+\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{2zp+ik^2p-ikp^2}{2c}\right)\delta(k)\int\tilde{\rho}_0(p)\exp\left(\frac{2zp+ik^2p-ikp^2}{2c}\right)dp+\\&+\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{2zp-ik^2p-ikp^2}{2c}\right)\delta(k)\int\tilde{\rho}_0(p)\exp\left(\frac{2zp-ik^2p-ikp^2}{2c}\right)dp.\end{aligned} \tag{43}$$

В частности, если $\tilde{\rho}_0(p)=\delta(p)$, то

$$\widetilde{W}_{J,k}(p,z) = \exp\left(-\frac{2zp - ikp^2}{2c}\right)\cos\left(\frac{k^2 p}{2c}\right)\left(A(k,z) + \delta(k)\right). \qquad (44)$$

Для квантования Вейля косинус в аналогичном решении заменяется на единицу.

Делая теперь в (43) обратное преобразование, получаем решение эволюционного уравнения (39) в виде свертки фундаментального решения уравнения диффузии и определенным образом сдвинутого начального условия $W_J^0(q,p)$. Если предположить для простоты, что это начальное условие одно и то же для 0-компоненты и 1-компоненты функции Вигнера, то получаем

$$W_J(q,p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} W_J^0(q-s, p-ct)\cos\left(\frac{s^2}{2t} - \frac{t}{2}(2p-ct)^2\right)ds. \qquad (45)$$

Отметим, что решение (45) можно также получить из (40) путем замены переменных $t'=t,\ p'=p-ct,\ W(q,p,t)=u(q,p',t')$, так что для $u(q,p',t')$ как функции, удовлетворяющей первому уравнению системы (40), получается уравнение

$$\frac{\partial u(q,p',t')}{\partial t'} = -(ct'+p')\frac{\partial u(q,p',t')}{\partial q} + \frac{i}{2}\frac{\partial^2 u(q,p',t')}{\partial q^2},$$

решение которого строится аналогично (44) с помощью преобразования Фурье по переменной q.

5. Эквивалентность по Чернову и квантовые статистические операторы

Исследуем далее вопрос о возможности введения понятий эквивалентных по Чернову оператор-функций применительно к задаче эволюции квантовых статистических операторов, имея в виду матрицу плотности и функцию Вигнера.

В классической статистической механике уравнение эволюции плотности функции распределения $f(q,p)$ в фазовом пространстве системы, задаваемой независящим от времени гамильтонианом $H(q,p)$, т.е. классическое уравнение Лиувилля, имеет вид:

$$\partial_t f = -[H,\ f] \equiv -Lf, \quad L = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}, \quad f|_{t=0} = f_0. \qquad (46)$$

Его решение дается формулой

$$f = e^{-tL} f_0. \qquad (47)$$

Для решения в виде (47) выполняются утверждения теорем 1 и 2 относительно эквивалентной по Чернову средней полугруппе, если гамильтониан представляет собой статистическую смесь нескольких гамильтонианов.

В квантовой механике решение квантового уравнения Лиувилля (28) относительно оператора плотности $\hat{\rho}$ принято представлять через генератор эволюции волновых функций, т.е. через оператор Гамильтона $\hat{H}$, классическим символом которого является $H(q,p)$, в виде

$$\hat{\rho}=e^{-it\hat{H}}\hat{\rho}^0 e^{it\hat{H}}\equiv e^{-t\hat{L}_{\hat{H}}}\left(\hat{\rho}^0\right), \tag{48}$$

где $e^{-t\hat{L}_{\hat{H}}}$ – полугруппа преобразований пространства операторов плотности, порождаемая задачей Коши для уравнения (28) с оператором Гамильтона $\hat{H}$. Согласно [13] считаем, что пространство операторов плотности $B_*(H)$ является банаховым пространством ядерных операторов $T_1(H)$, сопряженным к которому является банахово пространство $B(H)$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H.

