



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 77 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Шильков А.В.

Уравнения для  
спектральных моментов  
функции распределения  
фотонов

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Шильков А.В. Уравнения для спектральных моментов функции распределения фотонов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 77. 36 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-77>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.В. Шильков**

**Уравнения для спектральных моментов  
функции распределения фотонов**

**Москва — 2015**

**Шильков А.В.**

### **Уравнения для спектральных моментов функции распределения фотонов**

Предложено разложение функции распределения фотонов по системе базисных функций, зависящих от энергии фотонов. Относительно коэффициентов разложения (спектральных моментов) сформулирована система моментных уравнений. Найдены фундаментальные решения системы. Таким образом, задача решения кинетического уравнения переноса излучения в веществе со сложным коэффициентом поглощения (может содержать до миллиона резонансных линий) сведена к задаче решения нескольких уравнений с постоянными коэффициентами. На численных расчетах тестовых задач показана быстрая сходимость разложения к точному решению.

Предложенный метод - «метод спектральных моментов», позволяет оптимально выполнять агрегацию и восстановление спектра фотонов в исследованиях проблем радиационной газовой динамики, теплообмена излучением, атмосферной радиации.

**Ключевые слова:** радиационная газовая динамика, атмосферная радиация, теплообмен, уравнение переноса излучения, агрегация спектра, метод моментов

*Alexander Victorovich Shilkov*

### **The equations for the spectral moments of the distribution function of photons.**

The expansion of the photons distribution in the system of basic functions depending on the energy of photons is proposed. Regarding the coefficients of the expansion (the spectral moments) formulated a system of moment equations. We find the fundamental solutions of the system. Thus, the problem of solving the kinetic equation of radiative transfer in a substance with a complex absorption coefficient (may contain up to a million of the resonance lines) is reduced to the problem of solving few equations with constant coefficients. It showed a rapid convergence of the expansion to the exact solution on numerical calculations of test problems.

The proposed method is a "method of spectral moments" optimally performs aggregation and recovery of the photon spectrum in the study of problems of radiation gas dynamics and heat transfer, atmospheric radiation.

**Key words:** radiation gas dynamics, atmospheric radiation, radiative transfer, transport equation, aggregation of the spectrum, momentum method

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00699).

## Оглавление

Введение .....	3
Разложение распределения по спектральным моментам .....	7
Система уравнений для спектральных моментов .....	15
Тестирование метода .....	20
Варианты использования .....	25
Заключение .....	26
Список литературы .....	27
Приложение .....	28

---

### Введение

Перенос энергии излучением играет важную роль в ряде научных и технических исследований. Это конструирование плазменных установок различного назначения, создание источников излучения, радиационная газовая динамика космических аппаратов, тепловой баланс атмосфер звезд и планет. Особенностью радиационного переноса энергии является сильная немонотонность, селективность испускания и поглощения фотонов веществом в зависимости от их энергии. Энергетические спектры поглощения и испускания фотонов содержат порой до миллиона резонансных линий, порогов фотоионизации. Для примера на Рис. 1 приведен коэффициент поглощения как функция энергии фотонов в олове (Sn) при температуре  $31.6 \text{ eV}$  и плотности  $1.69 \cdot 10^{-4} \text{ g/cm}^3$  и разной степени разрешения спектра. Данные предоставлены В.Г. Новиковым.

В данной работе слово «спектр» (spectrum – лат.) означает диапазон энергий фотонов. Соответственно, под «спектральной переменной» понимается энергия фотонов. Спектр – это то, на что распадается белый свет при прохождении через преломляющую призму. Для обозначения спектра матрицы будем использовать термины «собственное число» и «собственный вектор».

При математическом моделировании сложных комплексных задач часто оказывается невозможным или нецелесообразным выполнять «тяжелые» детальные расчеты спектра излучения на подробной (до  $10^6$  узлов) сетке. Поэтому в практике расчетов широко применяются методы агрегации спектра. Их можно разделить на три группы: 1) методы, основанные на вычислении функций пропускания излучения; 2) многогрупповое приближение; 3) методы, использующие лебегово интегрирование спектра излучения.

Сходные «проблемы спектра» возникают в расчетах переноса нейтронов в приложении к моделированию ядерных реакторов и задач диагностики.

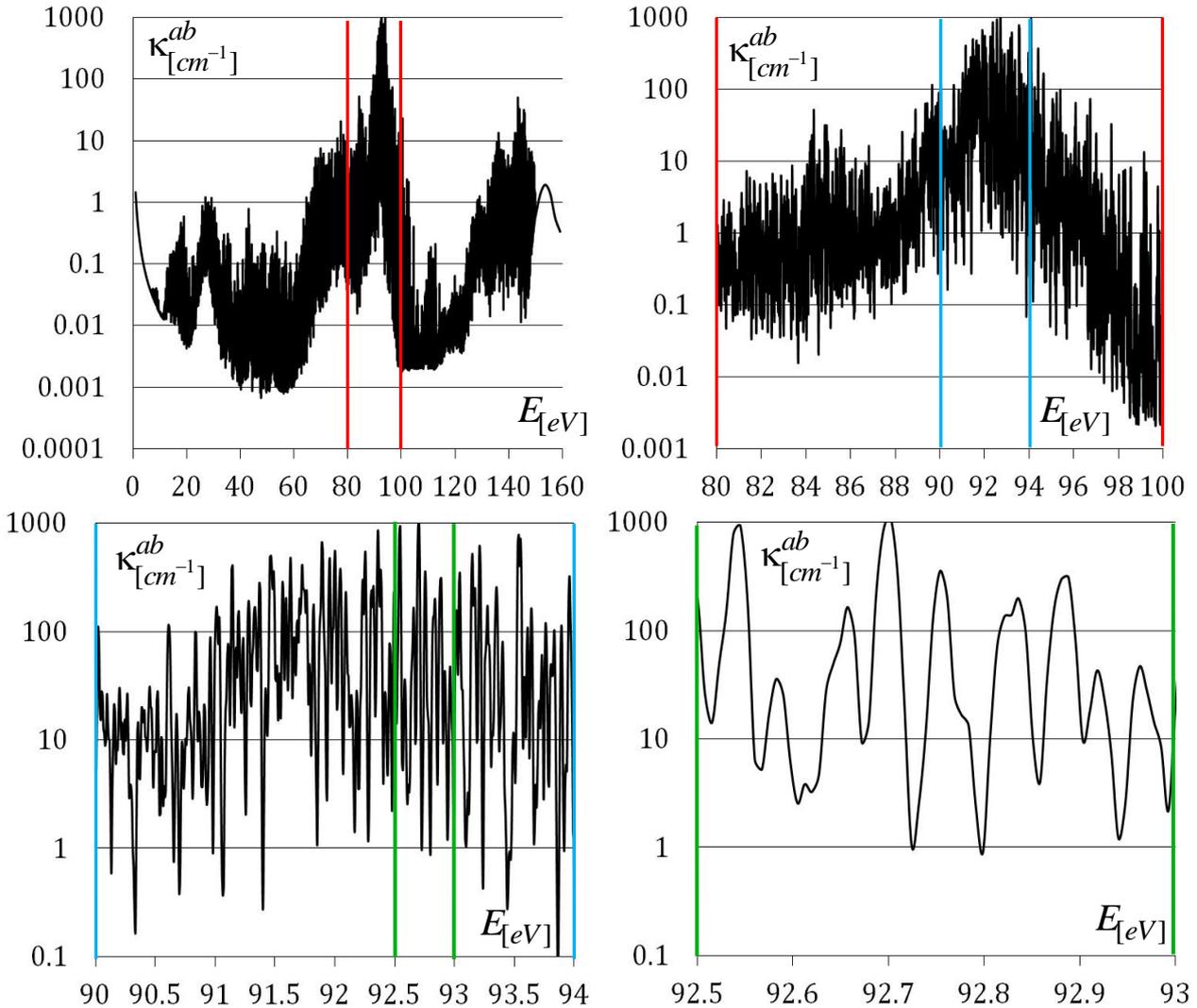


Рис. 1. Коэффициент поглощения фотонов  $\kappa^{ab}(E)$  (в  $\text{cm}^{-1}$ ) в олове (Sn) в зависимости от энергии  $E = h\nu$  (в eV) и разного разрешения спектра.

**Цель работы.** Наша цель состоит в формулировке нового метода агрегации спектра – «метода спектральных моментов», основу которого составляет разложение распределения фотонов по некоторой системе базисных функций, зависящих от энергии фотонов. Коэффициенты разложения не зависят от энергии и называются спектральными моментами.

Метод моментов является важным инструментом в арсенале вычислительной физики и прикладной математики. В проблемах переноса фотонов и нейтронов широко применяется метод «угловых» моментов функции распределения частиц – известный как «метод сферических гармоник» [1], [2]. Он позволяет исследователю экономно (оптимально) находить широкие и гладкие распределения частиц по угловым переменным. Также он служит

основой для построения приближенных моделей переноса частиц, таких как «диффузионное приближение».

Предлагаемый «метод спектральных моментов» предоставляет возможность экономно (оптимально) вычислять «широкие» распределения частиц по энергии при наличии в них множества немонотонностей, вызываемых процессами взаимодействия частиц с веществом. Также метод может служить основой для построения приближенных моделей. Изложение проводится на примере задачи переноса теплового электромагнитного излучения.

Попытки построить метод моментов по переменной спектра ранее предпринимались в работах [2] (с.93), [3]-[8]. Они потерпели относительную неудачу: не получили распространения в практических исследованиях, т.к. не предложили удовлетворительную систему базисных функций.

**Исходная задача для уравнения переноса излучения.** Описание процессов переноса теплового излучения в поглощающих и рассеивающих средах сводится к проблеме расчета функции распределения тока фотонов  $I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t)$ , или как ее часто называют – интенсивности излучения. Интенсивность излучения зависит от координат  $(\mathbf{r}, t)$ , энергии фотонов  $E$ , ( $E = h\nu$ ) и направления полета фотонов  $\mathbf{\Omega}$ , ( $|\mathbf{\Omega}| = 1$ ). Низшие угловые моменты интенсивности

$$U(E, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) d\Omega, \quad \mathbf{W}(E, \mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} \mathbf{\Omega} I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) d\Omega \quad (1)$$

дают спектральную плотность  $U$  и спектральный поток  $\mathbf{W}$  лучистой энергии в точке  $(E, \mathbf{r}, t)$ . Изменения интенсивности подчиняются линейному уравнению Больцмана:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}} + [\kappa^{ab} + \kappa^{(0)}] \cdot I = \int_{4\pi} K^{sc}(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}') \cdot I(\mathbf{\Omega}') d\Omega' + \kappa^{ab} \cdot J, \quad (2)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} = \frac{d}{dl}, \quad (I, J, \kappa^{ab}, \kappa^{(0)}, K^{sc} \geq 0).$$

Дифференциальный оператор в левой части уравнения может быть свернут частично в частную производную  $\partial/\partial l$  по направлению полета пучка фотонов  $\mathbf{\Omega}$  и свернут полностью в субстанциональную производную  $d/dl$  вдоль прямой траектории движения пучка фотонов. Поэтому траектория (см. Рис. 2) есть характеристика дифференциального оператора кинетического уравнения,  $l$  – характеристическая координата (путь вдоль траектории),  $c$  – скорость света. Траектория задается вектором прицельных параметров  $(\mathbf{p}, t_0)$  и направлением полета  $\mathbf{\Omega}$ , ( $\mathbf{p}\mathbf{\Omega} = 0$ ). На траектории справедливы уравнения движения:  $\mathbf{r}(l) = \mathbf{p} + \mathbf{\Omega} \cdot l$ ,  $t(l) = t_0 + l/c$ . Величины  $\kappa^{ab}(E, \mathbf{r}, t)$  и  $\kappa^{(0)}(E, \mathbf{r}, t)$  суть

коэффициент поглощения (absorption – лат.) и коэффициент рассеяния (scattering – лат.) фотонов из пучка в результате взаимодействия с веществом.

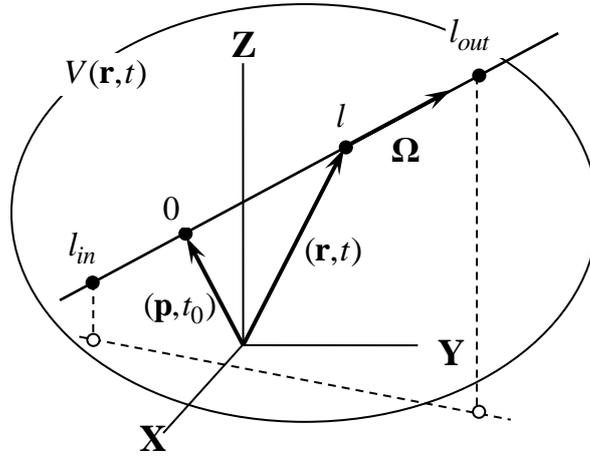


Рис. 2. Траектория пучка фотонов (характеристика). Точки входа и выхода траектории из тела имеют характеристические координаты  $l_{in}$  и  $l_{out}$ .

Интегральный оператор в правой части уравнения (2) описывает приход фотонов в пучок из других пучков при рассеянии на частицах вещества.  $K^{sc}(E, \eta, \mathbf{r}, t)$  есть дифференциальное сечение рассеяния,  $\eta = \mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}'$  – косинус угла рассеяния. Дифференциальное сечение часто задается стандартным разложением:

$$K^{sc}(E, \eta, \mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \kappa^{(n)} P^{(n)}(\eta), \quad \kappa^{(n)}(E, \mathbf{r}, t) = 2\pi \int_{-1}^1 K^{sc}(\eta) P^{(n)}(\eta) d\eta, \quad (3)$$

где  $P^{(n)}(\eta)$  – многочлены Лежандра,  $\kappa^{(n)}(E, \mathbf{r}, t)$  – коэффициенты рассеяния. Величина  $J(E, \mathbf{r}, t)$  есть «интенсивность источников» – изотропное распределение излучения, формируемое частицами вещества в процессах испускания фотонов. К этому распределению стремится решение кинетического уравнения в глубине (вдали от границ) однородного тела  $I \rightarrow J$ . В этом несложно убедиться, если пренебречь в (2) производными от интенсивности излучения по пространству-времени.

