



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Батхин А.Б.

Параметризация
дискриминантного
множества вещественного
многочлена

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Батхин А.Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 76. 32 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-76>

Публикации по материалам препринта

Батхин А.Б. Структура дискриминантного множества вещественного многочлена // Чебышевский сборник (Тула). 2015. Т. 16, № 2. С. 23-34. ISSN 2226-8383.
URL: <http://mi.mathnet.ru/cheb388>

Батхин А.Б. Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена // Программирование. 2016. Т. 42, № 2. С. 8-21. ISSN 0132-3474.

Batkhin A.B. Parameterization of the Discriminant Set of a Polynomial // Programming and Computer Software. 2016. Mar. Vol. 42, no. 2. Pp. 65-76. ISSN 0361-7688.
DOI: [10.1134/S0361768816020031](https://doi.org/10.1134/S0361768816020031)
URL: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS0361768816020031>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук**

А. Б. Батхин

**Параметризация дискриминантного множества
вещественного многочлена**

Москва — 2015

УДК 512.62+004.421.6

Александр Борисович Батхин

Параметризация дискриминантного множества вещественного многочлена. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2015.

Изучается дискриминантное множество вещественного многочлена, т. е. множество всех значений пространства коэффициентов, при которых последний имеет кратные корни. Предлагается конструктивный алгоритм построения полиномиальной параметризации дискриминантного множества в пространстве коэффициентов многочлена. Показана связь структуры дискриминантного множества с задачами разбиения натуральных чисел. Также обсуждаются различные алгоритмы вычисления субдискриминантов многочлена. Основные алгоритмы, описанные в работе, реализованы в виде библиотеки в системе компьютерной алгебры Maple.

Ключевые слова: теория исключения, субдискриминант, разбиения, компьютерная алгебра.

Alexander Borisovich Batkhin

Parametrization of the discriminant set of a real polynomial

We consider the discriminant set of a real polynomial, i. e. the set of all the points of the coefficient space at which the polynomial has multiple zeroes. The constructive algorithm of computation of polynomial representation of the discriminant set is provided. The structure of the discriminant set is linked with the problems of natural numbers partitions. Different algorithms of computation of subdiscriminants of the polynomial are discussed as well. The main algorithms, described in the preprint, are organized as a library of the computer algebra system Maple.

Key words: elimination theory, subdiscriminant, partitions, computer algebra.

Оглавление

1	Введение	3
2	Субдискриминант и его свойства	4
3	Параметризация дискриминантного множества	14
4	Приложения	23
	Заключение	32
	Список литературы	33
	Список условных обозначений	35

© А. Б. Батхин, 2015

© Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2015

1. Введение

Рассмотрим приведённый многочлен от одной вещественной переменной x

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n \quad (1.1)$$

n -й степени с вещественными коэффициентами. n -мерное вещественное пространство $\Pi \equiv \mathbb{R}^n$ его коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$ назовём *пространством коэффициентов* многочлена (1.1).

Для многих прикладных задач важную информацию даёт описание в пространстве Π множества $\mathcal{D}(f_n)$, на котором многочлен (1.1) имеет кратные корни. Потребность в знании структуры множества $\mathcal{D}(f_n)$ возникает, например, при решении проблемы устойчивости положения равновесия многопараметрических механических систем [1; 2], для вычисления резонансных нормальных форм систем Гамильтона вблизи стационарной точки [3].

Определение 1.1. *Дискриминантным множеством $\mathcal{D}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$ назовём множество всех точек пространства коэффициентов Π , в которых $f_n(x)$ имеет кратные корни.*

Замечание 1.1. Использование термина «дискриминантное множество» объясняется тем, что существование кратных корней многочлена (1.1) эффективно определяется нулями его дискриминанта $D(f_n)$.

Множество $\mathcal{D}(f_n)$ имеет сложную структуру и состоит из алгебраических многообразий $\mathcal{V}_k$ различных размерностей k , $k = 1, \dots, n - 1$. На каждом из этих многообразий многочлен (1.1) имеет определённую структуру кратных корней. Обычно наибольший интерес представляет собой многообразие $\mathcal{V}_{n-1}$ ко-размерности 1. Оно делит пространство коэффициентов Π на области, в каждой из которых многочлен $f_n(x)$ имеет фиксированное число вещественных корней.

Теорема 1.1 ([4, Теорема 2]). *Пространство коэффициентов Π вещественного многочлена $f_n(x)$ делится многообразием $\mathcal{V}_{n-1} \subset \mathcal{D}(f_n)$ на $1 + [n/2]$ связных областей с одинаковым числом вещественных корней.*

Цель данной работы — разработать конструктивный алгоритм вычисления параметрического представления всех компонент дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$ приведённого вещественного многочлена $f_n(x)$.

Этот препринт представляет собой расширенную и существенно переработанную версию статьи автора [5]. Некоторые предварительные результаты докладывались на международных конференциях: «Анализ и особенности», МИАН им. В. С. Стеклова, Москва, 17–21 декабря 2012 г., Polynomial Computer Algebra – 2015, Международный математический институт им. Л. Эйлера,

Санкт-Петербург, 13–18 апреля 2015 г. [6], «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», ТГПУ им. Л. Н. Толстого, Тула, 25–30 мая 2015 г.

Препринт состоит из введения, трёх частей, заключения и списка литературы. В части 2 приводятся необходимые определения и даётся описание методов вычисления субдискриминантов многочлена. В части 3 приводится описание алгоритма вычисления параметризации компонентов дискриминантного множества. Наконец, в части 4 даны некоторые примеры работы описанного выше алгоритма. На стр. 35 приведён список условных обозначений.

2. Субдискриминант и его свойства

Условие кратности корней многочлена $f_n(x)$ равносильно тому, что сам многочлен и его первая производная $f'_n(x)$ имеют нетривиальный общий делитель, т. е. $\deg \gcd(f_n, f'_n) > 0$, где $\deg f(x)$ — степень многочлена $f(x)$, а $\gcd(f, g)$ — наибольший общий делитель пары многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Индикатором наличия кратного корня многочлена служит его дискриминант $D(f_n)$, который с точностью до знака является результатом самого многочлена и его первой производной.

Имеет место следующий критерий.

Утверждение 2.1 ([7, § 141]). *Необходимым и достаточным условием существования кратных корней у многочлена $f_n(x)$ является равенство нулю его дискриминанта $D(f_n)$.*

В пространстве T корней многочлена $f_n(x)$ дискриминант задаётся следующим образом.

Определение 2.1. Пусть t_i , $i = 1, \dots, n$, корни многочлена $f_n(x)$, тогда его дискриминант $D(f_n)$ задаётся формулой

$$D(f_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)^2. \quad (2.1)$$

Замечание 2.1. Если многочлен $f_n(x)$ имеет коэффициент при старшем мономе, отличный от единицы, т. е. $\text{lc } f_n(x) \equiv a_0 \neq 1$, то его дискриминант вычисляется по формуле (2.1), умноженной на a_0^{2n-2} .

Для многочлена степени не выше трёх знак его дискриминанта однозначно определяет число его вещественных корней, однако для многочленов больших степеней одного дискриминанта уже недостаточно.

Утверждение 2.2 ([8, Теорема 3.5]). *При $D(f_n) > 0$ число пар комплексно-сопряженных корней многочлена (1.1) чётно, при $D(f_n) < 0$ — нечётно.*

Условие $D(f_n) = 0$ является слишком «грубым» для того, чтобы прояснить структуру кратных корней. Описать их организацию можно с привлечением различных средств.

Один из возможных подходов опирается на исследование корней многочлена

$$\tilde{f}_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \gcd(f_n, f'_n). \quad (2.2)$$

Пусть $d = \deg \tilde{f}_n > 0$, тогда корни многочлена $\tilde{f}_n(x)$ дают информацию о кратных корнях исходного многочлена (1.1): простым корням $\tilde{f}_n(x)$ соответствуют корни двойной кратности, а кратным корням $\tilde{f}_n(x)$ — корни кратности больше двух. Для того чтобы получить полную информацию о структуре корней многочлена $f_n(x)$, следует для каждого возможного значения $d = 1, \dots, n - 1$ вычислить соответствующий многочлен $\tilde{f}_n(x)$ и повторить для него описанную выше процедуру. Такой способ выглядит довольно трудоёмким.

Указанные выше вычисления можно существенно сократить, если воспользоваться набором величин, называемых *субдискриминантами k -го порядка*.

Определение 2.2. k -й субдискриминант $D^{(k)}(f_n)$, $k = 0, \dots, n - 2$ многочлена $f_n(x)$ задаётся следующей формулой

$$D^{(k)}(f_n) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#(I) = n - k}} \prod_{\substack{(j, l) \in I \\ l > j}} (t_j - t_l)^2, \quad (2.3)$$

где $\#(I)$ — мощность множества I . Для $k = n - 1$ положим $D^{(n-1)}(f_n) = n$, а для $k = n$ положим $D^{(n)}(f_n) = 1$.

Очевидно, что $D^{(0)}(f_n) = D(f_n)$.

Последовательность субдискриминантов $D^{(j)}(f_n)$, $j = 0, \dots, n - 2$ позволяет определить степень многочлена (2.2), а также количество вещественных корней многочлена (1.1) (см. теорему 2.1 на стр. 11).

Утверждение 2.3 ([9, Proposition 4.29]). *Пусть в последовательности субдискриминантов $D^{(j)}(f_n)$, $j = 0, \dots, n - 2$, первым отличным от нуля является d -й субдискриминант, $0 \leq d \leq n - 1$. Тогда $\deg \tilde{f}_n(x) = d$, т. е. исходный многочлен имеет ровно $n - d$ различных корней.*

Замечание 2.2. Автору не удалось однозначно определить, когда появился термин «субдискриминант», но, по-видимому, впервые он был введён в работе [10]. Позже он использовался в работе [11] и монографии [9], но без каких-либо ссылок на указанную выше статью [10].

2.1. Вычисление субдискриминанта. Вычисление субдискриминантов многочлена (1.1) является частным случаем задачи вычисления субрезультантов двух вещественных многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Ниже рассмотрим основные способы вычисления субрезультантов, придерживаясь при этом некоторой хронологической последовательности. Следует отметить, что под термином «субрезультант» разные авторы понимают различные алгебраические объекты, более того, сам субрезультант часто называют другими терминами: младший результат, биградиент и др. (см, например, [12—14]). В данной работе мы ограничимся рассмотрением т. н. *скалярного субрезультанта*, хотя некоторые алгоритмы вычисления последнего основаны на вычислении т. н. *полиномиального субрезультанта*, введённого в [13].

Определение 2.3. Пусть $f(x) = \prod_{i=1}^n (x - t_i)$, $g(x) = \prod_{i=1}^m (x - u_i)$ суть два приведённых многочлена степени n и m соответственно. Тогда результат вычисляется по формуле

$$R(f, g) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (t_i - u_j).$$

Для вычисления результата по коэффициентам исходных многочленов были разработаны разные методы. Все эти методы можно условно разделить на две группы.

Матричные методы основаны на составлении некоторой вспомогательной матрицы, элементы которой вычисляются по коэффициентам многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Миноры этой матрицы, взятые в определённой последовательности, представляют собой субрезультанты соответствующих порядков. К таким методам относятся описанные ниже алгоритмы вычисления субрезультантов с помощью матриц Безу различных модификаций, матрицы Сильвестра и ганкелевой матрицы. Для малых степеней исходных полиномов эти методы вполне эффективны, но при увеличении степени хотя бы одного из многочленов их трудоёмкость возрастает.

Методы, основанные на алгоритме Евклида, являются итерационными. Они позволяют существенно сократить объём вычислений и на каждом шаге дают субрезультант соответствующего порядка. В большинстве систем компьютерной алгебры именно эти методы и лежат в основе встроенных процедур вычисления субрезультантов.

