



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 81 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Бойко А.В., Демьянко К.В.,
Нечепуренко Ю.М.**

О расчете положения
ламинарно-турбулентного
перехода в пограничных
слоях с учетом сжимаемости

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бойко А.В., Демьянко К.В., Нечепуренко Ю.М. О расчете положения ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях с учетом сжимаемости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 81. 21 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-81>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Российской академии наук

А. В. Бойко, К. В. Демьянко, Ю. М. Нечепуренко

О расчете положения
ламинарно-турбулентного перехода
в пограничных слоях
с учетом сжимаемости

МОСКВА, 2015 г.

А. В. Бойко, К. В. Демьянко, Ю. М. Нечепуренко

О расчете положения ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях с учетом сжимаемости

Аннотация. Описаны и обоснованы уравнения распространения малых возмущений в пограничных слоях с учетом сжимаемости и теплопереноса, ориентированные на расчет положения ламинарно-турбулентного перехода e^N -методом для аэродинамических приложений. Приведены результаты расчетов N -факторов и положений перехода в локально-параллельном приближении для плоской пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком под нулевым углом атаки. Результаты хорошо согласуются с известными расчетными и экспериментальными данными.

Ключевые слова: сжимаемые течения, ламинарно-турбулентный переход, уравнения распространения малых возмущений, e^N -метод

A. V. Boiko, K. V. Demyanko, Yu. M. Nечepurenko

On computing the location of laminar-turbulent transition in compressible boundary layers

Abstract. Evolution equations of small disturbances directed to compute the location of laminar-turbulent transition in boundary layers by the e^N -method with account of compressibility and heat transfer are described and justified for aerodynamic applications. Results of the computation of N -factors and transition locations with the use of locally-parallel flow assumption for a flat plate exposed to supersonic flow at zero angle of attack are given. The results agree well with known numerical and experimental data.

Key words: compressible flows, laminar-turbulent transition, evolution equations of small disturbances, e^N -method

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

1. Введение

Ламинарно-турбулентный (Л-Т) переход в пограничном слое на обтекаемой поверхности привлекает повышенное внимание исследователей на протяжении ряда последних десятилетий, поскольку от его положения и протяженности существенно зависит экономичность летательных аппаратов (при прочих равных условиях ламинарное обтекание оказывается предпочтительнее). Процесс перехода также оказывает существенное влияние на отрыв потока и теплоперенос в пограничном слое, что во многом определяет требования к различным элементам конструкции, а также размещению приборов и другого оборудования.

Коммерческие программы расчета нестационарных течений на основе усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS), такие как ANSYS (США) и ЛОГОС (Россия), не в состоянии рассчитать Л-Т переход непосредственно, поскольку они не достаточно точно воспроизводят эволюцию малых (по амплитуде и масштабам) возмущений в ламинарной части пограничного слоя, вызывающих Л-Т переход. Однако в этих программах при использовании большинства моделей турбулентности можно в том или ином виде задать положение Л-Т перехода, определенное каким-либо другим способом. При этом определяющим фактором адекватного моделирования становится правильное задание положения Л-Т перехода. Если положение перехода задано неверно, расчеты могут приводить к существенным ошибкам, например, в определении сопротивления летательного аппарата.

В настоящее время имеются специализированные промышленные программные комплексы, достаточно точно воспроизводящие распространение малых возмущений в сравнительно простых течениях. Они ориентированы на расчет положения Л-Т перехода в пограничном слое, который осуществляется в их рамках по критериям, основанным на достижении возмущениями некоторой пороговой амплитуды. Наиболее известными из таких программных комплексов являются GTPТ (Graphical Transition Prediction Toolkit) и NOLOT (NOOnLocal Transition analysis). NOLOT был разработан в середине 1990-х годов совместно Abteilung Transition und Turbulenz DLR (Отделение перехода и турбулентности Немецкого аэрокосмического центра), Геттинген, Германия, и FFA/КТН (Аэрокосмический исследовательский институт Королевского технологического университета), Стокгольм, Швеция. GTPТ был разработан в то же время High Technology Corporation, Хэмптон, США. До настоящего времени оба этих программных комплекса успешно применялись для решения различных инженерных задач, однако самих кодов и полных описаний использованных в них алгоритмов нет ни

в свободном доступе, ни в свободной продаже.