Еще раз подчеркнем, что, в отличие от гамильтониана $H(q,p)$, который при квантовании (8) переходит в оператор $\hat{H}$, плотность $f(q,p)$ в уравнении (46) и его решении (47) не является классическим символом квантовой плотности $\hat{\rho}$ из (48) в том смысле, что если проквантовать $f(q,p)$ по правилу (8), то получающаяся матрица $\rho(x,y)$ не будет являться матрицей оператора плотности, так как, например, в равновесном случае такой оператор не будет удовлетворять уравнению Блоха $\dfrac{\partial\hat{\rho}}{\partial\beta}=-\hat{H}\hat{\rho}$.

Согласно (15), для произвольного линейного квантования уравнение (28) представляется в виде статистической смеси действий операторов $\hat{H}_\tau$. Заметим, что если $\tau\neq 1/2$, то отдельная мода τ-квантования не порождает в общем случае эрмитов оператор, так что гамильтониан $\hat{H}_\tau$ может не быть самосопряженным оператором. В связи с этим возникает вопрос, будет ли такой гамильтониан порождать сильно непрерывную полугруппу (уже не обязательно унитарных) операторов $\hat{U}_\tau(t)=e^{-it\hat{H}_\tau}$. Для гамильтонианов с разделяющимися переменными оператор $\hat{H}_\tau$ самосопряжен, но существуют и другие гамильтонианы, удовлетворяющие требованиям теоремы 2 .

Рассмотрим следующий модельный пример. Пусть классический гамильтониан имеет вид $H(q,p)=T(p)+V(q)+cpq$, где c – некоторая постоянная. Тогда при τ-квантовании получаем $\hat{H}_\tau-\hat{H}_{1/2}=ic\left(\tau-\dfrac{1}{2}\right)\hat{I}$. Поскольку же самосопряженный оператор $\hat{H}_{1/2}$ порождает унитарную группу $\hat{U}_{1/2}(t)=e^{-it\hat{H}_{1/2}}$, то и оператор $\hat{H}_\tau$ при любом $\tau\in[0;1]$ порождает сильно непрерывную полугруппу $\hat{U}_\tau(t)$, тип которой допускает оценку сверху $\omega\leq\dfrac{1}{2}|c|$.

Далее мы будем предполагать, что рассматриваемые классические гамильтонианы таковы, что оператор $\hat{H}_\tau$ при всех $\tau \in [0;1]$ является генератором сильно непрерывной полугруппы.

Итак, обозначим через $\hat{U}_\tau(t) = e^{-it\hat{H}_\tau}$ разрешающий оператор уравнения (28) для τ-квантования, а через $\hat{\rho}_\tau$ – соответствующее решение, записываемое по аналогии с (48) в виде:

$$\hat{\rho}_\tau(t) = \hat{U}_\tau(t)\hat{\rho}^0\hat{U}_\tau^{-1}(t). \tag{49}$$

Подчеркнем, что $\hat{\rho}_\tau$ из (49) в общем случае не обладает свойствами матрицы плотности: этот оператор не обязательно эрмитов, ибо τ-квантование в общем случае не эрмитово. Однако его усреднение с помощью функции симметризации провести можно, поскольку начальное распределение $\hat{\rho}^0$ одно и то же для всех τ-квантований, и получающийся средний оператор будет эрмитов.

Так как $\hat{H} \equiv \hat{H}_{avr} = \int_0^1 \hat{H}_\tau Q(\tau)d\tau$, то оператор $\hat{U}_{avr} = \int_0^1 \hat{U}_\tau Q(\tau)d\tau$ эквивалентен по Чернову оператору $e^{-it\hat{H}}$, так что оператору плотности $\hat{\rho}$ из (48) можно поставить в соответствие оператор $\hat{\rho}_{avr} = \int_0^1 \hat{\rho}_\tau Q(\tau)d\tau$, т.е. среднее значение операторов $\hat{\rho}_\tau$ из (49). Таким образом, для уравнения Лиувилля относительно квантового оператора плотности при линейном квантовании естественным образом определяется эквивалентный по Чернову оператор эволюции в соответствии с определениями 1 и 2.