Если вещество находится в состоянии локального термодинамического равновесия, то «интенсивность источников» есть известное распределение Планка:

$$J = \frac{cU^{Pl}(E, T)}{4\pi} = \frac{\sigma}{\pi} \cdot \frac{15}{\pi^4} \frac{E^3}{e^{E/T} - 1}, \quad \sigma = 1.028301 \cdot 10^{12} \frac{erg}{cm^2 \text{ sec} \cdot eV^4}. \quad (4)$$

Здесь энергия фотонов и температура вещества измеряются в электронвольтах,  $\sigma$  – соответствующее значение постоянной Стефана-Больцмана,  $U^{Pl}$  – объемная плотность энергии излучения абсолютно черного тела. Если вещество не находится в состоянии локального термодинамического равновесия, то для

расчета «интенсивности источников» и коэффициента поглощения излучения необходимо совместно с уравнением переноса излучения (2) решать систему уравнений радиационно-столкновительной поуровневой кинетики для возбужденных состояний атомов, ионов, молекул и (если требуется) систему уравнений химических реакций. Рассмотрение задачи в полном объеме не входит в цели данной публикации. Далее считаем величины  $J$ ,  $\kappa^{ab}$ ,  $\kappa^{sc}$  некоторыми заданными (известными) функциями.

Уравнение Больцмана (2) дополняется линейными граничными условиями:

$$I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_b, t) \Big|_{\mathbf{n}\mathbf{\Omega} < 0} = \int_{\mathbf{n}\mathbf{\Omega}' > 0} \kappa^b(E, \mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_b, t) \cdot I(\mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + I^{in}(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_b, t) \Big|_{\mathbf{n}\mathbf{\Omega} < 0}. \quad (5)$$

В них  $\mathbf{n}$  есть локальный вектор внешней нормали к границе тела в точке  $\mathbf{r}_b$ . Фотоны, вылетающие из тела, характеризуются условием  $\mathbf{n}\mathbf{\Omega} > 0$ , фотоны, движущиеся вглубь тела, – условием  $\mathbf{n}\mathbf{\Omega} < 0$ . Величина  $I^{in}$  есть функция распределения «внешних» фотонов, прошедших сквозь границу (или испущенных границей) вглубь тела;  $\kappa^b$  есть дифференциальное сечение отражения (вероятность перехода фотонов, падающих на границу изнутри тела в направлении  $\mathbf{\Omega}'$  в пучок отраженных в направлении  $\mathbf{\Omega}$  фотонов). Интеграл от дифференциального сечения отражения по всем конечным состояниям отраженных пучков

$$\int_{\mathbf{\Omega}\mathbf{n} < 0} \kappa^b(\mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega} = \kappa_b^{(0)}(E, \mathbf{\Omega}', \mathbf{r}_b, t), \quad (0 \leq \kappa_b^{(0)} \leq 1, \mathbf{n}\mathbf{\Omega}' > 0) \quad (6)$$

есть коэффициент отражения  $\kappa_b^{(0)}$  излучения, падающего в направлении  $\mathbf{\Omega}'$  на внутреннюю сторону границы тела. Если тело граничит с вакуумом, то дифференциальное сечение отражения в (5) полагается равным нулю.

Математическая задача для уравнения переноса излучения (2) ставится так: найти интенсивность излучения  $I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t)$  в области фазового пространства  $E \times \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \times t$ ,  $\mathbf{r} \in V$ ,  $t > t_0$ , удовлетворяющую уравнению, граничным условиям (5) и начальным условиям  $I = I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t_0)$  при заданных распределениях коэффициентов и источников уравнения.

## Разложение распределения по спектральным моментам

**Эвристическое обоснование разложения.** Прежде всего, нам следует найти сходящееся разложение функции распределения фотонов по некоторой системе базисных функций, зависящих от энергии фотонов. Попробуем найти систему базисных функций из вида аналитического решения кинетического уравнения для частной задачи. Считаем, что задача стационарна, рассеяние фотонов в среде мало, отражение от границы отсутствует. Интегрируя

уравнение (2) вдоль характеристики, проходящей через точку  $\mathbf{r}_{in}$  на границе тела и точку наблюдения  $\mathbf{r}$ , получим решение:

$$I(E, l) = \int_{l_{in}}^l \kappa^{ab}(E, l') J(E, l') \exp \left[ - \int_{l'}^l \kappa^{ab} dl'' \right] dl' + I^{in}(E, l_{in}) \exp \left[ - \int_{l_{in}}^l \kappa^{ab} dl' \right]. \quad (7)$$

Здесь  $I$  и  $I^{in}$  – значения интенсивности излучения,  $l$  и  $l_{in}$  – характеристические координаты точек.

*Определение.* Гомогенным будем называть тело, состоящее из вещества с однородным набором химических элементов. При этом химический состав гомогенного тела (концентрации ионов и химических соединений элементов) может меняться непрерывным образом в пространстве-времени, например, вследствие изменений температуры, давления, действия электрического или гравитационного поля, протекающих гомогенно (в объеме) химических реакций. В гомогенном теле резонансные линии в спектре коэффициента поглощения  $\kappa^{ab}(E, \mathbf{r}, t)$  могут уширяться, менять свою силу при изменении координат  $(\mathbf{r}, t)$ , но положения центров линий (локальных максимумов) на оси энергий остаются неизменными. Положения линий зависят только от атомных и молекулярных постоянных. (В плотном веществе центры линий испытывают незначительный сдвиг, не превышающий ширину линии.)

Гетерогенным будем называть тело, составленное из гомогенных зон с резкими пространственными границами.

Упростим решение (7) в случае гомогенного тела. Для энергий  $E$ , при которых фотоны поглощаются сильно ( $\kappa^{ab}(E, l)L \gg 1$  – оптически толстое тело), интенсивность источников  $J$  можно вынести из под знака интеграла в точке максимума экспоненты  $l' = l$ , а остаток проинтегрировать:

$$I(E, l) \approx J(E, l) \cdot [1 - e^{-\kappa^{ab}(E, l)L}] + I^{in}(E) e^{-\kappa^{ab}(E, l)L}, \quad L = l - l_{in}.$$

Для энергий, при которых фотоны поглощаются слабо ( $\kappa^{ab}(E, l)L \ll 1$  – оптически тонкое тело), интенсивность источников  $J$  заменяется ее средним значением  $\langle J \rangle$ :

$$I(E, l) \approx \langle J \rangle \cdot [1 - e^{-\kappa^{ab}(E, l)L}] + I^{in}(E) e^{-\kappa^{ab}(E, l)L}, \quad \langle J \rangle = \frac{\int_{l_{in}}^l \kappa^{ab} J dl'}{\int_{l_{in}}^l \kappa^{ab} dl'}.$$

Здесь  $L$  есть путь, пройденный пучком фотонов,  $\kappa^{ab}(E, l)$  – коэффициент поглощения в точке наблюдения. Выполнив сшивку асимптотик, получим следующую оценку решения:

$$I(E, l) \approx \left[ J \cdot [1 - e^{-\kappa^{ab}L}] + \langle J \rangle \cdot e^{-\kappa^{ab}L} \right] \cdot [1 - e^{-\kappa^{ab}L}] + I^{in} e^{-\kappa^{ab}L} = \quad (8)$$

$$= J \cdot \left[ [1 - B + C] + B \cdot \xi + C \cdot \xi^2 \right], \quad (-1 \leq \xi \leq 1),$$

$$B(E, l) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{I^{in}}{J} \right], \quad C(E, l) = \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{\langle J \rangle}{J} \right], \quad \xi(E, l) = 1 - 2e^{-\kappa^{ab}L} \approx \frac{\kappa^{ab}L - 1}{\kappa^{ab}L + 1}.$$

Распределение фотонов в гомогенном теле по своему функциональному виду близко к произведению локальной интенсивности источников  $J$  и квадратного трехчлена переменной  $\xi$ . Переменная  $\xi$  может быстро осциллировать по энергии  $E$  в пределах интервала  $-1 \leq \xi \leq 1$  из-за немонотонного поведения коэффициента поглощения  $\kappa^{ab}(E)$ . Коэффициенты квадратного трехчлена  $B(E, l)$ ,  $C(E, l)$  меняются с энергией  $E$  медленно, если падающее извне излучение  $I^{in}$  пропорционально «излучению источников»  $I^{in}(E)/J(E, l) \sim const(l)$  или оба спектральных распределения суть функции медленной вариации. Для переменной  $\xi$  можно пользоваться указанной выше дробно-линейной аппроксимацией<sup>1</sup>.

**Разложение по спектральным моментам.** Разобьем спектр энергий на конечное число групп – непересекающихся друг с другом множеств  $\omega_g$ ,  $g = 1, \dots, G$ . Группы плотно покрывают значимый для задачи диапазон энергий фотонов. В частном случае группа  $\omega_g$  представляет собой интервал  $E_{g-1} \leq E < E_g$ . В общем случае группа может состоять из нескольких несмежных интервалов. В пределах каждой группы перенос излучения рассматривается независимо от других групп. Поэтому индекс группы «g» мы будем иногда опускать, если это позволяет контекст изложения.

Введем в группе  $\omega_g$  весовой спектр  $S(E, \mathbf{r}, t)$ , пропорциональный «интенсивности источников»  $J$  и нормированный на единицу:

$$S(E, \mathbf{r}, t) = \frac{J(E, \mathbf{r}, t)}{J_g(\mathbf{r}, t)}, \quad \int_{\omega_g} S(E, \mathbf{r}, t) dE = 1, \quad J_g(\mathbf{r}, t) = \int_{\omega_g} J(E, \mathbf{r}, t) dE. \quad (9)$$

Здесь  $J_g$  есть суммарная интенсивность источников в группе «g».

*Предположение А.* Во многих задачах дифференциальное сечение рассеяния фотонов  $K^{sc}(E)$  и сечение отражения от границы  $K^b(E)$  ведут себя в зависимости от энергии  $E$  значительно более гладко в сравнении с коэффициентом поглощения  $\kappa^{ab}(E)$ . В этих задачах всегда можно разбить спектр на группы так, что в пределах одной группы сечения будут близки к своим среднегрупповым значениям, т.е. на групповом разбиении будет справедлива кусочно-постоянная аппроксимация сечений:

<sup>1</sup> Здесь выполнена Паде-аппроксимация «0/1» затухающей экспоненты.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{sc}(E, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{r}, t) &\approx \mathbf{K}_g^{sc}(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{r}, t) = \int_{\omega_g} S(E) \mathbf{K}^{sc}(E) dE, & (E \in \omega_g), & (10) \\ \mathbf{K}^b(E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_b) &\approx \mathbf{K}_g^b(\boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_b) = \int_{\omega_g} S(E) \mathbf{K}^b(E) dE, & (g = 1, \dots, G). & \end{aligned}$$

Также в задачах с большим изменением температуры целесообразно дополнительно разбивать спектр на несколько последовательных интервалов для описания температурных перестроений в коэффициенте поглощения и в интенсивности источников. Достаточно точная аппроксимация достигается при сравнительно небольшом числе групп. После разбиения группа фотонов  $\omega_g$  по-прежнему может содержать множество сильных немонотонностей коэффициента поглощения.

*Предположение В.* Предположим, что в пределах отдельно взятой группы интенсивность излучения аппроксимируется рядом (сравни с (8)):

$$\begin{aligned} I(E, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t) &\approx S(E, \mathbf{r}, t) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\xi)}{q_n} \cdot I_n(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t), & (E \in \omega_g, -1 \leq \xi \leq 1), & (11) \\ \xi(E, \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t) &= \frac{\kappa^{ab} L - 1}{\kappa^{ab} L + 1}, & \kappa^{ab}(E, \mathbf{r}, t) &= \frac{1}{L} \cdot \frac{1 + \xi}{1 - \xi}, & L = L(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

где  $S(E, \mathbf{r}, t)$  есть весовой спектр, коэффициенты разложения  $I_n$  (далее – спектральные моменты интенсивности излучения) не зависят от энергии фотонов,  $P_n(\xi)$  – некоторая система многочленов переменной  $\xi$ , ортогональных на отрезке  $-1 < \xi < 1$  с весом  $h(\xi)$ :

$$\int_{-1}^1 h(\xi) P_m(\xi) P_n(\xi) d\xi = q_n \cdot \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$q_n$  – числовой нормировочный множитель. Переменная разложения  $\xi$  есть дробно-линейная функция<sup>2</sup> локального коэффициента поглощения  $\kappa^{ab}(E, \mathbf{r}, t)$  и параметра  $L$ , имеющего смысл характерного расстояния от точки наблюдения  $(\mathbf{r}, t)$  до границ тела. Для практических применений представляют интерес три варианта, когда параметр  $L$  равен или близок:

1) к расстоянию вдоль характеристики от точки входа пучка фотонов в тело до точки наблюдения:  $L = L(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t) \approx l - l_{in}$ ;

2) к длине хорды – отрезка характеристики от точки входа до точки выхода пучка из тела:  $L = L(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}, t) \approx l_{out} - l_{in}$ ;

<sup>2</sup> Так как переменная разложения представима в виде:  $\xi = 1 - 2 \cdot [\kappa^{ab} L + 1]^{-1}$ , то разложение (11) эквивалентно разложению по степеням  $[\kappa^{ab}(E)L + 1]^{-n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\kappa^{ab}(E)L$  есть оптическая толщина тела.

3) к средней хорде (среднему диаметру) тела безотносительно направлений полета фотонов и пространственных координат точки наблюдения:  $L = L(t) \approx \langle L \rangle$ .

Условимся считать, что в задачах, в которых существенны процессы рассеяния и отражения от границы ( $K^{sc} > 0$ ,  $K^b > 0$ ), мы рассматриваем только вариант 3), когда параметр  $L$ , а вслед за ним и переменная  $\xi$  не зависят от направления полета фотонов  $\Omega$ . В чисто поглощающем теле мы рассматриваем все три варианта.

