



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 70 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахолдин И.Б.

Методы исследования
распространения волн в
трубе с упругими стенками
при наличии заполнения ее
жидкостью

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахолдин И.Б. Методы исследования распространения волн в трубе с упругими стенками при наличии заполнения ее жидкостью // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 70. 16 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-70>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

И. Б. Бахолдин

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН
В ТРУБЕ С УПРУГИМИ СТЕНКАМИ
ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПОЛНЕНИЯ ЕЕ ЖИДКОСТЬЮ

Москва–2015

УДК 534.1+539.3+532.59+517.9+519.6

Бахолдин И. Б. Методы исследования распространения волн в трубе с упругими стенками при наличии заполнения ее жидкостью

Работа посвящена разработке моделей для описания распространения волн в трубах с упругими стенками, разработке методов их расчета и анализу решений, содержащих обратимые структуры разрывов, для модели трубы с упругими стенками в случае заполнения трубы жидкостью. Для стенок трубы используется модель мембраны и модель пластины. Разрабатывается численная методика решения уравнений. Проводится анализ возможности стабилизации численных схем посредством включения в уравнения производных высокого порядка. Решается задача о распаде произвольного разрыва. Полученные результаты соответствуют ранее разработанной теории обратимых разрывов.

Ключевые слова: труба, упругость, жидкость, дисперсия, нелинейность, структура разрыва, численный метод, задача о распаде разрыва.

Bakholdin I. B. Methods of investigation of wave propagation in fluid-filled tubes with elastic walls

The paper is devoted to development of models for description of waves in tubes with elastic walls in the case when a tube is filled by liquid. It is also devoted to development of numerical methods for these models and analysis of solutions with reversible shock structures. Membrane model and plate model are used for tube. Numerical methods for solving equations are developed. The ability of stabilization of numerical method by the aid of inclusion of additional term with higher-order derivatives is analyzed. Riemann problem is solved. Results obtained for fluid-filled tube correspond to theory of reversible shocks.

Keywords: tube, elasticity, fluid, dispersion, nonlinearity, shock structure, numerical method, Riemann problem.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, номера проектов 14-01-00049а и 15-01-04357а.

1 Структура работы

Вначале осуществляется анализ и усовершенствование известных моделей уравнений, описывающих волны в трубах. Это уравнения с контролируемым давлением [1] и уравнения трубы с жидкостью [2], [3]. Рассматривается возможность учета вязких свойств материала стенок трубы, учета жесткости на изгиб стенок трубы, возможность учета сжимаемости материала трубы, а также замены жидкости газом. Разрабатываются методы численного расчета трубы с жидкостью. Анализируются методы стабилизации численных схем. Далее рассматриваются решения задачи о распаде произвольного разрыва и делается вывод о том, что найденные решения соответствуют теории обратимых разрывов [4]-[8]. Ранее аналитически и методами численного анализа детально исследовались уединенные волны и структуры разрывов для трубы с контролируемым давлением [9], [10], но учет сопротивления на изгиб и методика расчета для трубы, заполненной жидкостью, были разработаны только предварительно, поэтому в данной работе основное внимание уделено именно этим вопросам.

2 Основные уравнения, формулы, обобщения модели

Уравнения движения для волн в трубе с несжимаемыми упругими стенками и фиксированным внутренним и внешним давлением имеют вид [1]:

$$\left(R\sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2} \right)' - P^* r r' = \rho R \ddot{z}, \quad (2.1)$$

$$\left(R\sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + P^* r z' = \rho R \ddot{r}; \quad (2.2)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{r'^2 + z'^2}, \quad \lambda_2 = \frac{r}{R}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{H}, \quad P^* = \frac{P}{H}, \quad \sigma_i = \lambda_i \partial W / \partial \lambda_i - p, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь $'$ обозначает дифференцирование по переменной Z , являющейся начальной лагранжевой пространственной координатой, направленной вдоль трубы, $\dot{}$ обозначает дифференцирование по времени t , H и h — толщина стенки трубы в ненапряженном и напряженном состоянии, $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — упругий потенциал; p — давление, связанное с несжимаемостью материала (множитель Лагранжа). Параметр P — разность между внутренним и внешним давлением. Параметр ρ — плотность материала на единицу площади. Для описания трубы используется мембранная модель, неизвестные z и r задают поверхность трубы в цилиндрической системе координат, ось z этой

системы совпадает с центральной линией трубы. Здесь λ_i — главные растяжения, а σ_i — главные компоненты тензора напряжений. Индексы 1, 2, 3 соответствуют меридианальному, широтному и ортогональному направлению деформируемой поверхности. Предполагается, что при отсутствии нагрузки $z = Z$, $r = R$, $h = H$. Модель с контролируемым давлением пригодна в случае заполнения трубы жидкостью или газом с пренебрежимо малой плотностью. Давление поддерживается за счет перетекания в трубу среды из резервуара большого объема или работы компрессора.