(i) Метод Безу. Исторически первым способом вычисления результата двух полиномов является метод, предложенный в 1764 году Е. Безу (É. Bézout), с помощью т. н. *матрицы Безу*. Элементы этой матрицы являются коэффициентами некоторой билинейной формы коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Определение 2.4. Симметричной матрицей Безу (называемой также *безутиантой*) $\text{Bez}(f, g)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$, для которых $\deg f(x) = n \geq m = \deg g(x)$, называется матрица

$$\text{Bez}(f, g) = [\mathbf{b}]_{i,j=0}^{n-1},$$

где элементы $\mathbf{b}_{ij}$ определяются по формуле Кэли [15] (см. также [16, Chapter 12])

$$\frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x - y} = \sum_{i,j=0}^{n-1} \mathbf{b}_{ij} x^{n-1-i} y^{n-1-j}.$$

В некоторых работах матрица Безу определяется иначе и иногда называется *гибридной матрицей Безу* [17; 18]. В системе компьютерной алгебры Maple в пакете LinearAlgebra по умолчанию вычисляется матрица Безу именно в гибридной форме.

Определение 2.5 ([18]). Для заданных многочленов $f(x)$ и $g(x)$, таких, что $n = \deg f(x) \geq m = \deg g(x)$, назовём гибридной матрицей Безу $\mathbf{HBez}(f, g)$ матрицу $n \times n$, элементы которой определяются следующим образом:

- для $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, элемент матрицы с индексом (i, j) есть коэффициент при мономе степени $n - j$ многочлена

$$K_{m-i+1}(x) = (f_0 x^{m-i} + \dots + f_{m-i}) (g_{m-i+1} x^{n-m+i-1} + \dots + g_m x^{n-m}) - \\ - (f_{m-i+1} x^{n-m+i-1} + \dots + f_n) (g_0 x^{m-i} + \dots + g_{m-i});$$

- для $m+1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, элемент матрицы с индексом (i, j) есть коэффициент при мономе степени $n - j$ многочлена $x^{n-i} g(x)$.

Для безутианты $\text{Bez}(f, g)$ и гибридной матрицы Безу $\mathbf{HBez}(f, g)$ справедливы следующие утверждения (см. [14; 17—19]).

1. $\deg \gcd(f, g) = n - \text{rang } \text{Bez}(f, g) = n - \text{rang } \mathbf{HBez}(f, g)$.
2. Главный минор $\text{Bez}_{n-k}(f, g)$ порядка $n - k$ безутианты $\text{Bez}(f, g)$ равен k -му субрезультанту многочленов $f(x)$ и $g(x)$.
3. Минор $\mathbf{HBez}_{n-k}(f, g)$ порядка $n - k$, вычисляемый начиная с левого нижнего угла гибридной матрицы Безу $\mathbf{HBez}(f, g)$, равен k -му субрезультанту многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Сформулируем правило вычисления субдискриминантов многочлена (1.1).

Утверждение 2.4. k -й субдискриминант многочлена $f_n(x)$ вычисляется по формуле

$$D^{(k)}(f_n, f'_n) = (-1)^{n-k} \text{Bez}_{n-k}(f_n, f'_n),$$

где $n = \deg f_n(x)$, Bez_j — главный минор j -го порядка матрицы $\text{Bez}(f_n, f'_n)$.

Отметим, что имеются и другие модификации матрицы Безу (см. [17]).

(ii) **Метод Сильвестра.** Хронологически следующим способом вычисления результата был метод, использующий *матрицу Сильвестра*, один из вариантов которой был предложен Дж. Дж. Сильвестром (J. J. Sylvester) в 1840 году [20]. Эта матрица, обозначаемая далее $\text{Sylv}(f, g)$, размера $n \times m$ устроена проще безутианты $\text{Bez}(f, g)$, поскольку состоит из коэффициентов исходных многочленов.

Определение 2.6. Матрицей Сильвестра $\text{Sylv}(f, g)$ двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$, для которых $n = \deg f(x)$ и $m = \deg g(x)$, называется квадратная матрица размера $(n + m)$, строки которой суть векторы, составленные из коэффициентов многочленов

$$x^{m-1}f(x), x^{m-2}f(x), \dots, xf(x), f(x), g(x), xg(x), \dots, x^{n-2}g(x), x^{n-1}g(x)$$

в базисе $x^{n+m-1}, \dots, x, 1$.

Замечание 2.3. Изначально, в оригинальной работе Сильвестра [20] и во многих последующих книгах и статьях матрица $\text{Sylv}(f, g)$ определяется иначе, когда последние n её строк записываются в обратном порядке. Однако, например, уже в книге М. Бохера [21, § 68], вышедшей в 1909 году, матрица Сильвестра задаётся как в определении 2.6. Иногда такую матрицу называют матрицей Сильвестра-Хабихта (см., например, [9, Notation 4.21] или [11]), хотя в таком виде она записывалась ещё, видимо, в работах XIX века.

Например, матрица Сильвестра для многочленов $f_n(x)$ и $f'_n(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Sylv}(f_n, f'_n) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \cdots & 2a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & n & \dots\dots\dots & 2a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ n & (n-1)a_1 & \dots\dots\dots & 2a_{n-2} & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Определение субрезультанта удобно дать с помощью иннора [12] матрицы $\text{Sylv}(f, g)$.

Определение 2.7. Пусть M_n — квадратная матрица размера $n \times n$. Тогда матрица M_{n-k} , $k < [n/2]$, полученная вычеркиванием k крайних строк и столбцов с обеих сторон исходной матрицы M_n , называется её k -м *иннором*.

Определение 2.8. k -м субрезультантом $R^{(k)}(f, g)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется определитель k -го иннора матрицы Сильвестра $\text{Sylv}(f, g)$.

Замечание 2.4. Иногда определитель k -го иннора матрицы Сильвестра называют ее биградиентом, который используется при решении проблемы Раусса-Гурвица.

(iii) Метод Кронекера. Л. Кронекер (L. Kronecker) исследовал ряды Лорана рациональной функции $Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(x)/f(x)$ по степеням переменной x^{-1} , где $f(x)$ и $g(x)$ приведённые многочлены степеней n и m соответственно и $n > m$. Разложим функцию $Q(x)$ в ряд по степеням x^{-1}

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{i-1}}{x^i},$$

и составим из коэффициентов $c_i, i = 0, \dots, 2n-2$, ганкелеву матрицу $\mathfrak{C}$ размера $n \times n$

$$\mathfrak{C} = [c_{j+k}]_{j,k=0}^{n-1} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-2} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Пусть C_j — j -й главный минор матрицы $\mathfrak{C}$.

Следующее утверждение устанавливает связь между субрезультантами многочленов $R^{(k)}(f, g)$ и главными минорами C_j .

Утверждение 2.5 ([19]).

$$C_{n-k} = R^{(k)}(f, g).$$

Для случая, когда $g(x) \equiv f'_n(x)$ элементы матрицы $\mathfrak{C}$ представляют собой т. н. *суммы Ньютона* корней исходного многочлена (1.1):

$$s_k(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^n t_i^k.$$

Суммы Ньютона являются симметричными функциями корней многочлена и рационально выражаются через коэффициенты многочлена $f_n(x)$ посредством *формул Ньютона*:

$$n\sigma_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} s_i \sigma_{n-i}, \quad (2.5)$$

где σ_i — элементарные симметрические многочлены [8; 22] от корней t_i , $i = 1, \dots, n$, которые, согласно теореме Виета, связаны с коэффициентами a_i многочлена $f_n(x)$ соотношением

$$\sigma_k(t_1, \dots, t_n) = (-1)^k a_k. \quad (2.6)$$

Помимо рекуррентной формулы (2.5) укажем, что суммы s_k могут быть выражены через коэффициенты a_i многочлена (1.1) либо посредством явной, но громоздкой, формулы Варинга

$$s_k = k \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \geq 0 \\ j_1 + 2j_2 + \dots + nj_n = k}} \frac{(S_n - 1)!}{\prod_{i=1}^n (j_i!)} (-1)^{S_n} \prod_{i=1}^n a_i^{j_i}, \quad (2.7)$$

где $S_n = \sum_{i=1}^n j_i$, либо с помощью детерминатного представления [8, п. 11.1]

$$s_k = \det \begin{pmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \dots & \sigma_1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Теперь, подставляя выражения (2.8) для сумм Ньютона s_k в матрицу $\mathfrak{C}$ и применяя подстановку (2.6), можно получить общие выражения для k -х субдискриминантов. Так, для $k = n - i$, $i = 1, \dots, 4$ соответствующие формулы имеют следующий вид:

$$D^{(n-1)}(f_n) = n, \quad (2.9)$$

$$D^{(n-2)}(f_n) = (n-1) a_1^2 - 2na_2, \quad (2.10)$$

$$D^{(n-3)}(f_n) = -2(n-1) a_1^3 a_3 + (n-2) a_1^2 a_2^2 - 4(n-1) a_1^2 a_4 + \\ + 2(5n-6) a_1 a_3 a_2 + -4(n-2) a_2^3 + 8na_4 a_2 - 9na_3^2, \quad (2.11)$$

$$D^{(n-4)}(f_n) = 8(n-1) a_1^4 a_3 a_5 - 9(n-1) a_1^4 a_4^2 - 4(n-2) a_1^3 a_2^2 a_5 + \\ + 2(5n-11) a_1^3 a_2 a_3 a_4 - 4(n-3) a_1^3 a_3^2 - 2(n-2) a_1^2 a_2^3 a_4 + \\ + (n-3) a_1^2 a_2^2 a_3^2 + 12(n-1) a_1^3 a_3 a_6 - 14(n-1) a_1^3 a_4 a_5 - \\ - 6(n-2) a_1^2 a_2^2 a_6 - 6(5n-3) a_1^2 a_2 a_3 a_5 + 2(25n-28) a_1^2 a_2 a_4^2 - \\ - 6(n-3) a_1^2 a_3^2 a_4 + 16(n-2) a_1 a_2^3 a_5 - 4(11n-24) a_1 a_2^2 a_3 a_4 + \\ + 18(n-3) a_1 a_2 a_3^3 + 8(n-2) a_2^4 a_4 - 4(n-3) a_2^3 a_3^2 + \\ + 24(n-1) a_1^2 a_4 a_6 - 25(n-1) a_1^2 a_5^2 - 12(5n-6) a_1 a_2 a_3 a_6 + \\ + 4(17n-20) a_1 a_2 a_4 a_5 + 6(11n-15) a_1 a_3^2 a_5 -$$

$$\begin{aligned}
 & - 24 (3n - 4) a_1 a_3 a_4^2 + 24 (n - 2) a_2^3 a_6 - 40 (n - 3) a_2^2 a_3 a_5 - \\
 & - 16 (3n - 4) a_2^2 a_4^2 + 18 (5n - 12) a_2 a_3^2 a_4 - 27 (n - 3) a_3^4 - \\
 & - 48 n a_2 a_4 a_6 + 50 n a_2 a_5^2 + 54 n a_3^2 a_6 - 120 n a_3 a_4 a_5 + 64 n a_4^3. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Из формул (2.9)–(2.12) легко получить выражения для всех субдискриминантов многочленов 2-й, 3-й и 4-й степеней, подставляя соответствующие значения n и обнуляя коэффициенты a_i при $i > n$. Отметим, что с ростом степени многочлена $f_n(x)$ сложность выражения его субдискриминантов растет экспоненциально. В таблице 1 приведено количество мономов в выражении субдискриминантов $D^{(k)}(f_n)$ для $n = 3, \dots, 11$ и $k = 0, \dots, 4$.

Таблица 1. Количество мономов в выражении субдискриминанта $D^{(k)}(f_n)$

n	k				
	0	1	2	3	4
3	5	2	1		
4	16	7	2	1	
5	59	27	7	2	1
6	246	117	34	7	2
7	1103	543	170	34	7
8	5247	2658	892	204	34
9	26059	13529	4775	1205	204
10	133881	70946	26164	7128	1409
11	706799	381104	145619	42138	9237

Ганкелева матрица (2.4), где $c_i = s_i$, используется не только для вычисления субдискриминантов многочлена $f_n(x)$, но и в известной теореме Якоби (названной почему-то теоремой Сильвестра в [8, Гл. 1, п. 4.3]) о числе его вещественных корней.