В качестве конкретных базисных функций мы рассмотрим многочлены Чебышева:

$$h(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad q_n = \frac{\pi}{2}[1 + \delta_{n0}]; \quad P_0 = 1, \quad P_1 = \xi, \quad P_2 = 2\xi^2 - 1, \quad P_3 = 4\xi^3 - 3\xi, \dots$$

и многочлены Лежандра:

$$h(\xi) = 1, \quad q_n = \frac{2}{2n+1}; \quad P_0 = 1, \quad P_1 = \xi, \quad P_2 = \frac{3\xi^2 - 1}{2}, \quad P_3 = \frac{5\xi^3 - 3\xi}{2}, \dots$$

*Предположение С.* Будем пока рассматривать перенос излучения в гомогенном теле. В дальнейшем мы снимем это ограничение, распространив метод на гетерогенные тела.

В гетерогенном теле при переходе характеристики из одной гомогенной зоны в другую зону переменная  $\xi$  и моментное разложение (11) могут испытывать разрыв. Он возникает из-за того, что положения центров линий (локальных максимумов) поглощения фотонов на шкале энергий определяются индивидуальными атомными и молекулярными постоянными того или иного вещества. Поэтому для сохранения непрерывности функции распределения по характеристической координате « $l$ », отсчитываемой вдоль траектории пучка фотонов, на границах между зонами требуется принимать специальные меры. Существует простой прием решения этой проблемы с помощью введения «носителей резонансов» [10]-[13].

**Замена переменной спектра.** Аргумент многочленов  $\xi$  в разложении (11) есть немонотонная функция энергии  $E$ . Поэтому для интегрирования ряда, в частности – для получения формул вычисления спектральных моментов, выполним замену переменной спектра « $E$ » на новую переменную « $m$ », относительно которой аргумент разложения  $\xi$  становится монотонной функцией. Эта замена применяется при переходе от определенного интеграла функции «по Риману» к интегралу «по Лебегу-Стилтьесу». Этими словами можно было бы и ограничиться, отослав читателя к окончательным формулам (16), (17), а за разъяснениями – к литературе по теории функций действительного переменного. Но, так как «прикладные» (выходящие за пределы здания математики) выгоды от интегрирования по Лебегу весьма скудно освещены в специальной литературе, остановимся на них подробнее.

*Предположение D.* Полагаем, что рассматриваемые функции интегрируемы по всем своим аргументам в интересующей нас области фазового пространства  $E \times \Omega \times \mathbf{r} \times t$  «по Риману» и «по Лебегу», и эти интегралы равны.

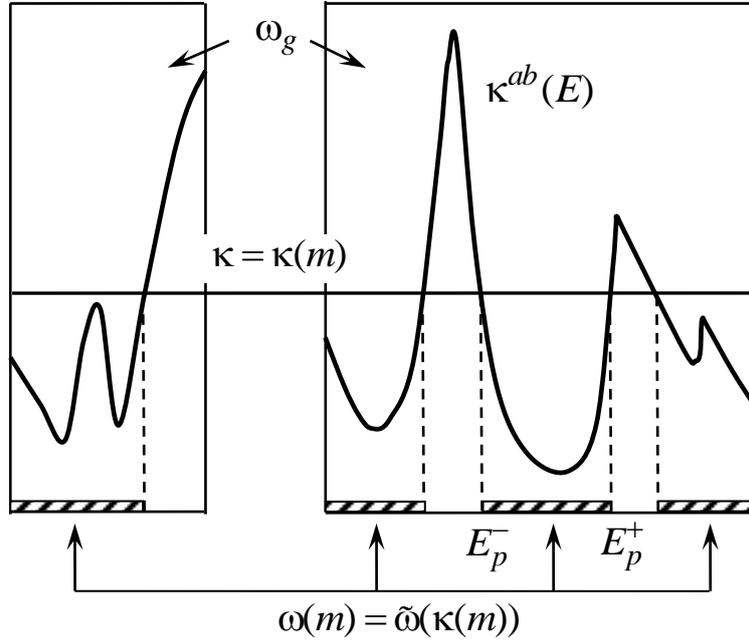


Рис. 3. Группа фотонов  $\omega_g$  состоит из двух фиксированных интервалов спектра. Лебегово множество  $\omega(m) = \tilde{\omega}(\kappa(m))$  при данном уровне поглощения  $\kappa = \kappa(m)$  включает четыре интервала,  $m$  – мера множества.

Рассмотрим какую-либо группу «g» (см. Рис. 3). В каждой фиксированной точке пространства-времени  $(\mathbf{r}, t)$  построим систему вложенных друг в друга множеств, включив в множество  $\tilde{\omega}(\kappa, \mathbf{r}, t)$  такие энергии  $E$ , при которых коэффициент поглощения меньше заданного значения:  $\kappa^{ab}(E, \mathbf{r}, t) < \kappa$ , где « $\kappa$ » – линия уровня. Лебегово множество  $\tilde{\omega}(\kappa, \mathbf{r}, t)$  состоит из набора интервалов  $E_p^-(\kappa, \mathbf{r}, t) < E < E_p^+(\kappa, \mathbf{r}, t)$ ,  $p = 1, 2, \dots$ . Левые и правые границы интервалов  $E_p^\pm(\kappa)$  суть точки с равновеликим поглощением:  $\kappa^{ab}(E_p^\pm) = \kappa$ . Очевидно, что  $\tilde{\omega}(\kappa_1, \mathbf{r}, t) \subseteq \tilde{\omega}(\kappa_2, \mathbf{r}, t) \subseteq \omega_g$  при  $\kappa_1 < \kappa_2$ .

Введем меру лебегова множества  $\tilde{\omega}(\kappa)$  с помощью интеграла:

$$m(\kappa, \mathbf{r}, t) = \int_{\tilde{\omega}(\kappa, \mathbf{r}, t)} S(E, \mathbf{r}, t) dE = \sum_P \int_{E_p^-(\kappa, \mathbf{r}, t)}^{E_p^+(\kappa, \mathbf{r}, t)} S(E, \mathbf{r}, t) dE, \quad (0 \leq m \leq 1).$$

Обратим внимание, что в коэффициенте поглощения можно выполнить счетное число узких разрезов (вниз – до нуля или вверх – до заданного числа) «на множестве лебеговой меры ноль» и это никак не влияет на характер

рассуждений. Мера является неубывающей функцией параметра «к»:  $m(\kappa_1, \mathbf{r}, t) \leq m(\kappa_2, \mathbf{r}, t)$ ,  $\kappa_1 < \kappa_2$  и меняется от нуля до единицы в любой точке  $(\mathbf{r}, t)$ . Поэтому существует неубывающая обратная функция  $\kappa = \kappa(m, \mathbf{r}, t)$ . Выполнив с помощью обратной функции замену переменных, мы получим систему вложенных лебеговых множеств  $\omega(m, \mathbf{r}, t) = \tilde{\omega}(\kappa(m), \mathbf{r}, t)$ , зависящую от параметра « $m$ ». При  $m=0$  лебегово множество пусто  $\omega(0, \mathbf{r}, t) = \emptyset$ . При  $m=1$  оно плотно заполняет группу  $\omega(1, \mathbf{r}, t) = \omega_g$ . Граничные точки множества  $E_p^\pm(m) = E_p^\pm(\kappa(m))$  – это по-прежнему точки с «равновеликим поглощением» уровня  $\kappa = \kappa(m)$ . Справедливы тождества:

$$\kappa = \kappa(m, \mathbf{r}, t) = \kappa^{ab}(E_p^\pm(m), \mathbf{r}, t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad (p=1, 2, \dots), \quad (12)$$

$$m = \int_{\omega(m, \mathbf{r}, t)} S(E, \mathbf{r}, t) dE = \sum_p \int_{E_p^-(m, \mathbf{r}, t)}^{E_p^+(m, \mathbf{r}, t)} S(E, \mathbf{r}, t) dE, \quad (0 \leq m \leq 1),$$

$$1 = \frac{\partial}{\partial m} \int_{\omega(m, \mathbf{r}, t)} S(E, \mathbf{r}, t) dE = \sum_p \left[ S(E_p, \mathbf{r}, t) \frac{\partial E_p(m, \mathbf{r}, t)}{\partial m} \right]_+^-,$$

$$\left[ S(E_p) \frac{\partial E_p}{\partial m} \right]_+^- = S(E_p^+) \frac{\partial E_p^+}{\partial m} - S(E_p^-) \frac{\partial E_p^-}{\partial m}, \quad \frac{\partial E_p^+}{\partial m} \geq 0, \quad \frac{\partial E_p^-}{\partial m} \leq 0.$$

Введем кумулятивное распределение (распределение «нарастающим итогом») как интеграл от распределения фотонов  $I(E)$  по лебегову множеству:

$$F(m, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) = \int_{\omega(m, \mathbf{r}, t)} I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) dE = \sum_p \int_{E_p^-(m, \mathbf{r}, t)}^{E_p^+(m, \mathbf{r}, t)} I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) dE,$$

$$0 \leq m \leq 1, \quad F(0, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) = 0, \quad F(1, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) = I_g(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) = \int_{\omega_g} I(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) dE.$$

Частную производную по мере лебегова множества

$$\begin{aligned} f(m, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) &= \frac{\partial F}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \sum_p \int_{E_p^-(m)}^{E_p^+(m)} I(E) dE = \sum_p \left[ I(E_p) \frac{\partial E_p}{\partial m} \right]_+^- = \\ &= \sum_p \left[ \frac{I(E_p)}{S(E_p)} S(E_p) \frac{\partial E_p}{\partial m} \right]_+^- = \left\langle \frac{I(E_p^\pm)}{S(E_p^\pm)} \right\rangle \cdot \sum_p \left[ S(E_p) \frac{\partial E_p}{\partial m} \right]_+^- = \left\langle \frac{I(E_p^\pm)}{S(E_p^\pm)} \right\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

будем называть лебеговым образом распределения  $I(E)$ . Из приведенных соотношений следует, что лебегов образ  $f(m)$  есть среднее отношение

распределения  $I(E)$  к весовому спектру  $S_g(E)$  в граничных точках лебегова множества (точках с равновеликим поглощением)  $E_p^\pm = E_p^\pm(m, \mathbf{r}, t)$ ,  $p=1, 2, \dots$ . Определение среднего корректно, т.к. все слагаемые в суммах неотрицательны.

Важным «прикладным» свойством интеграла Лебега, на которое не делается акцент в специальной литературе, является формула вычисления линейных функционалов:

$$\int_{\omega(m)} \psi(\kappa^{ab}(E)) I(E) dE = \int_0^m \psi(\kappa(m)) f(m) dm, \quad (0 \leq m \leq 1). \quad (14)$$

Здесь  $\psi(\kappa)$  есть произвольная интегрируемая функция. Равенство доказывается дифференцированием интеграла по « $m$ », вынесением функции  $\psi(\kappa^{ab}(E_p^\pm))$  из под знака суммы в точках с равновеликим поглощением и обратным интегрированием. Аргумент « $m$ » для лебегова образа  $f(m)$  играет роль переменной спектра  $E$  для распределения фотонов  $I(E)$ . В отличие от сильно осциллирующей немонотонной зависимости коэффициента поглощения  $\kappa^{ab}(E)$ , зависимость  $\kappa = \kappa(m)$  есть неубывающая функция.

Если подставить в (13) разложение по спектральным моментам (11), то мы получим разложение лебегова образа  $f(m)$  по спектральным моментам:

$$f(m, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\xi)}{q_n} \cdot I_n(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t), \quad \xi(m, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) = \frac{\kappa(m)L-1}{\kappa(m)L+1}. \quad (15)$$

В отличие от разложения (11), в разложении (15) параметр  $\xi(m, \mathbf{r}, t)$  есть неубывающая функция «новой» переменной спектра « $m$ ». Разложение (15) можно интегрировать как по переменной  $m$ , так и по переменной  $\xi$ . Теперь можно дать формальное определение спектральных моментов распределения фотонов, входящих в (11) и (15):

$$I_n(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) = \int_{-1}^1 h(\xi) P_n(\xi) f(m(\xi)) d\xi. \quad (16)$$

Если спектральные моменты известны, то суммарная интенсивность излучения в группе « $g$ » и скорости поглощения лучистой энергии могут быть вычислены по формулам (см. (14)):

$$I_g(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) = \int_{\omega_g} I(E) dE = \int_0^1 f(m) dm = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t)}{q_n} T_{g,n}(L, \mathbf{r}, t), \quad (17)$$

$$T_{g,n}(L, \mathbf{r}, t) = \int_0^1 P_n(\xi(m)) dm = \int_{\omega_g} S(E) P_n(\xi(E)) dE, \quad (\xi(E) = \frac{\kappa^{ab} L - 1}{\kappa^{ab} L + 1}),$$

$$\int_{\omega_g} \psi(\kappa^{ab}(E)) I(E) dE = \int_0^1 \psi(\kappa(m)) f(m) dm = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t)}{q_n} \psi_{g,n}(L, \mathbf{r}, t) T_{g,n}(L, \mathbf{r}, t),$$

$$\psi_{g,n}(L, \mathbf{r}, t) \cdot T_{g,n}(L, \mathbf{r}, t) = \int_0^1 \psi(\kappa(m)) P_n(\xi(m)) dm = \int_{\omega_g} S(E) \psi(\kappa^{ab}(E)) P_n(\xi(E)) dE,$$

где  $\psi(\kappa)$  – произвольная интегрируемая функция.

## Система уравнений для спектральных моментов

Достоинством метода моментов является то, что часто удается сформулировать специальную систему уравнений для нахождения моментов  $I_n$ . И этот способ решения прикладной задачи (нахождение моментов из системы моментных уравнений и последующее восстановление искомой функции (если требуется), например, по формулам (11) или (15)) иногда оказывается более простым в сравнении с прямым способом решения – нахождением искомой функции и последующим расчетом ее моментов согласно формальному определению (16).