В случае применения для описания материала трубы вязкоупругой модели типа Кельвина-Фойтха [11] логично добавить вязкие напряжения, например, так: $\sigma_i \rightarrow \sigma_i + \sigma_{iv}$, $\sigma_{iv} = \varepsilon_{iv} \dot{\lambda}_i$, $i = 1, 2, 3$, коэффициенты вязкости могут зависеть от деформации. В предыдущих работах [9], [10] в качестве диссипативных членов предлагалось добавлять в левые части уравнений члены с \dot{z}'' и \dot{r}'' с некоторыми коэффициентами. Можно убедиться, что при предлагаемом выше способе учета вязкости подобные члены действительно появляются в уравнениях после соответствующих преобразований, но есть и другие члены.

Материал стенки считается несжимаемым, поэтому

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad \sigma_i = \lambda_i \partial \hat{W} / \partial \lambda_i, \quad \hat{W} = W(\lambda_1, \lambda_2, 1/(\lambda_1 \lambda_2)), \quad i = 1, 2.$$

Ниже используются обозначения $\hat{W}_{1,2} = \partial \hat{W} / \partial \lambda_{1,2}$. Приведенная выше формула для напряжений σ_1 и σ_2 выводится из предположения о равенстве нулю поперечных напряжений σ_3 . В случае применения описанной выше вязкоупругой модели аналогичным образом получаем $\sigma_{iv} = \varepsilon_{iv} \dot{\lambda}_i - \varepsilon_{3v}(1/(\lambda_1 \lambda_2))$, $i = 1, 2$. В случае учета сжимаемости материала трубы, когда величина p определяется упругими деформациями, также можно вывести формулы для σ_1 и σ_2 , не содержащие λ_3 , воспользовавшись предположением об отсутствии поперечных напряжений (точнее считается, что упругие напряжения внутри материала существенно больше давления вне и внутри трубы).

Если же считать давление в трубе, наполненной жидкостью, не постоянным, то следует включить уравнения для жидкости [2]:

$$\dot{r}z' - r'\dot{z} + vr' + \frac{1}{2}rv' = 0, \quad (2.3)$$

$$\rho_f(\dot{v}z' - v'\dot{z} + vv') + P' = 0. \quad (2.4)$$

Здесь v — скорость жидкости, ρ_f — плотность жидкости.

Потенциал в данной работе соответствует модели материала Гента, считающейся пригодной для резиноподобных материалов:

$$W = -\mu J_m \ln \left(1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3}{J_m} \right). \quad (2.5)$$

Возможное использование иного потенциала не меняет методику исследования. В случае сжимаемого материала стенки также вводится потенциал \hat{W} из предположения отсутствия поперечных напряжений.

В качестве начальных данных для расчетов удобно брать распределения $r(Z)$ и $z'(Z)$. Тогда

$$z(Z) = \int_0^Z z'(\zeta) d\zeta.$$

Данные для решения задачи о распаде произвольного разрыва (задачи Римана) берутся такими, что на бесконечности выполняется условие равновесия: $P^* = \hat{W}_2(r_{\pm\infty}, z'_{\pm\infty}) / (r_{\pm\infty} z'_{\pm\infty})$. При решении этой задачи могут выявляться однородные области, соответствующие некоторым другим состояниям равновесия.

3 Учет сопротивления на изгиб

Целесообразность учета сопротивления стенок трубы на изгиб обусловлена тем, что помимо того, что это может уточнить модель, было показано [9], [10], что включение жесткости на изгиб в некоторых случаях необходимо для корректности уравнений.

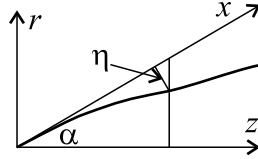


Рис. 1: К выводу уравнений с учетом сопротивления на изгиб

Учтем сопротивление на изгиб по аналогии с известным уравнением колебаний пластины: $-M_{xx} + (\sigma\eta_x)_x + P = \rho\eta_{tt}$, $M = D\eta_{xx}$. Здесь η — смещение по вертикали, x — горизонтальная координата, D — жесткость на изгиб, σ — натяжение, P — давление на пластину, M — момент. Учтем влияние сопротивления на изгиб, формально включив в уравнения (2.1)-(2.2) дополнительное давление:

$$P_b = -\cos\alpha \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2}{\partial x^2} r \right) - \operatorname{tg}\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2}{\partial x^2} z \right) \right], \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\cos\alpha}{z'} \frac{\partial}{\partial Z}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{r'}{z'}. \quad P \rightarrow P + P_b,$$

Здесь $\alpha(Z)$ — угол наклона по отношению к оси Z касательной к кривой, образованной пересечением поверхности трубы с плоскостью, проходящей через ее ось, x — координата в локальной системе координат, ось которой

направлена по касательной к рассматриваемой кривой в некоторой точке $(r_0(Z), z_0(Z))$, рис. 1; в такой системе координат величина смещения $\eta = [(r-r_0) - (z-z_0)\text{tg}\alpha_0]\text{cos}\alpha_0$.

Жесткость на изгиб вычисляется с использованием упругого потенциала W , линейризованного относительно значений $\lambda_{10}(Z) = (r'^2 + z'^2)^{1/2}$, $\lambda_{20}(Z) = r/H$, $\lambda_{30}(Z) = (\lambda_{10}\lambda_{20})^{-1}$, здесь предполагается, что сопротивление на изгиб невелико, поскольку труба тонкостенная. Уравнения бегущих волн, описывающие стационарные решения, при такой модификации уравнений (2.1)-(2.2) имеют восьмой порядок. В наиболее упрощенном варианте ($\alpha \approx 0$, $z' \approx 1$, $h \approx H$, $r \approx R$) имеется изотропия линейризованного потенциала, можно применять стандартную формулу $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$, применяемую для обычного линейно упругого материала, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Сделаем дополнительное предположение о слабой сжимаемости материала (велик первый параметр Ламе λ), $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu) \approx 3\mu$, $\nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)] \approx 1/2$, $D = \mu h^3/3$.