Теорема 2.1 (Якоби, Борхардт, [см. 23; 24]). *Число различных корней многочлена $f_n(x)$ равно рангу квадратичной формы, заданной матрицей (2.4), в которой $c_i = s_i$. Число вещественных корней многочлена равно её сигнатуре.*

Поскольку сигнатура квадратичной формы вычисляется с помощью главных миноров её матрицы [24, Глава X], то в силу утверждения 2.5 имеем следующую процедуру определения числа вещественных и, следовательно, комплексных корней многочлена f_n .

Составим последовательность субдискриминантов многочлена $f_n(x)$

$$S(f_n) \stackrel{\text{def}}{=} \left(1, D^{(n-1)}(f_n), \dots, D^{(1)}(f_n), D^{(0)}(f_n) \right).$$

Пусть $P(S)$ есть число знакопостоянств в последовательности S , а $V(S)$ — число знакоперемен этой последовательности.

Утверждение 2.6 ([9, Theorem 4.33]). *Число вещественных корней многочлена $f_n(x)$ равно величине*

$$\text{PmV}(f_n) \stackrel{\text{def}}{=} P(S) - V(S).$$

Отметим также, что ганкелева матрица $\mathfrak{E}$ связана с симметричной матрицей Безу $\text{Bez}(f, g)$ соотношением

$$\mathfrak{E} = -J \text{Bez}(f, 1)^{-1} \text{Bez}(f, g) \text{Bez}(f, 1)^{-1} J,$$

где J — ганкелева матрица, у которой все элементы нули, кроме побочной диагонали, состоящей из единиц.

(iv) Метод, основанный на алгоритме Евклида. Алгоритм Евклида, который, по утверждению Дональда Кнута, является старейшим нетривиальным алгоритмом, дожившим до наших дней, позволяет вычислять субрезультанты пары многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Для краткости рассмотрим далее вариант метода для вычисления субдискриминантов многочлена $f_n(x)$.

Классический алгоритм Евклида для пары многочленов $f(x)$ и $g(x)$ позволяет найти такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, называемые соответственно *частное* и *остаток*, что $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, где $\deg q(x) = \deg f(x) - \deg g(x)$ и $\deg r(x) < \deg g(x)$. Следуя [14, Section 4], определим правило деления.

Определение 2.9. *Правилом деления $\mathcal{R}$ назовём отображение*

$$\mathcal{R} : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}^2 : (f(x), g(x)) \mapsto (\alpha, \beta),$$

которое для каждой пары многочленов $(f(x), g(x))$ позволяет найти такие полиномы $q(x)$ и $r(x)$, что

$$\alpha f(x) = q(x)g(x) + \beta r(x), \quad \deg r(x) < \deg g(x).$$

Классический алгоритм Евклида имеет правило деления $\mathcal{R}(f, g) = (1, 1)$. Главный недостаток его заключается в том, что если исходная пара полиномов $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, то остаток от деления $r(x)$ может, вообще-то говоря, не принадлежать $\mathbb{Z}[x]$. В 1836 году К. Якоби (С. Jacobi) предложил т. н. *псевдоделение*, определённое правилом $\mathcal{R}(f, g) = (\text{lc } g^{\deg f - \deg g + 1}, 1)$, которое гарантировало, что остаток $r(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Недостаток псевдоделения заключается в экспоненциальном росте коэффициентов промежуточных многочленов на каждом шаге применения алгоритма. Как показано в [25] коэффициенты промежуточных многочленов на каждом шаге применения алгоритма увеличиваются приблизительно в $1 + \sqrt{2}$ раза.

Если обобщить правило деления так, что на каждом i -м шаге коэффициенты (α_i, β_i) выбираются определённым образом, то последовательность остатков $r_i(x)$ будет представлять собой полиномиальные субрезультанты, а $\text{lc } r_i(x)$ — соответственно, скалярные субрезультанты. В [14] это правило деления выглядит так. Положим $r_0 \equiv f(x)$, $r_1 \equiv g(x)$, $\rho_0 = 1$. На каждом шаге правило деления $\mathcal{R}_i(f, g) = (\alpha_i, \beta_i)$ для $i \leq 2$ рекурсивно определяется так:

$$\begin{aligned} (\alpha_i, \beta_i) &= \left(\rho_{i-1}^{d_{i-2}+1}, -\rho_{i-2} \psi^{d_{i-2}} \right), \\ \psi_i &= \begin{cases} -1, & \text{для } i = 2, \\ (-\rho_{i-2})_{i-3}^d \psi_{i-1}^{1-d_{i-3}}, & \text{для } i > 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь $\rho_i = \deg r_i$, $d_{i-1} = \deg r_{i-1} - \deg r_i$, а r_i — остаток, полученный на i -м шаге.

Если $r_0(x) \equiv f_n(x)$, $r_1(x) \equiv f'_n(x)$ и $f_n(x)$ — приведённый многочлен, то правило деления (2.13) упрощается: $\mathcal{R}_i(f_n, f'_n) = (\text{lc}^2 r_i, -\text{lc}^2 r_{i-1})$.

Заметим, что встроенная процедура `resultant` вычисления результата двух многочленов в системе компьютерной алгебры Maple в итоге использует именно описанный выше алгоритм. Сравнение производительности различных методов вычисления субдискриминантов многочлена от одной переменной, реализованных автором в системе компьютерной алгебры Maple, показало, что для многочленов с числовыми коэффициентами метод, основанный на алгоритме Евклида, существенно опережает любой матричный метод. Однако если многочлен $f_n(x)$ имеет символьные коэффициенты, то для $n \geq 10$ метод, основанный на симметричной матрице Безу, работает быстрее, чем метод, основанный на алгоритме Евклида. Это можно объяснить тем, что в случае символьных коэффициентов львиная доля времени уходит на упрощение промежуточных символьных результатов.

2.2. Свойства субдискриминантов. Основные свойства результатов и, соответственно, дискриминантов многочленов можно найти во многих книгах (см., например, [7, §§ 137, 141], [16, Chapter 12], [8, Гл. 1, п. 3], [19; 26]). Многие из этих свойств переносятся на субдискриминанты соответствующих порядков. Подробнее остановимся на свойстве квазиоднородности субдискриминантов, которое понадобится для исследования нулей идеалов, составленных из субдискриминантов многочлена $f_n(x)$.

Теорема 2.2. Пусть $f_n(x)$ — приведённый многочлен степени n . Тогда его k -й субдискриминант $D^{(k)}(f_n)$ представляет собой квазиоднородный многочлен от

переменных $a_1, \dots, a_n$, такой, что

$$\sum_{j=1}^n j a_j \frac{\partial D^{(k)}(f_n)}{\partial a_j} = (n-k)(n-k-1) D^{(k)}(f_n). \quad (2.14)$$

Для случая $k = 0$, т. е. для дискриминанта $D(f_n)$, это утверждение доказано в [7, § 137] в более широкой постановке, а в указанном выше виде для $k = 0$ сформулировано в [16, Chapter 12].

Замечание 2.5. Если $\text{lc } f_n(x) \neq 1$, т. е. $a_0 \neq 1$, то субдискриминанты $D^{(k)}(f_n)$ как полиномы от $n+1$ -й переменной $a_0, a_1, \dots, a_n$ являются однородными функциями и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{j=0}^n a_j \frac{\partial D^{(k)}(f_n)}{\partial a_j} = 2(n-k-1) D^{(k)}(f_n). \quad (2.15)$$

Доказательство формул (2.14) и (2.15) может быть получено теми же методами, как это сделано в [7, § 137], с использованием представления субдискриминанта $D^{(k)}(f_n)$ в виде (2.3) и представления Ньютоновых сумм s_k по формуле Варинга (2.7). Отметим, что формула (2.15) есть следствие тождества Эйлера для однородных функций.

Введём полиномиальные идеалы $\mathcal{J}_k(f_n)$, состоящие из первых k субдискриминантов $D^{(k)}(f_n)$: $\mathcal{J}_k(f_n) = \{D^{(i)}(f_n), i = 0, \dots, k-1\}$. Тогда согласно утверждению 2.3 нули идеала $\mathcal{J}_k(f_n)$ образуют множество, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет в точности $k < n$ различных корней.

Для исследования нулей идеалов $\mathcal{J}_k$ можно применить технику, описанную в [27; 28], однако в данной работе она не использовалась. Здесь только укажем, что квазиоднородность субдискриминантов $D^{(k)}(f_n)$, $k = 0, \dots, n-2$, позволяет легко определить максимальную размерность множества нулей идеалов $\mathcal{J}_k$.

3. Параметризация дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$

Множество $\mathcal{D}(f_n)$ состоит из алгебраических многообразий $\mathcal{V}_k$ размерностей k , $1 \leq k \leq n-1$. Общее число этих многообразий, а также число различных многообразий $\mathcal{V}_k$, имеющих фиксированную размерность k , зависит от числа разбиений степени n многочлена $f_n(x)$.

3.1. Разбиения натурального числа.

Определение 3.1. Разбиением λ натурального числа n называется всякая конечная неубывающая последовательность натуральных чисел $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k$, для которой $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$. Каждое из разбиений запишем в виде $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} \dots]$, где n_i — число повторений слагаемого i в разбиении, т. е. $\sum_{i=1}^k i n_i = n$.

Определение 3.2. Определим основные числовые функции, связанные с множеством разбиений.

- Функция $p(n)$ задаётся числом всех разбиений числа n (последовательность A000041 в [29]).
- Функция $p_k(n)$ задаётся числом всех разбиений n на k слагаемых.
- Функция $q(n)$ задаётся числом всех разбиений n на различные слагаемые (последовательность A000009 в [29]).
- Функция $q_k(n)$ задаётся числом всех разбиений n на k различных слагаемых.

Очевидно, $p(n) = \sum_{k=1}^n p_k(n)$ и $q(n) = \sum_{k=1}^n q_k(n)$. Вычислению функций $p(n)$, $p_k(n)$, $q_k(n)$ посвящено огромное число работ (см., например, [22; 29; 30]), но, наверное, самой знаменитой является пентагональная теорема Эйлера.

Указанные выше функции могут быть вычислены либо с помощью производящих функций, либо с помощью рекуррентных соотношений. Так, для функции $p(n)$ соответствующие формулы были найдены еще Л. Эйлером и имеют следующий вид:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k},$$

$$p(n) = \sum_{k \neq 0} (-1)^{k-1} p(n - g_k), \quad g_k = \frac{k(3k-1)}{2}.$$

Для функции $p_k(n)$ соответствующие формулы таковы:

$$P_k(x) = \sum p_k(n)x^n = x^k \prod_{i=1}^k \frac{1}{1-x^i},$$

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1) = \sum_{i=1}^k p_i(n-k).$$

Отметим, что для функции $p_k(n)$ можно построить производящую функцию $P_k(x, y)$ от двух переменных, такую, что

$$P_k(x, y) = \sum_{n,k} p_k(n) y^k x^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-yx^i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k x^k}{\prod_{i=0}^k (1-x)^i}.$$

В таблице 2 приведены начальные значения функции $p_k(n)$ для $k \leq n \leq 22$.