Отправной точкой для вывода системы уравнений для спектральных моментов  $I_n$  нам послужит кинетическое уравнение для лебегова образа распределения фотонов:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + [\kappa(m) + \kappa_g^{(0)}] \cdot f = \int_{4\pi} K_g^{sc}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') f(\mathbf{\Omega}') d\Omega' + \kappa(m) \cdot J_g. \quad (18)$$

Величины  $J_g$ ,  $K_g^{sc}$  определены в (9), (10). Уравнение (18) можно получить из исходного уравнения (2) интегрированием по системе лебеговых множеств, применением (14) и дифференцированием по параметру « $m$ ». Мы не будем приводить здесь подробный вывод уравнения. Заинтересованный читатель может найти его в любой из работ автора [9]-[13]. Уравнение (18) дополняется граничными условиями:

$$f(m, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_b, t) \Big|_{\mathbf{n}\mathbf{\Omega} < 0} = \int_{\mathbf{n}\mathbf{\Omega}' > 0} K_g^b(\mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_b, t) \cdot f(\mathbf{\Omega}') d\Omega' + f^{in}(m, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_b, t) \Big|_{\mathbf{n}\mathbf{\Omega} < 0}, \quad (19)$$

$$f^{in}(m, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_b, t) = \frac{\partial}{\partial m} \int_{\omega(m)} I^{in}(E, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_b, t) dE = \left\langle \frac{I^{in}(E_k^\pm)}{S(E_k^\pm)} \right\rangle.$$

Уравнение (18) не является абсолютно строгим следствием уравнения (2). В уравнении опущены малозначимые члены второго порядка малости, связанные с возможными смещениями границ лебеговых множеств при изменении пространственных координат. Главный член смещений (если смещения возникают) учитывается. В практических задачах, исследованных в указанных выше работах, вклад опущенных малых членов не превышал 2-3%.

В окончательных формулах и уравнениях метода спектральных моментов не останется «видимых следов» от выполненной замены переменной спектра « $E$ » на переменную « $m$ » и от системы лебеговых множеств (см., например, формулы (17)). Поэтому, возможно, существуют и другие способы вывода системы уравнений для спектральных моментов распределения фотонов  $I_n$ , не использующие уравнение (18).

**Бесконечная цепочка уравнений для спектральных моментов.** Подставив разложение (15) в (18), (19), получим соотношения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dl} \left[ \frac{P_n(\xi) I_n}{q_n} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\xi)}{q_n} \left[ \left[ \frac{1}{L} \frac{1+\xi}{1-\xi} + \kappa_g^{(0)} \right] I_n - \int_{4\pi} \mathbf{K}_g^{sc} I_n(\Omega') d\Omega' \right] = \frac{1}{L} \frac{1+\xi}{1-\xi} J_g,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\xi)}{q_n} \left[ I_n(\Omega, \mathbf{r}_b) \Big|_{\mathbf{n}\Omega < 0} - \int_{\mathbf{n}\Omega' > 0} \mathbf{K}_g^b(\Omega' \rightarrow \Omega) I_n(\Omega', \mathbf{r}_b) d\Omega' - I_n^{in}(\Omega, \mathbf{r}_b) \Big|_{\mathbf{n}\Omega < 0} \right] = 0,$$

$$\frac{d}{dl} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}.$$

Напомним, что в задачах, где есть рассеяние излучения и отражение от границы, параметр разложения  $L$  полагается не зависящим от направлений полета фотонов  $\mathbf{\Omega}$ . Дальнейшие вычисления стандартны. Умножим первое соотношение на  $h(\xi) \cdot [1-\xi] P_m(\xi)$ , второе на  $h(\xi) \cdot P_m(\xi)$ , воспользуемся рекуррентными формулами и формулами для производной многочленов. При оценке производной от переменной  $\xi$  примем *Предположение E*:

$$\frac{d\xi}{dl} = \frac{d}{dl} \left[ \frac{\kappa(m)L-1}{\kappa(m)L+1} \right] = \frac{1-\xi^2}{2} \frac{d \ln(\kappa L)}{dl} \approx \frac{1-\xi^2}{2} \frac{d \ln(\kappa_g^{ab} L)}{dl}, \quad (20)$$

$$\kappa_g^{ab}(\mathbf{r}, t) = \int_{\omega_g} \kappa^{ab}(E, \mathbf{r}, t) S_g(E, \mathbf{r}, t) dE.$$

Здесь  $\kappa_g^{ab}$  есть «планковский» средний коэффициент поглощения в группе «g».

После интегрирования соотношений по интервалу  $-1 < \xi < 1$  получим бесконечную цепочку уравнений для спектральных моментов  $I_n$ ,  $n=0,1,2,\dots$  в неявной форме:

$$X_{nm} \left[ \frac{dI_m}{dl} + \kappa_g^{(0)} I_m - \int_{4\pi} K_g^{sc} I_m d\Omega' \right] + \left[ \frac{Y_{nm}}{L} + \frac{d \ln(\kappa_g^{ab} L)}{dl} Z_{nm} \right] I_m = \frac{Y_{n0}}{L} q_0 J_g, \quad (21)$$

и граничные условия на решение системы:

$$I_n(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_b) \Big|_{n\mathbf{\Omega} < 0} = \int_{n\mathbf{\Omega}' > 0} K_g^b(\mathbf{\Omega}' \rightarrow \mathbf{\Omega}) I_n(\mathbf{\Omega}', \mathbf{r}_b) d\Omega' + I_n^{in}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}_b) \Big|_{n\mathbf{\Omega} < 0}. \quad (22)$$

Здесь и в последующих формулах по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Приведем вид матриц  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$ .

Разложение по многочленам Чебышева ( $q_0 = \pi$ ):

$$\begin{matrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mp \frac{1}{2} & 1 & \mp \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mp \frac{1}{2} & 1 & \mp \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mp \frac{1}{2} & 1 & \mp \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mp \frac{1}{2} & 1 & \mp \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mp \frac{1}{2} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{5}{4} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Верхний знак соответствует матрице  $\mathbf{X}$ , нижний знак – матрице  $\mathbf{Y}$ .

Разложение по многочленам Лежандра ( $q_0 = 2$ ):

$$\begin{matrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mp \frac{1}{3} & 1 & \mp \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mp \frac{2}{5} & 1 & \mp \frac{3}{5} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mp \frac{3}{7} & 1 & \mp \frac{4}{7} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mp \frac{4}{9} & 1 & \mp \frac{5}{9} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mp \frac{5}{11} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{5} & -\frac{6}{7} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{3}{35} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{15} & \frac{10}{7} & -\frac{20}{21} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{4}{21} & -\frac{2}{3} & -\frac{10}{77} & \frac{5}{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{33} & -\frac{10}{11} & -\frac{5}{39} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

**Явная форма конечномерной системы.** Приближенные версии метода моментов возникают при рассмотрении конечных отрезков разложений (11), (15). Пренебрежем высшими моментами с номерами больше « $N$ », положив их равными нулю:  $I_n = 0, n > N$ . Число  $N$  назовем порядком метода моментов. Замкнутая конечная система уравнений для нахождения оставшихся низших моментов  $I_n, n = 0, 1, \dots, N$  следует из системы (21), если бесконечные матрицы  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  заменить на их конечные блоки  $\mathbf{X}_N, \mathbf{Y}_N, \mathbf{Z}_N$  размерности  $[N+1] \times [N+1]$ . Эта система имеет неявную форму, т.к. ее уравнения содержат первые производные от моментов разных порядков.

Пусть  $\mathbf{X}_N^{-1}$  есть обратная матрица к матрице  $\mathbf{X}_N$ . Если умножить (21) слева на  $\mathbf{X}_N^{-1}$ , мы получим конечную систему из  $[N+1]$  уравнений в явной форме, где каждое из уравнений содержит дифференциалы только одного спектрального момента:

$$\frac{dI_n}{dl} + \kappa_g^{(0)} I_n + \left[ \frac{B_{nm}}{L} + \frac{d \ln(\kappa_g^{ab} L)}{dl} C_{nm} \right] I_m = \int_{4\pi} \mathbf{K}_g^{sc} I_n(\Omega') d\Omega' + \frac{B_{n0}}{L} q_0 J_g, \quad (23)$$

$$B_{nm} = X_{N,nk}^{-1} Y_{km}, \quad C_{nm} = X_{N,nk}^{-1} Z_{km} \quad q_0 = \begin{cases} \pi, & \text{Чебышев} \\ 2, & \text{Лежандр} \end{cases}, \quad (k, m, n = 0, \dots, N).$$

В случае разложения по многочленам Чебышева удалось найти вид матриц:

$$B_{nm} = [2 - \delta_{0m}] \cdot [2N + 2 - n - m - |n - m|] - \delta_{nm},$$

$$C_{nm} = \frac{m}{4} \cdot [\delta_{n+1,m} [1 + \delta_{n0}] - \delta_{n,m+1} + \delta_{N,m}], \quad (m, n = 0, \dots, N).$$

Элементы матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  для разложений по многочленам Чебышева и Лежандра при разных порядках « $N$ » приведены в Приложении.

**Нормальная форма конечномерной системы.** В разделе исследуются свойства фундаментальных решений системы уравнений для спектральных моментов.

*Случай  $L \approx const$ .* Рассмотрим варианты 2) и 3) (*Предположение В, С. 10*), когда в разложении (11) параметр  $L$  полагается равным или близким к длине хорды характеристики  $l_{out} - l_{in}$  (вариант 2), равным или близким к среднему диаметру тела  $\langle L \rangle$  (вариант 3). В этих вариантах производная  $dL/dl$  близка к нулю. Свойства решений системы уравнений (23) определяются в основном собственными числами  $\lambda_{(n)}$  матрицы  $\mathbf{B}$ . Матрица  $\mathbf{C}$  играет второстепенную роль.

Все собственные числа  $\lambda_{(n)}$  матрицы  $\mathbf{B}$  положительны и различны:

$$\lambda_{(n)} = \frac{1 + \alpha_n}{1 - \alpha_n}, \quad P_{N+1}(\alpha_n) = 0, \quad (\lambda_{(n)} > 0, n = 0, 1, \dots, N), \quad (24)$$

Здесь  $\alpha_n$  суть корни многочлена степени  $N+1$ . Вследствие симметричного расположения корней многочлена относительно нуля для каждого собственного числа  $\lambda_{(n)}$  существует число, ему обратное  $\lambda_{(k)} = 1/\lambda_{(n)}$ . Для многочленов Чебышева:

$$\alpha_n = \cos \frac{\pi [2n+1]}{2[N+1]}, \quad (n = 0, 1, \dots, N).$$

Фундаментальные решения системы (23) ведут себя как затухающие с разным декрементом экспоненты. Сказанное установлено для разложений по многочленам Чебышева (1-го, 2-го рода) и Лежандра. Но, по-видимому, свойство верно и для разложений по другим системам многочленов, ортогональных на отрезке  $-1 < \xi < 1$  с четной весовой функцией  $h(\xi)$ .

Упорядочим собственные числа  $\lambda_{(n)}$  и соответствующие им собственные векторы  $\mathbf{e}_{(n)}$  по убыванию значений, так что  $\lambda_{(0)}$  будет наибольшим числом. Составим из собственных векторов матрицу  $\mathbf{M} = (\mathbf{e}_{(0)} \mathbf{e}_{(1)} \dots \mathbf{e}_{(N)})$ . Обратная матрица  $\mathbf{M}^{-1}$  задает линейное преобразование, которое приводит матрицу  $\mathbf{BM}$  к диагональному виду. Нормируем базис из собственных векторов так, чтобы элементы первого столбца матрицы  $\mathbf{M}^{-1}$  были равны единице. Результат преобразования вектора моментов  $\mathbf{I} = (I_0, I_1, \dots, I_N)$  обозначим за  $\mathbf{A}$ :

$$A_n = M_{nm}^{-1} I_m, \quad I_n = M_{nm} A_m, \quad M_{n0}^{-1} = 1. \quad (25)$$

Компоненты вектора  $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \dots, A_N)$  будем называть нормальными модами системы (23).

Система уравнений для нахождения нормальных мод следует из системы (23) в результате умножения слева на матрицу  $\mathbf{M}^{-1}$ :

$$\frac{dA_n}{dl} + \left[ \frac{\lambda_{(n)}}{L} + \kappa_g^{(0)} \right] A_n + \frac{d \ln(\kappa_g^{ab} L)}{dl} C'_{nm} A_m = \int_{4\pi} K_g^{sc} A_n(\Omega') d\Omega' + \frac{\lambda_{(n)}}{L} q_0 J_g, \quad (26)$$

$$\lambda_{(n)} \delta_{nm} = M_{nk}^{-1} B_{kl} M_{lm}, \quad C'_{nm} = M_{nk}^{-1} C_{kl} M_{lm}, \quad (m, n = 0, \dots, N).$$

Этим же умножением из (22) получаем граничные условия:

$$A_n(\Omega, \mathbf{r}_b) \Big|_{\mathbf{n}\Omega < 0} = \int_{\mathbf{n}\Omega' > 0} K_g^b(\Omega' \rightarrow \Omega) A_n(\Omega', \mathbf{r}_b) d\Omega' + A_n^{in}(\Omega, \mathbf{r}_b) \Big|_{\mathbf{n}\Omega < 0}. \quad (27)$$

Здесь  $\lambda_{(n)}\delta_{nm}$  – диагональная матрица из собственных чисел,  $\mathbf{C}'$  – образ матрицы  $\mathbf{C}$ . Для разложения по многочленам Чебышева найден вид матриц:

$$M_{nm} = \frac{1}{N+1} \cos \frac{\pi n [2m+1]}{2[N+1]}, \quad M_{nm}^{-1} = [2 - \delta_{0,m}] \cos \frac{\pi [2n+1] m}{2[N+1]}.$$

Собственные числа  $\lambda_{(n)}$  и элементы матриц  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}^{-1}$ ,  $\mathbf{C}'$  для разложений по многочленам Чебышева и Лежандра длины  $N$  приведены в Приложении.

Итак, задача решения линейного уравнения Больцмана (2), (5) со сложным коэффициентом поглощения (см. Рис. 1) сведена к задаче решения нескольких уравнений (26), (27) с постоянным или почти постоянным коэффициентом.