Резюмируя, приходим к следующему утверждению.

Предложение 1. Пусть операторы $\hat{H}_\tau$, $\tau \in [0;1]$ *удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда среднее значение*

$$\hat{U}_{avr}(t) = \int_0^1 e^{-it\hat{H}_\tau} Q(\tau)d\tau \tag{50}$$

случайной полугруппы $\hat{U}_\tau(t) = e^{-it\hat{H}_\tau}$ *эквивалентно по Чернову сильно непрерывной полугруппе* $e^{-it\hat{H}_{avr}}$*, а среднее значение*

$$\hat{S}_{avr}(t) = \int_0^1 e^{-t\hat{L}_{\hat{H}_\tau}} Q(\tau)d\tau \tag{51}$$

случайной полугруппы $\hat{S}_\tau(t) = e^{-t\hat{L}_{\hat{H}_\tau}}$ *эквивалентно по Чернову сильно непрерывной полугруппе* $e^{-t\hat{L}_{\hat{H}_{avr}}}$ *в пространстве* $B_*(H)$ *матриц плотности.*

Развивая таким образом определение 1, дадим определение эквивалентной по Чернову полугруппы в контексте решения квантового уравнения Лиувилля.

Определение 3. операторнозначную функцию $F:[0;+\infty]\to B(B_*(H))$ *из множества* $\Pi(B_*(H))$ *будем называть эквивалентной по Чернову полугруппе* $U(t)\in\Pi(B_*(H))$, $t\geq 0$, *если для всех* $\hat{\rho}\in B_*(H)$ *для всех* $T>0$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0;T]}\left\|\left(U(t)-\left(F(t/n)\right)^n\right)\hat{\rho}\right\|_{B_*(H)}=0. \qquad (52)$$

Предложение 1 дает достаточные условия эквивалентности по Чернову операторнозначных функций в пространстве $\Pi(B_*(H))$.

Определение 4. Порожденную усредненной полугруппой $e^{-t\hat{L}_{\hat{H}_{avr}}}$ *матрицу плотности*

$$\hat{\rho}_{avr}=\int_0^1\hat{\rho}_\tau Q(\tau)d\tau=\int_0^1 e^{-t\hat{L}_{\hat{H}_\tau}}\left(\hat{\rho}^0\right)Q(\tau)d\tau \overset{Chernoff}{\cong} e^{-t\hat{L}_{\hat{H}_{avr}}}\left(\hat{\rho}^0\right) \qquad (53)$$

будем называть усредненной траекторией в пространстве матриц плотности $B_*(H)$.

Что касается уравнения эволюции полной функции Вигнера, то непосредственно применить теорему 2 к его решению не удается, поскольку в (35) усреднение проводится не только для эволюционного оператора, но одновременно и для τ-компоненты функции Вигнера.

Рассмотрим возникающие трудности более детально.

Связь с классической механикой для функции Вигнера проявляется не только в правиле (21) усреднения квантовых операторов в классическом фазовом пространстве, но также и в том, что решение эволюционного уравнения для нее может быть записано в форме, аналогичной (47) для решения классического уравнения Лиувилля. Вернемся к уравнению (33), решение которого формально может быть представлено в виде

$$W_\tau(q,p)=e^{-it\hat{R}_\tau}W_\tau^0(q,p), \qquad (54)$$

где введен оператор

$$\hat{R}_\tau=\int H_{k,\omega}G(-k\omega)e^{ikq+i\omega p+ik\omega}e^{-i\tau\left(k\omega-i\omega\frac{\partial}{\partial q}-ik\frac{\partial}{\partial p}\right)}\left(e^{\omega\frac{\partial}{\partial q}}-e^{k\frac{\partial}{\partial p}}\right)dkd\omega.$$