Таблица 2. Значения функций $p(n)$ и $p_k(n)$ для $n \leq 22$

n	k																						$p(n)$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
1	1																						1
2	1	1																					2
3	1	1	1																				3
4	1	2	1	1																			5
5	1	2	2	1	1																		7
6	1	3	3	2	1	1																	11
7	1	3	4	3	2	1	1																15
8	1	4	5	5	3	2	1	1															22
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1														30
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1													42
11	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1												56
12	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1											77
13	1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1										101
14	1	7	16	23	23	20	15	11	7	5	3	2	1	1									135
15	1	7	19	27	30	26	21	15	11	7	5	3	2	1	1								176
16	1	8	21	34	37	35	28	22	15	11	7	5	3	2	1	1							231
17	1	8	24	39	47	44	38	29	22	15	11	7	5	3	2	1	1						297
18	1	9	27	47	57	58	49	40	30	22	15	11	7	5	3	2	1	1					385
19	1	9	30	54	70	71	65	52	41	30	22	15	11	7	5	3	2	1	1				490
20	1	10	33	64	84	90	82	70	54	42	30	22	15	11	7	5	3	2	1	1			627
21	1	10	37	72	101	110	105	89	73	55	42	30	22	15	11	7	5	3	2	1	1		792
22	1	11	40	84	119	136	131	116	94	75	56	42	30	22	15	11	7	5	3	2	1	1	1002

Нетрудно видеть, что для любого $n > 0$ имеем $p_1(n) = p_n(n) = p_{n-1}(n) = 1$. Последнее равенство следует из того, что для любого натурального n имеется по одному разбиению на 1 слагаемое ($[n^1]$), по одному на n одинаковых слагаемых ($[1^n]$) и по одному на $n - 1$ слагаемое ($[2^1(n - 2)^1]$). Для $k = 2, 3$ можно привести явные формулы (см. [30, Задачи 1 и 2, Гл. 5]):

$$p_2(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad p_3(n) = \left\lfloor \frac{n^2 + 9}{12} \right\rfloor - 1,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — операция округления до ближайшего целого.

Для функции $q(n)$ в качестве производящей функции $Q(x)$ можно выбрать следующую

$$Q(x) = \sum_n q(n)x^n = \prod_{i=1}^n (1 + x^i).$$

Наконец, для функции $q_k(n)$ производящие функции $Q_k(x)$ и $Q_k(x, y)$ имеют вид

$$Q_k(x) = \sum_n q_k(n)x^n = \frac{x^{k+\binom{k}{2}}}{\prod_{i=0}^k (1 - x^i)},$$

$$Q_k(x, y) = \sum_{n,k} q_k(n)y^k x^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + yx^i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k x^{k+\binom{k}{2}}}{\prod_{i=0}^k (1 - x^i)},$$

где $\binom{k}{2}$ — биномиальный коэффициент. Явная формула для $q_2(n)$ имеет вид

$$q_2(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Значения функций $q(n)$ и $q_k(n)$ приведены в таблице 3 для $n \leq 2$ и $k \leq 7$.

3.2. Число компонент дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$. Рассмотрим разбиение $\lambda = [1^{n_1} 2^{n_2} \dots i^{n_i} \dots]$ натурального числа n . Величина i в разбиении λ задаёт кратность корня, а n_i — количество корней соответствующей кратности. Тогда $k = \sum_i n_i$ есть число различных корней многочлена $f_n(x)$ и $\sum_i i n_i = n$. Любое разбиение λ числа n определяет некоторую структуру кратных корней многочлена и этой структуре соответствует в пространстве коэффициентов Π некоторое алгебраическое многообразие $\mathcal{V}_k^i$, $i = 1, \dots, p_k(n)$, размерности k по числу различных корней. Число таких многообразий размерности k равно $p_k(n)$, а общее число многообразий всех возможных размерностей равно $p(n) - 1$, поскольку разбиению $[1^n]$ соответствует ситуация, когда все корни многочлена (1.1) различны.

Таблица 3. Значения функций $q(n)$ и $q_k(n)$ для $n \leq 22$

n	k							$q(n)$
	1	2	3	4	5	6	7	
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	0	0	1
3	1	1	0	0	0	0	0	2
4	1	1	0	0	0	0	0	2
5	1	2	0	0	0	0	0	3
6	1	2	1	0	0	0	0	4
7	1	3	1	0	0	0	0	5
8	1	3	2	0	0	0	0	6
9	1	4	3	0	0	0	0	8
10	1	4	4	1	0	0	0	10
11	1	5	5	1	0	0	0	12
12	1	5	7	2	0	0	0	15
13	1	6	8	3	0	0	0	18
14	1	6	10	5	0	0	0	22
15	1	7	12	6	1	0	0	27
16	1	7	14	9	1	0	0	32
17	1	8	16	11	2	0	0	38
18	1	8	19	15	3	0	0	46
19	1	9	21	18	5	0	0	54
20	1	9	24	23	7	0	0	64
21	1	10	27	27	10	1	0	76
22	1	10	30	34	13	1	0	89

В силу того, что исходный многочлен (1.1) вещественный, комплексные корни его образуют пары — сам комплексный корень t_i и ему комплексно сопряжённый $\bar{t}_i$. Если комплексный корень t_i кратный, то и сопряжённый ему имеет такую же кратность. Значит, в разбиении λ , которое соответствует такой структуре корней, будет два равных слагаемых. Следовательно, алгебраическое многообразие $\mathcal{V}_k \subset \Pi$ размерности k задаёт только вещественные корни многочлена $f_n(x)$, если соответствующее ему разбиение числа n есть разбиение, состоящее из k различных слагаемых. Число таких разбиений для фиксированного k есть значение функции $q_k(n)$, а общее число компонент дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$, на которых все корни вещественны, задаётся функцией $q(n)$.

3.3. Иерархическая структура компонент множества $\mathcal{D}(f_n)$. Начнём с разбиения $[n^1]$, которое соответствует случаю, когда имеется единственный (очевидно вещественный) корень t_1 максимальной кратности n . Тогда многочлен $f_n(x)$ имеет вид

$$f_n(x) = (x - t_1)^n, \quad (3.1)$$

а его коэффициенты a_i выражаются через биномиальные коэффициенты

$$a_i = (-1)^i \binom{n}{i} t_1^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Согласно утверждению 2.3 в этом случае $\deg \tilde{f}_n(x) = n - 1$, т. е. в последовательности субдискриминантов $D^{(i)}(f_n)$, $i = 0, \dots, n - 1$, первый отличный от нуля субдискриминант есть $D^{(n-1)}(f_n)$. Следовательно, формулы (3.2) задают параметрическое представление нулей идеала $\mathcal{I}_{n-1}$. Эти нули представляют собой одномерное многообразие $\mathcal{V}_1$ без особых точек, поскольку $da_1/dt_1 = -n \neq 0$.

Двумерные алгебраические многообразия $\mathcal{V}_k^i$, $i = 1, \dots, p_k(n)$, задаются разбиениями λ числа n на два слагаемых: $\lambda = [n_1^1, n_2^1]$, $n_1 + n_2 = n$. Число таких многообразий равно $p_2(n)$, из них число многообразий, на которых многочлен (1.1) имеет только вещественные корни, равно $q_2(n)$. Корни многочлена могут быть комплексными лишь на одном из многообразий $\mathcal{V}_2^i$, для которого соответствующее разбиение λ имеет вид $[m^2]$, где $n = 2m$.

Пусть на каждом из многообразий $\mathcal{V}_2^i$ многочлен $f_n(x)$ имеет только два различных вещественных корня. Тогда его можно представить в виде

$$f_n(x) = (x - t_1)^{n_1} (x - t_1 - t_2)^{n_2}. \quad (3.3)$$

Для случая, когда $n = 2m$, представим его в виде

$$f_n(x) = \begin{cases} [(x - v_1)^2 - v_2^2]^m, & t_{1,2} = v_1 \pm v_2 \in \mathbb{R}, \\ [(x - v_1)^2 + v_2^2]^m, & t_{1,2} = v_1 \pm iv_2 \in \mathbb{C}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Очевидно, что при $t_2 = 0$ многочлен вида (3.3) или (3.4) переходит в многочлен вида (3.1). Следовательно, каждое из многообразий $\mathcal{V}_2^i$, $i = 1, \dots, p_2(n)$, пересекается друг с другом по многообразию $\mathcal{V}_1$.

Аналогично можно описать все многообразия $\mathcal{V}_3^i$, $i = 1, \dots, p_3(n)$, размерности 3, и так далее, пока, в итоге, мы не придем к многообразию $\mathcal{V}_{n-1}$, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет единственный двойной корень и $n - 2$ простых корня.

3.4. Алгоритм построения параметризации многообразий $\mathcal{V}_k$. Рассмотрим конструктивную процедуру вычисления параметрического представления многообразий $\mathcal{V}_k^i$ для всех значений $k = 1, \dots, n - 1$ и $i = 1, \dots, p_k(n)$.

Теорема 3.1. Пусть в пространстве коэффициентов Π многочлена $f_n(x)$ степени n имеется алгебраическое многообразие $\mathcal{V}_k$ размерности $k < n$, на котором $f_n(x)$ имеет k различных корней, из которых t — вещественный корень кратности m , $m \leq n - k + 1$, т. е. $f_n(x) = (x - t)^m u(x)$, где $u(x)$ — частное от деления многочлена $f_n(x)$ на бином $(x - t)^m$, а u_i , $i = 1, \dots, k - 1$, его различные корни с кратностью отличной от m .

Пусть $\mathbf{r}_k(t, u_1, \dots, u_{k-1})$ — параметрическое представление многообразия $\mathcal{V}_k$. Тогда выражение

$$\mathbf{r}_{k+1}(t, v, u_1, \dots, u_{k-1}) = \mathbf{r}_k(t, u_1, \dots, u_{k-1}) + \frac{v}{m} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}_k(t, u_1, \dots, u_{k-1}) \quad (3.5)$$

задаёт параметризацию части алгебраического многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$, на которой многочлен $f_n(x)$ имеет корень t кратности $m - 1$, простой корень $t + v$, а кратности и значения остальных $k - 1$ корней остаются неизменными. При $v = 0$ параметризация (3.5) переходит в параметризацию $\mathbf{r}_k$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный многочлен $g(x; t, v)$, коэффициенты которого непрерывно зависят от параметров t, v следующим образом

$$g(x; t, v) = f_n(x) + av \frac{\partial f_n(x)}{\partial t},$$

где $a = \text{const}$. Подставляя выражение для $f_n(x)$ из условия теоремы, получим

$$g(x; t, v) = (x - t)^{m-1} (x - t - mav) u(x).$$

Полагая $a = m^{-1}$, получаем $g(x; t, v) = (x - t)^{m-1} (x - t - v) u(x)$. Таким образом, многочлен $g(x; t, v)$ имеет корень t кратности $m - 1$, один простой корень $t + v$ и остальные $k - 1$ корней такие же, как у многочлена $f_n(x)$. Для коэффициентов $g_i(t, v)$ многочлена $g(x; t, v)$ получаем

$$g_i(t, v) = a_i(t) + \frac{v}{m} \frac{\partial a_i(t)}{\partial t}.$$

Следовательно, формула (3.5) параметризует ту часть многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$, на которой многочлен $f_n(x)$ имеет описанную выше структуру корней. $\square$

Замечание 3.1. Формула (3.5) показывает, что указанная в теореме 3.1 часть многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$ может рассматриваться как линейчатая касательная развёртывающая поверхность (см. [31; 32]) размерности $k + 1$ в пространстве коэффициентов Π . Направляющей этой поверхности служит многообразие $\mathcal{V}_k$.

Замечание 3.2. Если вместо формулы (3.5) воспользоваться выражением

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \frac{t_2 - t_1}{m} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}, \quad (3.6)$$

то получим параметризацию многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$, на котором многочлен $f_n(x)$ факторизуется следующим образом:

$$f_n(x) = (x - t_1)^{m-1}(x - t_2)u(x).$$

Замечание 3.3. Пусть один из корней, например u_1 , многочлена $u(x)$ в условии теоремы 3.1 простой, т. е. $u(x) = (x - u_1)\tilde{u}(x)$. Тогда на части многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$ исходный многочлен имеет пару комплексно сопряжённых корней. Чтобы получить параметрическое представление этой части многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$, следует сделать такую замену параметров:

$$t + v \rightarrow v_1 + iv_2, \quad u_1 \rightarrow v_1 - iv_2.$$

Эта замена параметров приведёт к тому, что многочлен $f_n(x)$ можно представить в виде

$$f_n(x) = (x - t)^{m-1} ((x - v_1)^2 + v_2^2) \tilde{u}(x). \quad (3.7)$$

Если поменять знак перед слагаемым v_2^2 в правой части формулы (3.7), то получим факторизацию многочлена $f_n(x)$ на той части многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$, где имеется пара простых корней $v_1 \pm v_2$. Таким образом, для получения параметризации всего многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$ следует использовать подстановку

$$t + v \rightarrow v_1 + \sqrt{v_2}, \quad u_1 \rightarrow v_1 - \sqrt{v_2}, \quad (3.8)$$

которая, в итоге, позволит записать многочлен $f_n(x)$ на всем многообразии $\mathcal{V}_{k+1}$ в виде

$$f_n(x) = (x - t)^{m-1} ((x - v_1)^2 + v_2) \tilde{u}(x). \quad (3.9)$$

Аналогично можно поступить, если многочлен $u(x)$ в условии теоремы 3.1 имеет один из корней, например u_2 , кратности $m - 1$, только в этом случае вместо подстановки (3.8) следует использовать подстановку

$$t \rightarrow v_1 + \sqrt{v_2}, \quad u_2 \rightarrow v_1 - \sqrt{v_2}.$$

Замечание 3.4. Если в формуле (3.9) положить $v_2 = 0$, то получим, что многочлен $f_n(x)$ имеет по крайней мере один корень t кратности $m - 1$ и один двукратный корень v_1 .