Поэтому в случае упрощенного учета жесткости на изгиб только в правую часть уравнения (2.2) добавляется член $-c_b r''''$, где $c_b = DR/H = \mu H^2 R/3$:

$$-c_b r'''' + \left(R\sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2} + P^* r z' = \rho R \ddot{r}. \quad (3.1)$$

При таком упрощенном учете жесткости на изгиб уравнения бегущих волн имеют шестой порядок в случае трубы с контролируемым давлением и восьмой порядок в случае трубы, заполненной жидкостью (из-за наличия дополнительных интегралов в последнем случае порядок уравнений бегущих волн может быть понижен).

В случае линейно упругого материала приведенные выше коэффициенты жесткости на изгиб можно использовать и при конечных деформациях стенок трубы. Для нелинейно упругого материала, исследуемого здесь, коэффициент жесткости при конечных деформациях иной.

Пусть компоненты линейризованного тензора деформации описываются соотношением

$$\Delta\sigma_i = \hat{\lambda}_i(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\hat{\mu}_i e_{ii}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

где e_{ii} — компоненты тензора малой деформации относительно состояния, обозначенного индексом 0, а $\hat{\mu}_i$ и $\hat{\lambda}_i$ — анизотропные аналоги параметров Ламе. В результате анализа и обобщения стандартных методов расчета жесткости пластины на изгиб [12] можно получить формулу

$$D = \left[\hat{\lambda}_1 + 2\hat{\mu}_1 - \frac{\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_3}{\hat{\lambda}_3 + 2\hat{\mu}_3} \right] \frac{h^3}{12}.$$

Индексом 1 здесь отмечено направление вдоль пластины, а индексом 3 — ортогональное направление.

Предположим, что материал сжимаем и напряжения описываются соотношением:

$$\sigma_i = \lambda f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) + \lambda_i W_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.3)$$

Здесь f — некоторая функция. Очевидно, при $\lambda \rightarrow \infty$ это соотношение можно использовать для описания рассматриваемого здесь несжимаемого материала. Заметим, что наиболее простое соотношение, пригодное для вывода коэффициента D для несжимаемого материала, такое: $\sigma_i = \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_i W_i$. Но (3.3) лучше соответствует реальным материалам. Формулой такого вида описывается, например, материал Генки (модель, применяемая для эластомеров): $\sigma_i = \lambda \ln(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) + 2\mu \ln(\lambda_i)$ [13]. Некоторые другие модели нелинейно упругих материалов (в том числе и слабо сжимаемых), также приводящие при линеаризации к соотношению (3.2), даны в работе [14]. Подставляя значения обобщенных параметров Ламе, полученных на основе линеаризации формулы (3.3), находим

$$D = \left[\lambda \lambda_{20} \lambda_{30} + 2W_1 - \frac{\lambda^2 f_0'^2 \lambda_{20} \lambda_{30} \lambda_{20} \lambda_{10}}{\lambda f_0' \lambda_{20} \lambda_{10} + 2W_3} \right] \frac{h^3}{12}.$$

При переходе к несжимаемой модели $\lambda \rightarrow \infty$, $D = (W_1 + W_3)h^3/6$.

При полном учете жесткости на изгиб порядок уравнений бегущих волн повышается на два по сравнению с упрощенным вариантом.

В ранее разработанной теории обратимых структур разрывов была дана классификация возможных эволюционных типов структур. Исследовались в основном модели, приводящие к системам бегущих волн четвертого порядка, но математические формулировки были абстрактные, они были даны для систем произвольного порядка. Проведенные здесь исследования показывают, что системы более высокого порядка реально появляются при исследовании уравнений, имеющих практическое значение, что подтверждает целесообразность такого абстрактного подхода.

4 Разработка методики расчета для трубы с жидкостью

Методика расчета уравнений с контролируемым давлением была разработана в предыдущих работах [9], [10], поэтому основное внимание здесь уделено случаю уравнений трубы, заполненной жидкостью.

Дисперсионное соотношение для уравнений трубы, заполненной жидкостью, было выведено в [2]. Уединенные волны изучались в [3]. Основное

отличие от случая уравнений с контролируемым давлением состоит в том, что все четыре дисперсионные ветви пересекаются в точке $\omega = 0$, $k = 0$, тогда как в случае контролируемого давления только две из них пересекают начало координат. С каждым таким пересечением при решении задачи о распаде разрыва связана некоторая структура разрыва или центрированная простая волна, поэтому в случае учета массы жидкости в трубе решения оказываются более сложными.

