



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 67 за 2015 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Повещенко Т.С., [Гасилов В.А.](#),  
[Повещенко Ю.А.](#), [Галигузова И.И.](#)**

Метод расчета  
многоконтурных  
термогидравлических  
течений в теплообменной  
части ЯЭУ

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Метод расчета многоконтурных термогидравлических течений в теплообменной части ЯЭУ / Т.С.Повещенко [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 67. 29 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-67>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**Т.С. Повещенко, В.А. Гасилов,  
Ю.А. Повещенко, И.И. Галигузова**

**Метод расчета течений  
в многоконтурной сети  
теплосъема энергоблока**

**Москва — 2015**

**Повещенко Т.С., Гасилов В.А., Повещенко Ю.А., Галигузова И.И.**

Метод расчета течений в многоконтурной сети теплосъема энергоблока

Цель работы – создание алгоритма быстрого и достаточно точного расчета параметров гидравлической сети, посредством которой осуществляется отвод тепла, производимого энергоблоком атомной электростанции. Мы рассматриваем построение конечно-разностной схемы и соответствующего алгоритма расчета, взяв за основу модель тепломассопереноса потоком однофазной слабосжимаемой жидкости. Применяемый нами подход состоит в построении конечно-разностной модели, удовлетворяющей условиям консервативности, т.е. выполнения сеточных аналогов основных законов сохранения, справедливых для физической (дифференциальной) модели. Предлагаемый метод решения представляет собой обобщение метода прогонки на задачи расчета контура теплосъема с произвольным количеством разветвлений и стыков труб. Численная методика анализируется согласно критериям устойчивости и точности решения. Достоинством метода является естественное распараллеливание соответствующей вычислительной работы. Метод является перспективным для использования на многопроцессорных системах, включая системы с гибридной архитектурой.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, тепломассоперенос, ядерная энергетическая установка, сетевая термогидравлическая модель, метод прогонки, параллельные высокопроизводительные вычислительные системы.

**Poveshenko T.S., Gasilov V.A., Poveschenko Yu.A., Galiguzova I.I.**

The method of calculating the flows in a multi-circuit heat exchange network of a nuclear energetic facility(NEF).

The work is focused on the development of an algorithm for calculation of a thermal-hydraulic circuit operating as part of a nuclear power facility. To this end we consider a construction of a finite-difference scheme and an appropriate solution algorithm taking as a base a model of a heat-mass transfer by a flux of a single-phase weakly incompressible fluid. The used approach is based on the construction of finite-difference model that satisfies the conditions of conservativity, i.e. the method should maintain grid analogues of the basic conservation laws which are valid for the physical (differential) model. We offer a solution algorithm which generalizes a known successive elimination method for problems of calculating the heat exchange circuit with an arbitrary number of branches and pipe joints. The numerical technique is analyzed according to the criteria of stability and accuracy of the solution. The proposed method has an advantageous property, which is a natural parallelization of the corresponding computational work. Thus the method is promising for implementing calculations at multiprocessor systems, including systems of a hybrid architecture.

**Key words:** mathematical modeling, heat and mass transfer, nuclear power facility, network simulation model, successive elimination method, parallel high-performance computing systems.

## 1. Введение

В данной работе предложено обобщение метода прогонки [1-3] с целью создания алгоритма, направленного на решение практической задачи расчета теплообменной сети. Такого типа сети зачастую характеризуются наличием большого количества контуров и элементов различного назначения (заслонки, дроссели, стыки, конденсаторы, насосы...), разветвленностью, как, например, в случае энергоблока на основе реактора канального типа. Многоконтурность сети увеличивает вероятность потери плотности соединений, возникновения течей, а соответственно и аварийной ситуации. Тем самым, обусловлена актуальность создания математических моделей и методик для оперативной диагностики состояния сложной сети теплосъема ЯЭУ. Подобные задачи для моделей сетей на основе линеаризованных уравнений на графе рассматривались, например, в [4]. При этом отдельные элементы содержат существенно двухфазное течение жидкости, тогда как во многих других элементах вполне хорошим приближением можно рассматривать течение однофазной слабосжимаемой жидкости. Понятно, что для такой сложной системы практически невозможно соблюдать выполнение критерия Куранта на всех этапах расчета. При этом вопросы устойчивости схемы и точности расчета при экономии общего времени расчета остаются весьма актуальными. Вновь разрабатываемый алгоритм должен быть адаптирован к параллельной вычислительной системе, как все современные конкурентоспособные коды.

Предлагаемый в данной работе подход, направленный на преодоление названных проблем, основан на развитии алгоритма “прогонки” – хорошо известного экономичного и робастного метода вычислительной математики. Основой предлагаемой методики служит традиционная система уравнений гидродинамики невязкой сжимаемой, вообще говоря, жидкости, включающая уравнение неразрывности (баланса массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{w}) = 0, \quad (1)$$

уравнение баланса количества движения

$$\frac{\partial(\rho \vec{w})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{w} \vec{w}) = -\nabla P, \quad (2)$$

и уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E \vec{w}) = -P \operatorname{div} \vec{w}. \quad (3)$$

Принимая, что характерный линейный размер в сечении трубопровода (например, его эффективный диаметр) намного меньше его характерного размера в продольном направлении, можно перейти к упрощенной квазиодномерной модели, уравнения которой имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(s \rho w)}{s \partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(s \rho w^2)}{s \partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (sEw)}{s\partial x} = -P \frac{\partial (sw)}{s\partial x}. \quad (6)$$

Здесь используются общепринятые обозначения:  $\rho$  – плотность флюида,  $P$  – внутреннее давление,  $E$  – внутренняя энергия единицы объема,  $w$  – скорость,  $t$  – время,  $x$  – пространственная координата,  $s$  – площадь поперечного сечения канала.

Далее на основе принятой физической модели выводятся конечно-разностные уравнения, формулируется метод символьной прогонки и описывается алгоритм получения прогоночных коэффициентов. Особенности предлагаемого алгоритма следующие:

1. Рассматривается версия “символьной прогонки”, допускающая логическое распараллеливание расчета флюидодинамики в многоконтурной системе при выполнении определенных основной системой уравнений балансных соотношений в узлах разветвления контура.

2. Отсутствуют принципиальные затруднения в плане обобщения алгоритма на модель двухфазной флюидодинамики в сложном контуре. При этом допускается наличие двухфазности в любой части контура, как в трубах, так и в области стыков. Сложность соответствующей конечно-разностной задачи (в смысле размерности решаемой численно системы уравнений) может оказаться существенно меньшей, чем, например, в известном пакете RELAP, предметная область которого описана в работах [5-9].

3. На уровне конечно-разностной схемы выполняется баланс по энергии и неразрывности массы, при этом дивергентная аппроксимация потоковых членов уравнений в узлах сетки выполняется по принципу “наветренных разностей”, что обеспечивает безусловную устойчивость коэффициентов прогонки.

4. Аппроксимация баланса импульса включает проекцию сеточной функции плотности из ячеек в узел в нестационарной части дивергентной записи уравнения импульса, вычисляемую либо по принципу “наветренных разностей”, что обеспечивает безусловную устойчивость прогонки, либо по принципу среднего значения между ячейками, что повышает точность решения. Однако в последнем случае алгоритм прогонки будет устойчив лишь при ограничении шага интегрирования по времени.

## 2. Конечно разностная модель – сетки и сеточные функции

Изложение этой части работы начнем с описания конечно-разностной сетки для контура, содержащего стыки труб.

Введем обозначения для описания элементов контура, содержащего стыки труб:  $\Omega$  – множество ячеек,  $\omega$  – множество узлов,  $\partial$  – символ границы (например, границы счетной ячейки),  $\Omega(\omega)$  – ячейка, инцидентная узлу  $\omega$ ,  $\omega(\Omega)$  – узел, инцидентный ячейке  $\Omega$ ,  $d([\partial]\omega)$  – приузловой объем, используемый для записи сеточного уравнения баланса импульса жидкости.

Аппроксимацию производной по времени будем записывать в безындексной форме  $a_t = (\hat{a} - a) / \tau$ ,  $\tau$  – шаг по времени.

Все рассматриваемые ячейки делятся на ячейки, расположенные внутри трубы, и ячейки, примыкающие к границе трубы. Ячейку, примыкающую к границе трубы, обозначим  $\partial\Omega$ , такая ячейка может либо выходить наружу контура (является заглушкой), либо являться внутренним стыком для конфигурации из двух и более труб.

В этом последнем случае для наглядности будем обозначать ячейку символом  $\partial\Omega$  “с индексом” –  $\partial_{22}\Omega$ .

Для построения корректной аппроксимации уравнений флюидодинамики сложного контура важное значение имеет запись условий для граничного узла, обозначаемого символом  $\partial\omega(\partial\Omega)$ .

В записи баланса термических процессов в стыке труб используется понятие так называемого трансмиссионного узла как совокупности всех узлов стыка  $\partial\omega$ , являющихся дополнением к данному узлу  $\partial\omega(\partial\Omega)$  рассматриваемой трубы. Трансмиссионный узел обозначим символом  $\Delta\omega(\partial_{22}\Omega)$ .

Ниже приведены рисунки, иллюстрирующие приведенные обозначения.

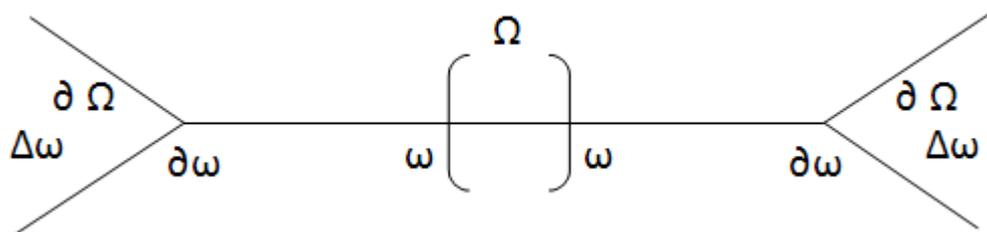


Рис.1. Схематичное изображение ячейки  $\Omega$  на трубе, узлов  $\omega$  на трубе, граничных узлов и ячеек.

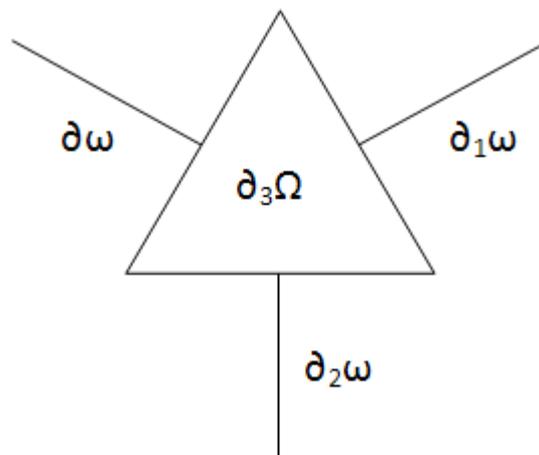


Рис. 2. Изображение стыка 3-х труб  $\partial_3\Omega$ . Трансмиссионный узел в стыке, дополняющем данный стыковочный узел  $\partial\omega$ , будет объединением двух других узлов стыка:  $\Delta\omega: \partial\omega_1 \cup \partial\omega_2$ .

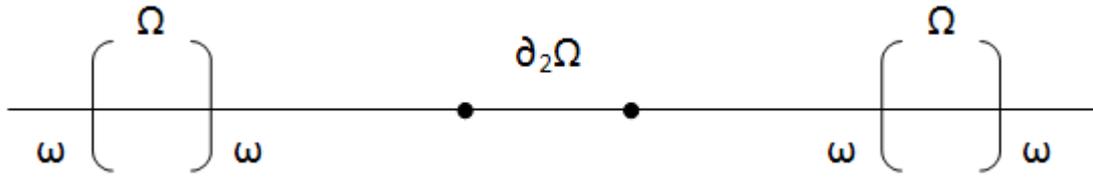


Рис. 3 Внутреннюю ячейку трубы можно интерпретировать как стык  $\partial_2\Omega$  из двух труб.

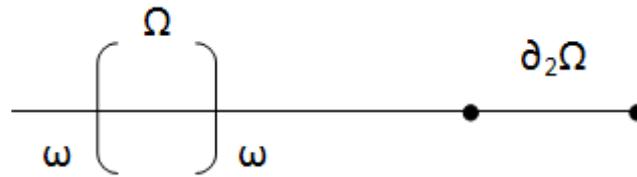


Рис.4. Граничная ячейка на правом конце трубы. Также можно интерпретировать как внутренний стык  $\partial_2\Omega$ .