*Вариант  $L \approx l - l_{in}$ .* Рассмотрим вариант 1) (*Предположение В, С. 10*). Пусть в разложении по спектральным моментам параметр  $L$  полагается равным или близким к пути, пройденному пучком фотонов вдоль характеристики от точки входа в тело до точки наблюдения  $L \approx l - l_{in}$ . Рассмотрим задачи, в которых рассеяние фотонов и отражение фотонов от границы мало. Для исследования свойств фундаментальных решений преобразуем систему уравнений к виду:

$$\frac{dI_n}{dl} + \left[ \frac{B_{nm} + C_{nm}}{L} + \left[ \frac{d \ln(\kappa_g^{ab} L)}{dl} - \frac{1}{L} \right] C_{nm} \right] I_m = \frac{B_{n0}}{L} q_0 J_g, \quad \left( \frac{d \ln L}{dl} \approx \frac{1}{L} \right). \quad (28)$$

Так как коэффициент при матрице  $\mathbf{C}$  мал, то свойства фундаментальных решений системы определяются собственными числами матрицы  $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ . Оказалось, что при разложении по многочленам Чебышева и Лежандра при  $N \geq 2$  матрица  $\mathbf{B} + \mathbf{C}$  имеет как положительные, так и отрицательные собственные числа. Т.е. среди фундаментальных решений системы имеются и затухающие и растущие экспоненты. Поэтому в варианте  $L \approx l - l_{in}$  следует избирательно подходить к выбору численного метода для решения системы (28).

## Тестирование метода

Тестирование метода спектральных моментов проводилось на стационарной одномерной задаче переноса теплового излучения в плоском слое единичной толщины  $-0.5 \text{ cm} \leq X \leq 0.5 \text{ cm}$ . Температура падает линейно поперек слоя от значения  $T(-0.5) = 1.4 \text{ eV}$  на левой границе до значения  $T(0.5) = 0.28 \text{ eV}$  на правой границе. Эти параметры характерны для ударного слоя, возникающего вблизи поверхности космического аппарата на участке торможения в атмосфере Земли.

Интенсивность источников излучения  $J$  полагается равновесной (4). Хотя общее падение температуры относительно невелико (составляет 5 раз),

суммарная интенсивность источников  $\int J(E, x) dE = \sigma T^4(x)/\pi$  падает в  $5^4 = 625$  раз вследствие сильной зависимости от температуры.

Пусть слой гомогенен – заполнен однородным веществом. Поглощение и испускание фотонов будем моделировать коэффициентом поглощения Эльзассера [14], [15]:

$$\kappa^{ab}(E) = \frac{D}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{[E - \delta - k\varepsilon]^2 + \gamma^2} = \frac{D}{\varepsilon} \cdot \frac{\sinh(2\pi\gamma/\varepsilon)}{\cosh(2\pi\gamma/\varepsilon) - \cos(2\pi[E - \delta]/\varepsilon)}. \quad (29)$$

Коэффициент сформирован бесконечной серией одинаковых резонансных линий с шагом  $\varepsilon$  и сдвигом  $\delta$ . Линии имеют силу  $D$  и лоренцевский профиль с полушириной  $\gamma$ . Считаем, что расстояние между соседними линиями (период функции) много меньше температуры вещества  $\varepsilon \ll T$  и много меньше ширины группы фотонов  $\varepsilon \ll \Delta E_g = E_g - E_{g-1}$ <sup>3</sup>. Так как в пределах группы функция (29) испытывает множество осцилляций, то коэффициент поглощения (12) как функция меры лебега множества, средний планковский коэффициент поглощения в группе (20) и средний росселандов коэффициент поглощения  $\kappa_g^R$  даются простыми формулами:

$$\kappa(m) \approx \frac{\kappa_g^{ab} \sinh(2\pi\gamma/\varepsilon)}{\cosh(2\pi\gamma/\varepsilon) + \cos(\pi m)}, \quad (\varepsilon \ll T, \Delta E_g), \quad (30)$$

$$\kappa_g^{ab} \approx \frac{D}{\varepsilon}, \quad \kappa_g^R = 1 / \int_{\omega_g} \frac{S(E, \mathbf{r}, t)}{\kappa^{ab}(E, \mathbf{r}, t)} dE = 1 / \int_0^1 \frac{dm}{\kappa(m, \mathbf{r}, t)} \approx \kappa_g^{ab} \tanh \frac{2\pi\gamma}{\varepsilon}.$$

Коэффициенты (30) не зависят ни от ширины группы, ни от положений ее границ. Поэтому формулы справедливы и для одной группы, охватывающей весь спектр  $0 \leq E < \infty$ , и для сложных групп, состоящих из нескольких разнесенных интервалов.

Параметрами, определяющими решение, являются средняя оптическая толщина слоя  $\kappa_g^{ab} \Delta X$  и толщина слоя «в фоне» – в крыльях линий  $\kappa_g^R \Delta X$ .

*Сходимость.* Результаты численных экспериментов на серии тестовых задач подтвердили сходимость метода спектральных моментов к точному решению. На Рис. 4 и Рис. 5 представлены плотность  $U(X)$  и поток  $W(X)$  энергии теплового излучения (1), просуммированные по спектру  $0 \leq E < \infty$  как функции пространственной координаты  $X$ . Точное решение находилось прямым расчетом спектра интенсивности излучения на подробной сетке по энергии фотонов. Профили  $U_N(X)$  и  $W_N(X)$ , ( $2 \leq N \leq 6$ ) суть результаты

<sup>3</sup> Здесь рассматривается простая группа  $\omega_g = \{E_{g-1} \leq E < E_g\}$ .

расчетов в N-приближениях метода спектральных моментов при  $L = 1.35 \text{ cm}$ . В качестве группы брался весь спектр  $\omega_g = \{0 < E < \infty\}$ . Оптическая толщина слоя принимала четыре значения  $\kappa_g^{ab} \Delta X = 2, 10, 50$  и  $200$ . Отношение росселандова и планковского коэффициентов взято равным  $\kappa_g^R / \kappa_g^{ab} = 10^{-3}$ , что соответствует  $\gamma/\varepsilon = 1.6 \cdot 10^{-4}$ . Во всех задачах слой является оптически толстым «в среднем» и оптически тонким «в крыльях линий».

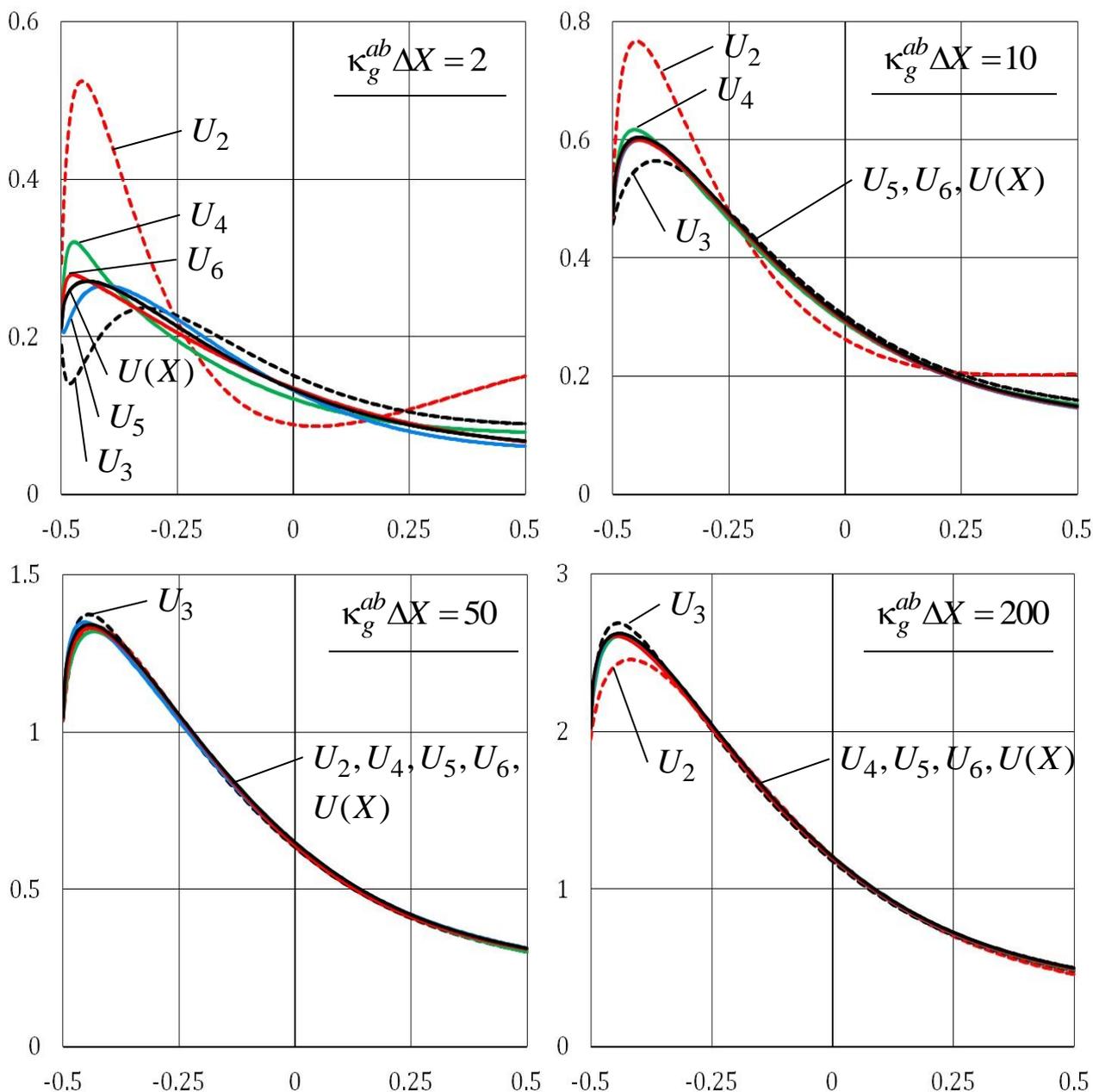


Рис. 4. Сходимость плотности энергии излучения  $U_N(X)$  (цветные кривые) к точному решению  $U(X)$  (темная сплошная кривая) в зависимости от порядка «N» при 4 значениях оптической толщины слоя  $\kappa_g^{ab} \Delta X$ . Плотность энергии дана в единицах  $\sigma/c = 1$ .

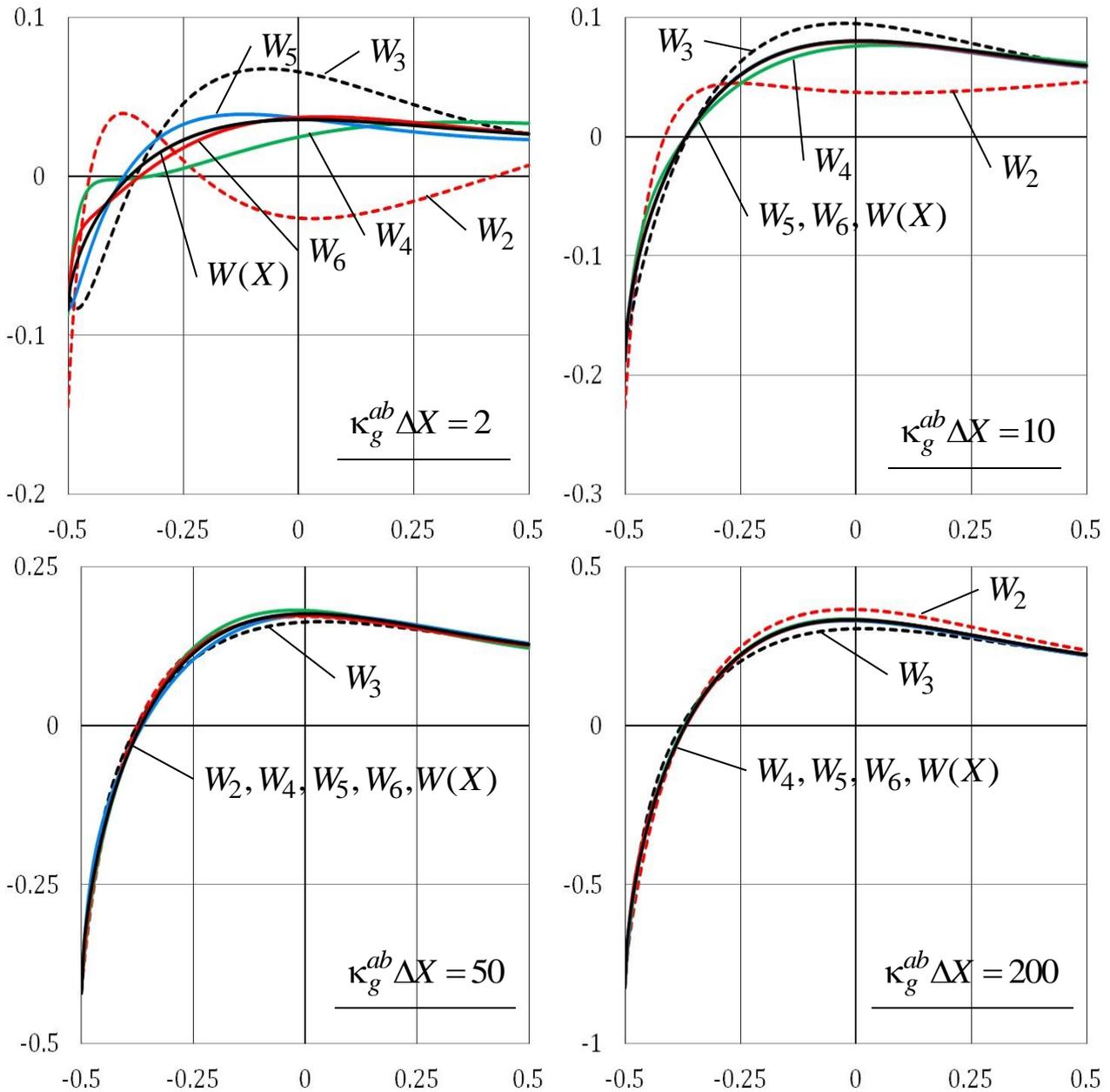


Рис. 5. Сходимость потока энергии излучения  $W_N(X)$  (цветные кривые) к точному решению  $W(X)$  в зависимости от порядка « $N$ » при 4 значениях оптической толщины слоя. Поток энергии излучения дан в единицах  $\sigma = 1$ .