Один из способов расчета таких уравнений — заменить жидкость слабо сжимаемым газом. Требуемая модификация гидродинамической части уравнений дана ниже:

$$(\dot{\rho}_f z' - \rho'_f \dot{z})r^2 + 2\rho_f r(\dot{r}z' - r'\dot{z}) + (\rho_f v r^2)' = 0,$$

$$P = P(\rho_f).$$

Здесь модифицировано уравнение сохранения массы (2.3). Добавлено уравнение состояния. В этом случае можно применять явную численную схему, однако требование слабой сжимаемости, необходимое для моделирования несжимаемой жидкости приведет к мелкому временному шагу для обеспечения устойчивости и обеспечения правильной области зависимости в расчете. В этой модели появятся еще две дисперсионные ветви, связанные с распространением звуковых волн. В случае исследования собственно газонаполненной трубы, потребуется еще включение уравнения энергии с учетом термодинамики. В изотермическом и адиабатическом случаях можно обойтись уравнением состояния.

Другой способ — исключить давление и получить уравнения для v , r , z и $q = \dot{z}$. Для вывода этих уравнений делается подстановка \dot{r} из (2.3) в (2.2), в полученное уравнение подставляется \dot{z} из (2.1), затем из полученного уравнения выражается P и делается подстановка в (2.4) и (2.1). Формула для давления имеет вид:

$$P^* + P_b^* = \frac{P + P_b}{H} = \frac{-1}{1 + \frac{r'^2}{z'^2}} \left[\frac{r'\rho R}{r z'^2} \dot{v} + \frac{\rho R}{2 z'^2} \dot{v}' + \mathcal{P} \right],$$

$$\mathcal{P} = \frac{\left(R \sigma_1 \frac{r'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{r'}{z'} \left(R \sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2} \right)' - \frac{\sigma_2}{\lambda_2}}{r z'}$$

$$- \frac{\rho R}{r z'^2} (q - v) \left(\frac{z'q - v r' - \frac{1}{2} r v'}{z'} \right)' - \frac{\rho R}{r z'^3} (r'q - v r' - \frac{1}{2} r v') \left(\frac{1}{2} v' - q' \right).$$

Уравнения для расчета теперь такие:

$$\left[\rho_f^* z' - \left(\frac{r' \rho R^2}{r z'^2} \right)' \right] \dot{v} - \left[\left(\frac{r' \rho R^2}{r z'^2} \right) + \left(\frac{\rho R^2}{2 z'^2} \right)' \right] \dot{v}' - \left(\frac{\rho R^2}{2 z'^2} \right) \dot{v}'' = \rho_f^* (v' q - v v') + \left[-P_b^* + \frac{\mathcal{P}}{1 + \frac{r'^2}{z'^2}} \right]' - \{c_{v4} v''''\}, \quad \rho_f^* = \frac{\rho_f}{H}, \quad (4.4)$$

$$\dot{r} z' - r' q + v r' + \frac{1}{2} r v' = 0 + \{c_{r6} r'''' z'\}, \quad (4.5)$$

$$\dot{z} = q, \quad \rho R \dot{q} = \left(R \sigma_1 \frac{z'}{\lambda_1^2} \right)' - (P^* + P_b^*) r r'. \quad (4.6)$$

В фигурных скобках здесь добавлены некоторые члены, иногда полезные для стабилизации численных схем. В случае вязкоупругой модели, см. разд. 2, для применения описанного ниже численного метода потребуется еще исключение пространственно-временных производных \dot{r}' и \dot{r}'' в формулах для σ_{iv} с помощью уравнения (2.3).

Эти уравнения были решены численно при помощи схемы типа Лакса-Вендрофа (точнее, типа Кранка-Николсона, поскольку все величины рассчитывались для целых пространственных узлов). Это схема типа предиктор-корректор, в которой на шаге предиктор расчет осуществляется для половины временного шага. Полученные значения используются для расчета коэффициентов и аппроксимации пространственных производных на шаге корректор, в схеме предиктор эти значения берутся с нижнего слоя. Все аппроксимации пространственных производных центрированные. Схема имеет второй порядок точности по пространству и по времени и обладает низкой схемной вязкостью, описываемой производными высокого порядка. Для аппроксимации уравнения для скорости требуется неявная схема. С целью дальнейшего использования метода прогонки неявность вводилась только для аппроксимации производных \dot{v}' , \dot{v}'' (для этих членов неявность совершенно необходима по математическим соображениям) и v' (здесь неявность не обязательна, но она улучшает устойчивость схемы, явный вариант также использовался):

$$\begin{aligned} \dot{v}' &\rightarrow \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_{k-1}^{n+1} - (v_{k+1}^n - v_{k-1}^n)}{2\zeta\tau}, \\ \dot{v}'' &\rightarrow \frac{v_{k+1}^{n+1} + v_{k+1}^{n+1} - 2v_k^{n+1} - (v_{k+1}^n + v_{k-1}^n - 2v_k^n)}{\zeta\tau}, \\ v' &\rightarrow \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_{k-1}^{n+1} + (v_{k+1}^n - v_{k-1}^n)}{4\zeta}. \end{aligned}$$