Введём три основные операции, которые позволят последовательно перейти от параметрического представления одномерного многообразия $\mathcal{V}_1$ к параметризации всех других компонентов дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$.

1) Назовём операцию перехода от многообразия $\mathcal{V}_k$ к многообразию $\mathcal{V}_{k+1}$ в замечании 3.2 «ПОДЪЁМ». Эта операция позволяет перейти к многообразию, размерность которого на единицу больше размерности исходного. Если на нём многочлен (1.1) имеет только вещественные корни, то получим его полную параметризацию, если имеются комплексные корни, то применим следующую операцию.

2) Операцию, основанную на замене (3.8) в замечании 3.3, назовём «ПРОДОЛЖЕНИЕ». Эта операция позволяет получить параметризацию всего многообразия $\mathcal{V}_{k+1}$, полученного в результате операции «ПОДЪЁМ» в случае, когда на последнем имеются комплексные корни.

3) Если на многообразии $\mathcal{V}_{k+1}$ многочлен $f_n(x)$ имеет пару различных корней одинаковой кратности, то можно перейти к многообразию $\mathcal{V}_k$, на котором имеется один корень удвоенной кратности. Такую операцию назовём «СПУСК». Если после этого перехода на многообразии $\mathcal{V}_k$ имеется пара корней одинаковой кратности, то для них следует выполнить процедуру «ПРОДОЛЖЕНИЕ».

Опишем алгоритм получения параметрического представления алгебраических многообразий $\mathcal{V}_k^i$, $k = 1, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, p_k(n)$, составляющих дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_n)$.

I. Вначале строим параметрическое представление одномерного многообразия $\mathcal{V}_1$ по формулам (3.2).

II. Применяем операцию «ПОДЪЁМ» с использованием формулы (3.6) замечания 3.2 и получаем параметризацию многообразия $\mathcal{V}_2^1$, соответствующего разбиению $[1^1(n-1)^1]$.

III. Вновь применяем операцию «ПОДЪЁМ» и получаем параметризацию многообразия $\mathcal{V}_3^1$, которое соответствует разбиению $[1^2(n-2)^1]$. Поскольку на этом многообразии имеется пара простых корней, то следует применить операцию «ПРОДОЛЖЕНИЕ». В итоге получаем полную параметризацию многообразия $\mathcal{V}_3^1$.

IV. Применяя к последней параметризации операцию «СПУСК», получаем параметрическое представление многообразия $\mathcal{V}_2^2$, на котором корни многочлена $f_n(x)$ соответствуют разбиению $[2^1(n-2)^1]$.

V. Далее, последовательно комбинируя операции «ПОДЪЁМ», «ПРОДОЛЖЕНИЕ» и «СПУСК», получим параметрическое представление всех компонент дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$.

Для многообразий $\mathcal{V}_k^i$, соответствующих разбиениям вида $[1^{k-1}(n-k+1)^1]$, т. е. когда многочлен $f_n(x)$ имеет в точности k различных корней, из которых $k-1$ корень простой, а один корень кратный, можно предложить следующую

формулу:

$$a_i = (-1)^i \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-k+1}{i-j} t_1^{i-j} \sigma_{j+1}(t_2, \dots, t_k), \quad (3.10)$$

где $\sigma_j(t_2, \dots, t_k)$ — элементарный симметрический многочлен j -й степени от $(k-1)$ -й переменной $t_2, \dots, t_k$. Формула (3.10) параметризует только ту часть многообразия $\mathcal{V}_k^i$, на которой многочлен имеет вещественные корни. Для получения полной параметризации следует применить процедуру «ПРОДОЛЖЕНИЕ» по любым $[(k-1)/2]$ парам простых корней.

3.5. Программная реализация. Автором написана библиотека SubDiscrim для системы компьютерной алгебры Maple, в которой реализованы как описанные выше процедуры построения параметрического представления компонентов дискриминантного множества, так и методы вычисления субдискриминантов. Заметим, что в пакете RegularChains [ChainTools], который входит в состав математической библиотеки Maple, имеются процедуры, позволяющие вычислять субрезультанты двух многочленов, однако, по мнению автора, пользоваться ими довольно неудобно.

В состав библиотеки вошли следующие процедуры:

- ProcUp — для реализации процедуры «ПОДЪЁМ» (см. п. 1) на стр. 22).
- ProcCont — для реализации процедуры «ПРОДОЛЖЕНИЕ» (см. п. 2) на стр. 22).
- ProcDown — для реализации процедуры «СПУСК» (см. п. 3) на стр. 22).
- ParVk — для вычисления по формуле (3.10) параметрического представления многообразия $\mathcal{V}_k$, на котором многочлен $f_n(x)$ имеет один корень кратности k и $n-k$ простых корней.

После тестирования библиотека SubDiscrim будет выложена в открытом доступе.

4. Приложения

Рассмотрим работу алгоритма п. 3.4 для приведённых многочленов степеней $n = 3, 4$.

4.1. Дискриминантное множество кубики. Кубика

$$f_3 = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \quad (4.1)$$

имеет два нетривиальных субдискриминанта, которые получаются по формулам (2.10) и (2.11) соответственно при $n = 3$ и $a_4 = 0$:

$$D^{(1)}(f_3) = 2a_1^2 - 6a_2,$$

$$D^{(0)}(f_3) = -4a_1^3a_3 + a_1^2a_2^2 + 18a_1a_2a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2.$$

Его дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_3)$ состоит из двух компонент

$$\mathcal{V}_1 : \{a_1 = -3t_1, \quad a_2 = 3t_1^2, \quad t_3 = -t_1^3\}, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{V}_2 : \{a_1 = -2t_1 - t_2, \quad a_2 = t_1^2 + 2t_1t_2, \quad a_3 = -t_1^2t_2\}, \quad (4.3)$$

соответствующих разбиениям $[3^1]$ и $[1^12^1]$. Поскольку на многообразии $\mathcal{V}_1$ нет комплексных корней, то $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2$.

Геометрически множество $\mathcal{D}(f_3)$ представляет собой линейчатую развёртывающую поверхность (4.3) со скрученной кубикой (4.2) в качестве направляющей и показана на рис. 1.

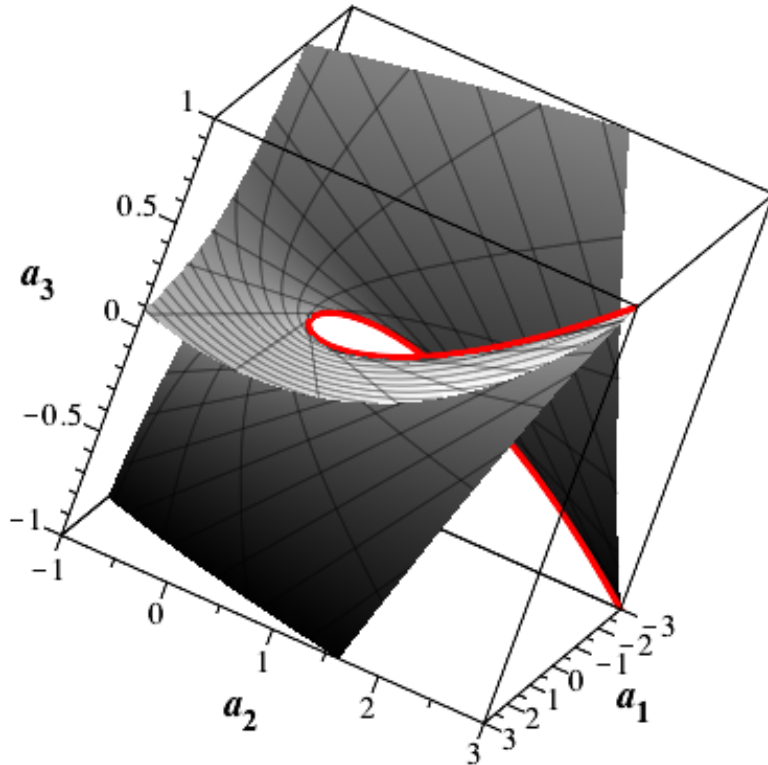


Рис. 1. Дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(f_3)$ кубики (4.1). Красным показана кривая $\mathcal{V}_1$, на которой многочлен имеет тройной корень.

4.2. Дискриминантное множество кватрики. Рассмотрим структуру множества $\mathcal{D}(f_4)$ кватрики

$$f_4 = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4. \quad (4.4)$$

Три нетривиальных субдискриминанта многочлена (4.4), которые получаются по формулам (2.10), (2.11) и (2.12) соответственно при $n = 4$ и $a_5 = a_6 = 0$, суть

$$\begin{aligned} D^{(2)}(f_4) &= 3a_1^2 - 8a_2, \\ D^{(1)}(f_4) &= -6a_1^3a_3 + 2a_1^2a_2^2 - 12a_1^2a_4 + 28a_1a_2a_3 - 8a_2^3 + 32a_4a_2 - 36a_3^2, \\ D^{(0)}(f_4) &= -27a_1^4a_4^2 + 18a_1^3a_2a_3a_4 - 4a_1^3a_3^3 - 4a_1^2a_2^3a_4 + a_1^2a_2^2a_3^2 + 144a_1^2a_2a_4^2 - \\ &\quad - 6a_1^2a_3^2a_4 - 80a_1a_2^2a_3a_4 + 18a_1a_2a_3^3 + 16a_2^4a_4 - 4a_2^3a_3^2 - 192a_1a_3a_4^2 - \\ &\quad - 128a_2^2a_4^2 + 144a_2a_3^2a_4 - 27a_3^4 + 256a_4^3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_4)$ состоит из $p(4) - 1 = 4$ алгебраических многообразий $\mathcal{V}_k^i$, $k = 1, 2, 3$: по одному размерностей 1 и 3 и пара двумерных. В силу малой размерности легко перечислить все разбиения числа 4, которым соответствуют компоненты множества $\mathcal{D}(f_4)$: $[4^1]$, $[1^13^1]$, $[2^2]$, $[1^22^1]$.