Используя представление (23), начальные условия для $W_\tau^0(q,p)$ можно записать через $\hat{\rho}^0$, так что выражение (54) принимает вид

$$W_\tau=e^{-it\hat{R}_\tau}\hat{K}_\tau^T\hat{\rho}^0. \qquad (55)$$

Формула (55) показывает, почему решение начальной задачи для полной функции Вигнера не может быть представлено в форме усреднения генератора полугруппы в эквивалентной по Чернову трактовке: сходимости к генератору полугруппы, как это требуется в теоремах 1 и 2, препятствует наличие в этой формуле ядра $\hat{K}_\tau^T$. Как легко проверить, сверточное произведение ядра $\hat{K}_\tau^T$ не преобразуется снова в ядро того же вида. Например, для 0-квантования получается «почти» нужное выражение (с точностью до множителя)

$$\int K_0(q,p|x,z)K_0(q,p|z,y)dz = \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(q-y)e^{ip(x-y)} = \frac{1}{2\pi}K_0(q,p|x,y),$$

но для $1/2$-квантования имеем совсем другую формулу:

$$\int K_{1/2}(q,p|x,z)K_{1/2}(q,p|z,y)dz = \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(x-y)e^{ip(x-y)}.$$

Последнее выражение фактически является дельта-функцией от $x-y$, не приводящей к соответствию «символ – матрица оператора». В результате итерационная процедура вида (1) не может быть реализована, и потому оператор эволюции полной функции Вигнера не является эквивалентным по Чернову среднему оператору эволюции ее τ-компонент.

Заметим, что отдельно для семейства операторов $\hat{L}_\tau = e^{-it\hat{R}_\tau}$ можно ввести средний оператор $\hat{\bar{L}} = \int_0^1 \hat{L}_\tau Q(\tau)d\tau$, для которого существует эквивалентный ему по Чернову оператор $\hat{L} = e^{-it\hat{\bar{R}}}$, где $\hat{\bar{R}} = \int_0^1 \hat{R}_\tau Q(\tau)d\tau$.

Из (18) находим, что оператор $\hat{\bar{R}}$ имеет следующий явный вид:

$$\hat{\bar{R}} = \int H_{k,\omega}G(-k\omega)e^{ikq+i\omega p+ik\omega}G\left(-k\omega+i\omega\frac{\partial}{\partial q}+ik\frac{\partial}{\partial p}\right)\left(e^{\omega\frac{\partial}{\partial q}}-e^{k\frac{\partial}{\partial p}}\right)dkd\omega. \quad (56)$$

Следовательно, гипотетическое эволюционное уравнение с разрешающим оператором $\hat{L} = e^{-it\hat{\bar{R}}}$ относительно некоторой функции $\overline{W}(q,p)$ имеет вид:

$$i\frac{\partial\overline{W}(q,p)}{\partial t} =$$
$$= \int H_{k,\omega}G(-k\omega)e^{ikq+i\omega p+ik\omega}G\left(-k\omega+i\omega\frac{\partial}{\partial q}+ik\frac{\partial}{\partial p}\right)\left(e^{\omega\frac{\partial}{\partial q}}-e^{k\frac{\partial}{\partial p}}\right)\overline{W}(q,p)dkd\omega. \quad (57)$$

Для квантования Вейля это уравнение, очевидно, совпадает с (36). Для квантования Йордана вместо системы (37) получаем одно уравнение:

$$i\partial_t \overline{W}_J(q,p) = \frac{1}{4}\int H_{k,\omega} e^{ikq+i\omega p}\left(1+e^{ik\omega}\right)\left(\overline{W}_J(q+\omega,p)-\overline{W}_J(q,p+k)\right)dk d\omega + \\ +\frac{1}{4}\int H_{k,\omega} e^{ikq+i\omega p}\left(1+e^{-ik\omega}\right)\left(\overline{W}_J(q,p-k)-\overline{W}_J(q-\omega,p)\right)dk d\omega. \tag{58}$$