Здесь ζ и τ — пространственные и временные шаги, k — пространственный индекс, n — временной, аппроксимация дана для шага корректор, для шага предиктор временной шаг уменьшается в два раза. Метод прогонки здесь хорошо обусловлен при не слишком больших шагах по времени. Системы уравнений, порожденные неявными аппроксимациями, можно решать также методом простой итерации [9]. Но программа с методом прогонки работает быстрее. Вначале рассчитывалось первое уравнение. После его расчета значение \dot{v} в формуле для давления, используемой в последнем уравнении, становится известным. При выборе временного шага условие устойчивости схемы $\tau < C\zeta$ (или $\tau < C\zeta^2$ в случае существенного влияния жесткости на изгиб или вязкости) определялось экспериментально. Расчет по аналогичной трехслойной центрированной схеме также возможен. Аппроксимация соответствующих членов такая:

$$\begin{aligned}\dot{v}' &\rightarrow \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_{k-1}^{n+1} - (v_{k+1}^{n-1} - v_{k-1}^{n-1})}{4\zeta\tau}, \\ \dot{v}'' &\rightarrow \frac{v_{k+1}^{n+1} + v_{k-1}^{n+1} - 2v_k^{n+1} - (v_{k+1}^{n-1} + v_{k-1}^{n-1} - 2v_k^{n-1})}{2\zeta\tau}, \\ v' &\rightarrow \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_{k-1}^{n+1} + (v_{k+1}^{n-1} - v_{k-1}^{n-1})}{8\zeta}.\end{aligned}$$

Остальные пространственные производные аппроксимируются на слое, n за исключением диссипативных членов (если таковые имеются), которые в случае появления неустойчивости аппроксимируются на слое $n - 1$ или по шаблону "ромб", как в схеме Дюфорта–Франкеля для уравнения теплопроводности. Но при такой схеме не удастся обеспечить краевую устойчивость без включения дополнительных диссипативных зон вблизи границы. Поэтому от применения трехслойной схемы было решено отказаться.

Тестирование показало, что при расчете без сопротивления на изгиб для некоторых начальных данных была обнаружена медленно развивающаяся нелинейная численная неустойчивость в области с большим градиентом величины r . Она не устраняется при уменьшении τ , но устраняется путем включения дополнительной жесткости на изгиб по упрощенному варианту, т.е. с модификацией только уравнения (2.2), заменой его на (3.1). При этом для сходимости схемы достаточно выбрать величину коэффициента $c_b = c\zeta^2$, c — некоторая константа. Это связано с тем, что схема типа Лакса–Вендрофа имеет второй порядок точности. Таким образом, корректировка не меняет порядок аппроксимации. Можно также аналогичным образом включить высшую диссипацию, описываемую производной четвертого порядка в уравнение (4.4), см. член в фигурных скобках, величина коэффициента c_{v4} также выбирается порядка квадрата пространственного шага. Заме-

тим, что нет сходимости в случае включения таким способом обычной диссипации, описываемой производной второго порядка, хотя расчеты на грубых сетках делать можно. Это связано с тем, что используемая схема имеет второй порядок точности, см. разд. 5. Поскольку рассматриваемая здесь численная схема имеет аппроксимацию второго порядка, то коэффициент при добавляемых членах берется пропорциональным квадрату шага или ниже, таким образом, порядок аппроксимации откорректированной схемы не меняется. Проблему такой численной неустойчивости устраняет также схема типа предиктор-корректор первого порядка точности по времени. Эта схема отличается от описанной выше схемы тем, что в предикторе используется полный временной шаг, а не полшага. В связи с однотипностью методики расчета для обеих схем может использоваться одна программа, куда вводится параметр доли временного шага, используемого в предикторе. Заметим, что в таком стиле, т.е. с применением предиктора, приводящего к аппроксимации первого порядка, сконструирована и схема Годунова, обладающая высокой устойчивостью при расчетах нелинейных моделей. Однако численные эксперименты показали, что такая схема с целым шагом в предикторе, как и схема Годунова, обладает заметной схемной вязкостью, поэтому она не использовалась, метод корректировки оказался эффективнее. Заметим также, что, регулируя величину временного шага в предикторе, в принципе можно управлять величиной схемной вязкости.

Аналогичным образом было обнаружено, что для некоторых начальных данных формальное включение жесткости по упрощенному варианту с произвольным значением коэффициента c_7 требует дополнительного включения диссипации, описываемой производной шестого порядка, в уравнение (4.5), член в фигурных скобках. Но случае малых значений коэффициента жесткости этого не требуется, а это именно так для тонкостенных труб.

5 О стабилизации численных схем

Уравнения, аппроксимирующие численную схему, могут содержать члены с производными высокого порядка, приводящими к некорректности. Вопрос о способах корректировки некорректных уравнений обсуждался в [10] на примере обобщенных уравнений Буссинеска. Вывод такой: с помощью членов с производными более низкого порядка, чем порядок членов, вызвавших некорректность, не удастся корректировать уравнения рассматриваемого типа. При применении же производных более высокого порядка величина коэффициента при корректирующем члене может быть сколь угодно малой. Очевидно, этот принцип можно распространить и на численные схемы. Необходимость включения дополнительных членов с высшими производны-

ми связана с тем, что, вероятно, вычислительную неустойчивость можно интерпретировать как некорректность уравнений, получаемых в качестве дифференциальных приближений численной схемы. Поэтому корректировать неустойчивую численную схему и добиваться ее сходимости удастся с помощью добавления в уравнения членов с производными более высокого порядка, чем члены, аппроксимация которых вызвала численную неустойчивость. В случае схемы второго порядка точности, такая некорректность может быть обусловлена дополнительными членами с производными на два порядка выше, чем члены в исходных уравнениях. В частности, для подавления численной неустойчивости, порожденной аппроксимацией членов с производными второго порядка, приходится вводить корректирующий член с производной четвертого порядка, члены с производными четвертого порядка корректируются производными шестого порядка, см. разд. 4.