Согласно формуле (3.2) многообразие $\mathcal{V}_1$ имеет параметризацию

$$\mathcal{V}_1 : \{a_1 = -4t_1, \quad a_2 = 6t_1^2, \quad a_3 = -4t_1^3, \quad a_4 = t_1^4\}. \quad (4.6)$$

Применим к этому многообразию процедуру «ПОДЪЁМ» и получим параметризацию двумерного многообразия $\mathcal{V}_2^1$, которое соответствует разбиению $[1^13^1]$:

$$\mathcal{V}_2^1 : \{a_1 = -3t_1 - t_2, \quad a_2 = 3t_1^2 + 3t_1t_2, \quad a_3 = -t_1^3 - 3t_1^2t_2, \quad a_4 = t_1^3t_2\}.$$

Переход к многообразию $\mathcal{V}_3$ проводится в два этапа. Вначале применяем к многообразию $\mathcal{V}_2^1$ операцию «ПОДЪЁМ», затем операцию «ПРОДОЛЖЕНИЕ», поскольку на $\mathcal{V}_3$ многочлен $f_4(x)$ имеет пару простых корней. Получаем параметризацию

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_3 : \{a_1 = -2t_1 - 2t_2, \quad a_2 = t_1^2 + 4t_1t_2 + t_2^2 - t_3, \\ a_3 = -2t_1^2t_2 - 2t_1t_2^2 + 2t_1t_3, \quad a_4 = t_1^2t_2^2 - t_1^2t_3\}. \end{aligned}$$

Наконец, многообразие $\mathcal{V}_2^2$, на котором имеется пара двукратных корней, получается с помощью операции «СПУСК».

$$\mathcal{V}_2^2 : \{a_1 = -4t_1, \quad a_2 = 6t_1^2 - 2t_2, \quad a_3 = -4t_1^3 + 4t_1t_2, \quad a_4 = t_1^4 - 2t_1^2t_2 + t_2^2\}.$$

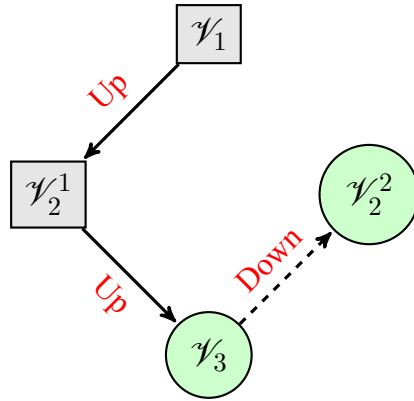


Рис. 2. Иерархия компонент $\mathcal{V}_k$ множества $\mathcal{D}(f_4)$. Процедуры «ПОДЪЁМ» и «СПУСК» обозначены Up и Down соответственно, процедура «ПРОДОЛЖЕНИЕ» — зеленым кружком.

Иерархия компонент $\mathcal{V}_k$ множества $\mathcal{D}(f_n)$ показана на рис. 2.

Можно предъявить полиномиальную параметризацию поверхности $\mathcal{S}_4^{(1)}$, задаваемой уравнением $D^{(1)}(f_4) = 0$:

$$\mathcal{S}_4^{(1)} : \{a_1 = 4t_1, a_2 = 6t_1^2 + 2t_2, a_3 = 4t_1^3 + 8t_2t_3, \\ a_4 = t_1^4 + 7t_1^2t_2 - 28t_1t_2t_3 + 36t_2^2t_3 + t_2^2\}. \quad (4.7)$$

Формула (4.7) может быть получена из параметрического представления многообразия $\mathcal{S}_n^{(n-3)} : \{D^{(n-3)}(f_n) = 0\}$

$$\mathcal{S}_n^{(n-3)} : \left\{ a_1 = nt_1, a_2 = \frac{n}{2} [(n-1)t_1^2 + t_2], a_3 = \frac{n}{3} [(n-1)(n-2)t_1^3 + 3nt_2t_3], \right. \\ \left. a_4 = \frac{n}{48} [(n-1)(n-2)(n-3)t_1^4 + 3(n-2)(5n-6)t_1^2t_2 - \right. \\ \left. - 6n(5n-6)t_1t_2t_3 + 27n^2t_2^2t_3 + 3(n-1)t_2^2] \right\},$$

при подстановке $n = 4$. Таким образом, с учётом формулы (2.10) можно утверждать, что для кватрики (4.4) все её субдискриминантные поверхности $\mathcal{S}_4^{(i)} : \{D^{(i)}(f_4) = 0\}$, $i = 0, 1, 2$, допускают полиномиальную параметризацию.

Дадим визуальное представление дискриминантного множества кватрики когда один из коэффициентов a_i , $i = 1, 2$, многочлена (4.4) равен нулю.

Случай $a_1 = 0$. Будем рассматривать множество $\mathcal{D}(f_4)$ в трёхмерном подпространстве $\tilde{\Pi}_1$ ненулевых коэффициентов a_2, a_3, a_4 . Тогда, в силу (4.6), многообразие $\mathcal{V}_1$ стягивается в точку O — начало координат пространства коэффициентов $\tilde{\Pi}_1$. Двумерное многообразие $\mathcal{V}_2^1$ станет одномерным с параметризацией

$$\tilde{\mathcal{V}}_1^1 = \{a_2 = -6t_1^2, \quad a_3 = 8t_1^3, \quad a_4 = -3t_1^4\}. \quad (4.8)$$

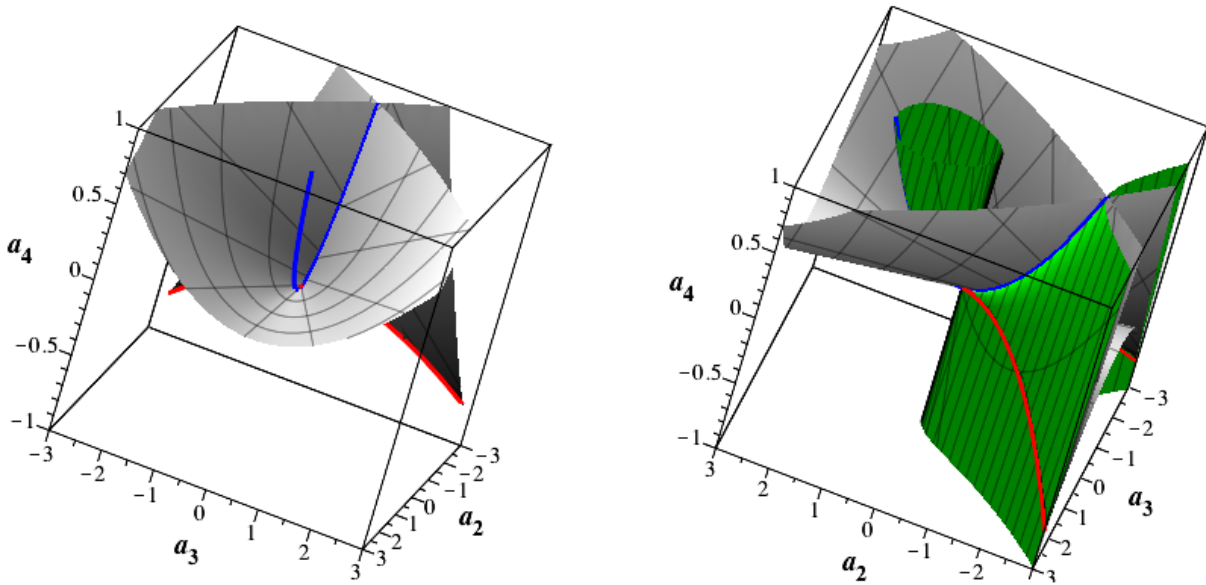
В пространстве $\tilde{\Pi}_1$ — это кривая с особой точкой возврата в начале координат. Многообразие $\mathcal{V}_2$ перейдёт в многообразие $\tilde{\mathcal{V}}_3$ с параметризацией

$$\tilde{\mathcal{V}}_2 : \{a_2 = -2t_1^2 - 4t_2, \quad a_3 = 8t_1t_2, \quad a_4 = t_1^4 - 4t_1^2t_2\}, \quad (4.9)$$

которое представляет собой линейчатую касательную развёртывающую поверхность с направляющей $\tilde{\mathcal{V}}_1^1$. Эта поверхность самопересекается по части многообразия $\tilde{\mathcal{V}}_1^2$ с параметризацией

$$\tilde{\mathcal{V}}_1^2 : \{a_2 = -2t_1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = t_1^2\}, \quad (4.10)$$

на которой многочлен (4.4) имеет пару двукратных вещественных корней. Одномерное многообразие представляет собой параболу, одна из ветвей которой изолирована и на ней многочлен (4.4) имеет пару двукратных взаимно сопряжённых комплексных корней. Многообразия $\tilde{\mathcal{V}}_1^1$ и $\tilde{\mathcal{V}}_1^2$ пересекаются в начале координат, которое, очевидно, является особой точкой второго порядка поверхности (4.9).



а) Многообразие $\tilde{\mathcal{V}}_1^1$ показано красным, а $\tilde{\mathcal{V}}_1^2$ — синим цветом. **б)** Взаимное расположение множества $\mathcal{D}(f_4)$ и поверхности $\mathcal{S}_4^{(1)}$ (показана зеленым).

Рис. 3. Дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_4)$ при $a_1 = 0$.

Таким образом, дискриминантное множество кватрики (4.4) при $a_1 = 0$ представляет собой объединение двумерной поверхности (4.9) и ветви параболы (4.10) при $t_1 < 0$. Описанные выше компоненты множества $\mathcal{D}(f_4)$ показаны на рис. 3а). На рис. 3б) показано взаимное расположение дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_4)$ и субдискриминантной поверхности (4.7) при $a_1 = 0$. Последняя

касается двумерного многообразия $\tilde{\mathcal{V}}_2$ вдоль кривой (4.8) и пересекает его по ветви параболы (4.10) при $t_1 \geq 0$. Субдискриминантная поверхность $\mathcal{S}_4^{(2)}$ есть координатная плоскость $a_2 = 0$ и на рис. 3а) и 3б) не показана.

Случай $a_2 = 0$. Тогда рассмотрим множество $\mathcal{D}(f_4)$ в трёхмерном подпространстве $\tilde{\Pi}_2$ ненулевых коэффициентов a_1, a_3, a_4 . Как и в предыдущем случае, многообразие $\mathcal{V}_1$ стягивается в точку O . Двумерное многообразие $\mathcal{V}_2^1$ станет одномерным с параметризацией

$$\tilde{\mathcal{V}}_1^1 : \{a_1 = -2t_1, \quad a_3 = 2t_1^3, \quad a_4 = -t_1^4\}, \quad (4.11)$$

но уже без особой точки. Многообразие $\mathcal{V}_3$ перейдёт в многообразие $\tilde{\mathcal{V}}_2$ с параметризацией

$$\tilde{\mathcal{V}}_2 : \{a_1 = -4t_1 - t_2, \quad a_3 = 27t_1^2t_2, \quad a_4 = 27t_1^3(t_1 - 2t_2)\},$$

которое представляет собой линейчатую касательную развёртывающую поверхность с направляющей $\tilde{\mathcal{V}}_1^1$. Эта поверхность самопересекается по кривой $\tilde{\mathcal{V}}_1^2$ с параметризацией

$$\tilde{\mathcal{V}}_1^2 : \{a_1 = -4t_1, \quad a_3 = 8t_1^3, \quad a_4 = 4t_1^4\}, \quad (4.12)$$

касающейся $\tilde{\mathcal{V}}_1^1$ в начале координат. Поверхность $\tilde{\mathcal{V}}_2$ имеет ребро возврата — прямую $a_3 = a_4 = 0$, на которой многочлен (4.4) имеет нулевой корень кратности три. На кривой (4.11) кватрика (4.4) имеет корень кратности три, а на кривой (4.12) — пару двукратных корней. На рис. 4 показана линейчатая поверхность $\tilde{\mathcal{V}}_2$ и кривые $\tilde{\mathcal{V}}_1^{1,2}$ её особых точек.