Чувствительность метода к выбору параметра  $L$ . Удивительной оказалась слабая чувствительность «быстрой сходимости» разложения к выбору параметра разложения  $L$ . Это демонстрирует Рис. 6, на котором приведены пространственные профили плотности энергии излучения  $U_N(X)$  в «задаче 2» (средняя оптическая толщина слоя  $\kappa_g^{ab} \Delta X = 10$ ), полученные при различных значениях параметра  $L = 0.5 \text{ см}; 1.35 \text{ см}; 3 \text{ см}; 6 \text{ см}$ .

Скорость сходимости. Скорость сходимости ряда (11) к точному решению можно оценить по скорости уменьшения энергии  $\varphi_n$ , запасенной в гармониках

с номерами « $n$ », и по энергии  $\psi_n$ , приходящейся на «хвост» разложения:

$$\varphi_n(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) = \frac{I_n^2/q_n}{\sum_{k=0} I_k^2/q_k}, \quad \left(\sum_{n=0} \varphi_n = 1\right), \quad \psi_n(\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}, t) = \frac{\sum_{k=n} I_k^2/q_k}{\sum_{k=0} I_k^2/q_k}. \quad (31)$$

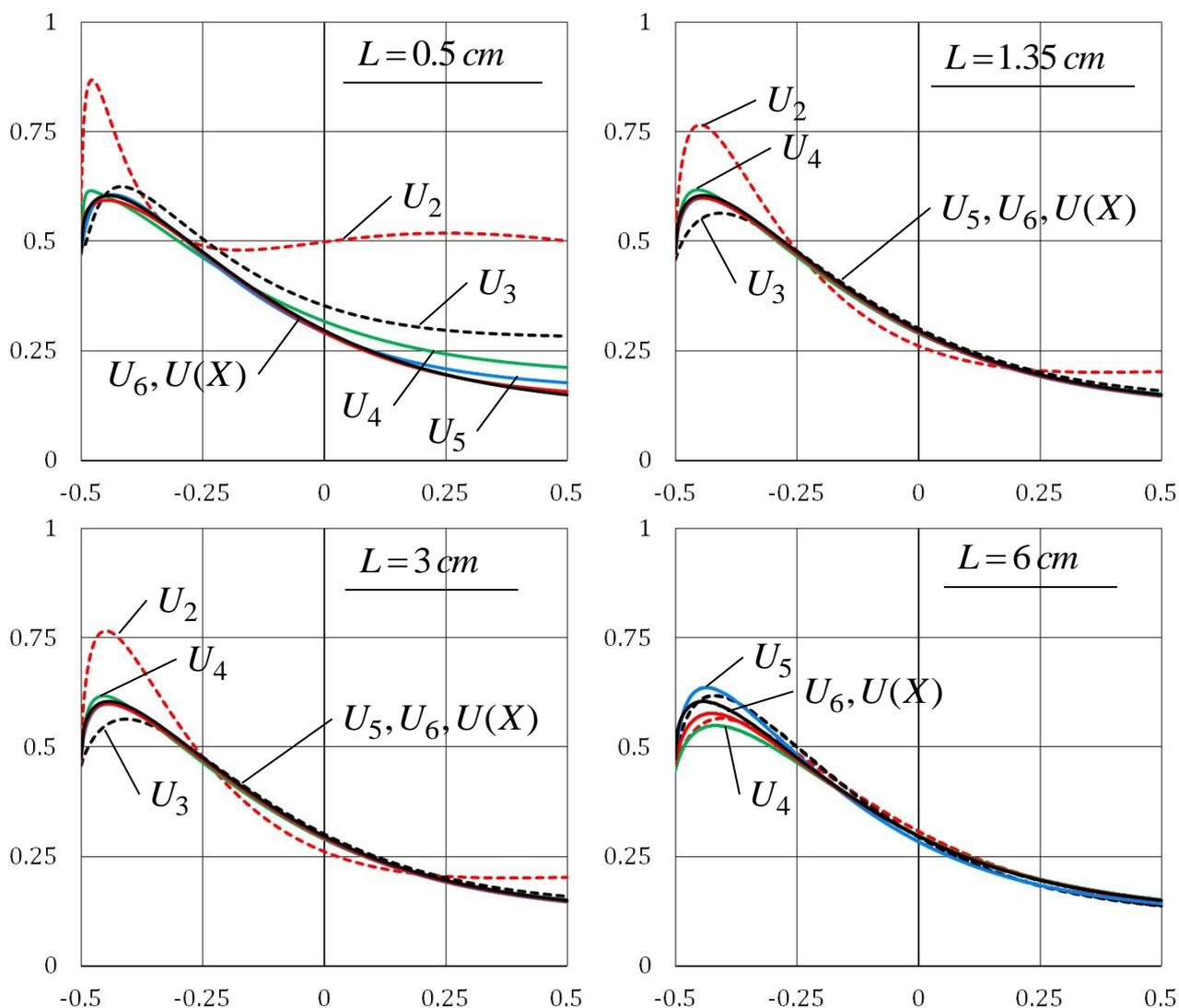


Рис. 6. Сходимость плотности энергии излучения  $U_N(X)$  (цветные кривые) к точному решению  $U(X)$  (темная сплошная кривая) в зависимости от порядка « $N$ » в «задаче 2» при четырех значениях параметра  $L$ .

На Рис. 7А приведено среднее распределение энергии  $\langle \varphi_n \rangle$  по гармоникам « $n$ » разложения  $N=6$ ,  $L=1.35 \text{ cm}$  в задаче 2 ( $\kappa_g^{ab} \Delta X = 10$ ). Знак кавычек  $\langle \rangle$  означает, что распределение  $\varphi_n$  осреднено по всем направлениям полета фотонов и объему тела. На Рис. 7Б приведена энергия «хвоста» распределения  $\langle \psi_3 \rangle = \langle \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 \rangle$  в зависимости от параметра  $L$ . При уменьшении или увеличении параметра от значения  $L=1.35 \text{ cm}$  в 10 раз энергия «хвоста» увеличивается не более, чем в три раза, и не превышает 12%.

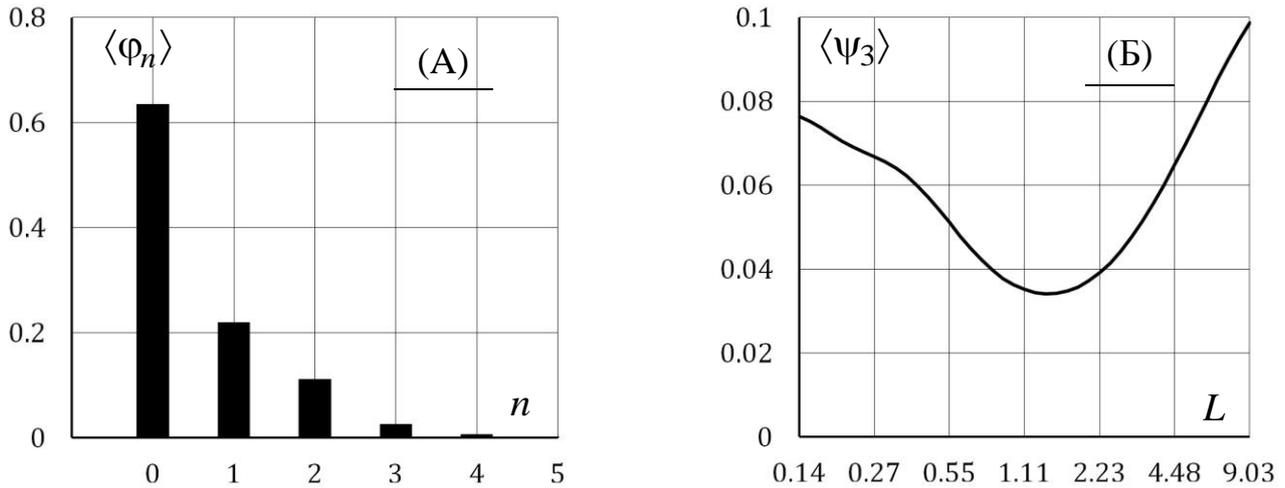


Рис. 7. (А) – Распределение энергии  $\langle \varphi_n \rangle$  по гармоникам « $n$ » в задаче 2  
(Б) – Энергия «хвоста» разложения  $\langle \psi_3 \rangle$  как функция параметра  $L$ .

Результаты численных расчетов тестовых задач показали, что во всех случаях «разумного» выбора параметров метод спектральных моментов дает практически точное решение задачи в порядке  $N=4-6$ .

Представленные на рисунках результаты расчетов получены для разложения по многочленам Чебышева в варианте 3), стр. 10, когда параметр  $L$  полагается равным среднему диаметру тела  $\langle L \rangle$ . Это самый «грубый» выбор параметра. Расчеты в варианте 2), когда параметр подбирается «индивидуально» для каждой характеристики  $L = l_{out} - l_{in}$  показали еще более высокую скорость сходимости.

Расчеты с использованием разложения по многочленам Лежандра на данных тестовых задачах показали сходимость несколько более медленную – в порядке метода  $N=6-8$ .

## Варианты использования

Опишем примерные варианты использования метода спектральных моментов при решении прикладных задач.

*Прямой вариант.* Подготовительный этап. Выполнить разбиение значимого для задачи диапазона спектра на группы. Подготовить таблицы материальных констант  $J_g$ ,  $\kappa_g^{ab}$ ,  $K_g^{sc}$ ,  $K_g^\Gamma$ ,  $T_{g,n}$ ,  $\psi_{g,n}$  (см. (17)).

Основной этап. Численно решить задачу (26), (27). Восстановить по формулам (25) спектральные моменты распределения фотонов  $I_n$ . Восстановить по формулам (17) интенсивность излучения  $I_g$  в группах и функционалы задачи. Восстановить (если требуется) спектр излучения (11).

*Консервативный вариант.* В данном варианте метод спектральных моментов используется в связке с многогрупповым приближением. Проблема

решения кинетического уравнения переноса излучения разбивается на две слабо связанные подзадачи. В одной подзадаче решение ищется методом спектральных моментов низкого порядка « $N$ ». Точности решения, возможно, недостаточно для генерации «ответа», но вполне достаточно для использования в качестве весового спектра для расчета «точных» многогрупповых констант, которые передаются во вторую подзадачу. Во второй подзадаче проблема решается заново с «точными» многогрупповыми константами. Полученные поля температуры и тепловых источников излучения передаются в первую подзадачу. Такое многогрупповое приближение можно называть «многогрупповым приближением с самосогласованным весовым спектром».

Консервативный вариант может оказаться более выигрышным в сравнении с прямым вариантом при решении нестационарных задач; задач переноса частиц (фотонов или нейтронов) в гетерогенном теле; задач, где требуется проводить итерации по источникам – источнику «рассеянных» фотонов или нейтронов, источнику «рождения» частиц (тепловых фотонов или нейтронов деления).

*Аналитический вариант.* Уравнения для нормальных мод (26), (27) суть уравнения с (почти) постоянным коэффициентом поглощения. Поэтому метод спектральных моментов можно использовать для расширения класса задач, для которых имеется аналитическое решение.

**Направления дальнейших разработок.** К сожалению, автору не удалось вместить в рамки одной статьи обсуждение всех точек приложений метода спектральных моментов в прикладных исследованиях. Перечислим некоторые направления дальнейших разработок, которые видны на текущий момент.

- Распространение метода на гетерогенные тела.
- Автоматизация выбора оптимального параметра разложения  $L$  и порядка метода  $N$ . Включение соответствующего алгоритма в процесс численного решения прикладных задач переноса частиц.
- Построение дискретных схем и алгоритмов численного решения задач, адаптированных под метод спектральных моментов.
- Включение метода спектральных моментов в радиационно-столкновительную модель динамики и кинетики неравновесного газа и плазмы.
- Распространение метода на задачи переноса нейтронов в целях моделирования ядерных реакторов и задач диагностики.
- Дальнейшие методические исследования точности и скорости сходимости метода при решении прикладных задач.

## Заключение

Подведем итоги. Метод спектральных моментов сводит задачу нахождения интенсивности излучения на подробной сетке по энергии фотонов к задаче нахождения нормальных мод. Задачи схожи по типу уравнений, математической

постановке и фундаментальным решениям – затухающим экспонентам. Поэтому для применений метода спектральных моментов можно использовать (после незначительной модификации) транспортные компьютерные коды, разработанные для детальных расчетов спектра излучения и расчетов в многогрупповом приближении. Это могут быть детерминистические коды или коды статистического моделирования методом Монте-Карло.

В отличие от сильно осциллирующего коэффициента поглощения фотонов в исходном уравнении Больцмана, в уравнениях для нормальных мод соответствующий коэффициент не зависит от энергии фотонов<sup>4</sup>. Более того, в ряде задач коэффициент близок к постоянной, не зависящей от координат: на характеристике (вариант 2), во всем теле (вариант 3).

Предположим, что в прикладных исследованиях метод спектральных моментов будет проявлять хотя бы вполовину те же качества, как в рассмотренных тестовых задачах. Это дает радикальную (в некоторых задачах до  $10^5$  раз) экономию вычислительных ресурсов ЭВМ. «Инженерная» точность расчета (~20%) может быть достигнута при решении от 4-х до 20-ти уравнений (несколько групп по 4 уравнения в каждой). Высокая, прецизионная точность (не ниже точности входных данных о спектральных коэффициентах поглощения) – при решении не более 50 уравнений. Эти цифры «окончательные»: не зависят от количества и характера немонотонностей в спектре коэффициента поглощения<sup>5</sup>. Для метода спектральных моментов нет разницы, одну линию или миллион линий содержит коэффициент поглощения.