В ряде современных численных схем для расчетов газовой динамики применяется коррекция схемы, основанная на применении принципа максимума. Такая коррекция позволяет проводить расчеты при наличии разрывов, т.е. расчеты обобщенных решений, и в то же время обеспечивать низкую схемную вязкость или ее отсутствие для гладких решений. Анализ показывает, что такая коррекция позволяет одновременно устранять и нелинейную численную неустойчивость, например, медленно развивающуюся неустойчивость центрированной схемы. При расчетах моделей с дисперсией не диссипативного типа коррекция для расчета разрывов не требуется, решения гладкие. Но проблемы нелинейной неустойчивости остаются, а принцип максимума не выполняется, возникновение новых колебаний — естественное свойство самой модели, поэтому коррекцию на основе принципа максимума для стабилизации нелинейной неустойчивости применить здесь нельзя. Добавление членов с высшими производными оказывается эффективной альтернативой. При этом оказывается возможным применять коррекцию как диссипативными, так и недиссипативными дополнительными членами.

6 Расчет задачи о распаде разрыва

Рассматриваемые уравнения в бездиссипативном случае относятся к классу уравнений обратимого типа, для которых была разработана теория бездиссипативных разрывов [4]-[7]. Были проведены расчеты задачи о распаде разрыва. Начальные данные брались в виде сглаженной ступеньки. Были выявлены типичные ранее встречавшиеся структуры разрывов. Как и в случае контролируемого давления, при некоторых значениях параметров был выявлен флаттер, а также неустойчивость структур солитонного типа. На рис. 2 приведен пример графиков, полученных в результате расчета. В качестве