Покажем, что функция $\overline{W}(q,p)$, удовлетворяющая уравнению (57), не может считаться полноценной функцией Вигнера в том смысле, что она не дает правильную эволюцию квантовых средних. Для этого рассмотрим классический гамильтониан с разделенными переменными, который имеет вид

$$H(q,p) = \Phi(q) + \frac{p^2}{2}.$$

Тогда для функции $\overline{W}(q,p)$ из уравнения (57) следует уравнение, вид которого близок к уравнению (38):

$$\frac{\partial \overline{W}(q,p)}{\partial t} + p\frac{\partial \overline{W}(q,p)}{\partial q} = \\ = -i\int_0^1 Q(\tau)\left(\int \Phi_k e^{ikq}\left(\overline{W}(q,p-\tau k)-\overline{W}(q,p+(1-\tau)k)\right)dk\right)d\tau. \tag{59}$$

Отличие уравнения (59) от (38) состоит в том, что теперь функция $\overline{W}(q,p)$ уже не снабжена нижним индексом τ но, что самое главное, в уравнении (59) отсутствует диффузионный член, обращающийся в ноль для оператора $\hat{L} = e^{-it\hat{\hat{R}}}$, поскольку полное квантование эрмитово.

Следовательно, только для квантования Вейля эволюция квантовых средних в эквивалентном по Чернову смысле будет основываться на том же уравнении, что и эволюция средних в обычном смысле (но, заметим, сама эквивалентность вырождается в этом случае в тождество). Поскольку же «эквивалентные» средние не будут, вообще говоря, средними значениями квантовых операторов, то функция $\overline{W}(q,p)$ не является функцией Вигнера, так как с ее помощью нельзя найти средние значения квантовых операторов по правилу (21), и поэтому усреднение операторов $\hat{L}_\tau = e^{-it\hat{R}_\tau}$ применительно к нахождению некоей эквивалентной функции Вигнера не имеет физического смысла.

С другой стороны, можно рассмотреть функцию Вигнера W_{avr}, которая отвечает средней матрице плотности $\hat{\rho}_{avr} = \int_0^1 \hat{\rho}_\tau Q(\tau)d\tau$ при квантовании с ядром $\hat{K}^T$. В соответствии с (55) определена зависимость введенной функции Вигнера W_{avr} от времени согласно равенству

$$W_{avr}(t) = \hat{K}^T \hat{\rho}_{avr}(t) \overset{Chernoff}{\cong} \hat{K}^T e^{-t\hat{L}_{\hat{H}_{avr}}}\left(\hat{\rho}^0\right). \tag{60}$$

Формула (60) выражает установленную в работе связь между результатами усреднений квантовых статистических операторов: именно, усредненной траектории (53) в пространстве матриц плотности отвечает усредненная траектория (60) в пространстве функций Вигнера.

Уравнение эволюции функции W_{avr} несколько отличается от уравнения эволюции функции W. В сокращенных обозначениях (22-23) через оператор квантования $\hat{K}$ исходное уравнение Лиувилля для матрицы плотности имеет вид

$$i\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}=[\hat{H},\hat{\rho}]=\int_0^1 Q(\mu)[\hat{K}_\mu H,\hat{\rho}]d\mu,$$

а для функции Вигнера получается

$$i\frac{\partial W}{\partial t}=\int_0^1\int_0^1 Q(\mu)Q(\tau)[\hat{K}_\mu H,\hat{K}_\tau^T\hat{\rho}]d\mu d\tau.$$

Для усредненной в смысле определения 4 матрицы плотности имеем

$$i\frac{\partial\hat{\rho}_{avr}}{\partial t}=\int_0^1 Q(\mu)[\hat{K}_\mu H,\hat{\rho}_\mu]d\mu,$$

и для соответствующей функции Вигнера получаем

$$i\frac{\partial W_{avr}}{\partial t}=\int_0^1\int_0^1 Q(\mu)Q(\tau)[\hat{K}_\mu H,\hat{K}_\tau^T\hat{\rho}_\mu]d\mu d\tau. \tag{61}$$