Случай $a_3 = 0$. Тогда дискриминант (4.5) факторизуется на два множителя. Первый множитель $a_4 = 0$ задаёт координатную плоскость, на которой кватрика (4.4) имеет пару нулевых корней. Второй множитель определяет в координатном пространстве $\tilde{\Pi}_3$ линейчатую развёртывающую поверхность $\tilde{\mathcal{V}}_2$ с параметризацией

$$\tilde{\mathcal{V}}_2 : \{a_1 = -2(t_1 + t_2), \quad a_2 = t_1(t_1 + 3t_2), \quad a_4 = -t_1^3t_2\}. \quad (4.13)$$

Направляющей этой поверхности служит кривая

$$\tilde{\mathcal{V}}_1^1 : \{a_1 = 8t_1, \quad a_2 = 18t_1^2, \quad a_4 = -27t_1^4\}, \quad (4.14)$$

на которой многочлен (4.4) имеет вещественный корень кратности 3. Поверхность (4.13) самопересекается по ветви параболы

$$\tilde{\mathcal{V}}_1^2 : \{a_1 = 0, \quad a_2 = -2t_1, \quad a_4 = t_1^2\}, \quad (4.15)$$

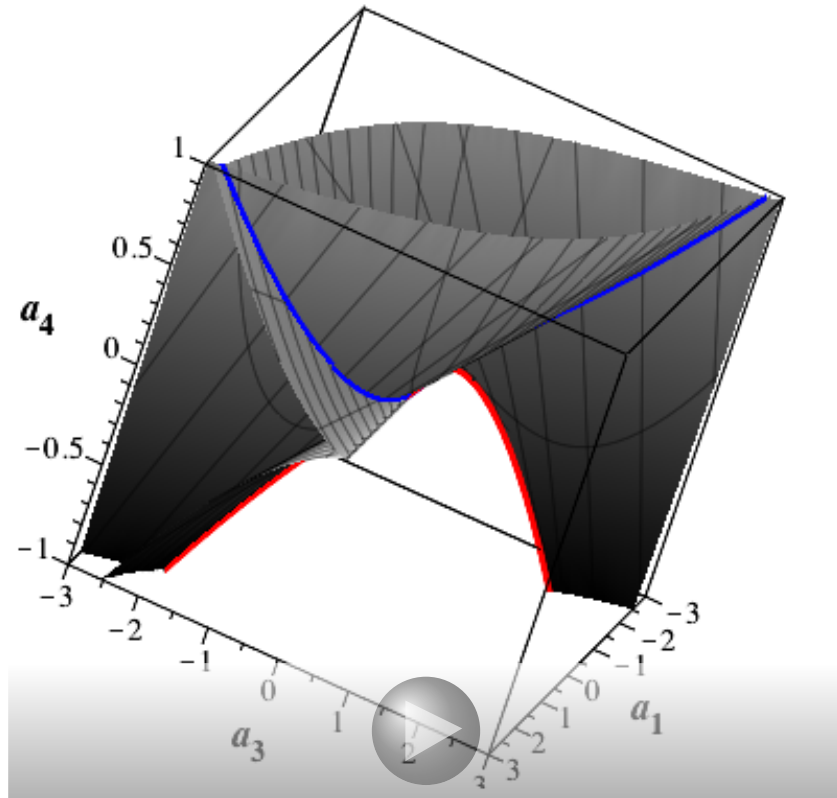


Рис. 4. Дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_4)$ при $a_2 = 0$. Многообразие $\tilde{\mathcal{V}}_1^1$ показано красным, а многообразие $\tilde{\mathcal{V}}_1^2$ — синим цветом.

на которой имеется пара корней кратности 2, при этом пару двукратных комплексно сопряжённых корней многочлен (4.4) имеет на изолированной ветви параболы (4.15) при $t_1 < 0$. Наконец, поверхность (4.13) пересекается с координатной плоскостью $a_4 = 0$ по прямой $\tilde{\mathcal{V}}_1^3 : \{a_2 = a_4 = 0\}$ и параболе $\tilde{\mathcal{V}}_1^4 : \{a_1 = -2t_1, a_2 = t_1^2, a_4 = 0\}$.

Таким образом, дискриминантное множество кватрики (4.4) состоит из координатной плоскости $a_4 = 0$, линейчатой поверхности (4.13) и изолированной ветви параболы (4.15). Все указанные выше объекты показаны на рис. 5.

Очевидно, что заменой $x \rightarrow 1/x$ данный случай приводится к варианту кватрики (4.4) с $a_1 = 0$, $a_4 = 1$ и отличным от единицы коэффициентом при старшем мономе.

4.3. Дискриминантное множество многочлена 5-й степени. Многочлен 5-й степени

$$f_5(x) = x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 \quad (4.16)$$

имеет 4 нетривиальных субдискриминанта. Выражения для субдискриминантов $D^{(i)}(f_5)$, $i = 1, 2, 3$, могут быть получены из формул (2.10)–(2.12), полагая $n = 5$

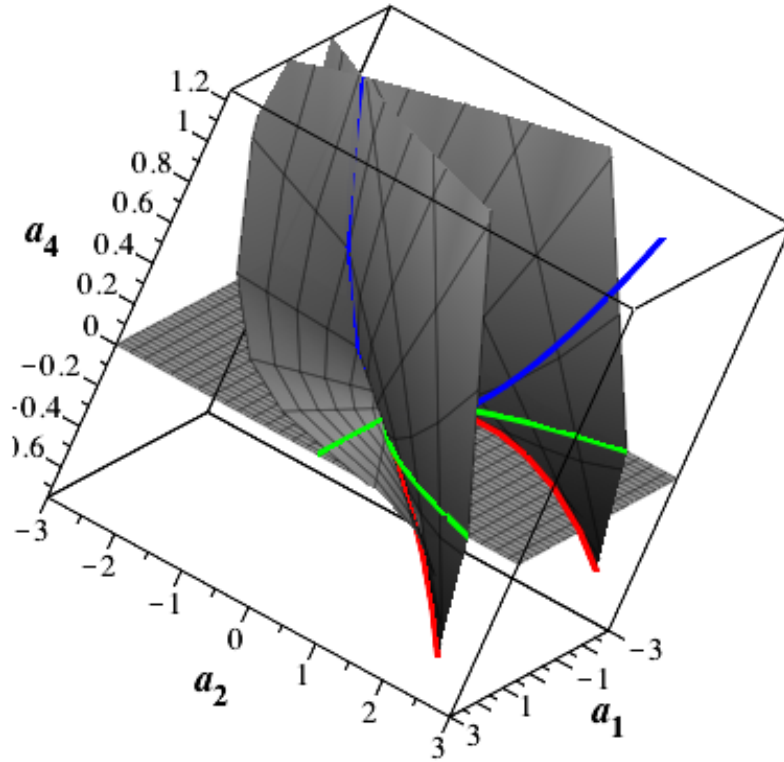


Рис. 5. Дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_4)$ при $a_3 = 0$. Кривая (4.14) показана красным, парабола (4.15) — синим, а кривые $\tilde{\mathcal{V}}_1^3$ и $\tilde{\mathcal{V}}_1^4$ — зелёным цветом.

и $a_6 = 0$. Дискриминант $D(f_5)$ согласно таблице 1 состоит из 59-ти мономов и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 D(f_5) = & 256a_1^5a_5^3 - 192a_4a_5^2a_1^4a_2 - 128a_1^4a_3^2a_5^2 + 144a_1^4a_3a_4^2a_5 - 27a_4^4a_1^4 \\
 & + 144a_1^3a_2^2a_3a_5^2 - 6a_1^3a_2^2a_4^2a_5 - 80a_2a_4a_5a_1^3a_3^2 + 18a_1^3a_2a_3a_4^3 + 16a_1^3a_3^4a_5 \\
 & - 4a_1^3a_3^3a_4^2 - 27a_1^2a_2^4a_5^2 + 18a_1^2a_2^3a_3a_4a_5 - 4a_1^2a_2^3a_4^3 - 4a_1^2a_2^2a_3^3a_5 + a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2 \\
 & - 1600a_1^3a_2a_5^3 + 160a_1^3a_3a_4a_5^2 - 36a_1^3a_4^3a_5 + 1020a_1^2a_2^2a_4a_5^2 + 560a_1^2a_2a_3^2a_5^2 \\
 & - 746a_1^2a_2a_3a_4^2a_5 + 144a_1^2a_2a_4^4 + 24a_1^2a_3^3a_4a_5 - 6a_1^2a_3^2a_4^3 - 630a_1a_2^3a_3a_5^2 \\
 & + 24a_1a_2^3a_4^2a_5 + 356a_1a_2^2a_3^2a_4a_5 - 80a_1a_3a_2^2a_4^3 - 72a_1a_2a_3^4a_5 + 18a_1a_2a_3^3a_4^2 \\
 & + 108a_2^5a_5^2 - 72a_2^4a_3a_4a_5 + 16a_2^4a_4^3 + 16a_2^3a_3^3a_5 - 4a_2^3a_3^2a_4^2 + 2000a_1^2a_3a_5^3 \\
 & - 50a_1^2a_4^2a_5^2 + 2250a_1a_2^2a_5^3 - 2050a_1a_2a_3a_4a_5^2 + 160a_1a_2a_4^3a_5 - 900a_1a_3^3a_5^2 \\
 & + 1020a_1a_3^2a_4^2a_5 - 192a_1a_3a_4^4 - 900a_2^3a_4a_5^2 + 825a_2^2a_3^2a_5^2 + 560a_2^2a_3a_4^2a_5 \\
 & - 128a_2^2a_4^4 - 630a_2a_3^3a_4a_5 + 144a_2a_3^2a_4^3 + 108a_3^5a_5 - 27a_3^4a_4^2 - 2500a_1a_4a_5^3 \\
 & - 3750a_2a_3a_5^3 + 2000a_2a_4^2a_5^2 + 2250a_3^2a_4a_5^2 - 1600a_3a_4^3a_5 + 256a_4^5 + 3125a_5^4
 \end{aligned}$$

Согласно таблице 2 дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_5)$ состоит из 6-ти компонент $\mathcal{V}_k^i$, $k = 1, \dots, 4$. Эти компоненты образуют иерархическую структуру,

показанную на рис. 6.

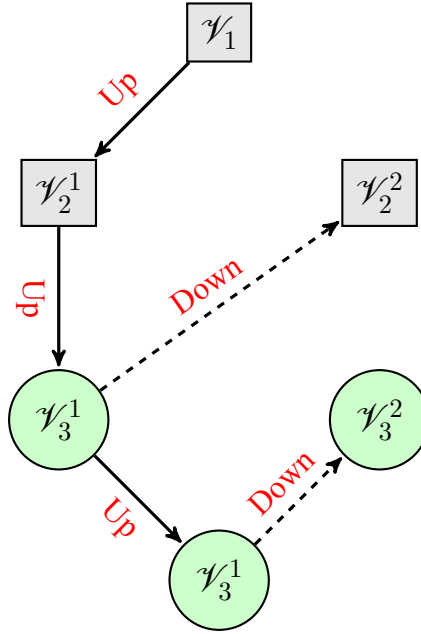


Рис. 6. Иерархия компонент $\mathcal{V}_k$ множества $\mathcal{D}(f_5)$. Процедуры «ПОДЪЁМ» и «СПУСК» обозначены Up и Down соответственно, процедура «ПРОДОЛЖЕНИЕ» — зеленым кружком.