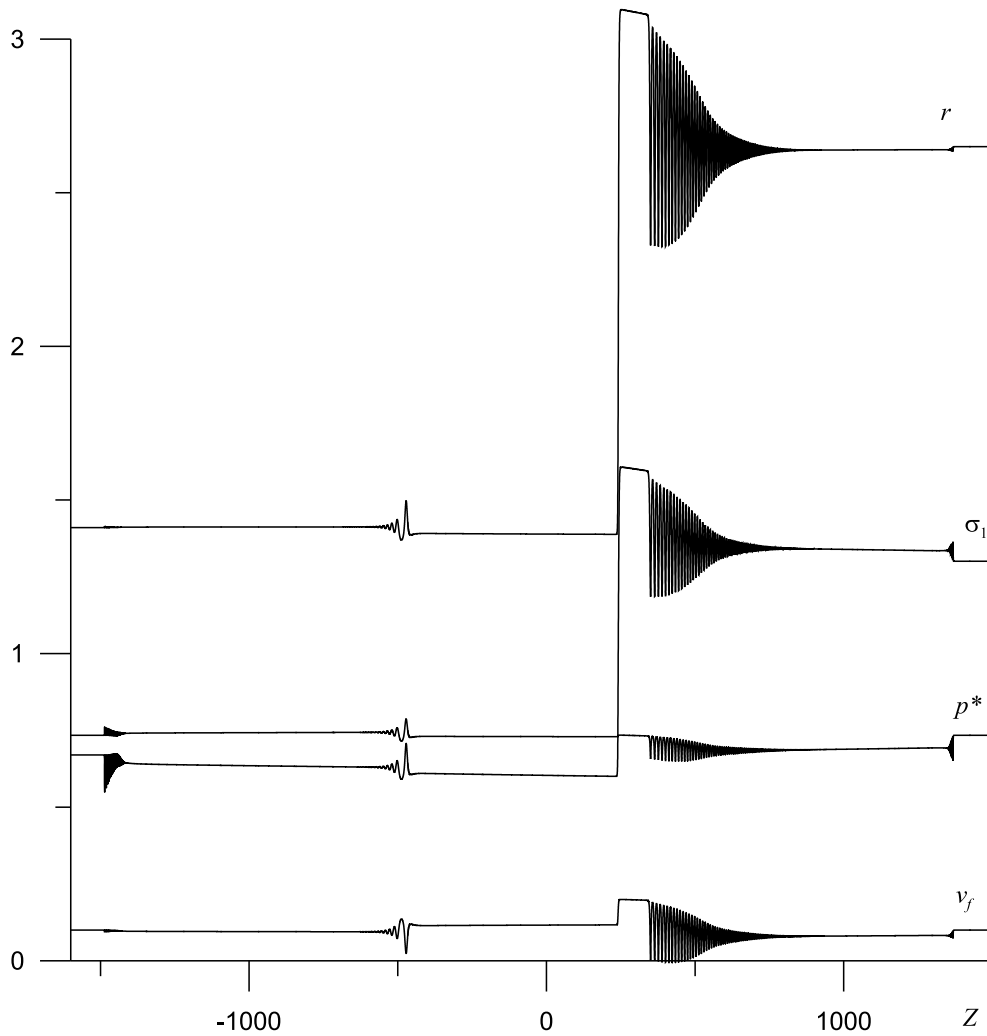


Рис. 2: Решение задачи о распаде разрыва

начальных данных была взята сглаженная ступенька для r и z' , скачка давления и скорости не было, $v_f = 0.1$, $R = 1$, $\rho = 1$, $\rho_f^* = 1$, $\mu = 2$, $J_m = 30$, $z'_{-\infty} = 1.1$, $c_b = 0.001$, $t = 1000$. Видны кинк и структуры солитонного типа (допускается, что некоторые из них не являются в точности солитонными структурами в связи с наличием члена с высшей производной и малым коэффициентом c_b). Здесь заметны более медленные, в основном поперечные, волны и более быстрые, в основном продольные, волны.

Рис. 3 иллюстрирует влияние коэффициента c_b на характер структуры разрыва, здесь данные те же, что и для рис. 2, но $c_b = 0.1$ (для стабилизации численной схемы при $\zeta = 0.1$ достаточно выбрать $c_{r6} = 10^{-6}$). Солитонная структура для продольных волн, движущихся вправо, заменяется разрывом с излучением, а солитонная структура для продольных волн, движущихся влево, замещается нестационарной структурой хаотического типа с волновыми зонами по обе стороны от разрыва. Характер остальных структур не изменился, хотя незначительно изменилась скорость их распространения.