Из (61) видно, что функция W_{avr} получена усреднением по τ и по μ некоторой τ-μ -функции W_τ^μ такой, что $i\partial_t W_\tau^\mu=[\hat{K}_\mu H,\hat{K}_\tau^T\hat{\rho}_\mu]$. Нижний индекс τ у функции W_τ^μ обозначает то, что она получена из матрицы оператора $\hat{\rho}$ с помощью τ-квантования, а верхний индекс μ – то, что в качестве оператора $\hat{\rho}$ взят оператор $\hat{\rho}_\mu$, эволюция которого определяется μ-проквантованным гамильтонианом.

Введем также «квантовый след» функции W_τ^μ, т.е. функцию W_τ^τ, отвечающую матрице $\hat{\rho}_\tau$ при квантовании с ядром $\hat{K}_\tau$. Хотя W_τ^τ не обладает свойствами τ-функции Вигнера (23), тем не менее, как будет показано далее, она представляет определенный интерес. Рассмотрим наряду с W_τ^τ и «средний квантовый след», т.е. функцию

$$\overline{\overline{W}}=\int_0^1 W_\tau^\tau Q(\tau)d\tau. \tag{62}$$

Прежде всего отметим, что вычисление средних значений операторов с помощью функции (62) в общем случае линейного квантования не приводит к исходным правильным выражениям, поскольку

$$\int W_\tau^\tau(q,p)A(q,p)dqdp=Tr\hat{\rho}_\tau\hat{A}_\tau$$

и

$$Tr\hat{\rho}\hat{A} = \int_0^1 Q(\tau) Tr\hat{\rho}\hat{A}_\tau d\tau \neq \int_0^1 Q(\tau) Tr\hat{\rho}_\tau \hat{A}_\tau d\tau .$$

Тем не менее, если квантование проводится с ядром $\hat{K}_\tau$, то средние значения операторов (вообще говоря, не «наблюдаемых» по терминологии квантовой механики) вычисляются по функции Вигнера W_τ, а эволюция статистических операторов определяется τ-проквантованным гамильтонианом. В таком случае и функция W_τ^τ приобретает смысл.

Уравнение эволюции для функции W_τ^τ следует из уравнения (32), в котором вместо матрицы $\tilde{H}$ используется $\tilde{H}_\tau$. Тогда получается следующее уравнение:

$$i\partial_t W_\tau^\tau(q,p) = \int H_{k,\omega} \exp(i(kq + \omega p + (1-2\tau)k\omega))\Delta_\tau W_\tau^\tau dk d\omega. \qquad (63)$$

Уравнение эволюции для функции (62) имеет вид:

$$i\partial_t \overline{\overline{W}}(q,p) = \int_0^1 Q(\tau) \int H_{k,\omega} \exp(i(kq + \omega p + (1-2\tau)k\omega))\Delta_\tau W_\tau^\tau dk d\omega d\tau . \qquad (64)$$

Для квантования Вейля уравнение (64) совпадает с (63) и оба они совпадают с уравнением (36), как и должно быть. Для других эрмитовых квантований уравнение эволюции $\overline{\overline{W}}$ отличается от уравнения эволюции для W. Например, для квантования Йордана вместо (37) имеем

$$i\partial_t W_0^0(q,p) = \frac{1}{2}\int H_{k,\omega} e^{ikq + i\omega p + ik\omega}\left(W_0^0(q+\omega,p) - W_0^0(q,p+k)\right) dk d\omega;$$

$$i\partial_t W_1^1(q,p) = \frac{1}{2}\int H_{k,\omega} e^{ikq + i\omega p - ik\omega}\left(W_1^1(q,p-k) - W_1^1(q-\omega,p)\right) dk d\omega;$$

$$\overline{\overline{W}}_J(q,p) = \frac{1}{2}W_0^0(q,p) + \frac{1}{2}W_1^1(q,p).$$

Важно подчеркнуть, что для гамильтониана с разделенными переменными $H(q,p) = \Phi(q) + \frac{p^2}{2}$ уравнение эволюции для $\overline{\overline{W}}$ совпадает с уравнением эволюции (38) для полной функции Вигнера. Это означает, что, во всяком случае, на достаточно широком классе моделей рассматриваемая эквивалентность применительно к уравнению эволюции функции Вигнера имеет разумную интерпретацию.