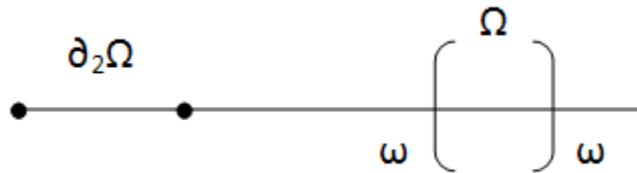


Рис. 5. Граничная ячейка на левом конце трубы. Также можно интерпретировать как внутренний стык  $\partial_2\Omega$ .

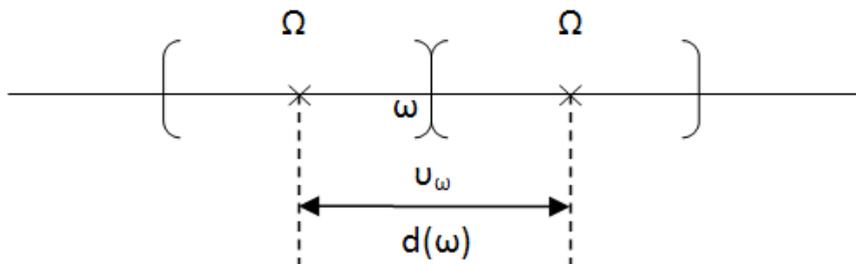


Рис. 6. Схематичное изображение приузлового объема  $v_\omega$  для приузлового балансного домена  $d(\omega)$ . Примыкающие ячейки находятся внутри трубы и являются простыми (нестыковочными) ячейками.

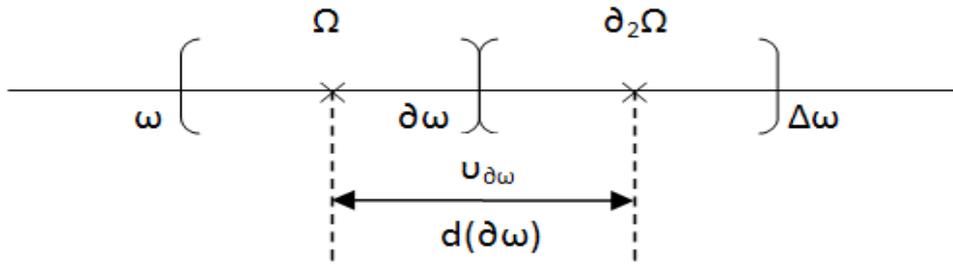


Рис. 7. Схематическое изображение объема  $V_{\partial\omega}$  для приузлового балансного домена  $d(\partial\omega)$ . Одна из примыкающих ячеек является стыковочной из двух труб.

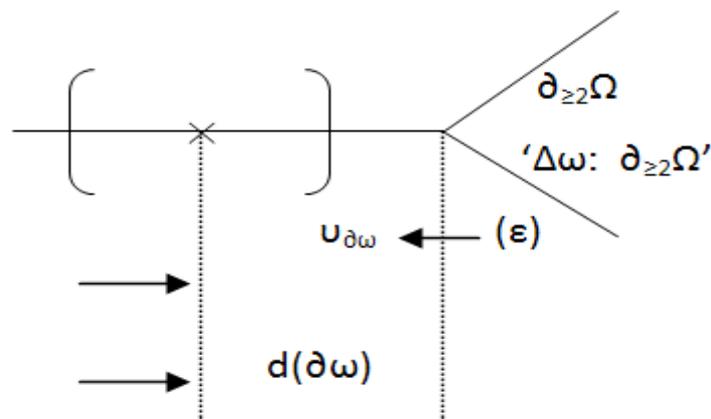


Рис. 8. Схематическое изображение приузлового объема  $V_{\partial\omega}$  для узлового балансного домена  $d(\partial\omega)$ . Одна из примыкающих ячеек является стыковочной из трех труб и является граничной. Узлы  $\partial\omega$  отступают на “полшага” внутрь трубы ( $\varepsilon$ ), т.е.  $v_{\partial_{\geq 2}\Omega} > 0$ .

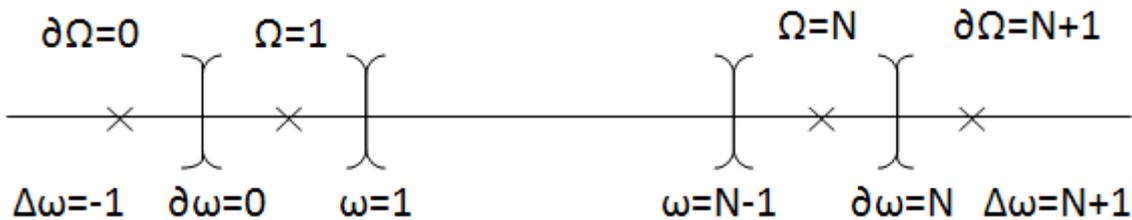


Рис. 9. Упорядоченная схема узлов и ячеек, принадлежащих конкретной трубе, используемая в методе прогонки.

Вслед за описанием сетки введем сеточные функции, отнесенные к ячейкам или узлам – в зависимости от того, как ячейка ориентирована относительно трубы и ее границ.

Для ячейки  $\Omega$  разностной сетки, построенной “вдоль трубы”, объем вычисляется с учетом переменного сечения  $S(x)$

$$V_{\Omega} = \int_{\Omega} S(x) dx.$$

Среднюю площадь сечения ячейки, находящейся на трубе, обозначим символом  $S_{\Omega}$ . Для ячейки, являющейся граничной, вводится понятие площадей, относящихся к инцидентным этой ячейке узлам  $\omega = \partial\omega(\partial\Omega)$ , эти площади обозначим как  $S_{\alpha\Omega, \omega}$ .

Аналогично для ячейки, являющейся стыковочной, т.е. соединяющей две или более труб  $\partial_{\geq 2}\Omega$ , объем вычисляется суммированием “элементарных” присоединенных объемов  $V_{\partial_{\geq 2}\Omega, \omega}$ , составляющих данную ячейку-стык

$$V_{\partial_{\geq 2}\Omega} = \sum_{\omega(\partial_{\geq 2}\Omega)} V_{\partial_{\geq 2}\Omega, \omega}$$

В задачах флюидодинамики важное место занимает вопрос сохранения баланса импульса на конечно-разностном уровне. Для корректной аппроксимации баланса импульса необходимо определить для каждого узла объем балансного домена (приузловой контрольный объем). Для узлов, находящихся между внутренних ячеек трубы, объем балансного домена определяется естественным образом как

$$v_{\omega} = \sum_{\Omega(\omega)} \int_{\langle \Omega \rangle \subset d(\omega)} S dx(\Omega) \subset d(\omega)$$

$\langle \Omega \rangle \subset d(\omega)$  - часть ячейки  $\Omega(\omega)$ , попадающая в приузловой домен  $d(\omega)$ .

Если же узел  $\omega$  является примыкающим узлом к стыку, тогда объем домена должен естественным образом включать часть объема от ячейки находящейся на трубе, проходящей через данный узел  $\omega$  и присоединенный объем  $V_{\partial_{\geq 2}\Omega, \omega}$ . Для этого удобно ввести бинарное понятие присоединенного объема стыковочной ячейки  $\partial_{\geq 2}\Omega$  примыкающего к узлу  $\omega = \partial\omega(\partial_{\geq 2}\Omega)$ , обозначив его посредством символа  $V_{\partial_{\geq 2}\Omega, \omega}$ . Объем балансного узлового домена  $d([\partial]\omega)$  для узла, являющимся граничным к стыку, естественно вычислять по формуле

$$v_{\omega} = \int_{\langle \Omega(\omega) \neq \partial\Omega \rangle \subset d(\omega)} S(x) dx + V_{\partial_{\geq 2}\Omega, \omega},$$

Введем также  $S_{\omega}$  - площадь поперечного сечения трубы в узле  $[\partial]\omega$ .

Рассмотрим теперь векторные величины, характеризующие контур. Для каждого узла  $\omega$  ячейки, расположенной на трубе,  $\Omega \neq \partial\Omega$ , вводится понятие внешней нормали  $n_{\omega(\Omega)}$ .

Предполагается, что узлы и ячейки каждой входящей в модель трубы упорядочены путем введения ориентирующего вектора  $\vec{i}$ .

Считаем, что выполнены следующие условия:

$n_{\omega(\Omega)} = 1$ , если внешняя нормаль параллельна  $\vec{i}$ ,

$n_{\omega(\Omega)} = -1$ , если внешняя нормаль антипараллельна  $\vec{i}$ .

Аналогично для каждого узла  $\omega$  ячейки-стыка  $\partial\Omega$  вводится понятие внешней нормали  $n_{\omega(\partial\Omega)}$ . Также принимаем условия:

$n_{\omega(\partial\Omega)} = 1$ , если направление внешней нормали совпадает с направлением  $\vec{i}$  для трубы, связанной с узлом  $\omega$ ;

$n_{\omega(\partial\Omega)} = -1$ , если направление внешней нормали противоположно направлению  $\vec{i}$  для трубы, связанной с узлом  $\omega$ .

### 3. Разностные потоки

Для формулировки балансных соотношений на конечно-разностном уровне необходимо определить разностные потоки основных величин. Для решения задач флюидодинамики широко используются аппроксимации на основе “разнесенных” сеточных функций, когда значения термодинамических величин отнесены к ячейкам, а скорости отнесены к узлам сетки. Чтобы написать балансные соотношения, необходимо определить правило аппроксимации термодинамических величин в узлах:

$J_{\rho\omega} = s_{\omega}\rho_{\Omega_{ap}(\omega)}w_{\omega}$  – поток массы  $j_{\rho}$  в узле  $[\partial]\omega$ ,

$J_{E\omega} = s_{\omega}E_{\Omega_{ap}(\omega)}w_{\omega}$  – поток внутренней энергии  $j_E$  в узле  $[\partial]\omega$ .

Индекс  $ip$  означает аппроксимацию, выполненную “вверх по потоку”.

Для построения разностной аппроксимации потока импульса на разностном уровне надо иметь в виду, что это векторная величина и ее аппроксимация в данной ячейке определяется значениями скоростей в узлах данной ячейки. Направления скоростей могут быть как одинаковыми, так и противоположными. Второй вариант реализуется, как правило, в двухфазной среде. Соответственно, для этого варианта поток импульса естественно аппроксимировать нулевым значением. Если же направление скоростей в примыкающих узлах одно и то же, поток импульса в ячейке, относящейся к трубе, выражается следующей формулой (для слабосжимаемой жидкости):

$$J_{\Omega} = \rho_{\Omega} / s_{\Omega} (s_{\omega_{ip}(\Omega)} w_{\omega_{ip}(\Omega)})^2.$$

Импульс – векторная величина. Следовательно, надо учитывать его направление при расчете потока импульса из узла  $\omega$  в ячейку. Если ячейка является внутренней для расчетной области, отнесенной к некоторой трубе, то определяем поток импульса из узла в ячейку с учетом ориентации:

$J_{\Omega,\omega} = -n_{\omega(\Omega)} J_{\Omega}$  – поток импульса в ячейке.

Для ячейки-стыка естественное обобщение потока импульса через данный узел получается в виде формулы, соответствующей общему расходу

флюида через все узлы данного стыка, исключая данный узел  $\partial\omega$ , что обозначается символом  $DIV$  и вычисляется следующим образом:

$$DIV_{\partial_{\geq 2}\Omega/\partial\omega}(sw) = \sum_{\omega(\partial_{\geq 2}\Omega) \neq \partial\omega} n_{\omega(\partial_{\geq 2}\Omega)} s_{\omega} W_{\omega} \equiv \langle sw \rangle_{\Delta\omega}.$$

Соответственно, из граничного узла  $\partial\omega$  в ячейку  $\partial_{\geq 2}\Omega$  действует поток импульса  $j_{\partial_{\geq 2}\Omega, \partial\omega}$ .

В случае ячейки-стыка аппроксимация потока импульса, учитывая введенные обозначения, будет выглядеть аналогично, но несколько сложнее.

Если произведение скорости флюида в данном узле и суммарной скорости флюида в остальных узлах стыка меньше нуля, т.е. если  $-n_{\partial\omega(\partial_{\geq 2}\Omega)} W_{\partial\omega} \langle sw \rangle_{\Delta\omega} \leq 0$ , имеем  $j_{\partial_{\geq 2}\Omega, \partial\omega} = 0$ .

Если направления скорости в данном узле и суммарной скорости совпадают, т.е.