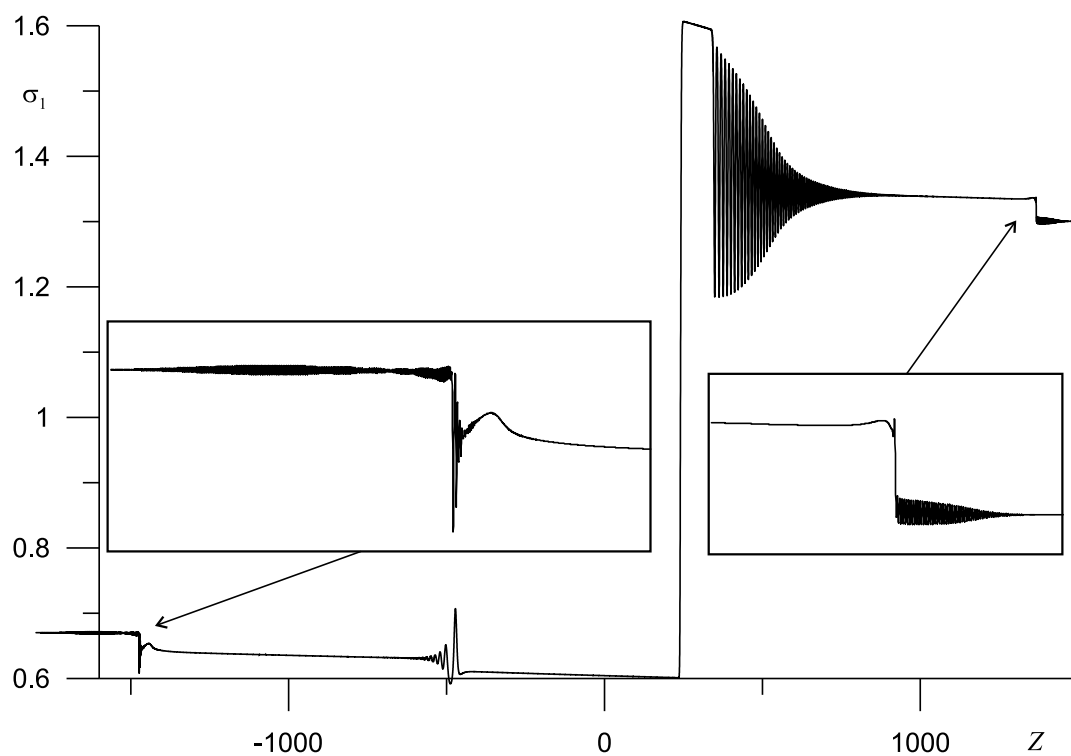


Рис. 3: Изменение типа структуры разрыва в результате влияния жесткости на изгиб

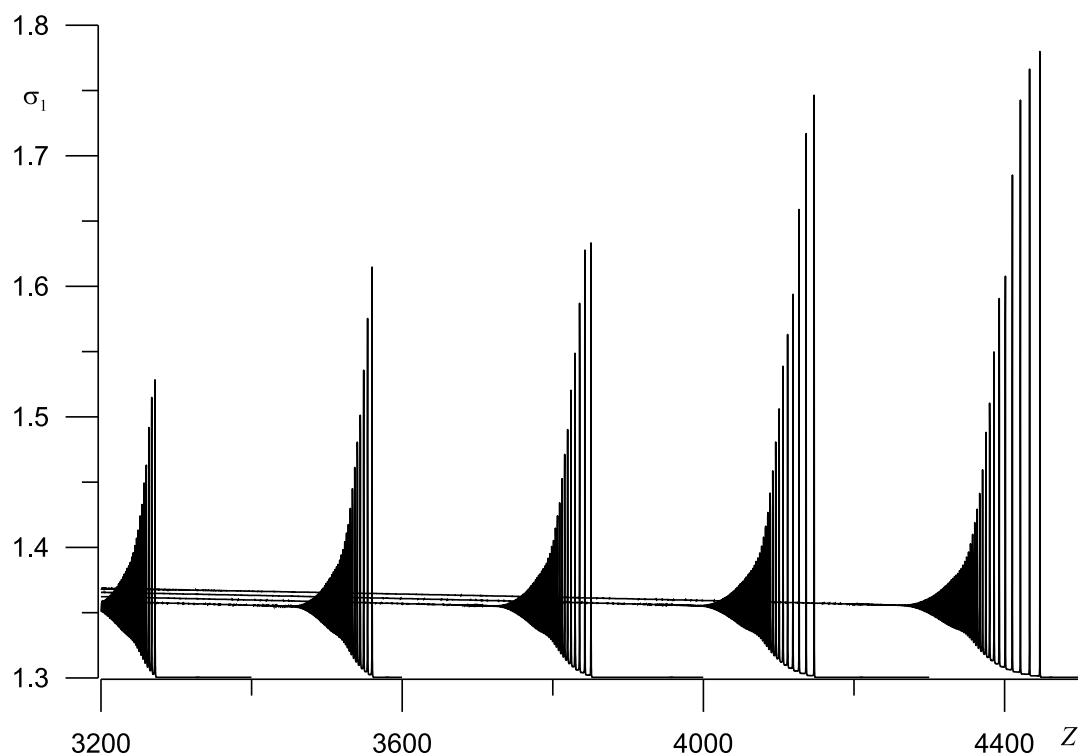


Рис. 4: Развитие неустойчивости солитонной структуры

Рис. 4 иллюстрирует развитие неустойчивости солитонной структуры разрыва для (в основном) продольных волн, движущихся вправо, $t = 2400; 2600; 2800; 3000$, $v_f = 0.5$, остальные параметры те же, что и для рис. 2.

Расчеты по версии программы с полным учетом жесткости на изгиб также проводились, однако в случае тонких стенок для большинства начальных данных результаты мало отличаются от случая, когда такого учета нет. Коррекция численной схемы в случае возникновения нелинейной неустойчивости, рассмотренной в разд. 4, делалась с помощью члена $c_{v4}r''''$ в уравнении (4.4). Такой учет для тонкостенных труб становится актуальным в случае слабого продольного натяжения или при $\sigma_1 < 0$, без такого учета уравнения в последнем случае становятся некорректными [10].

Список литературы

- [1] Fu Y. B., Pearce S. P. Characterization and stability of localized bulging/necking in inflated membrane tubes // IMA J. Appl. Math. 2010. V. 75. P. 581-602.
- [2] Fu Y. B., Il'ichev A. Solitary waves in fluid-filled elastic tubes: existence, persistence, and the role of axial displacement // IMA J. Appl. Math. 2010. V. 75. P. 257-268.
- [3] Il'ichev A. T., Fu I. B. Stability of aneurism solutions in fluid-filled elastic membrane tube // Acta Mechanica Sinica. 2012. V. 28. P. 1209-1218.
- [4] Бахолдин И. Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. Москва: Физматлит. 2004. 318 с.
- [5] Бахолдин И. Б. Разрывы, описываемые обобщенными уравнениями Кортевега–де Вриза // Изв. РАН. Мех. жидк. и газов. 1999. №4. С. 95-109.
- [6] Бахолдин И. Б. Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега–Бюргерса // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 271–302.
- [7] Бахолдин И. Б. Методы исследования, теория и классификация обратимых структур в моделях гидродинамического типа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. №30. 40 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-30>
- [8] Бахолдин И. Б. Теория и классификация обратимых структур разрывов в моделях гидродинамического типа // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 6.

- [9] Бахолдин И. Б. Методы исследования уединенных волн и обратимых структур разрывов в трубах с упругими стенками// Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 73. 32 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-73>.
- [10] Бахолдин И. Б. Численное исследование уединенных волн и структур разрывов в трубах с контролируемым давлением// Журн. Выч. Матем. и Матем. Физики. 2015. Т. 55. № 11. С. 120–136.
- [11] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.:Московский лицей. 1998. 412 с.
- [12] Саченков А. А. Цикл лекций по теории изгиба пластин.// Учебное пособие. Казань, 2012.-53 с. http://www.kpfu.ru/f5/bin_files/ip!158doc. Подробности: http://repository.kpfu.ru/?p_id=51751
- [13] Коробейников С. Н., Олейников А. А., Ларичкин А. Ю., Бабичев А. В., Алехин В. В., Численная реализация лагранжевой формулировки определяющих соотношений изотропного гиперупругого материала Генки// Дальневост. матем. журн. 2013. Т. 13. № 2. С. 222–249.
- [14] Адамов А. А. Сравнительный анализ двухконстантных обобщений закона Гука для изотропных упругих материалов при конечных деформациях// Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42. № 5. С. 183-192.

Оглавление

1 Структура работы.....	3
2 Основные уравнения, формулы, обобщения модели.....	3
3 Учет сопротивления на изгиб.....	5
4 Разработка метода расчета для трубы с жидкостью.....	7
5 О стабилизации численных схем.....	11
6 Решение задачи о распаде разрыва.....	12
Список литературы.....	15