## Список литературы

- [1] *Б. Дэвисон*. Теория переноса нейтронов. Пер. с англ., М.: Атомиздат, 1960. - 520 стр.
- [2] *G.C. Pomraning*. The equations of radiation hydrodynamics. New York: Pergamon Press, 1973. – 298 pp.
- [3] *Ю.Д. Шмыглевский*. Расчет переноса лучистой энергии методом Галеркина. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 2, с. 398-407.
- [4] *В.М. Кривцов, И.Н. Наумова, Ю.Д. Шмыглевский, Н.П. Шулишина*. Проба двух методов расчета переноса излучения. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 1, с. 163–171.
- [5] *Ю.Д. Шмыглевский*. Моментный метод расчета переноса селективного излучения. В кн. "Динамика излучающего газа", Вып. 2. / Ред. Ю.Д. Шмыглевский. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1976, с. 42-60.
- [6] *В.М. Кривцов*. О расчете селективного излучения. В кн.: "Динамика излучающего газа", Вып. 2. / Ред. Ю.Д. Шмыглевский. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1976, с. 36-41.

<sup>4</sup> В теории переноса излучения это приближение называется «серой материей».

<sup>5</sup> Если локальные максимумы коэффициента привязаны к оси энергий фотонов.

- [7] Ю.Д. Шмыглевский. Вариант моментного метода расчета переноса селективного излучения. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, том 17, № 3, с. 785–790.
- [8] А.А. Чарахчян, Ю.Д. Шмыглевский. Численные методы в динамике излучающего газа. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, том 20, № 5, с. 1249-1265.
- [9] И.Л. Цветкова, А.В. Шильков. Осреднение уравнения переноса в резонансно поглощающей среде. // Математ. моделирование, 1989, том 1, №1, с.91-100.
- [10] А.В. Шильков. Методы осреднения сечений и энергетического спектра в задачах переноса нейтронов. // Математ. моделирование, 1991, том 3, №2, с.63-81.
- [11] A. V. Shilkov. Generalized Multigroup Approximation and Lebesgue Averaging Method in Particle Transport Problems. // Transp. Theory and Stat. Physics. 1994, v.23, No 6, p.781-814.
- [12] А.В. Шильков, И.Л. Цветкова, С.В. Шилькова. Система ATRAD для расчетов атмосферной радиации: лебеговское осреднение спектров и сечений поглощения. // Матем. моделирование, 1997, т.9, № 6, с. 3-24.
- [13] А.В. Шильков, М.Н. Герцев. Верификация метода лебеговского осреднения. // Матем. моделирование, 2015, том 27, № 8, с. 13-31.
- [14] W.M. Elsasser. Mean Absorption and Equivalent Absorption Coefficient of a Band Spectrum. // Physical Review, 1938, v. 54, p. 126.
- [15] W. Zdunkowski, T. Trautmann, A. Bott. Radiation in the atmosphere: A course in Theoretical Meteorology. New York: Cambridge University Press, 2007. - 498 pp.

## Приложение

### Многочлены Чебышева

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \xi, \quad P_2 = 2\xi^2 - 1, \quad P_3 = 4\xi^3 - 3\xi, \quad P_4 = 8\xi^4 - 8\xi^2 + 1,$$

$$P_5 = 16\xi^5 - 20\xi^3 + 5\xi, \quad P_6 = 32\xi^6 - 48\xi^4 + 18\xi^2 - 1, \dots$$

$$P_n = \cos(n \cdot \theta) = \cos(n \cdot \arccos \xi), \quad \xi = \cos \theta, \quad \theta = \arccos \xi,$$

$$P_{n+1} = [2 - \delta_{0n}] \xi P_n - P_{n-1}, \quad \frac{dP_n}{d\xi} = n \cdot \frac{P_{n-1} - \xi P_n}{1 - \xi^2} = \frac{n[P_{n-1} - P_{n+1}]}{2[1 - \xi^2]},$$

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n P_m}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = \int_0^\pi \frac{\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} [1 + \delta_{n0}] \delta_{nm},$$

$$f(\xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\xi) f_n}{1 + \delta_{n0}}, \quad f_n = \int_{-1}^1 \frac{P_n(\xi) f(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi.$$

**N=1:**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{(0)} = 3 + 2\sqrt{2}, \quad \lambda^{(1)} = 3 - 2\sqrt{2}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} & 0 \\ 0 & \lambda^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}' = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)}/16 & -\lambda^{(0)}/16 \\ \lambda^{(1)}/16 & -\lambda^{(1)}/16 \end{pmatrix}.$$

**N=2:**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{(0)} = 7 + 4\sqrt{3} = 1/\lambda^{(2)},$$

$$\lambda^{(1)} = 1, \quad \lambda^{(2)} = 7 - 4\sqrt{3} = 1/\lambda^{(0)},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ a & 0 & -a \\ b & -1/3 & b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6a & 6b \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -6a & 6b \end{pmatrix}, \quad a = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{6}, \quad b = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3},$$

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}' = \begin{pmatrix} [5\sqrt{3}+4]/24 & -[\sqrt{3}+1]/3 & [3\sqrt{3}+4]/24 \\ [2\sqrt{3}-1]/12 & 1/6 & -[2\sqrt{3}+1]/12 \\ -[3\sqrt{3}-4]/24 & [\sqrt{3}-1]/3 & -[5\sqrt{3}-4]/24 \end{pmatrix}.$$

**N=3:**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 8 & 4 \\ 6 & 11 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & -1/4 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{(0)} = 7 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{20+14\sqrt{2}},$$

$$\lambda^{(1)} = 7 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{20-14\sqrt{2}},$$

$$\lambda^{(2)} = 7 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20-14\sqrt{2}},$$

$$\lambda^{(3)} = 7 + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{20+14\sqrt{2}},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ a & c & -c & -a \\ b & -b & -b & b \\ c & -a & a & -c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 8a & 8b & 8c \\ 1 & 8c & -8b & -8a \\ 1 & -8c & -8b & 8a \\ 1 & -8a & 8b & -8c \end{pmatrix},$$

$$a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8} = \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{8}, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{4}, \quad c = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8} = \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{8},$$

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0.59169729547369 & -1.1975137524242 & 1.0061720362417 & -0.40035557929114 \\ 0.21925457306518 & 0.35492400165973 & -0.81686376791537 & 0.24268519319046 \\ -0.087355107300551 & 0.44186376791537 & 0.020075998340274 & -0.37458465895509 \\ 0.025355579291143 & -0.10084195035178 & 0.29218366653433 & -0.21669729547369 \end{pmatrix}.$$

---

**N=4:**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 8 & 15 & 12 & 8 & 4 \\ 6 & 12 & 11 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & -1/4 & 0 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^{(0)} = 3 + 4[2 + \sqrt{5}][1 + 10c] = 1/\lambda^{(4)}, \quad \lambda^{(1)} = 4[3 - \sqrt{5}][1 + 5c] - 1 = 1/\lambda^{(3)}, \quad \lambda^{(2)} = 1,$$

$$a = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{5}\cos\frac{\pi}{10}, \quad b = \frac{\sqrt{5}+1}{20} = \frac{1}{5}\cos\frac{\pi}{5}, \quad c = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{5}\cos\frac{3\pi}{10}, \quad d = \frac{\sqrt{5}-1}{20} = \frac{1}{5}\cos\frac{2\pi}{5},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ a & c & 0 & -c & -a \\ b & -d & -1/5 & -d & b \\ c & -a & 0 & a & -c \\ d & -b & 1/5 & -b & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 10a & 10b & 10c & 10d \\ 1 & 10c & -10d & -10a & -10b \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -10c & -10d & 10a & -10b \\ 1 & -10a & 10b & -10c & 10d \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0.62797543233282 & -1.3656819348443 & 1.4252101510515 \\ 0.22279948020981 & 0.46450336353161 & -1.0807130613366 \\ -0.10065644924146 & 0.52638756136060 & 0.2 \\ 0.049739519466165 & -0.19593614156140 & 0.58628587033670 \\ -0.015312730244809 & 0.055602783284803 & -0.13078296005155 \\ & -1.1028163787848 & 0.41531273024481 \\ & 0.59593614156139 & -0.20252592396621 \\ & -0.84999435911058 & 0.22426324699144 \\ & -0.064503363531613 & -0.37558588470986 \\ & 0.31846833934437 & -0.22797543233282 \end{pmatrix}.$$

---

**N=5:**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 11 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 10 & 19 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 8 & 16 & 15 & 12 & 8 & 4 \\ 6 & 12 & 12 & 11 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & -1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 5/4 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & -3/4 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5/4 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^{(0)} = 15 + 6\sqrt{6} + 8\sqrt{3} + 10\sqrt{2} = 1/\lambda^{(5)}, \quad \lambda^{(1)} = 3 + 2\sqrt{2} = 1/\lambda^{(4)},$$

$$\begin{aligned}\lambda^{(2)} &= 15 - 8\sqrt{3} + 6\sqrt{6} - 10\sqrt{2} = 1/\lambda^{(3)}, & \lambda^{(3)} &= 15 - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 10\sqrt{2} = 1/\lambda^{(2)}, \\ \lambda^{(4)} &= 3 - 2\sqrt{2} = 1/\lambda^{(1)}, & \lambda^{(5)} &= 15 - 6\sqrt{6} + 8\sqrt{3} - 10\sqrt{2} = 1/\lambda^{(0)}, & a &= \frac{\sqrt{3}+1}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\cos\frac{\pi}{12}, \\ b &= \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{6}\cos\frac{\pi}{6}, & c &= \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{6}\cos\frac{\pi}{4}, & d &= \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\cos\frac{\pi}{3}, & e &= \frac{\sqrt{3}-1}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\cos\frac{5\pi}{12},\end{aligned}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ a & c & e & -e & -c & -a \\ b & 0 & -b & -b & 0 & b \\ c & -c & -c & c & c & -c \\ d & -1/6 & d & d & -1/6 & d \\ e & -c & a & -a & c & -e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 12a & 12b & 12c & 12d & 12e \\ 1 & 12c & 0 & -12c & -2 & -12c \\ 1 & 12e & -12b & -12c & 12d & 12a \\ 1 & -12e & -12b & 12c & 12d & -12a \\ 1 & -12c & 0 & 12c & -2 & 12c \\ 1 & -12a & 12b & -12c & 12d & -12e \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.65104933704916 & -1.4725136492044 & 1.7053048343847 \\ 0.22337746374182 & 0.53242394137717 & -1.2476248539891 \\ -0.10650595643161 & 0.56981845219247 & 0.32695872900532 \\ 0.060687314634693 & -0.24051544963757 & 0.74680836607646 \\ -0.032360241811856 & 0.11575727471050 & -0.27019931194841 \\ 0.010238802340477 & -0.035300655328050 & 0.075569041883650 \\ -1.6305902117040 & 1.1736551584817 & -0.42690546900714 \\ 0.83937656352526 & -0.53242394137717 & 0.18487082672204 \\ -1.1634750327431 & 0.54553661945794 & -0.17233281148099 \\ 0.089707937661343 & -0.87483962201284 & 0.21815145327791 \\ 0.67844760241227 & -0.11575727471050 & -0.37588804865201 \\ -0.15028366456432 & 0.33415914605073 & -0.23438267038249 \end{pmatrix}.$$

---

**N=6:**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 & 24 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 12 & 23 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 10 & 20 & 19 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 8 & 16 & 16 & 15 & 12 & 8 & 4 \\ 6 & 12 & 12 & 12 & 11 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & -1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/4 & 0 & 5/4 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/4 & 3/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\lambda^{(0)} &= 15 + 6\sqrt{6} + 8\sqrt{3} + 10\sqrt{2} = 1/\lambda^{(5)}, & \lambda^{(1)} &= 3 + 2\sqrt{2} = 1/\lambda^{(4)}, \\ \lambda^{(2)} &= 15 - 8\sqrt{3} + 6\sqrt{6} - 10\sqrt{2} = 1/\lambda^{(3)}, & \lambda^{(3)} &= 15 - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6} + 10\sqrt{2} = 1/\lambda^{(2)}, \\ \lambda^{(4)} &= 3 - 2\sqrt{2} = 1/\lambda^{(1)}, & \lambda^{(5)} &= 15 - 6\sqrt{6} + 8\sqrt{3} - 10\sqrt{2} = 1/\lambda^{(0)},\end{aligned}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} g & g & g & g & g & g & g \\ a & c & e & 0 & -e & -c & -a \\ b & f & -d & -g & -d & f & b \\ c & -e & -a & 0 & a & e & -c \\ d & -b & -f & g & -f & -b & d \\ e & -a & c & 0 & -c & a & -e \\ f & -d & b & -g & b & -d & f \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 14a & 14b & 14c & 14d & 14e & 14f \\ 1 & 14c & 14f & -14e & -14b & -14a & -14d \\ 1 & 14e & -14d & -14a & -14f & 14c & 14b \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -14e & -14d & 14a & -14f & -14c & 14b \\ 1 & -14c & 14f & 14e & -14b & 14a & -14d \\ 1 & -14a & 14b & -14c & 14d & -14e & 14f \end{pmatrix},$$

$$a = x + \sqrt{7}/42 = 0.13927541602597478, \quad d = y - 1/42 = 0.08906997169410479,$$

$$b = [1 + 21y + \sqrt{21}\sqrt{1 - 63y^2}]/42 = 0.12870983827177413,$$

$$c = [-21x + \sqrt{7} + \sqrt{21}\sqrt{1 - 63x^2}]/42 = 0.11169021178114712,$$

$$e = [21x - \sqrt{7} + \sqrt{21}\sqrt{1 - 63x^2}]/42 = 0.061983391302508402,$$

$$f = [1 + 21y - \sqrt{21}\sqrt{1 - 63y^2}]/42 = 0.03178870485090209, \quad g = 1/7.$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.65104933704916 & -1.4725136492044 & 1.7053048343847 \\ 0.22337746374182 & 0.53242394137717 & -1.2476248539891 \\ -0.10650595643161 & 0.56981845219247 & 0.32695872900532 \\ 0.060687314634693 & -0.24051544963757 & 0.74680836607646 \\ -0.032360241811856 & 0.11575727471050 & -0.27019931194841 \\ 0.010238802340477 & -0.035300655328050 & 0.075569041883650 \\ -1.6305902117040 & 1.1736551584817 & -0.42690546900714 \\ 0.83937656352526 & -0.53242394137717 & 0.18487082672204 \\ -1.1634750327431 & 0.54553661945794 & -0.17233281148099 \\ 0.089707937661343 & -0.87483962201284 & 0.21815145327791 \\ 0.67844760241227 & -0.11575727471050 & -0.37588804865201 \\ -0.15028366456432 & 0.33415914605073 & -0.23438267038249 \end{pmatrix}.$$