Начиная с параметрического представления одномерного многообразия $\mathcal{V}_1$

$$\mathcal{V}_1 : \{a_1 = -5t_1, a_2 = 10t_1^2, a_3 = -10t_1^3, a_4 = 5t_1^4, a_5 = -t_1^5\},$$

которое соответствует разбиению $[5^1]$, применяем последовательно процедуру «ПОДЪЁМ». В результате получаем параметризацию двумерного многообразия $\mathcal{V}_2^1$ (соответствует разбиению $[1^14^1]$)

$$\mathcal{V}_2^1 : \{a_1 = -t_2 - 4t_1, a_2 = 6t_1^2 + 4t_1t_2, a_3 = -4t_1^3 - 6t_1^2t_2, \\ a_4 = t_1^4 + 4t_1^3t_2, a_5 = -t_1^4t_2\}.$$

Затем получаем частичные параметризации трёхмерного многообразия $\mathcal{V}_3^1$ (соответствует разбиению $[1^23^1]$) и, наконец, четырёхмерного многообразия $\mathcal{V}_4$ (соответствует разбиению $[1^32^1]$). Применяем процедуру «СПУСК» к многообразиям $\mathcal{V}_3^1$ и $\mathcal{V}_4$, что даёт параметрическое представление двумерной компоненты $\mathcal{V}_2^2$ (соответствует разбиению $[2^13^1]$) и трёхмерной компоненты $\mathcal{V}_3^2$ (соответствует разбиению $[1^22^1]$). Поскольку на многообразиях $\mathcal{V}_3^1, \mathcal{V}_3^2, \mathcal{V}_4$ многочлен (4.16) имеет несколько корней одинаковой кратности, то, согласно п. 3) на стр. 22, применяем дополнительно процедуру «ПРОДОЛЖЕНИЕ», что в итоге позволяет получить полное параметрическое представление указанных выше

многообразий:

$$\mathcal{V}_2^2 : \{a_1 = -2t_2 - 3t_1, a_2 = 3t_1^2 + 6t_1t_2 + t_2^2, a_3 = -t_1^3 - 6t_1^2t_2 - 3t_1t_2^2, \\ a_4 = 2t_1^3t_2 + 3t_1^2t_2^2, a_5 = -t_1^3t_2^2\},$$

$$\mathcal{V}_3^1 : \{a_1 = -2t_2 - 3t_1, a_2 = 3t_1^2 + 6t_1t_2 + t_2^2 - t_3, \\ a_3 = -t_1^3 - 6t_1^2t_2 - 3t_1t_2^2 + 3t_1t_3, \\ a_4 = 2t_1^3t_2 + 3t_1^2t_2^2 - 3t_1^2t_3, a_5 = -t_1^3t_2^2 + t_1^3t_3\},$$

$$\mathcal{V}_3^2 : \{a_1 = -t_3 - 4t_1, a_2 = 6t_1^2 + 4t_1t_3 - 2t_2, \\ a_3 = -4t_1^3 - 6t_1^2t_3 + 4t_1t_2 + 2t_3t_2, \\ a_4 = t_1^4 + 4t_1^3t_3 - 2t_1^2t_2 - 4t_1t_3t_2 + t_2^2, a_5 = -t_1^4t_3 + 2t_1^2t_3t_2 - t_2^2t_3\},$$

$$\mathcal{V}_4 : \{a_1 = -2t_1 - t_4 - 2t_2, a_2 = t_1^2 + 4t_1t_2 + 2t_1t_4 + t_2^2 + 2t_2t_4 - t_3, \\ a_3 = -2t_1^2t_2 - t_1^2t_4 - 2t_1t_2^2 - 4t_1t_2t_4 - t_2^2t_4 + 2t_1t_3 + t_3t_4, \\ a_4 = t_1^2t_2^2 + 2t_1^2t_2t_4 + 2t_1t_2^2t_4 - t_1^2t_3 - 2t_1t_3t_4, a_5 = -t_1^2t_2^2t_4 + t_1^2t_3t_4\}.$$

Заключение

В работе изучается дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_n)$ приведённого вещественного многочлена (1.1), которое обладает сложной иерархической структурой и состоит из алгебраических многообразий различных размерностей. Разработан конструктивный алгоритм построения полиномиальной параметризации дискриминантного множества в пространстве Π коэффициентов многочлена. Показано, что каждое многообразие $\mathcal{V}_k$, $1 < k < n$, размерности k может рассматриваться с геометрической точки зрения как некоторое касательное развёртывающее многообразие, образованное одномерными линейными многообразиями. Роль направляющей при этом выполняет компонента дискриминантного множества, имеющая размерность $k-1$. Структура дискриминантного множества тесно связана с разбиением степени n многочлена на натуральные слагаемые. Также обсуждаются различные алгоритмы вычисления субдискриминантов $D^{(i)}(f_n)$ многочлена. Основные алгоритмы, описанные в работе, реализованы в виде библиотеки SubDiscrim в системе компьютерной алгебры Maple.

Благодарности

Автор выражает благодарность профессору А.Д. Брюно за полезное обсуждение работы и поддержку.

Список литературы

1. Батхин А. Б., Брюно А. Д., Варин В. П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. мат. мех. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 80—133.
2. Грязина Е. Н., Поляк Б. Т., Тремба А. А. Современное состояние метода D -разбиения // Автомат. и телемех. — 2008. — № 12. — С. 3—40.
3. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Гл. ред. физ.-мат. литер. изд-ва «Наука», 1978. — 352 с.
4. Мейман Н. Н. Некоторые задачи распределения нулей многочленов // Успехи мат. наук. — 1949. — Т. 4, 6(34). — С. 154—188. — URL: <http://mi.mathnet.ru/umn8672>.
5. Батхин А. Б. Структура дискриминантного множества вещественного многочлена // Чебышевский сборник (Тула). — 2015. — Т. 16, № 2. — С. 23—34. — URL: http://www.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnlid=cheb&paperid=388&what=fullt&option_lang=rus.
6. Batkhin A. B. On the structure of discriminant set of real polynomial // International Conference Polynomial Computer Algebra '2015 / ed. by N. N. Vassiliev. — Euler International Mathematical Institute. St. Petersburg, Russia: VVM Publisher, 2015. — Pp. 9–12.
7. Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. — 4-е. — М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1941. — 460 с.
8. Прасолов В. В. Многочлены. — М.: МЦНМО, 2014. — 336 с.
9. Basu S., Pollack R., Roy M.-F. Algorithms in Real Algebraic Geometry. — Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2006. — ix+662. — (Algorithms and Computations in Mathematics 10).
10. Uteshev A. Y., Cherkasov T. M. The search for the maximum of a polynomial // J. Symb. Comp. — 1998. — Vol. 25, no. 5. — Pp. 587–618. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1006/jSCO.1997.0190>.
11. Lickteig T., Roy M.-F. Sylvester-Habicht sequences and fast Cauchy index computation // J. Symb. Comp. — 2001. — Vol. 31. — Pp. 315–341. — DOI: [10.1006/jSCO.2000.0427](http://dx.doi.org/10.1006/jSCO.2000.0427).
12. Джурю Э. Инноры и устойчивость динамических систем. — М., 1979. — 304 с.
13. Habicht W. Eine Verallgemeinerung des Sturmschen Wurzelzählverfahrens // Comment. Math. Helv. — 1948. — Vol. 21. — Pp. 99–116. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02568028>.

14. *Gathen, J. von zur, Lücking T.* Subresultants revisited // Theoretical Computer Science. — 2003. — Vol. 297, 1–3. — Pp. 199–239. — DOI: 10.1016/S0304-3975(02)00639-4.
15. *Cayley A.* Note sur la méthode d'élimination de Bézout // J. Reine Angew. Math. — 1855. — T. 53. — P. 366–367. — URL : http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=PPN243919689_0053&DMDID=DMDLOG_0033&LOGID=LOG_0033&PHYSID=PHYS_0374.
16. *Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V.* Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants. — Boston: Birkhäuser, 1994. — 523 pp. — ISBN 0-8176-3660-9.
17. *Diaz-Toca G. M., Gonzales-Vega L.* Various New Expressions for Subresultants and Their Applications // Appl. Algebra in Eng., Comm. & Comp. — 2004. — Vol. 15. — Pp. 233–266. — DOI: 10.1007/s00200-004-0158-4.
18. *Abdeljaoued J., Diaz-Toca G. M., Gonzalez-Vega L.* Minors of Bézout matrices, subresultants and the parameterization of the degree of the polynomial greatest common divisor // Int. J. of Comp. Math. — 2004. — Vol. 81, issue 10. — Pp. 1223–1238. — DOI: 10.1080/00207160412331284178.
19. *Калинина Е. А., Утешев А. Ю.* Теория исключения: Учеб. пособие. — СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. — 72 с.
20. *Sylvester J. J.* A method of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree // Mathematical Papers. Vol. 1 / J. J. Sylvester. — N. Y.: Chelsea Publishing Co., 1973. — Pp. 54–57.
21. *Бохер М.* Введение в высшую алгебру / пер. А. Г. Курош ; предисл. П. С. Александров. — М.-Л.: ГТТИ, 1933. — 292 с.
22. *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. — М.: Мир, 1985. — 222 с.
23. *Крейн М. Г., Неймарк М. А.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. — Харьков: ГТТИ, 1936. — 36 с.
24. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — 4-е изд. — М.: «Наука», 1988. — 552 с.
25. *Collins G. E.* Subresultants and reduced polynomial remainder sequences // J. ACM. — 1967. — Vol. 14, no. 1. — Pp. 128–142.
26. *Утешев А. Ю.* Дискриминант. — 14 марта 2015. — URL: <http://pmpru.ru/vf4/dets/discrim>.
27. *Брюно А. Д., Батхин А. Б.* Асимптотическое решение алгебраического уравнения // Докл. Акад. Наук. — 2011. — Т. 440, № 3. — С. 295—300.

28. Брюно А. Д., Батхин А. Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Программирование. — 2012. — № 2. — С. 12—30.
29. Sloane N. J. A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. — 2015. — URL: <http://oeis.org>.
30. Эндрюс Г. Теория разбиений. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
31. Фиников С. П. Теория поверхностей. — М.: ГТТИ, 1934. — 203 с.
32. Кривошапко С. Н., Иванов В. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 560 с.

Список рисунков

1	Дискриминантная поверхность $\mathcal{D}(f_3)$	24
2	Иерархия компонент $\mathcal{V}_k$ множества $\mathcal{D}(f_4)$	26
3	Дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_4)$ при $a_1 = 0$	27
4	Дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_4)$ при $a_2 = 0$	29
5	Дискриминантное множество $\mathcal{D}(f_4)$ при $a_3 = 0$	30
6	Иерархия компонент $\mathcal{V}_k$ множества $\mathcal{D}(f_5)$	31

Список таблиц

1	Количество мономов в выражении субдискриминанта $D^{(k)}(f_n)$.	11
2	Значения функций $p(n)$ и $p_k(n)$ для $n \leq 22$	16
3	Значения функций $q(n)$ и $q_k(n)$ для $n \leq 22$	18

Список условных обозначений

$\text{Bez}(f, g)$ — матрица Безу многочленов $f(x)$ и $g(x)$, стр. 7

$\mathfrak{C}$ — ганкелева матрица, стр. 9

$\deg f(x)$ — степень многочлена $f(x)$, стр. 4

$\mathcal{D}(f_n)$ — дискриминантное множество многочлена $f_n(x)$, стр. 3

$D(f_n)$ — дискриминант многочлена $f_n(x)$, стр. 4

$D^{(k)}(f_n)$ — k -й субдискриминант многочлена $f_n(x)$, стр. 5

$\tilde{f}_n(x)$ — наибольший общий делитель многочленов $f_n(x)$ и $f'_n(x)$, стр. 5

$f_n(x)$ — приведённый многочлен n -й степени с вещественными коэффициентами, стр. 3

$\gcd(f, g)$ — наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, стр. 4

$\mathbf{HBez}(f, g)$ — гибридная матрица Безу многочленов $f(x)$ и $g(x)$, стр. 7

$\mathcal{I}_k(f_n)$ — полиномиальный идеал, состоящий из первых k субдискриминантов $D^{(k)}(f_n)$, стр. 14

λ — разбиение натурального числа, стр. 14

$\text{lc } f(x)$ — ведущий коэффициент многочлена $f(x)$, стр. 4

$P(S)$ — число знакопостоянств в последовательности S , стр. 12

Π — пространство коэффициентов многочлена, стр. 3

$p(n)$ — число разбиений натурального n , стр. 15

$p_k(n)$ — число разбиений n на k частей, стр. 15

$q(n)$ — число разбиений n на различные слагаемые, стр. 15

$q_k(n)$ — число разбиений n на k различных слагаемых, стр. 15

$\mathcal{R}$ — правило деления, стр. 12

$R(f, g)$ — результат многочленов $f(x)$ и $g(x)$, стр. 6

$\mathcal{S}_n^{(i)}$ — субдискриминантная поверхность $D^{(i)}(f_n) = 0$, стр. 26

$S(f_n)$ — последовательность всех субдискриминантов $D^{(k)}(f_n)$ многочлена $f_n(x)$, стр. 11

σ_i — элементарный симметрический многочлен k -й степени, стр. 10

$\mathbf{Sylv}(f, g)$ — матрица Сильвестра многочленов f и g , стр. 8

s_k — k -я сумма Ньютона, стр. 10

T — пространство корней многочлена $f_n(x)$, стр. 4

$\mathcal{V}_k$ — алгебраическое многообразие размерности k дискриминантного множества $\mathcal{D}(f_n)$, стр. 14

$V(S)$ — число знакоперемен в последовательности S , стр. 12