$-n_{\partial\omega(\partial_{\geq 2}\Omega)} W_{\partial\omega} \langle sw \rangle_{\Delta\omega} \succ 0$ , то аппроксимация соответствует “наветренной разности”, имеем соответственно:

$$j_{\partial_{\geq 2}\Omega, \partial\omega} = -n_{\partial\omega(\partial_{\geq 2}\Omega)} \rho_{\partial_{\geq 2}\Omega} / s_{\partial_{\geq 2}\Omega, \partial\omega} (s_{\partial\omega} W_{\partial\omega})^2, \quad \text{если наветренным}$$

является узел  $\partial\omega$  в котором скорость равна  $W_{\partial\omega}$ , и, в противном случае,

$$j_{\partial_{\geq 2}\Omega, \partial\omega} = \rho_{\partial_{\geq 2}\Omega} / s_{\partial_{\geq 2}\Omega, \partial\omega} (\langle sw \rangle_{\Delta\omega})^2, \quad \text{если наветренным является дополнение } \langle sw \rangle_{\Delta\omega}$$

к данному узлу  $\partial\omega$ .

В случае если стык представляет собой выход в атмосферу или заглушку, обозначаемую  $\partial_1\Omega$ , то поток импульса можно аппроксимировать как

$$j_{\partial_1\Omega, \partial\omega} = -n_{\partial\omega(\partial_1\Omega)} \rho_{\partial_1\Omega} / s_{\partial_1\Omega, \partial\omega} (s_{\partial\omega} W_{\partial\omega})^2.$$

Эта формула используется для вычисления стока из узла  $\partial\omega(\partial_1\Omega)$ . Она может использоваться и на входе потока в сеть, для расчета скорости  $W_{\partial\omega(\partial_1\Omega)}$ . Отметим, что скорость  $W_{\partial\omega(\partial_1\Omega)}$  на входе обычно считается известной.

#### 4. Разностные уравнения

Используя введенные понятия потоков основных величин флюидодинамики, определенных на дискретном уровне, можно сформулировать конечно-разностные аналоги дифференциальных уравнений, основанных на первых принципах сохранения массы и энергии.

Рассмотрим конечно-разностные уравнения флюидодинамики в случае одномерного контура. Как уже отмечалось, нами принята дискретная модель, в которой термодинамические величины отнесены к ячейкам (как принадлежащим расчетной области трубы  $\Omega$ , так и к ячейкам-стыкам,  $\Omega \equiv \partial_{\geq 2}\Omega$ ), а к узлам отнесена “кинематическая” переменная – скорость потока. Плотность,

внутренняя энергия, давление, энтальпия связаны друг с другом уравнением состояния, например,

$$E = \frac{\mu c_v}{R} P, \quad (7)$$

$$\rho = \frac{\mu P}{R T}. \quad (8)$$

При наличии фазовых переходов вместо температуры в вычислениях удобнее использовать энтальпию. Для описания балансных соотношений в ячейке в зависимости от конкретной задачи можно выбрать наиболее удобную пару независимых термодинамических величин.

Внутри стыка справедливы конечно-разностные уравнения неразрывности массы и энергии.

Выпишем их пока отдельно для ячейки, принадлежащей расчетной области трубы, и для ячейки-стыка.

Для ячейки, принадлежащей трубе, не являющейся стыком, имеем:

$$\begin{aligned} (\hat{\rho}_\Omega - \rho_\Omega) / \tau + 1/V_\Omega \Delta_\Omega \hat{j}_\rho &= 0, \\ \Delta_\Omega j_\rho &= \sum_{\omega(\Omega)} n_{\omega(\Omega)} j_{\rho\omega}. \end{aligned} \quad (9)$$

Соответственно, для ячейки, являющейся внутренним стыком, аппроксимация соответствующих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} V_\Omega (\hat{\rho}_\Omega - \rho_\Omega) / \tau + DIV_\Omega \hat{j}_\rho &= 0, \\ DIV_{\partial_{22}\Omega} j_\rho &= \sum_{\omega(\partial_{22}\Omega)} n_{\omega(\partial_{22}\Omega)} j_{\rho\omega}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение внутренней энергии для ячейки в расчетной области трубы

$$\begin{aligned} (\hat{E}_\Omega - E_\Omega) / \tau + 1/V_\Omega \Delta_\Omega \hat{j}_E &= -\hat{P}_\Omega / V_\Omega \Delta_\Omega (s\hat{w}), \\ \Delta_\Omega j_E &= \sum_{\omega(\Omega)} n_{\omega(\Omega)} j_{E\omega}, \quad \Delta_\Omega (sw) = \sum_{\omega(\Omega)} n_{\omega(\Omega)} s_\omega w_\omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Соответственно, уравнение внутренней энергии для ячейки, являющейся внутренним или граничным стыком:

$$V_\Omega (\hat{E}_\Omega - E_\Omega) / \tau + DIV_\Omega \hat{j}_E = -\hat{P}_\Omega DIV_\Omega (s\hat{w}), \quad (12)$$

$$DIV_{\partial_{22}\Omega} j_E = \sum_{\omega(\partial_{22}\Omega)} n_{\omega(\partial_{22}\Omega)} j_{E\omega}, \quad (13)$$

$$DIV_{\partial_{22}\Omega} (sw) = \sum_{\omega(\partial_{22}\Omega)} n_{\omega(\partial_{22}\Omega)} s_\omega w_\omega. \quad (14)$$

Удобно ввести обозначение  $\Delta V_\Omega$ , объединяющее понятие расхода как для внутренней ячейки, так и для ячейки-стыка:

(а)  $\Delta V_\Omega = \Delta_\Omega$ , если ячейка является обычной внутренней ячейкой расчетной области трубы,

(б)  $\Delta V_\Omega = DIV_{\partial_{22}\Omega}$ , если ячейка является стыковочной для двух и более труб.

Удобно еще ввести конечно-разностный аналог производной по времени и записать эти уравнения более компактно. Тогда уравнения сохранения массы

и сохранения энергии в общем виде можно соответственно записать для любого расчетного элемента контура:

$$V_{\Omega}(\rho_{\Omega})_t + \Delta V_{\Omega} \hat{j}_{\rho} = 0, \quad (15)$$

$$V_{\Omega}(E_{\Omega})_t + \Delta V_{\Omega} \hat{j}_E = -\hat{P}_{\Omega} \Delta V_{\Omega} (s\hat{w}). \quad (16)$$

Эти уравнения термодинамики (неразрывность массы и сохранения энергии) в стыках необходимо связать с уравнениями импульса на одном и том же временном слое.

Уравнение баланса импульса включает величины, обусловленные (а) изменением импульса во времени и (б) переносом импульса в пространстве, и градиент давления. Для корректного учета баланса импульса на конечно-разностном уровне введем сеточную функцию – поток импульса в ячейке, обозначив его  $J_{\Omega}$ .

Аппроксимация потока импульса зависит от того, одинаковый или разный знак у скорости примыкающих узлов. Для течения однофазного флюида по трубе в нормальном оперативном режиме, как правило, знаки одинаковые. При этом аппроксимация потока по-прежнему выполняется по принципу “наветренных разностей”. Поток импульса в ячейке определяется формулой

$$J_{\Omega} = \frac{\rho_{\Omega}}{s_{\Omega}} \left( s_{\omega_{up}(\Omega)} w_{\omega_{up}(\Omega)} \right)^2. \quad (17)$$

Если знаки скоростей примыкающих узлов разные (что приемлемо при двухфазном типе течения), то поток импульса в данную ячейку естественно положить равным нулю.

Труба имеет ориентацию (нумерацию), и для каждого узла определено понятие внешней нормали по отношению к данной ячейке. Поскольку импульс – величина векторная, необходимо определить поток импульса из данного узла  $\omega$  в ячейку, придав выражению потока в ячейке знак внешней нормали с противоположным знаком.

$$j_{\Omega, \omega} = -n_{\omega(\Omega)} J_{\Omega}. \quad (18)$$

Аппроксимация потока импульса в ячейке, являющейся стыком, который соединяет 3 трубы и более происходит также по этому принципу, только несколько сложнее. А именно, необходимо ввести понятие “протекания” флюида сквозь стык относительно данной трубы. Пусть выделен узел (труба)  $\partial\omega$ , внешнюю нормаль в данном узле по отношению к стыку обозначим  $n_{\partial\omega(\Omega)}$ . Все остальные трубы рассматриваются как “протекающие” по отношению к некоторой выделенной. Рассматриваем результирующий поток импульса от всех труб стыка, кроме выделенной, обозначим его  $\langle sw \rangle_{\Delta\omega}$

$$\langle sw \rangle_{\Delta\omega} = \sum_{\omega(\Omega) \neq \partial\omega} n_{\omega} s_{\omega} w_{\omega}. \quad (19)$$

Это можно интерпретировать как модель некой “эквивалентной трубы”, соединенной со стороны рассматриваемого стыка с выделенной нами в гидросети обычной трубой.

Эта величина есть скалярное произведение векторов (скорости и ориентированной площади), имеет знак, который определяет, является ли эта “эквивалентная труба” по отношению к выделенной трубе проводящей поток в том же направлении или в противоположном. Если это направление противоположно, то, как и в случае обычной ячейки на трубе, поток импульса из данной трубы в стык аппроксимируется нулем. Если же это направление совпадает по знаку с направлением выделенной трубы (узла  $\partial\omega$ ), то поток импульса из данного примыкающего к стыку узла  $\partial\omega$  в ячейку (стык) определяется также по аналогии с обычной “трубной” ячейкой следующим образом:

$$j_{\Omega, \partial\omega} = -n_{\partial\omega(\Omega)} \rho_{\Omega} / s_{\Omega, \partial\omega} (s_{\partial\omega} w_{\partial\omega})^2 \quad (20)$$

при условии, что “наветренная” аппроксимация скорости соответствует скорости трубы в  $\partial\omega$ .

В противном случае, если “наветренная” аппроксимация скорости соответствует скорости в эквивалентной трубе (согласно формуле (9)), поток импульса из данного примыкающего к стыку узла  $\partial\omega$  в ячейку (стык) также определяется по аналогии с обычной “трубной” ячейкой следующим образом:

$$j_{\Omega, \partial\omega} = -n_{\partial\omega(\Omega)} \rho_{\Omega} / s_{\Omega, \partial\omega} (\langle sw \rangle_{\Delta\omega})^2. \quad (21)$$

Применяя теорему Гаусса к данному выделенному объему при узле  $\omega$ , утечку импульса из этого объема  $\Delta_{\omega} j$  запишем следующим образом:

$$\Delta_{\omega} j = \sum_{\Omega(\omega)} j_{\Omega, \omega}. \quad (22)$$

Тогда уравнение сохранения импульса наглядным образом записывается:

$$v_{\omega} (\bar{\rho}_{\omega} w_{\omega})_t + \Delta_{\omega} \hat{j} = -s_{\omega} \Delta_{\omega} \hat{\rho}. \quad (23)$$

При этом плотность флюида в узле определяется как  $\bar{\rho}_{\omega} = \bar{\rho}_{\omega} (\rho_{(\Omega(\omega))})$ , т.е. плотность в узле аппроксимируется плотностями примыкающих ячеек (в данном случае одна из ячеек – стык с однофазным потоком).

Сила давления в конечно-разностном уравнении импульса для некоторого узла  $\omega$  аппроксимируется как сумма сил давлений со стороны инцидентных ему ячеек  $\Omega(\omega)$ , что отражено в записях для “направленного давления”

$$\wp_{\Omega, \omega} = -n_{\omega(\Omega)} P_{\Omega}, \quad (24)$$

и суммы “направленных” давлений

$$\Delta_{\omega} \wp_{\Omega, \omega} = \sum_{\Omega(\omega)} \wp_{\Omega, \omega}. \quad (25)$$

## 5. Линеаризация конечно-разностных уравнений

В этом разделе предлагается подход, позволяющий свести нелинейную систему уравнений флюидодинамики сети к линейной системе уравнений. Показано, как организовать итерации по нелинейности, т.е. получить возможность уточнения решения. Важно, что неизвестными линейного уравнения являются приращения скоростей  $\delta w$  во времени. Как будет показано в дальнейшем, для такой схемы возможна реализация устойчивого алгоритма решения – так называемой символьной прогонки. Особенность этого алгоритма позволяет наглядно учесть изменения термодинамики в стыках, а также реализовать возможность учета конвективных членов на неявном временном слое и оценить эффект приближения, когда эти члены считаются равными нулю. Другие важные преимущества алгоритма – достаточно очевидное обобщение на двухфазное течение и возможность непосредственной реализации на параллельной вычислительной системе.

На первом этапе для получения эффективной конечно-разностной схемы необходимо грамотно выделить неявный уровень. В этом смысле полезно ввести невязки уравнений (по определению невязка на искомом решении, обозначаемая символом с “крышкой”, обращается в ноль).