Представляет интерес исследовать различия уравнений для W и $\overline{\overline{W}}$ в случае, когда гамильтониан явно зависит от правила квантования. Такие модели, в которых координаты и импульсы входят, например, в виде произведений, специфичны для задач квантовой оптики [14]. Простейшей моделью, в которой проявляются различия между уравнениями для W_τ и W_τ^τ, является осциллятор с ангармонизмом четвертого порядка, полиномиальный гамильтониан которого имеет вид

$$H(q,p)=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}q^2+cq^2p^2\,, \tag{65}$$

где c есть некоторая постоянная. Хотя квантовый оператор Гамильтона с символом (65), как следует из (17), зависит от момента σ_2 функции симметризации, и от σ_2 зависит также и уравнение эволюции матрицы плотности, в уравнение эволюции функции Вигнера этот параметр явным образом не входит. Выбор квантования сказывается в этом уравнении более сложным образом, через усреднение τ-компонент функции Вигнера.

Для гамильтониана (65) уравнение эволюции τ-функции Вигнера (33) имеет вид

$$\begin{aligned}&i\partial_t W_\tau(q,p)+ip\frac{\partial W_\tau(q,p)}{\partial q}-iq\frac{\partial W_\tau(q,p)}{\partial p}=\\&=\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 W_\tau(q,p)}{\partial q^2}-\frac{\partial^2 W_\tau(q,p)}{\partial p^2}\right)+2c\hat{F}_\tau W_\tau(q,p)\,,\end{aligned} \tag{66}$$

где оператор $\hat{F}_\tau$ имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{F}_\tau&=2(1-2\tau-i(1-\tau)pq)q\frac{\partial}{\partial q}-2(1-2\tau-i\tau pq)p\frac{\partial}{\partial p}-\\&-\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\left(p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}-q^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)+i\tau(1-\tau)\left(p\frac{\partial^3}{\partial q\partial p^2}-q\frac{\partial^2}{\partial p\partial q^2}\right).\end{aligned} \tag{67}$$

Для функции W_τ^τ уравнение эволюции (63) в гармонической части гамильтониана совпадает с уравнением (66), а в части ангармонизма оператор $\hat{F}_\tau$ (67) заменяется на оператор $\hat{F}_\tau^\tau$, который имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{F}_\tau^\tau&=(2(1-2\tau)+iqp)\left(p\frac{\partial}{\partial p}-q\frac{\partial}{\partial q}\right)-\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\left(p^2\frac{\partial^2}{\partial p^2}-q^2\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)+\\&+i\tau(1-\tau)\left(p\frac{\partial^3}{\partial q\partial p^2}-q\frac{\partial^2}{\partial p\partial q^2}\right).\end{aligned} \tag{68}$$

Сравнивая (67) и (68) замечаем, что отличие есть только в членах, содержащих производные первого порядка по q и p. Это отличие состоит в том, что усреднение по τ, которое будет применяться на этапе построения уравнения относительно полной функции Вигнера, для варианта (67) более изощренное, чем для функции $\overline{\overline{W}}$. Последнее уравнение удобно тем, что в нем операторы дифференцирования по q и p входят кососимметрическим образом, тогда как в (61) такой кососимметричности нет. Разумеется, для квантования Вейля члены $\hat{F}_\tau$ и $\hat{F}_\tau^\tau$ в уравнения (67) и (68) совпадают.

Сделаем в заключение ряд замечаний относительно усредненных в смысле формул (53) и (60) квантовых распределений в равновесном случае.