В 2011 г. авторы данной работы А.В. Бойко и Ю.М. Нечепуренко разработали концепцию и создали макет первого российского промышленного модуля для расчета положения Л-Т перехода в дозвуковых течениях. В 2012 г. были успешно выполнены ОКР по его интеграции в аэродинамическую часть пакета ЛОГОС (договор N 13058 с ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ») [1]. Работа над этим программным комплексом продолжилась, в том числе в рамках НИР, проводимой в ИВМ РАН по теме «Методология суперкомпьютерного моделирования турбулентных аэродинамических и гидродинамических течений в индустриальных задачах внешнего обтекания» (гос. контракт № 14.514.11.4057) [2]. В 2013 г. был разработан и зарегистрирован «Программный комплекс LOTRANxx для расчета положения ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях течений вязкой несжимаемой жидкости над поверхностями малой кривизны» (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013660060).

Данная работа посвящена описанию новой версии этого комплекса, разрабатываемой в ИПМ им. Келдыша РАН и ориентированной на расчет положения Л-Т перехода в аэродинамических течениях с учетом сжимаемости и теплопереноса в широком диапазоне чисел Маха и Прандтля. Основной упор сделан на описание и обоснование используемых уравнений распространения малых возмущений. Приведены результаты расчетов N -факторов и положений начала и конца перехода в локально-параллельном приближении для плоской пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком под нулевым углом атаки. Результаты хорошо согласуются с известными расчетными и экспериментальными данными.

2. Уравнения тепло-массопереноса

Рассмотрим уравнения движения идеального газа, выражающие, соответственно, законы сохранения импульса, энергии и массы [3]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j - \tau_{ij}) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho e_0)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j e_0 + q_j - u_i \tau_{ij}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где ρ — плотность, x_j , u_j и q_j ($j = 1, 2, 3$) — декартовы координаты, компоненты скорости и теплового потока соответственно, e_0 — полная энергия,

выражаемая через внутреннюю и кинетическую энергии как

$$e_0 = c_v T + \frac{u_k u_k}{2},$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, и τ_{ij} — тензор напряжений [4]. Будем рассматривать ньютоновскую (изотропную) сплошную среду:

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - p)\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

где e_{ij} — тензор скоростей деформации, p — статическое давление, μ и λ — первый и второй коэффициенты вязкости соответственно. В теории упругости аналоги этих коэффициентов называют параметрами Ламе [4]. В механике жидкости и газа μ совпадает с динамической вязкостью.

Предполагаем следующую линейную зависимость между μ и λ :

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}(d - 1), \quad (2)$$

где d — константа. Например, для одноатомных газов, принимая гипотезу Стокса [6], $d = 0$ и, следовательно,

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu.$$

Для замыкания уравнений движения необходимо задать уравнение состояния. Считая газ идеальным, имеем $p = \rho RT$, где

$$R = c_p - c_v = c_v(\gamma - 1), \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \quad (3)$$

Здесь R — универсальная газовая постоянная (своя для каждого газа), c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, γ — показатель адиабаты. При этом скорость звука

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}.$$

Будем учитывать только тепловой поток из-за теплопроводности и предположим, что он подчиняется закону Фурье:

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

Считаем, что коэффициенты переноса (вязкости μ и теплопроводности κ) и удельные теплоемкости c_p и c_v зависят только от температуры, причем, как это видно из уравнений (3) и Табл. 1 (для c_p коэффициент a_0 намного

порядков больше остальных коэффициентов), зависимостями c_p и c_v от T можно пренебречь.

Коэффициенты динамической вязкости μ и теплопроводности κ можно вычислить по следующим формулам из [3]:

$$\begin{aligned}\mu(T) &= 1.458 \cdot 10^{-6} \frac{T^{3/2}}{T + T_s}, & T > T_s, \\ \mu(T) &= 0.0693873 \cdot 10^{-6} T, & T \leq T_s,\end{aligned}$$

и

$$\kappa = 0.6325\sqrt{T} \left[1 + (245.4/T)10^{-12/T} \right]^{-1},$$

где $T_s = 110.4$ и значение температуры берется в Кельвинах, либо воспользовавшись эмпирическими полиномиальными аппроксимациями. Для воздуха коэффициенты соответствующих полиномов, взятые из работы [5], приведены в Табл. 1.