Невязка уравнения неразрывности имеет вид

$$f_{\rho\Omega} = V_{\Omega}(\hat{\rho}_{\Omega} - \rho_{\Omega}) + \tau \Delta V_{\Omega} \hat{j}_{\rho} = 0. \quad (26)$$

Аналогично запишем невязку уравнения энергии

$$f_{E\Omega} = V_{\Omega}(\hat{E}_{\Omega} - E_{\Omega}) + \tau \Delta V_{\Omega} \hat{j}_E + \tau \hat{P}_{\Omega} \Delta V_{\Omega} (s\hat{w}) = 0 \quad (27)$$

и невязку уравнения импульса

$$f_w = v_w(\hat{\rho}_w \hat{w}_w - \bar{\rho}_w w_w) + \tau \Delta_w \hat{j} + \tau s_w \Delta_w \hat{\rho} = 0. \quad (28)$$

Используя термодинамические соотношения, выразим искомые приращения по времени плотности и энергии через переменные, которые берем за основу – давление и энтальпию:

$$\delta \rho_{\Omega} = \tilde{\rho}'_{P\Omega} \delta P_{\Omega} + \tilde{\rho}'_{\Psi\Omega} \delta \Psi_{\Omega}, \quad (29)$$

$$\delta E_{\Omega} = \tilde{E}'_{P\Omega} \delta P_{\Omega} + \tilde{E}'_{\Psi\Omega} \delta \Psi_{\Omega}. \quad (30)$$

Величина с волной означает, что она берется на известном шаге по времени, соответствующем явной схеме или шагу итераций. Запишем уравнения балансов массы и энергии на ячейке, в которую входит произвольное, вообще говоря, число труб:

баланс массы

$$V_{\Omega} \delta \rho_{\Omega} + \tau \sum_{\omega(\Omega)} n_{\omega(\Omega)} s_{\omega} \tilde{\rho}_{\Omega_{up}(\omega)} \delta w_{\omega} = 0 - \tilde{f}_{\rho\Omega}, \quad (31)$$

баланс энергии

$$V_{\Omega} \delta E_{\Omega} + \tau \sum_{\omega(\Omega)} n_{\omega(\Omega)} s_{\omega} \tilde{E}_{\Omega_{up}(\omega)} \delta w_{\omega} + \tau \tilde{P}_{\Omega} \sum_{\omega(\Omega)} n_{\omega(\Omega)} s_{\omega} \delta w_{\omega} = 0 - \tilde{f}_{E\Omega}. \quad (32)$$

Используя соотношения термодинамики, получаем линейную систему уравнений с двумя неизвестными: приращение давления и приращение энтальпии:

$$V_{\Omega} \tilde{\rho}'_{P\Omega} \delta P_{\Omega} + V_{\Omega} \tilde{\rho}'_{\Psi\Omega} \delta \Psi_{\Omega} = \varphi_{P\Omega}, \quad (33)$$

$$V_{\Omega} \tilde{E}'_{P\Omega} \delta P_{\Omega} + V_{\Omega} \tilde{E}'_{\Psi\Omega} \delta \Psi_{\Omega} = \varphi_{E\Omega}. \quad (34)$$

Здесь обозначено

$$\varphi_{P\Omega} = -\tau \sum_{\omega(\Omega)} n_{\omega(\Omega)} s_{\omega} \tilde{\rho}_{\Omega_{\omega p}} \delta w_{\omega} - \tilde{f}_{P\Omega} = -[\tau \Delta V_{\Omega} (s \tilde{\rho}_{\Omega_{\omega p}} \delta w) + \tilde{f}_{P\Omega}], \quad (35)$$

$$\varphi_{E\Omega} = -\tau \sum_{\omega(\Omega)} n_{\omega(\Omega)} s_{\omega} (\tilde{E}_{\Omega_{\omega p}} + \tilde{P}_{\Omega}) \delta w_{\omega} - \tilde{f}_{E\Omega} = -\left\{ \tau \Delta V_{\Omega} [s (\tilde{E}_{\Omega_{\omega p}} + \tilde{P}_{\Omega}) \delta w] + \tilde{f}_{E\Omega} \right\}. \quad (36)$$

Решение линейной системы получается с помощью вычисления значений определителей. Удобно систему записать в виде

$$a_{\rho\rho,\Omega} \delta P_{\Omega} + a_{\rho\Psi,\Omega} \delta \Psi_{\Omega} = \varphi_{P\Omega}, \quad (37)$$

$$a_{\Psi\rho,\Omega} \delta P_{\Omega} + a_{\Psi\Psi,\Omega} \delta \Psi_{\Omega} = \varphi_{E\Omega}. \quad (38)$$

Требуется вычислить следующие определители

$$\Delta_{\Omega} = \det \begin{pmatrix} a_{\rho\rho,\Omega} & a_{\rho\Psi,\Omega} \\ a_{\Psi\rho,\Omega} & a_{\Psi\Psi,\Omega} \end{pmatrix}; \Delta_{P\Omega} = \det \begin{pmatrix} \varphi_{P\Omega} & a_{\rho\Psi,\Omega} \\ \varphi_{E\Omega} & a_{\Psi\Psi,\Omega} \end{pmatrix}; \Delta_{\Psi\Omega} = \det \begin{pmatrix} a_{\rho\rho,\Omega} & \varphi_{P\Omega} \\ a_{\Psi\rho,\Omega} & \varphi_{E\Omega} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Решение системы запишем по правилу Крамера

$$\delta P_{\Omega} = \Delta_{P\Omega} / \Delta_{\Omega}, \quad \delta \Psi_{\Omega} = \Delta_{\Psi\Omega} / \Delta_{\Omega}. \quad (40)$$

Здесь

$$\Delta_{\Omega} = V_{\Omega}^2 \left[ \tilde{\rho}'_{P\Omega} \tilde{E}'_{\Psi\Omega} - \tilde{\rho}'_{\Psi\Omega} \tilde{E}'_{P\Omega} \right]. \quad (41)$$

Для приращения давления получаем формулу

$$\delta P_{\Omega} = \frac{-V_{\Omega}}{\Delta_{\Omega}} \left\{ \tau \Delta V_{\Omega} \left[ s (\tilde{\rho}_{\Omega_{\omega p}} \tilde{E}'_{\Psi\Omega} - (\tilde{E}_{\Omega_{\omega p}} + \tilde{P}_{\Omega}) \tilde{\rho}'_{\Psi\Omega}) \delta w \right] - F_{P\Omega} \right\}, \quad (42)$$

в которой

$$F_{P\Omega} = -(\tilde{E}'_{\Psi\Omega} \tilde{f}_{P\Omega} - \tilde{\rho}'_{\Psi\Omega} \tilde{f}_{E\Omega}).$$

Уравнение сохранения импульса в терминах приращений по времени записывается следующим образом:

$$v_{\omega} (\delta \tilde{\rho}_{\omega} \tilde{w}_{\omega} + \tilde{\rho}_{\omega} \delta w_{\omega}) + \tau \Delta_{\omega} \delta j + \tau s_{\omega} \Delta_{\omega} \delta \wp = 0 - \tilde{f}_{\omega}. \quad (43)$$

Исключим из этого выражения  $\delta \rho$ , пользуясь уравнением баланса массы в ячейке:

$$V_{\Omega} \delta \rho_{\Omega} + \tau \Delta V_{\Omega} (s \tilde{\rho}_{\Omega_{\omega p}} \delta w) = -\tilde{f}_{P\Omega} \quad (44)$$

Поскольку плотность в узле можно выразить через плотности в смежных к узлу ячейках

$$\delta\bar{p}_\omega = \sum_{\Omega(\omega)} (\tilde{\rho}_\omega)'_{\rho_\Omega} \delta\rho_\Omega,$$

имеем

$$\delta\bar{p}_\omega = - \sum_{\Omega(\omega)} \frac{(\tilde{\rho}_\omega)'_{\rho_\Omega}}{V_\Omega} \left[ \tau \Delta V_\Omega (s \tilde{\rho}_{\Omega_{up}} \delta w) + \tilde{f}_{\rho_\Omega} \right]. \quad (45)$$

Подставляя это выражение в уравнение импульса, получим

$$v_\omega \tilde{\rho}_\omega \delta w_\omega + \tau \left[ \Delta_\omega \delta j - v_\omega \tilde{w}_\omega \sum_{\Omega(\omega)} \frac{1}{V_\Omega} (\tilde{\rho}_\omega)'_{\rho_\Omega} \Delta V_\Omega (s \tilde{\rho}_{\Omega_{up}} \delta w) \right] + \tau s_\omega \Delta_\omega \delta \varphi = -\tilde{f}_\omega + v_\omega \tilde{w}_\omega \sum_{\Omega(\omega)} \frac{(\tilde{\rho}_\omega)'_{\rho_\Omega}}{V_\Omega} \tilde{f}_{\rho_\Omega}. \quad (46)$$

Наконец, объединив члены с невязками, получим

$$\Phi_\omega = -\tilde{f}_\omega + v_\omega \tilde{w}_\omega \sum_{\Omega(\omega)} \frac{(\tilde{\rho}_\omega)'_{\rho_\Omega}}{V_\Omega} \tilde{f}_{\rho_\Omega}. \quad (47)$$

В итоге получается линеаризованное уравнение импульса, связывающее приращение скорости с приращением давления:

$$-v_\omega \tilde{\rho}_\omega \delta w_\omega - \tau \left[ \Delta_\omega \delta j - v_\omega \tilde{w}_\omega \sum_{\Omega(\omega)} \frac{1}{V_\Omega} (\tilde{\rho}_\omega)'_{\rho_\Omega} \Delta V_\Omega (s \tilde{\rho}_{\Omega_{up}} \delta w) \right] - \tau s_\omega \Delta_\omega \delta \varphi = -\Phi_\omega \quad (48)$$

При решении многих задач оказывается приемлемо допущение о том, что приращение скорости во времени, обусловленное конвективными процессами, пренебрежимо мало, и его можно считать равным нулю. Тогда связь между приращением давления и приращением скорости заметно упрощается.

## 6. Алгоритм решения уравнений термогидравлики модифицированным методом прогонки (метод символьной прогонки)

Рассмотрим теперь алгоритм символьной прогонки. Вначале получим коэффициенты прогонки для расчетных ячеек, принадлежащих расчетной области трубы.

Основу алгоритма прогонки составляет конечно-разностное уравнение сохранения импульса (38), записанное для узла  $\omega$ . На первом этапе рассмотрим трехточечную разностную схему решения линейной системы по узлам, которые находятся внутри трубы, т.е. исключая граничные узлы  $\partial\omega$ . Пока рассматриваются обычные ячейки внутри трубы, не являющиеся стыками. В общем виде для узла  $\omega$  конечно-разностный баланс записывается следующим образом (см. Рис. 9):

$$A_\omega \delta w_{\omega-1} - C_\omega \delta w_\omega + B_\omega \delta w_{\omega+1} = -F_\omega, \quad (49)$$

при этом  $\omega = 1, \dots, N-1$ .

К этим узлам примыкают ячейки трубы, обозначаемые как  $\Omega \neq \partial\Omega$ ; их нумерация при этом следующая:  $\Omega=1, \dots, N$ . Граничные ячейки с номерами 0,  $N+1$  обозначим как  $\partial\Omega$ . Граничные узлы обозначим как  $\partial\omega=0, N$ . Уравнения (38), (39) представляют собой балансные соотношения между приращением скорости и приращением давления, основанные на уравнениях первых принципов и теореме Остроградского-Гаусса, примененной к расчетному объему контура. Для того чтобы получить трехточечное уравнение по скорости (собственно прогоночное уравнение), мы должны исключить  $\delta P$  в соответствии с (32), тогда получим

$$-v_{\omega} \tilde{\rho}_{\omega} \delta w_{\omega} - \tau \left[ \Delta_{\omega} \delta j - v_{\omega} \tilde{w}_{\omega} \sum_{\Omega(\omega)} 1/V_{\Omega} \left( \tilde{\rho}_{\omega} \right)'_{\rho_{\Omega}} \Delta V_{\Omega} \left( s \tilde{\rho}_{\Omega_{up}} \delta w \right) \right] - \tau s_{\omega} \Delta_{\omega} \delta \rho = -\Phi_{\omega} \quad (50)$$

Отметим, что на основе уравнения баланса (38) можно проанализировать слагаемые прогоночных коэффициентов и понять их физический смысл. Все вышесказанное подтверждается формулами, которые выводятся из уравнения баланса импульса, записанного для временных приращений скоростей в конечно-разностной форме. При этом следует учитывать правила аппроксимации значений кинематических величин (скоростей), определенных в узлах, в их значения в ячейках и, наоборот, правила аппроксимации значений термодинамических величин, определенных в ячейках, в их значения в узлах.