Равновесный квантовый оператор плотности $\hat{\rho}(\beta)=e^{-\beta\hat{H}}$ коммутирует с $\hat{H}$ и потому удовлетворяет стационарному уравнению Лиувилля. Тогда равновесные функции Вигнера также удовлетворяют соответствующим стационарным уравнениям. В частности, введенная выше τ-τ-функция Вигнера W_τ^τ, построенная по равновесной матрице плотности $\hat{\rho}_\tau$, удовлетворяет своему стационарному уравнению.

Как уже говорилось ранее во введении, оператор $\hat{f}(\beta)$ с классическим символом $f(\beta)=e^{-\beta H(q,p)}$ эквивалентен по Чернову оператору $\hat{\rho}(\beta)=e^{-\beta\hat{H}}$. В работах [2, 3] были введены операторы $\hat{\rho}_\tau(\beta)=e^{-\beta\hat{H}_\tau}$, после чего с помощью теорем 1 и 2 было показано, что средняя полугруппа $\hat{\rho}_{avr}=\int_0^1 Q(\tau)\hat{\rho}_\tau d\tau$ эквивалентна по Чернову тому же равновесному оператору $\hat{\rho}(\beta)=e^{-\beta\hat{H}}$. Следовательно, равновесные операторы $\hat{\rho}_\tau(\beta)=e^{-\beta\hat{H}_\tau}$, введенные в [2, 3], могут быть отождествлены со стационарными решениями уравнения Лиувилля с гамильтонианом $\hat{H}_\tau$. Тем самым понятие эквивалентности по Чернову может быть в одной и той же формулировке применено как к равновесным, так и к неравновесным квантовым статистическим операторам.

Итак, в работе предложено расширение понятия эквивалентности по Чернову применительно к решениям уравнений эволюции квантовых статистических операторов, причем в результате получаются объекты, имеющие физический смысл. Описанный подход представляется методологически полезным для анализа зависимости уравнений эволюции квантовых операторов от правила квантования и при исследовании эволюции квантовых систем под действием случайных гамильтонианов.

Литература

1. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Скорость сходимости фейнмановских интегралов полугрупп, порождаемых гамильтонианом осциллятора // ТМФ, 2012. Т.172, №1. С. 122-137.

2. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов // Труды МИРАН, 2014. Т. 285. С. 232-243.

3. Борисов Л.А., Орлов Ю.Н. Анализ зависимости конечнократных аппроксимаций равновесной матрицы плотности гармонического осциллятора

и функции Вигнера от правила квантования // ТМФ, 2015. Т.184, №1. С. 106-116.
4. Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 57. 23 с.
5. Бутко Я.А., Смолянов О.Г. Формулы Фейнмана в стохастической и квантовой динамике / В сб. Современные проблемы математики и механики, 6, № 1, 2011. С. 61-75.
6. Сакбаев В.Ж. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризаций / В сб. Современная математика. Фундаментальные направления, 43, 2012. С. 3-174.
7. Сакбаев В.Ж. О многозначных отображениях, задаваемых регуляризацией уравнения Шредингера с вырождением // ЖВМ и МФ, 46, 2006. С. 682-698.
8. Chernoff P. Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal., 84, 1968. P. 238-242.
9. Березин Ф.А. Невинеровские континуальные интегралы // ТМФ, 1971, т. 6, № 2, стр. 194-212.
10. Орлов Ю.Н. Основы квантования вырожденных динамических систем. – М.: МФТИ, 2004. – 236 с.
11. Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A. Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // J. Math. Phys., 43, 2002. P. 5161-5171.
12. Smolyanov O.G., Weizsacker H., Wittin O. Chernoff’s theorem and discrete time approximation of Brownian motion on manifolds // Potential Anal., 26, 2007. P. 1-29.
13. Брателли У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика (пер. с англ.). – М.: Мир, 1982. – 517 с.
14. Перина Я. Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений (пер. с англ.). – М.: Мир, 1987. – 366 с.