Таблица 1: Зависимости c_p , μ и κ от температуры для воздуха: $f(T) = \sum_{i=0}^4 a_i T^i$.

a_i	c_p [J/kgK]	μ [Ns/m ²]	κ [W/mK]
0	$1.058183878 \cdot 10^3$	$-1.561632014 \cdot 10^{-7}$	$-1.305884703 \cdot 10^{-3}$
1	$-4.524570490 \cdot 10^{-1}$	$7.957989891 \cdot 10^{-8}$	$1.099134492 \cdot 10^{-4}$
2	$1.141345435 \cdot 10^{-3}$	$-6.930149679 \cdot 10^{-11}$	$-6.846970870 \cdot 10^{-8}$
3	$-7.957390422 \cdot 10^{-7}$	$4.068157752 \cdot 10^{-14}$	$3.327083322 \cdot 10^{-11}$
4	$1.910858151 \cdot 10^{-10}$	$-9.182486030 \cdot 10^{-18}$	$-5.397866355 \cdot 10^{-15}$

Введем числа Маха, Рейнольдса и Прандтля в набегающем потоке:

$$\text{Pr}_\infty = \frac{c_{p,\infty}\mu_\infty}{\kappa_\infty}, \quad M_\infty = \frac{U_\infty}{c_\infty}, \quad \text{Re}_\infty = \frac{U_\infty L_{\text{ref}} \rho_\infty}{\mu_\infty}, \quad (4)$$

где L_{ref} означает характерную длину (например, длину обтекаемого тела), а индексом ∞ обозначены величины в набегающем потоке, и выполним следующую нормировку:

$$\begin{aligned}x_i &\rightarrow \frac{x_i}{L_{\text{ref}}}, & u_i &\rightarrow \frac{u_i}{U_\infty}, & T &\rightarrow \frac{T}{T_\infty}, & \rho &\rightarrow \frac{\rho}{\rho_\infty}, \\ p &\rightarrow \frac{p}{\rho_\infty R T_\infty}, & \mu &\rightarrow \frac{\mu}{\mu_\infty}, & \lambda &\rightarrow \frac{\lambda}{\mu_\infty}, & \kappa &\rightarrow \frac{\kappa}{\kappa_\infty}.\end{aligned}$$

Сделанные предположения позволяют записать уравнения (1) в без-

размерных переменных u_i , T , ρ и p в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\
\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) &= -(\gamma - 1) \rho T \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\gamma}{\text{Pr}_\infty \text{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \\
&\quad + \gamma(\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{\text{Re}_\infty} \Pi, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} &= 0, \\
p &= \rho T,
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \Pi = \sigma_{ij} e_{ij}.$$

Здесь γ , Pr_∞ , M_∞ и Re_∞ — константы, определенные в (3) и (4), e_{ij} — нормированный тензор скоростей деформации, а нормированные коэффициенты первой μ и второй λ вязкости, связанные равенством (2), а также нормированный коэффициент теплопроводности зависят только от температуры T .

3. Уравнение распространения малых возмущений

Пусть стационарное течение

$$\begin{aligned}
u_i = \bar{u}_i(x_1, x_2), \quad T = \bar{T}(x_1, x_2), \quad \rho = \bar{\rho}(x_1, x_2), \quad p = \bar{p}(x_1, x_2), \\
\bar{\kappa} = \kappa(\bar{T}), \quad \bar{\mu} = \mu(\bar{T}), \quad \bar{\lambda} = \lambda(\bar{T}),
\end{aligned} \tag{6}$$

которое мы будем называть основным, является решением системы (5), то есть удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}
\bar{\rho} \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j}, \\
\bar{\rho} \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} &= -(\gamma - 1) \bar{\rho} \bar{T} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\gamma}{\text{Pr}_\infty \text{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\kappa} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + \gamma(\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{\text{Re}_\infty} \bar{\Pi}, \\
\frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u}_j)}{\partial x_j} &= 0, \\
\bar{p} &= \bar{\rho} \bar{T},
\end{aligned}$$

где

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\bar{\mu} \bar{e}_{ij} + \bar{\lambda} \bar{e}_{kk} \delta_{ij}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad \bar{\Pi} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{e}_{ij},$$

в некоторой области с некоторыми граничными условиями, зависящими от рассматриваемой конкретной задачи.