Выпишем формулы коэффициентов прогонки для примера расчета ячеек трубы, изображенной на рис. 10.

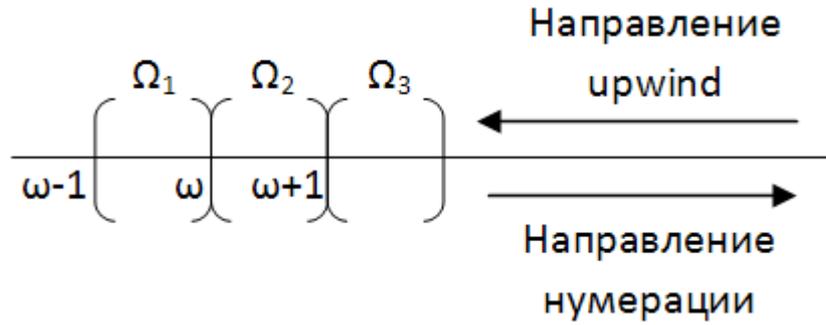


Рис.10. Схема внутренних ячеек трубы.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий вышесказанное. Пусть нумерация указана на рис. 10 стрелкой и направление потока upwind также указано стрелкой (1-й вариант). Тогда коэффициенты прогонки  $A_{\omega}, C_{\omega}, B_{\omega}$  выписываются следующим образом ( $\tilde{w}_{\omega} < 0, \tilde{w}_{\omega+1} < 0$ )

$$C_{\omega} = v_{\omega} \tilde{\rho}_{\omega} - \tau \left\{ 2 \tilde{\rho}_{\Omega_1} / s_{\Omega_1} * s_{\omega}^2 \tilde{w}_{\omega} + v_{\omega} \tilde{w}_{\omega} \left( \left( \tilde{\rho}_{\omega} \right)'_{\rho_{\Omega_1}} / V_{\Omega_1} s_{\omega} \tilde{\rho}_{\Omega_2} \right) \right\} + \quad (51)$$

$$+ \tau s_{\omega} \left( \tau V_{\Omega_1} / \Delta_{\Omega_1} s_{\omega} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_2} \tilde{E}'_{\Psi_{\Omega_2}} - \left( \tilde{E}_{\Omega_2} + \tilde{P}_{\Omega_2} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi_{\Omega_2}} \right] + \tau V_{\Omega_2} / \Delta_{\Omega_2} s_{\omega} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_2} \tilde{E}'_{\Psi_{\Omega_2}} - \left( \tilde{E}_{\Omega_2} + \tilde{P}_{\Omega_2} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi_{\Omega_2}} \right] \right),$$

$$A_{\omega} = -\tau v_{\omega} \tilde{w}_{\omega} \left( \tilde{\rho}_{\omega} \right)'_{\rho_{\Omega_1}} / V_{\Omega_1} s_{\omega-1} \tilde{\rho}_{\Omega_1} + \quad (52)$$

$$+ \tau^2 s_{\omega} V_{\Omega_1} / \Delta_{\Omega_1} s_{\omega-1} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_1} \tilde{E}'_{\Psi_{\Omega_1}} - \left( \tilde{E}_{\Omega_1} + \tilde{P}_{\Omega_1} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi_{\Omega_1}} \right],$$

$$B_{\omega} = -\tau \left\{ 2 \tilde{\rho}_{\Omega_2} / s_{\Omega_2} s_{\omega+1}^2 \tilde{w}_{\omega+1} + v_{\omega} \tilde{w}_{\omega} \left( \tilde{\rho}_{\omega} \right)'_{\rho_{\Omega_2}} / V_{\Omega_2} s_{\omega+1} \tilde{\rho}_{\Omega_2} \right\} + \quad (53)$$

$$+ \tau^2 s_{\omega} V_{\Omega_2} / \Delta_{\Omega_2} s_{\omega+1} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_2} \tilde{E}'_{\Psi_{\Omega_2}} - \left( \tilde{E}'_{\Omega_2} + \tilde{P}_{\Omega_2} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi_{\Omega_2}} \right].$$

Правая часть системы линейных уравнений для ячеек внутри трубы также определяется балансным соотношением, связана с невязками и может быть записана в виде

$$F_{\omega} = \Phi_{\omega} - \tau s_{\omega} \left[ -V_{\Omega_1} / \Delta_{\Omega_1} F_{P_{\Omega_1}} + V_{\Omega_2} / \Delta_{\Omega_2} F_{P_{\Omega_2}} \right], \quad (54)$$

при этом

$$F_{P_{\Omega}} = - \left( \tilde{E}'_{\Psi_{\Omega}} \tilde{f}_{\rho_{\Omega}} - \tilde{\rho}'_{\Psi_{\Omega}} \tilde{f}_{E_{\Omega}} \right). \quad (55)$$

Если предположить, что изменения за счет конвективных процессов малы по сравнению с изменением за счет нестационарности потока, формулы коэффициентов прогонки значительно упрощаются. Они будут выглядеть так:

$$C_{\omega} = v_{\omega} \tilde{\rho}_{\omega} + \quad (56)$$

$$\tau s_{\omega} \left( \tau V_{\Omega_1} / \Delta_{\Omega_1} s_{\omega} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_1} \tilde{E}'_{\Psi_{\Omega_1}} - \left( \tilde{E}_{\Omega_1} + \tilde{P}_{\Omega_1} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi_{\Omega_1}} \right] + \tau V_{\Omega_2} / \Delta_{\Omega_2} s_{\omega} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_2} \tilde{E}'_{\Psi_{\Omega_2}} - \left( \tilde{E}_{\Omega_2} + \tilde{P}_{\Omega_2} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi_{\Omega_2}} \right] \right),$$

$$A_{\omega} = \tau^2 s_{\omega} V_{\Omega_1} / \Delta_{\Omega_1} s_{\omega-1} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_1} \tilde{E}'_{\Psi_{\Omega_1}} - \left( \tilde{E}_{\Omega_1} + \tilde{P}_{\Omega_1} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi_{\Omega_1}} \right], \quad (57)$$

$$B_{\omega} = \tau^2 s_{\omega} V_{\Omega_2} / \Delta_{\Omega_2} s_{\omega+1} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_2} \tilde{E}'_{\Psi_{\Omega_2}} - \left( \tilde{E}'_{\Omega_2} + \tilde{P}_{\Omega_2} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi_{\Omega_2}} \right]. \quad (58)$$

Перейдем к получению коэффициентов, определяющих граничные условия метода прогонки.

Рассмотрим граничное условие на левой границе ( $\partial\Omega=0$  см. рис. 9). Это может быть стык, т.е. соединение трех и более труб, или же заглушка контура в атмосферу. Предполагается, что в последнем случае в этой граничной ячейке определены необходимые термодинамические параметры.

Получим коэффициенты прогонки для расчетных ячеек, являющихся граничными, т.е. либо внутренними стыками, через которые протекает флюид, либо внешними заглушками, на которых заданы граничные условия. Рассмотрим сначала узел  $\omega=0$ , т.е. левый конец данного участка трубы (как уже отмечалось, труба имеет ориентацию согласно нумерации ячеек.) Здесь уже будет не трехточечное разностное уравнение, а двухточечное, связывающее узлы  $\omega=0$  и  $\omega=1$ . Она получается из уравнения импульса (38), записанного в точке  $\omega=0$ . Естественно, что эти коэффициенты будут зависеть от направления потока. Рассмотрим это детально с целью прояснения построения алгоритма. Схема граничного условия представлена на рис.11. Мы используем следующую математическую модель: на концах трубы

присутствуют либо стыки, либо заглушки. В последнем случае все термодинамические величины предполагаются заданными.

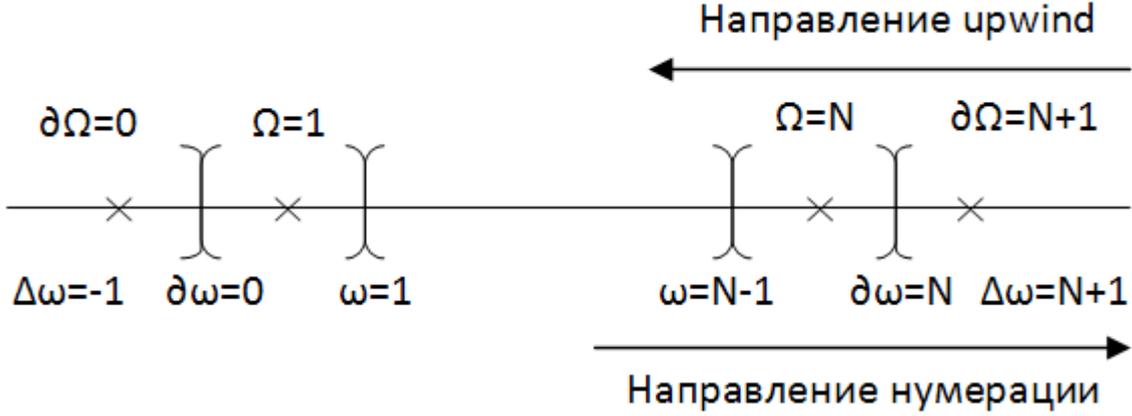


Рис.11. Схема граничных ячеек трубы.

$\partial\Omega=0$  – обозначение стыка на левом конце;

$\partial\Omega=N+1$  – обозначение стыка на правом конце;

$\Omega=1$  – обозначение первой внутренней ячейки на трубе слева;

$\Omega=N$  – обозначение последней внутренней ячейки на трубе справа;

$\partial\omega=0$  – обозначение граничного левого узла трубы;

$\omega=1$  – обозначение первого внутреннего узла на трубе слева;

$\omega=N-1$  – обозначение последнего внутреннего узла на ячейке справа;

$\partial\omega=N$  – обозначение граничного правого узла трубы.

Напомним, что для описания стыка вводилось понятие дополнения к данному узлу  $\omega$ : это совокупность всех узлов стыка за исключением данного (аналог протекающей обобщенной трубы), обозначим как  $\Delta\omega$ . Тогда для данной схемы получим

$\Delta\omega=-1$  – дополнение левого стыка к узлу  $\partial\omega=0$ ;

$\Delta\omega=N+1$  – дополнение правого стыка к узлу  $\partial\omega=N$ .

Учитывая вышесказанное, а также имея в виду “наветренное” направление, указанное на схеме, записываем уравнение сохранения импульса в узле  $\partial\omega=0$  для случая стыка ( $\partial_{\geq 2}\Omega=0$ )

$$\begin{aligned}
 & -v_0 \tilde{\rho}_0 \delta w_0 - \tau \left[ \begin{aligned} & 2\tilde{\rho}_1 / s_{\Omega=1} \{s_{\omega=1}^2 \tilde{w}_1 \delta w_1\} - 2\tilde{\rho}_{\alpha\Omega=0} / s_{\alpha\Omega=0, \omega=0} \{s_{\omega=0}^2 \tilde{w}_0 \delta w_0\} - \\ & -v_0 \tilde{w}_0 \left[ \left( \tilde{\rho}_0 \right)_{\rho_{\alpha\Omega=0}}' / V (s_{\omega=0} \tilde{\rho}_{\Omega_1} \delta w_0 + \text{DIV}_{\partial_{\geq 2}\Omega / \partial\omega=0} (s \tilde{\rho}_{\Omega_{up}} \delta w)) \right] \end{aligned} \right] - \\
 & -\tau s_{\omega=0} \left[ \frac{V_1}{\Delta_1} \left( \tau \left( \begin{aligned} & s_{\omega=0} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_1} \tilde{E}'_{\Omega_1} - (\tilde{E}_{\Omega_1} + P_{\Omega_1}) \tilde{\rho}'_{\Psi_1} \right] \delta w_0 - \right. \right. \\ & \left. \left. - s_{\omega=1} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_2} \tilde{E}'_{\Psi_1} - (\tilde{E}_{\Omega_2} + \tilde{P}_{\Omega_1}) \tilde{\rho}'_{\Psi_1} \right] \delta w_1 \right) + F_{P_{\Omega_1}} \right) - \delta P_{\alpha\Omega=0} \right] = -\Phi_0.
 \end{aligned} \tag{59}$$

Аналогичное выражение можно записать для противоположного “наветренного” направления исходя из соответствующей аппроксимации балансных уравнений.