### Многочлены Лежандра

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \xi, \quad P_2 = \frac{3\xi^2 - 1}{2}, \quad P_3 = \frac{5\xi^3 - 3\xi}{2}, \quad P_4 = \frac{35\xi^4 - 30\xi^2 + 3}{8},$$

$$P_5 = \frac{63\xi^5 - 70\xi^3 + 15\xi}{8}, \quad P_6 = \frac{231\xi^6 - 315\xi^4 + 105\xi^2 - 5}{16}, \dots$$

$$P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \xi P_n - \frac{n}{n+1} \cdot P_{n-1}, \quad \frac{dP_n}{d\xi} = n \cdot \frac{P_{n-1} - \xi P_n}{1 - \xi^2} = \frac{n[n+1]}{2n+1} \cdot \frac{P_{n-1} - P_{n+1}}{1 - \xi^2},$$

$$\int_{-1}^1 P_n P_m d\xi = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1}, \quad f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\xi) f_n, \quad f_n = \int_{-1}^1 P_n(\xi) f(\xi) d\xi.$$

---

**N=1:**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 6/5 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \lambda^{(0)} = 2 + \sqrt{3}, \\ \lambda^{(1)} = 2 - \sqrt{3}, \end{array} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ a & -a \end{pmatrix}, \quad a = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} [2\sqrt{3}+1]/10 & -[2\sqrt{3}+1]/10 \\ [2\sqrt{3}-1]/10 & -[2\sqrt{3}-1]/10 \end{pmatrix}.$$


---

**N=2:**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8/3 & 5 & 10/3 \\ 5/3 & 4 & 10/3 \\ 2/3 & 2 & 7/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/7 \\ 0 & 0 & 10/7 \\ 0 & -1/5 & 3/7 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \lambda^{(0)} = 4 + \sqrt{15}, \quad \lambda^{(1)} = 1, \\ \lambda^{(2)} = 4 - \sqrt{15}, \end{array}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & 4c & a \\ b & 0 & -b \\ c & -2c & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & d & 2 \\ 1 & 0 & -5/2 \\ 1 & -d & 2 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{5}{18}, \quad b = \frac{\sqrt{15}}{18}, \quad c = \frac{1}{9}, \quad d = \frac{9}{\sqrt{15}},$$

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} [9\sqrt{15}+10]/70 & -[4\sqrt{15}+6]/21 & [13\sqrt{15}+30]/210 \\ [7\sqrt{15}-6]/84 & 1/7 & -[7\sqrt{15}+6]/84 \\ -[13\sqrt{15}-30]/210 & [4\sqrt{15}-6]/21 & -[9\sqrt{15}-10]/70 \end{pmatrix}.$$


---

**N=3:**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 19/6 & 13/2 & 35/6 & 7/2 \\ 13/6 & 11/2 & 35/6 & 7/2 \\ 7/6 & 7/2 & 29/6 & 7/2 \\ 1/2 & 3/2 & 5/2 & 5/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -1/5 & 0 & 28/15 \\ 0 & 0 & -3/7 & 2/3 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^{(0)} = \frac{1}{\lambda^{(3)}} = \frac{1}{2}[8 + \sqrt{30} + \sqrt{90 + 16\sqrt{30}}], \quad \lambda^{(1)} = \frac{1}{\lambda^{(2)}} = \frac{1}{2}[8 - \sqrt{30} + \sqrt{90 - 16\sqrt{30}}],$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}} = \frac{1}{2}[8 - \sqrt{30} - \sqrt{90 - 16\sqrt{30}}], \quad \lambda^{(3)} = \frac{1}{\lambda^{(0)}} = \frac{1}{2}[8 + \sqrt{30} - \sqrt{90 + 16\sqrt{30}}],$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{30}}{72} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{30}}{72} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{30}}{72} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{30}}{72} \\ \frac{1}{12} \sqrt{\frac{75+4\sqrt{30}}{30}} & \frac{1}{12} \sqrt{\frac{75-4\sqrt{30}}{30}} & -\frac{1}{12} \sqrt{\frac{75-4\sqrt{30}}{30}} & -\frac{1}{12} \sqrt{\frac{75+4\sqrt{30}}{30}} \\ \frac{7}{12\sqrt{30}} & -\frac{7}{12\sqrt{30}} & -\frac{7}{12\sqrt{30}} & \frac{7}{12\sqrt{30}} \\ \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{30}} & -\frac{1}{12} \sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{30}} & \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{30}} & -\frac{1}{12} \sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{30}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} & \frac{3\sqrt{30}+5}{7} & \sqrt{\frac{3[75-4\sqrt{30}]}{35}} \\ 1 & 3\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} & -\frac{3\sqrt{30}-5}{7} & -\sqrt{\frac{3[75+4\sqrt{30}]}{35}} \\ 1 & -3\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}} & -\frac{3\sqrt{30}-5}{7} & \sqrt{\frac{3[75+4\sqrt{30}]}{35}} \\ 1 & -3\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}} & \frac{3\sqrt{30}+5}{7} & -\sqrt{\frac{3[75-4\sqrt{30}]}{35}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.74075754106270 & -1.4137166552585 & 1.0581785061440 & -0.38521939194829 \\ 0.24682495874320 & 0.39332069572324 & -0.87367002867495 & 0.23352437420851 \\ -0.10192266028415 & 0.54033669534162 & -0.059987362389905 & -0.37842667266757 \\ 0.051886058614961 & -0.21388014711988 & 0.56941829623429 & -0.40742420772937 \end{pmatrix}.$$

**N=4:**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 107/30 & 77/10 & 47/6 & 63/10 & 18/5 \\ 77/30 & 67/10 & 47/6 & 63/10 & 18/5 \\ 47/30 & 47/10 & 41/6 & 63/10 & 18/5 \\ 9/10 & 27/10 & 9/2 & 53/10 & 18/5 \\ 2/5 & 6/5 & 2 & 14/5 & 13/5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 10/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10/11 \\ 0 & -1/5 & 0 & 6/5 & 10/11 \\ 0 & 0 & -3/7 & 0 & 180/77 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 & 10/11 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^{(0)} = \frac{1}{\lambda^{(4)}} = 6 + \sqrt{\frac{35}{2}} + \sqrt{\frac{105}{2} + 6\sqrt{70}} = 20.317381323979,$$

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{\lambda^{(3)}} = 6 - \sqrt{\frac{35}{2}} + \sqrt{\frac{105}{2} - 6\sqrt{70}} = 3.3334063016654, \quad \lambda^{(2)} = 1,$$

$$\lambda^{(3)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}} = 6 - \sqrt{\frac{35}{2}} - \sqrt{\frac{105}{2} - 6\sqrt{70}} = 0.29999343299387,$$

$$\lambda^{(4)} = \frac{1}{\lambda^{(0)}} = 6 + \sqrt{\frac{35}{2}} - \sqrt{\frac{105}{2} + 6\sqrt{70}} = 0.049218941361293,$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{322-13\sqrt{70}}{1800} & \frac{322+13\sqrt{70}}{1800} & \frac{64}{225} & \frac{322+13\sqrt{70}}{1800} & \frac{322-13\sqrt{70}}{1800} \\ \frac{\sqrt{7595-164\sqrt{70}}}{300\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{7595+164\sqrt{70}}}{300\sqrt{6}} & 0 & -\frac{\sqrt{7595+164\sqrt{70}}}{300\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{7595-164\sqrt{70}}}{300\sqrt{6}} \\ \frac{11\sqrt{70}+64}{1800} & -\frac{11\sqrt{70}-64}{1800} & -\frac{32}{225} & -\frac{11\sqrt{70}-64}{1800} & \frac{11\sqrt{70}+64}{1800} \\ \frac{3\sqrt{105-6\sqrt{70}}}{100\sqrt{14}} & -\frac{3\sqrt{105+6\sqrt{70}}}{100\sqrt{14}} & 0 & \frac{3\sqrt{105+6\sqrt{70}}}{100\sqrt{14}} & -\frac{3\sqrt{105-6\sqrt{70}}}{100\sqrt{14}} \\ \frac{\sqrt{70}-4}{150} & -\frac{\sqrt{70}+4}{150} & \frac{8}{75} & -\frac{\sqrt{70}+4}{150} & \frac{\sqrt{70}-4}{150} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{35+2\sqrt{70}}}{\sqrt{7}} & \frac{5[\sqrt{70}+7]}{21} & \frac{\sqrt{7595+164\sqrt{70}}}{27} & \frac{4[5\sqrt{70}-7]}{63} \\ 1 & \frac{\sqrt{35-2\sqrt{70}}}{\sqrt{7}} & -\frac{5[\sqrt{70}-7]}{21} & -\frac{\sqrt{7595-164\sqrt{70}}}{27} & -\frac{4[5\sqrt{70}+7]}{63} \\ 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{27}{8} \\ 1 & -\frac{\sqrt{35-2\sqrt{70}}}{\sqrt{7}} & -\frac{5[\sqrt{70}-7]}{21} & \frac{\sqrt{7595-164\sqrt{70}}}{27} & -\frac{4[5\sqrt{70}+7]}{63} \\ 1 & -\frac{\sqrt{35+2\sqrt{70}}}{\sqrt{7}} & \frac{5[\sqrt{70}+7]}{21} & -\frac{\sqrt{7595+164\sqrt{70}}}{27} & \frac{4[5\sqrt{70}-7]}{63} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0.79966807677636 & -1.6702413399773 & 1.6314938111836 \\ 0.24214659718155 & 0.54895634779933 & -1.2149435339564 \\ -0.10096362230323 & 0.57716457269759 & 0.18181818181818 \\ 0.057144150662228 & -0.24574701490562 & 0.74446808449211 \\ -0.032280254167659 & 0.12698664644176 & -0.29906549976644 \\ & -1.1568371657867 & 0.39591661780402 \\ & 0.60938337854198 & -0.18554278956643 \\ & -0.85822366963715 & 0.20020453742461 \\ & -0.18531998416297 & -0.37054523608575 \\ & 0.64039082063234 & -0.43603171314000 \end{pmatrix}.$$

---

**N=5:**

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 39/10 & 87/10 & 19/2 & 259/30 & 33/5 & 11/3 \\ 29/10 & 77/10 & 19/2 & 259/30 & 33/5 & 11/3 \\ 19/10 & 57/10 & 17/2 & 259/30 & 33/5 & 11/3 \\ 37/30 & 37/10 & 37/6 & 229/30 & 33/5 & 11/3 \\ 11/15 & 11/5 & 11/3 & 77/15 & 28/5 & 11/3 \\ 1/3 & 1 & 5/3 & 7/3 & 3 & 8/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15/13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15/13 \\ 0 & -1/5 & 0 & 6/5 & 0 & 15/13 \\ 0 & 0 & -3/7 & 0 & 10/7 & 15/13 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 & 0 & 110/39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10/11 & 15/13 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \lambda^{(0)} &= 28.616253702315, & \lambda^{(1)} &= 4.9033512739303, & \lambda^{(2)} &= 1.6268064067852, \\ \lambda^{(3)} &= 0.61470129194790, & \lambda^{(4)} &= 0.20394214979390, & \lambda^{(5)} &= 0.034945175228129, \end{aligned}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.085662246189586 & 0.18038078652407 & 0.23395696728635 \\ 0.079877433089954 & 0.11926946918788 & 0.055826621112361 \\ 0.068893783748983 & 0.028102745556780 & -0.096996529305763 \\ 0.053817299713416 & -0.048543314212561 & -0.075793135534634 \\ 0.036149896997378 & -0.077247325430757 & 0.041097428433379 \\ 0.017621778634218 & -0.053103330607566 & 0.078286451288901 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.23395696728635 & 0.18038078652407 & 0.085662246189586 \\ -0.055826621112361 & -0.11926946918788 & -0.079877433089954 \\ -0.096996529305763 & 0.028102745556780 & 0.068893783748983 \\ 0.075793135534634 & 0.048543314212561 & -0.053817299713416 \\ 0.041097428433379 & -0.077247325430757 & 0.036149896997378 \\ -0.078286451288901 & 0.053103330607566 & -0.017621778634218 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2.7974085426095 & 4.0212454618869 \\ 1 & 1.9836281593988 & 0.77898389563319 \\ 1 & 0.71585755824959 & -2.0729566302474 \\ 1 & -0.71585755824959 & -2.0729566302474 \\ 1 & -1.9836281593988 & 0.77898389563319 \\ 1 & -2.7974085426095 & 4.0212454618869 \\ 4.3977494725058 & 3.7980450834356 & 2.2628354216558 \\ -1.8838103882122 & -3.8542127588741 & -3.2383528641798 \\ -2.2677330574775 & 1.5809610638682 & 3.6808092281514 \\ 2.2677330574775 & 1.5809610638682 & -3.6808092281514 \\ 1.8838103882122 & -3.8542127588741 & 3.2383528641798 \\ -4.3977494725058 & 3.7980450834356 & -2.2628354216558 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.8378635098329514 & -1.8447894919997512 & 2.068782304949098 \\ 0.238234569413124 & 0.6500680367843379 & -1.4526447968965925 \\ -0.09935389080022392 & 0.5953039718265499 & 0.3575055903652897 \\ 0.05767425034596738 & -0.2561360747667306 & 0.8416202790830244 \\ -0.0369739520029477 & 0.14764066831367711 & -0.36498272550085636 \\ 0.02200126935404241 & -0.08424725616164523 & 0.18983664007879683 \\ -1.8985275842600 & 1.2432879154471 & -0.40661665396943 \\ 0.93199374398420 & -0.53225605292906 & 0.16460449964399 \\ -1.2262356636984 & 0.51702870164817 & -0.14424870934138 \\ 0.027109794250095 & -0.85619659870799 & 0.18592834979563 \\ 0.88563377841325 & -0.26545265216895 & -0.36586511705417 \\ -0.36009136076787 & 0.68574883271425 & -0.45324812521757 \end{pmatrix}.$$


---