Уравнение (59), записанное в граничной точке  $\partial\omega=0$ , представляет собой граничное условие для реализации счета прогонкой. Обычная запись, принятая в литературе [2], выглядит следующим образом:

$$\delta w_0 = \chi_a \delta w_1 + v_a. \quad (60)$$

Особенность данного подхода (символьной прогонки) состоит в том, что термодинамическое состояние граничных с данной трубой стыков не известно заранее (как требовалось бы при реализации классического метода прогонки), а приращения термодинамических параметров записываются в алгебраической форме с тем, чтобы использовать их в уравнении общего баланса по контуру. Такой подход дает возможность для создания алгоритмов и кодов расчета тепломассопереноса в контурах различных конструкций, содержащих стыки со сколь угодно сложными разветвлениями. При этом по своей структуре эти алгоритмы легко допускают распараллеливание. Суть сказанного может быть выражена формулой граничных условий, записанной в виде

$$\delta w_0 = \chi_a \delta w_1 + v_a + \pi_a. \quad (61)$$

Входящая в (61) величина  $\pi_a$  содержит термодинамические характеристики стыков, записанные в алгебраической форме. Приведем полученное уравнение к данному виду. Наветренное направление остается таким, как указано на рис. 11. Сгруппируем члены рассматриваемого уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left\{ v_0 \tilde{\rho}_0 + \tau \left[ -2\tilde{\rho}_{\alpha\Omega=0} / s_{\alpha\Omega=0, \omega=0} s_{\omega=0}^2 \tilde{w}_0 - v_0 \tilde{w}_0 \left[ (\tilde{\rho}_0)'_{\rho_{\alpha\Omega=0}} / V_0 s_{\omega=0} \tilde{\rho}_{\Omega_1} \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + s_{\omega=0} V_1 / \Delta_1 \left( \tau \left( s_{\omega=0} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_1} \tilde{E}'_{\Psi_1} - (\tilde{E}_{\Omega_1} + \tilde{P}_{\Omega_1}) \tilde{\rho}'_{\Psi_1} \right] \right) \right) \right] \right\} \delta w_0 = \\ & = \left\{ -\tau \left[ +2\tilde{\rho}_1 / s_{\Omega=1} s_{\omega=1}^2 \tilde{w}_1 - s_{\omega=0} (V_1 / \Delta_1) \left( \tau \left( s_{\omega=1} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_2} \tilde{E}'_{\Psi_1} - (\tilde{E}_{\Omega_2} + \tilde{P}_{\Omega_2}) \tilde{\rho}'_{\Psi_1} \right] \right) \right) \right] \right\} \delta w_1 + \\ & + \left\{ -\tau s_{\omega=0} (V_1 / \Delta_1) F_{P_{\Omega_1}} + \Phi_0 \right\} + \left\{ \tau \left[ v_0 \tilde{w}_0 \left[ (\tilde{\rho}_0)'_{\rho_{\alpha\Omega=0}} / V_0 \text{DIV}_{\partial z_2 \Omega / \partial \omega=0} (s \tilde{\rho}_{\Omega_{\Psi}} \delta w) \right] + s_{\omega=0} \delta P_0 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (62)$$

Выпишем коэффициенты, которые определяют стандартную форму граничных условий метода прогонки:

$$\xi_a = \left\{ v_0 \tilde{\rho}_0 - \tau \left[ \begin{aligned} & 2s_{\omega=0}^2 \tilde{w}_0 \tilde{\rho}_{\alpha\Omega=0} / s_{\alpha\Omega=0, \omega=0} + v_0 \tilde{w}_0 s_{\omega=0} \tilde{\rho}_{\Omega_1} (\tilde{\rho}_0)'_{\rho_{\alpha\Omega=0}} / V_0 - \\ & -\tau V_1 / \Delta_1 s_{\omega=0}^2 \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_1} \tilde{E}'_{\Psi_1} - (\tilde{E}_{\Omega_1} + \tilde{P}_{\Omega_1}) \tilde{\rho}'_{\Psi_1} \right] \end{aligned} \right] \right\}. \quad (63)$$

Тогда коэффициент, связывающий левую граничную точку и первую точку на трубе, запишется следующим образом:

$$\chi_a = \xi_a^{-1} \left\{ \tau \left[ -2s_{\omega=1}^2 \tilde{w}_1 \tilde{\rho}_1 / s_{\Omega=1} + \tau V_1 / \Delta_1 s_{\omega=0} s_{\omega=1} \left[ \rho_{\Omega_2} \tilde{E}'_{\Psi_1} - (\tilde{E}_{\Omega_2} + \tilde{P}_{\Omega_2}) \tilde{\rho}'_{\Psi_1} \right] \right] \right\}. \quad (64)$$

Коэффициент, связанный с невязками уравнений импульса и уравнений неразрывности, запишется следующим образом:

$$v_a = \xi_a^{-1} \left\{ \Phi_0 - \tau V_1 / \Delta_1 s_{\omega=0} F_{P\Omega_1} \right\}. \quad (65)$$

Как уже отмечалось, эти коэффициенты присутствуют в стандартных формулировках метода прогонки. Коэффициент, который позволяет сделать обобщение метода на построение расчетных схем для систем сложных контуров, содержащих стыки из произвольного количества труб, запишется следующим образом:

$$\pi_a = \xi_a^{-1} \left\{ \tau \left[ v_0 \tilde{w}_0 \left[ \left( \tilde{\rho}_0 \right)'_{\rho_{\Omega=0}} / V_0 \text{DIV}_{\partial_{\geq 2}\Omega / \partial\omega=0} \left( s \tilde{\rho}_{\Omega_{up}} \delta w \right) \right] + s_{\omega=0} \delta P_0 \right] \right\}. \quad (66)$$

Если пренебречь конвективным членом, как это часто бывает оправдано, то выражения для коэффициентов прогонки также значительно упрощаются:

$$\xi_a = \left\{ v_0 \tilde{\rho}_0 + \tau^2 V_1 / \Delta_1 s_{\omega=0} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_1} \tilde{E}'_{\Psi_1} - \left( \tilde{E}_{\Omega_1} + \tilde{P}_{\Omega_1} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi_1} \right] \right\}, \quad (67)$$

$$\pi_a = \xi_a^{-1} \tau s_{\omega=0} \delta P_{\Omega_0}, \quad (68)$$

$$\chi_a = \xi_a^{-1} \left[ \tau^2 V_1 / \Delta_1 s_{\omega=0} s_{\omega=1} \left[ \rho_{\Omega_2} \tilde{E}'_{\Psi_1} - \left( \tilde{E}_{\Omega_2} + \tilde{P}_{\Omega_1} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi_1} \right] \right]. \quad (69)$$

Для завершения описания прогоночных формул необходимо получить аналогичные граничные соотношения на другом конце расчетной области трубы. С этой целью запишем уравнение импульса в узле  $\partial\omega = N$  для случая стыка ( $\partial_{\geq 2}\Omega = N+1$ ). Схема примера остается та же, что и на Рис. 11, включая “наветренное” направление потока.

$$\begin{aligned} & -v_N \tilde{\rho}_N \delta w_N - \tau \left[ -2 \tilde{\rho}_N / s_{\Omega=N} s_{\omega=N}^2 \tilde{w}_N \delta w_N + 2 \tilde{\rho}_{\Omega=N+1} / s_{\Omega=N+1, \omega=N} \langle s \tilde{w} \rangle_{\Delta\omega=N+1} \langle s \delta w \rangle_{\Delta\omega=N+1} - \right. \\ & \left. -v_N \tilde{w}_N \left( \tilde{\rho}_N \right)'_{\rho_N} / V_N \left( s_{\omega=N} \tilde{\rho}_{\Omega_{N+1}} \delta w_N - s_{\omega=N-1} \tilde{\rho}_{\Omega_N} \delta w_{N-1} \right) \right] \\ & - \tau s_{\omega=N} \left[ -V_N / \Delta_N \left( -\tau \left( s_{\omega=N} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_{N+1}} \tilde{E}'_{\Psi_N} - \left( \tilde{E}_{\Omega_{N+1}} + \tilde{P}_{\Omega_N} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi_N} \right] \delta w_N - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - s_{\omega=N-1} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_N} \tilde{E}'_{\Psi_N} - \left( \tilde{E}_{\Omega_N} + \tilde{P}_{\Omega_N} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi_N} \right] \delta w_{N-1} \right) + F_{PN} \right) + \delta P_{N+1} \right] = -\Phi_N. \end{aligned} \quad (70)$$

Аналогично предыдущим выкладкам в узле  $\partial\omega = 0$  это уравнение, записанное в граничном узле  $\partial\omega = N$ , представляет собой граничные условия метода прогонки на правом конце. Как уже отмечалось, здесь развивается метод символьной прогонки, т.е. граничные условия записываются в следующем виде:

$$\delta w_N = \chi_b \delta w_{N-1} + v_b + \pi_b. \quad (71)$$

Здесь, так же, как и в случае левой границы области счета, коэффициенты  $\chi_b$  и  $v_b$  соответствуют стандартной форме метода прогонки, описанной в литературе [2], а коэффициент  $\pi_b$ , записанный в формуле (71), относится к обобщению метода, позволяющему рассчитывать теплогидравлические контуры с любой степенью сложности и допускающему при этом естественную параллелизацию вычислительного процесса.

Подставляя выражения для соответствующих коэффициентов, запишем условие на правой границе

$$\begin{aligned}
& \left\{ v_N \tilde{\rho}_N + \tau \left[ -2\tilde{\rho}_N / s_{\Omega=N} s_{\omega=N}^2 \tilde{w}_N - v_N \tilde{w}_N \left[ \left( \tilde{\rho}_N \right)'_{\rho_N} / V_N s_{\omega=N} \tilde{\rho}_{\Omega_{N+1}} \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + s_{\omega=N} V_N / \Delta_N \tau \left( s_{\omega=N} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_{N+1}} \tilde{E}'_{\Psi N} - \left( \tilde{E}_{\Omega_{N+1}} + \tilde{P}_{\Omega_N} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi N} \right] \right) \right] \right\} \delta w_N = \\
& = \left\{ -\tau \left[ v_N \tilde{w}_N \left( \tilde{\rho}_N \right)'_{\rho_N} / V_N s_{\omega=N-1} \tilde{\rho}_{\Omega_N} - s_{\omega=N} V_N / \Delta_N \tau s_{\omega=N-1} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_N} \tilde{E}'_{\Psi N} - \left( \tilde{E}_{\Omega_N} + \tilde{P}_{\Omega_N} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi N} \right] \right] \right\} \delta w_{N-1} + \\
& + \left\{ \tau s_{\omega=N} V_N / \Delta_N F_{PN} + \Phi_N \right\} - \tau \left[ 2\tilde{\rho}_{\Omega=N+1} / s_{\Omega=N+1, \omega=N} \langle s\tilde{w} \rangle_{\Delta\omega=N+1} \langle s\delta w \rangle_{\Delta\omega=N+1} + s_{\omega=N} (\delta P_{N+1}) \right].
\end{aligned} \quad (72)$$

Так же, как и на левой границе, выпишем коэффициенты, которые определяют стандартную форму граничных условий метода прогонки [2].

Один из них вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
\xi_b = v_N \tilde{\rho}_N + \tau \left[ 2s_{\omega=N}^2 \tilde{w}_N (-\rho_N / s_{\Omega=N}) - v_N \tilde{w}_N s_{\omega=N} \tilde{\rho}_{\Omega_{N+1}} \left( \tilde{\rho}_N \right)'_{\rho_N} / V_N \right] \\
+ \tau^2 V_N / \Delta_N s_{\omega=N}^2 \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_{N+1}} \tilde{E}'_{\Psi N} - \left( \tilde{E}_{\Omega_{N+1}} + P_{\Omega_N} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi N} \right].
\end{aligned} \quad (73)$$

Коэффициент, связывающий два правых граничных узла трубы (согласно введенной нумерации), вычисляется следующим образом:

$$\chi_b = \xi_b^{-1} \left\{ \tau \left[ -s_{\omega=N-1} v_N \tilde{w}_N \left( \tilde{\rho} \right)'_{\rho_N} / V_N \tilde{\rho}_{\Omega_N} + \tau V_N / \Delta_N s_{\omega=N} s_{\omega=N-1} \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_N} \tilde{E}'_{\Psi N} - \left( \tilde{E}_{\Omega_N} + \tilde{P}_{\Omega_N} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi N} \right] \right] \right\} \quad (74)$$

Соответственно, коэффициент, связанный с невязками уравнений импульса и уравнений неразрывности, запишется следующим образом:

$$\nu_b = \xi_b^{-1} \left\{ \Phi_N + \tau V_N / \Delta_N s_{\omega=N} F_{PN} \right\}. \quad (75)$$

И, аналогично, коэффициент  $\pi_b$ , который позволяет сделать обобщение метода на построение расчетных схем для систем сложных контуров, содержащих стыки произвольного количества труб, запишется следующим образом:

$$\pi_b = \xi_b^{-1} \left\{ \tau \left[ -2\tilde{\rho}_{\Omega=N+1} / s_{\Omega=N+1, \omega=N} \langle s\tilde{w} \rangle_{\Delta\omega=N+1} \langle s\delta w \rangle_{\Delta\omega=N+1} - s_{\omega=N} \delta P_{N+1} \right] \right\}. \quad (76)$$

Если пренебречь конвективным членом, как это часто бывает оправдано, то выражения также значительно упрощаются

$$\xi_b = v_N \tilde{\rho}_N + \tau^2 V_N / \Delta_N s_{\omega=N}^2 \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_{N+1}} \tilde{E}'_{\Psi N} - \left( \tilde{E}_{\Omega_{N+1}} + P_{\Omega_N} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi N} \right], \quad (77)$$

$$\xi_b = v_N \tilde{\rho}_N + \tau^2 V_N / \Delta_N s_{\omega=N}^2 \left[ \tilde{\rho}_{\Omega_{N+1}} \tilde{E}'_{\Psi N} - \left( \tilde{E}_{\Omega_{N+1}} + P_{\Omega_N} \right) \tilde{\rho}'_{\Psi N} \right], \quad (78)$$

$$\pi_b = -\xi_b^{-1} \tau s_{\omega=N} \delta P_{N+1}. \quad (79)$$

Естественно, при создании общего алгоритма надо учитывать нумерацию и направление потока и делать конечно-разностную аппроксимацию термодинамики и кинематики исходя из наветренного направления, а также применять теорему Гаусса на конечно-разностном уровне, учитывая соответствующее направление нормали.

Коэффициенты прогонки обеспечивают устойчивое решение задачи по каждой трубе, при этом вектор скоростей выражен через параметры соседних стыков по принципу решения краевой задачи методом прогонки.

Сделаем некоторые замечания в завершение описания алгоритма решения краевой задачи расчета скорости потока в расчетной области каждой трубы методом прогонки. В данном разделе работы уже было отмечено, что для составления “рабочего” алгоритма сеточный вектор скоростей по каждой составляющей данный контур трубе выражается через термодинамические параметры соответствующих стыков, являющихся граничными для данной трубы. Эти параметры содержатся в обобщенных граничных коэффициентах прогонки для каждой трубы от левого и от правого стыков.

Запишем соответствующие вклады от левого стыка:

$$\pi_a = \xi_a^{-1} \left\{ \tau \left[ v_0 \tilde{w}_0 \left[ \left( \tilde{\rho}_0 \right)'_{\rho_{\Omega=0}} / V_0 \text{DIV}_{\partial_{z_2} \Omega / \partial \omega=0} \left( s \tilde{\rho}_{\Omega_{up}} \delta w \right) \right] + s_{\omega=0} \delta P_0 \right] \right\}, \quad (80)$$

и от правого стыка:

$$\pi_b = \xi_b^{-1} \left\{ \tau \left[ -2 \tilde{\rho}_{\partial \Omega=N+1} / s_{\partial \Omega=N+1, \omega=N} \langle s \tilde{w} \rangle_{\Delta \omega=N+1} \langle s \delta w \rangle_{\Delta \omega=N+1} - s_{\omega=N} \delta P_{N+1} \right] \right\}. \quad (81)$$

Это особенно наглядно следует из упрощенных формул (68) и (79), когда допускается, что конвективными членами можно пренебречь.

Заключительный шаг алгоритма состоит в том, чтобы для каждого стыка написать уравнения для определения термодинамического состояния по каждой составляющей его трубе (33) и (34) и соответственно их решения (40) и (42). В результате линейная система уравнений естественным образом замкнется относительно этих (макроскопических) термодинамических переменных всех стыков контура, в данном случае выбранных нами как  $\delta P_{\Omega}$  и  $\delta \Psi_{\Omega}$ .

## 7. Результаты расчетов

Рассмотрена задача мгновенного изменения давления на входе необогреваемого объема с гомогенной средой в нулевой момент времени и в условиях наличия потерь на трение в гидравлическом соединении. Блок-схема устройства приведена на рис. 12.



Рис. 12.

При моделировании задачи использовались исходные значения и начальные условия для параметров расчетных элементов, приведенные в таблице 1.

Таблица 1.

Исходные значения и начальные условия для параметров расчетных элементов

Объем камеры смешения" ( $V$ ), м <sup>3</sup>	10
Площадь проходного сечения соединения ( $S$ ), м <sup>2</sup>	1
Длина соединения, моделирующего соединительный трубопровод, ( $L$ ), м	100
Коэффициент гидравлических сопротивлений ( $\xi$ )	100
Давление во входном времязависимом объеме ( $P_{BX}$ ), Мпа	16
Давление в камере смешения в начальный момент времени ( $P_0$ ), Мпа	10
Давление в выходном времязависимом объеме ( $P_{ВЫХ}$ ), Мпа	10
Энтальпия во всех расчетных элементах ( $I$ ), кДж/ кг	100
Расход через времязависимое соединение ( $G_0$ ), кг/ с	4000
Расход через стандартное соединение в начальный момент времени ( $G_0$ ), кг/ с	4000

Аналитическое решение для давления в элементе "камера смешения" и массового расхода через гидравлическое соединение имеет вид:

$$G(t) = G_0 + R \cdot \exp(-\tilde{\alpha}t) \cdot \sin(\tilde{\omega} t),$$

$$P(t) = P_0 + \frac{R \tilde{\omega} - \exp(-\tilde{\alpha}t) \cdot (\tilde{\alpha} \sin(\tilde{\omega} \cdot t) + \tilde{\omega} \cos(\tilde{\omega} \cdot t))}{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\omega}^2},$$

где

$$\tilde{\omega} = \sqrt{B - \tilde{\alpha}^2}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{A}{2} \delta B, \quad B = \frac{1}{a\tau} = \frac{S}{v\rho_*\beta L}, \quad \tau = \frac{L}{S}, \quad a = v\rho_*\beta, \quad \delta = \frac{v\rho_*\beta}{G_0} = \frac{a}{G_0},$$

$$R = \frac{P_{\text{ex}} - P_0 - A}{\tilde{\omega}\tau}, \quad A = \xi \frac{G_0^2}{2S^2 \bar{\rho}_{\text{ex}}}.$$

В этих формулах  $G(t)$  и  $P(t)$  – соответственно текущие значения расхода и давления,  $U$  – объем камеры смешения. Вывод этих формул приведен в приложении.

Результаты расчетов, полученные с использованием комплекса TIGR при различных шагах интегрирования, и сравнение их с аналитическим решением (\*\*), приведены на рисунках 13-14.

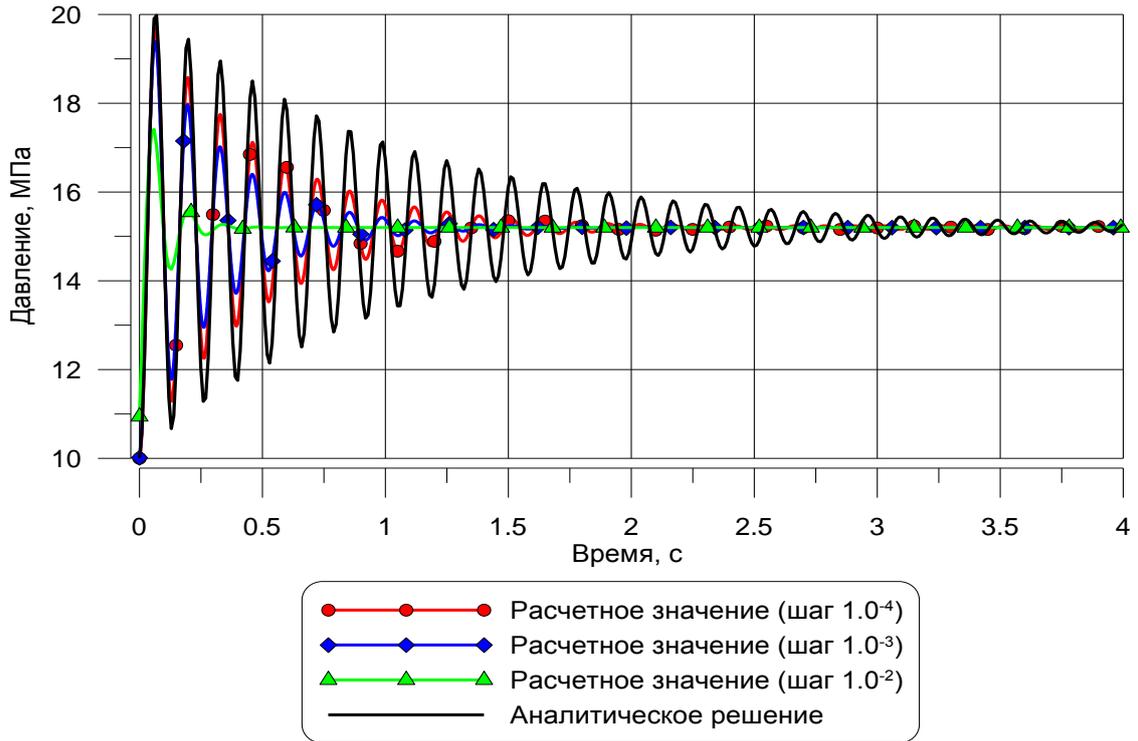


Рис. 13.

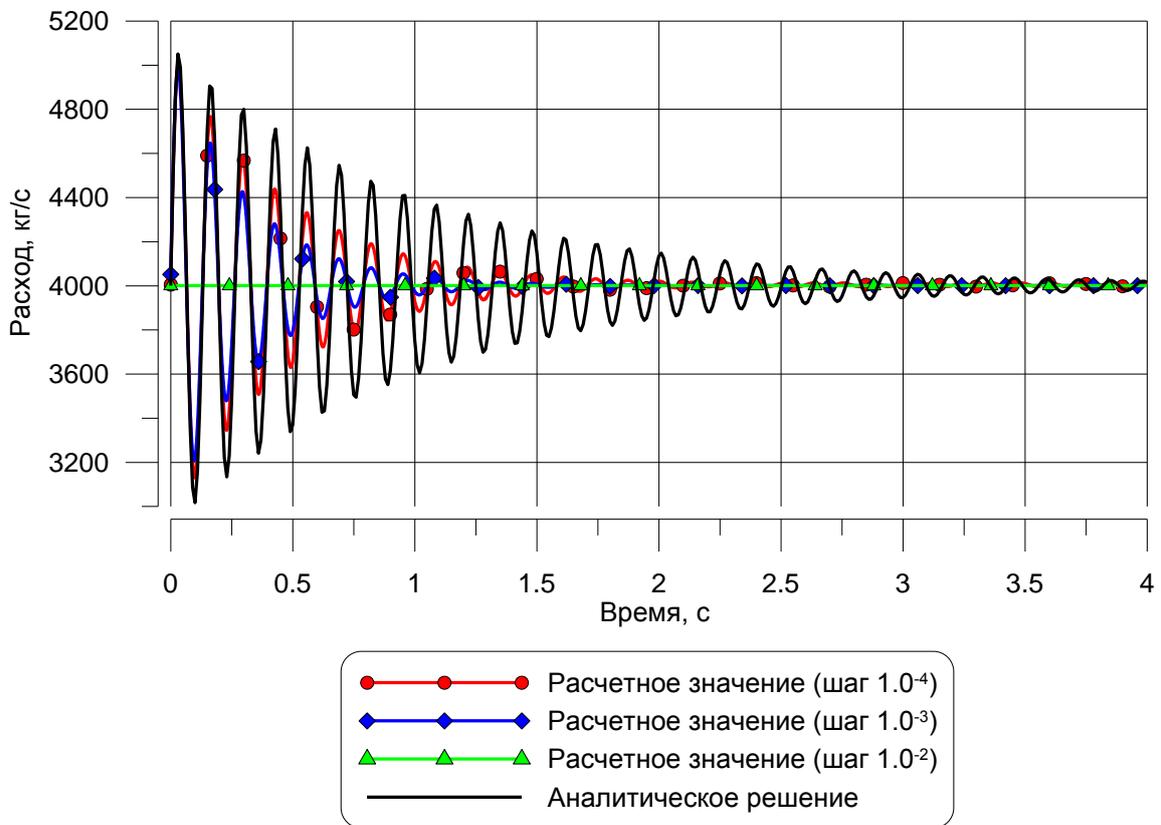


Рис. 14.

Результаты расчетного анализа при различных шагах интегрирования, полученные по программе XENIA, и сравнение их с аналитическим решением приведены на рисунках 15 – 16. Для большей наглядности сравнения результаты, снятые с графиков, полученных по комплексу TIGR, были оцифрованы и представлены на одном и том же графике.

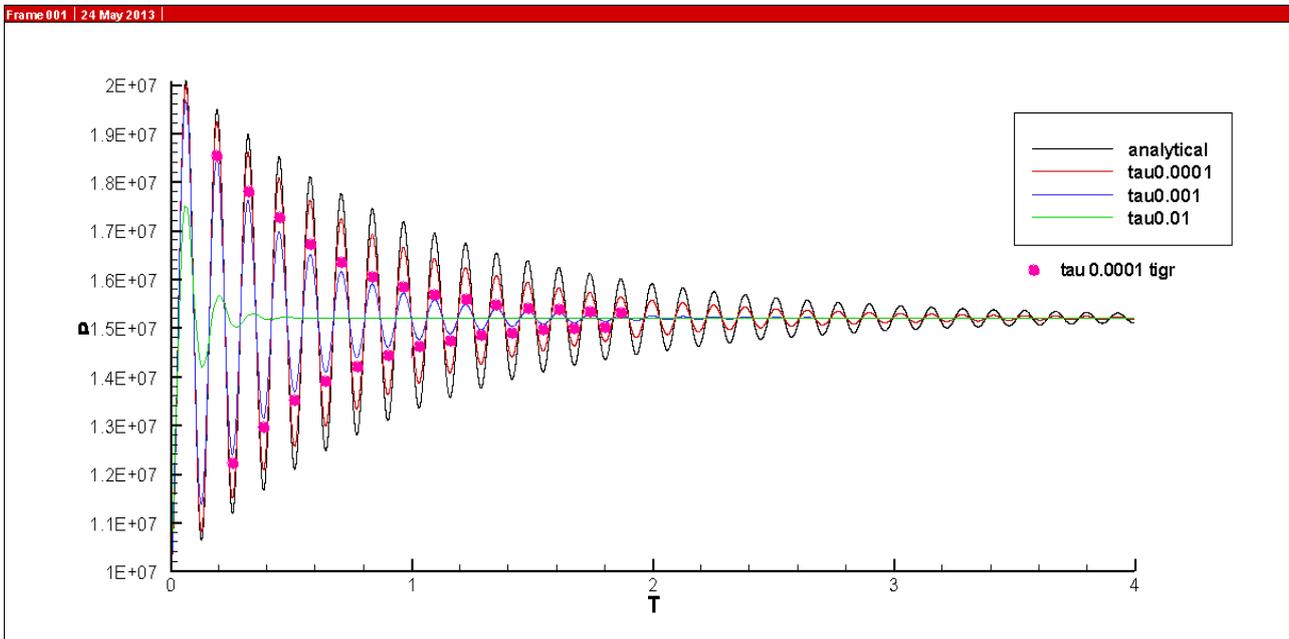


Рис.15. Давление в камере смешения, Па, от времени, с.

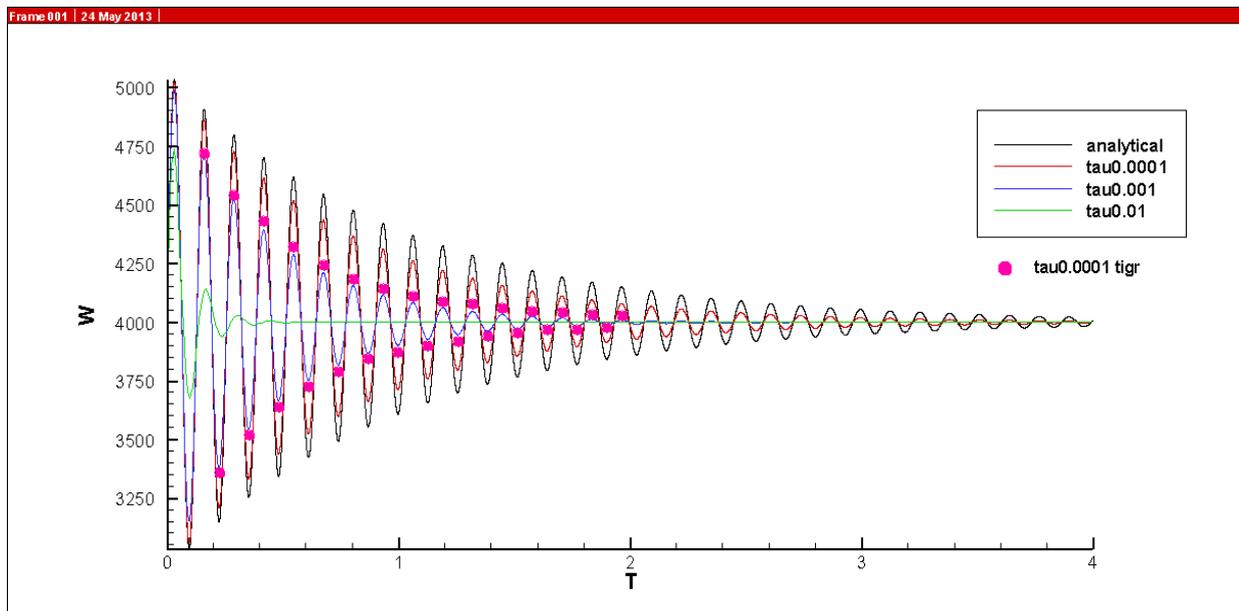


Рис.16. Массовый расход через гидравлическое соединение, кг/с, от времени, с.

Сравнительный анализ результатов (расход и давление) показывает, что амплитуда затухания разностной схемы по сравнению с аналитическим решением при одном и том же шаге интегрирования для программы XENIA

(соответствующей выше описанному алгоритму) примерно на 30% меньше, чем для известного программного комплекса TIGR. Для протяженного контура это может очень заметно повлиять на устойчивость. Тем самым подтверждается, что для получения приемлемого по точности и устойчивости решения учет закона сохранения импульса на уровне разностной схемы важен даже для отдельных элементов контура, для которых физически вполне оправдано приближение однофазной слабосжимаемой жидкости.

Проведенный анализ нужно учитывать при переходе к этапу распараллеливания задачи.

## 8. Заключение

В данной работе описан алгоритм расчета тепломассопереноса в контуре теплосъема ЯЭУ. Рассмотрена физическая модель однофазной слабо сжимаемой жидкости, на основе которой построена конечно-разностная модель. При этом обеспечивается выполнение основных законов сохранения как на этапе дифференциальной модели, так и на этапе конечно-разностной модели. Изложен метод решения, представляющий собой обобщение метода прогонки на задачи расчета контура теплосъема с произвольным количеством разветвлений и стыков труб. Метод решения и способы аппроксимации проанализированы с точки зрения устойчивости и точности решения. Представлены результаты тестовых расчетов, демонстрирующие преимущество метода по сравнению с методиками, использующими менее обоснованные приближения модели и конечно-разностной схемы.

## Литература

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики, М., “Наука”, 1975.
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем, М., “Наука”, 1975.
3. Фаворский А.П., Дегтярев Л.М. Поточковый вариант метода прогонки. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8. № 3. С. 679.
4. Фаворский А.П., Ашметков И.В., Мухин С.И., Соснин Н.В. Краевая задача для линеаризованных гемодинамических уравнений на графе // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 78-84.
5. Ransom V.H. and Hicks D.L. Hyperbolic Two-Pressure Models for Two-Phase Flow. // *Journal of Computational Physics*. 53. 1984. pp. 124-151.
6. Ransom V.H. and Scofield M.P. *Two-Pressure Hydrodynamic Model for Two-Phase Separate Flow*. Idaho National Engineering Laboratory. SRD-50-76. 1976.

7. Ramshaw J.D. and Trapp J.A. Characteristics, Stability, and Short-Wavelength Phenomena in: Two-Phase Flow Equation Systems. // *Nuclear Science and Engineering*. 66. 1978 pp. 93-102.

8. Trapp J.A. The Mean Flow Character of Two-Phase Flow Equations. // *International Journal of Multiphase Flow*. 12. 1986. pp. 263-276.

9. Ransom V.H. and Mousseau V.A. Convergence and Accuracy Expectations for Two-Phase Flow Simulations. // Canadian Nuclear Society International Conference on Simulation Methods in Nuclear Engineering. Montreal, Canada. 1990.

## Приложение

### Вывод формулы аналитического решения для теста п. 9

Исходим из закона сохранения импульса с учетом силы трения (в трубе-перемычке с единственным узлом без ячеек)

$$\frac{d(Mw)}{dt} = s(P_{ex} - P) + \left[ -\frac{\rho|w|w}{2} \xi \right] s,$$

$\xi$  – коэффициент местного сопротивления, определяющий потери давления (домноженный на длину трубы).

Уравнение можно переписать как

$$\frac{d(sL\bar{\rho}w)}{dt} = s(P_{ex} - P) - \frac{\bar{\rho}|w|w}{2} \xi s.$$

После сокращения на множитель  $L$  это уравнение принимает вид

$$\frac{d(\bar{\rho}w)}{dt} = \frac{P_{ex} - P}{L} - \frac{\xi|w|}{2L} \bar{\rho}w.$$

Используя уравнение баланса массы в камере смешения и модельное уравнение состояния слабосжимаемой жидкости, имеем:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{s}{V\rho_*\beta} \bar{\rho}w - \frac{G_0}{V\rho_*\beta},$$

отсюда

$$\bar{\rho}w = \frac{V\rho_*\beta}{s} \frac{dP}{dt} + \frac{G_0}{s}.$$

После дифференцирования продифференцируем:

$$\frac{d(\bar{\rho}w)}{dt} = \frac{V\rho_*\beta}{s} \frac{d^2P}{dt^2}.$$

Полученные выражения для расхода и производной по времени от расхода подставляем в уравнение импульса

$$\frac{v\rho_*\beta}{s} P'' + \frac{\xi|w|}{2L} \left[ \frac{v\rho_*\beta}{s} P' + \frac{G_0}{s} \right] + \frac{P}{L} - \frac{P_{ex}}{L} = 0.$$

Далее обозначим:

$$B = \frac{1}{a\tau} = \frac{s}{v\rho_*\beta L}; \quad \tau = \frac{L}{s}; \quad a = v\rho_*\beta$$

В этих обозначениях имеем:

$$\frac{1}{B} P''_t + \frac{\xi |w|}{2} \cdot \frac{v \rho_* \beta}{s} P'_t + P + \frac{\xi |w|}{2} \frac{G_0}{s} - P_{\text{ex}} = 0.$$

Записывая начальные условия по скорости в удобной форме:

$$|w| \rightarrow |w|_{t=0} = \frac{G_0}{s \bar{\rho}_{\text{ex}}}; \text{ обозначим: } \frac{\xi |w|}{2} \frac{G_0}{s} \rightarrow \xi \frac{G_0^2}{2s^2 \bar{\rho}_{\text{ex}}} = A$$

$$\frac{\xi |w|}{2} \frac{v \rho_* \beta}{s} \rightarrow A \frac{v \rho_* \beta}{G_0} = A \delta; \quad \delta = \frac{v \rho_* \beta}{G_0} = \frac{a}{G_0}$$

В итоге уравнение сводится к следующему:

$$\frac{1}{B} P''_t + A \delta P'_t + P + A - P_{\text{ex}} = 0; \text{ замена переменной } \tilde{P} = P + A - P_{\text{ex}}.$$

Начальные условия принимают вид

$$\tilde{P}|_{t=0} = \tilde{P}_0 = P_0 - P_{\text{ex}} + A,$$

$$\tilde{P}'|_{t=0} = 0.$$

Уравнение в этих переменных :

$$\frac{1}{B} \tilde{P}''_t + \delta A \tilde{P}'_t + \tilde{P} = 0.$$

Решение ищем в виде:

$$\tilde{P} = \tilde{P}_0 e^{\mu t} (\cos \nu t + i \sin \nu t) \text{ или } \tilde{P} = \tilde{P}_0 e^{(\mu + i\nu)t}.$$

Далее применяем стандартные технические выкладки и получаем решение, приведенное в тексте.

## Содержание

1. Введение .....	3
2. Конечно разностная модель – сетки и сеточные функции .....	4
3. Разностные потоки .....	9
4. Разностные уравнения .....	10
5. Линеаризация конечно-разностных уравнений .....	14
6. Алгоритм решения уравнений термогидравлики модифицированным методом прогонки (метод символьной прогонки) .....	16
7. Результаты расчетов .....	23
8. Заключение .....	27
Литература .....	27
Приложение .....	28