Рассмотрим близкое к (6) течение:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i(x_1, x_2) + \varepsilon u'_i(x_1, x_2, x_3, t), & T &= \bar{T}(x_1, x_2) + \varepsilon T'(x_1, x_2, x_3, t), \\ \rho &= \bar{\rho}(x_1, x_2) + \varepsilon \rho'(x_1, x_2, x_3, t), & p &= \bar{p}(x_1, x_2) + \varepsilon p'(x_1, x_2, x_3, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) и отбрасывая нелинейные по ε члены, получим линеаризованные уравнения распространения возмущений

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \rho' \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}, \\ \bar{\rho} \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + \rho' \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} &= \\ &= -(\gamma - 1) \left(\bar{\rho} \left(\bar{T} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} + T' \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \rho' \bar{T} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{\text{Pr}_\infty \text{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\kappa} \frac{\partial T'}{\partial x_j} + \bar{\kappa}_T T' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + \gamma(\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{\text{Re}_\infty} \Pi', \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} u'_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho' \bar{u}_j}{\partial x_j} &= 0, \\ p' &= \bar{\rho} T' + \rho' \bar{T}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= 2\bar{\mu} e'_{ij} + 2\bar{\mu}_T T' \bar{e}_{ij} + (\bar{\lambda} e'_{kk} + \bar{\lambda}_T T' \bar{e}_{kk}) \delta_{ij}, \\ e'_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right), \\ \Pi' &= \bar{\sigma}_{ij} e'_{ij} + 2\bar{\mu} e'_{ij} \bar{e}_{ij} + 2\bar{\mu}_T T' \bar{e}_{ij} \bar{e}_{ij} + (\bar{\lambda} e'_{kk} \bar{e}_{ij} + \bar{\lambda}_T T' \bar{e}_{kk} \bar{e}_{ij}) \delta_{ij}, \end{aligned}$$

а f_T означает производную по T и $\bar{f}_T = f_T(\bar{T})$.

Вводя обозначения $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $u = u_1$, $v = u_2$, $w = u_3$, уравнения (8) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} u' + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} u' + \left(\bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) u' + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} v' \right) + \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \rho' \\
& \quad = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \Sigma'_1, \\
& \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} v' + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} v' + \left(\bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) v' + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} u' \right) + \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \rho' \\
& \quad = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \Sigma'_2, \\
& \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} w' + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} w' + \left(\bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \right) w' + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} u' + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} v' \right) + \\
& \quad + \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \rho' = -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \Sigma'_3, \tag{9} \\
& \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} T' + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} T' + \left(\bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \right) T' + \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} u' + \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} v' \right) + \\
& + \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \rho' = -(\gamma - 1) \left(\bar{\rho} \left(\bar{T} \frac{\partial}{\partial x} u' + \bar{T} \frac{\partial}{\partial y} v' + \bar{T} \frac{\partial}{\partial z} w' + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) T' \right) + \left(\bar{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{T} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \rho' \right) + \\
& + \frac{\gamma}{\text{Pr}_\infty \text{Re}_\infty} \left(2\bar{\kappa}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} T' + \bar{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T' + \left(\frac{\partial}{\partial y} \bar{\kappa} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\kappa}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) T' + \right. \\
& \quad \left. + \bar{\kappa} \frac{\partial^2}{\partial z^2} T' + T' \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{\kappa}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\kappa}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) \right) + \gamma(\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{\text{Re}_\infty} \Pi', \\
& \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho' + \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x} u' + \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} u' + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\rho} v' + \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial z} w' + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \rho' + \\
& \quad + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho' = 0, \\
& \quad p' = \bar{\rho} T' + \rho' \bar{T},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Sigma'_1 &= (2\bar{\mu}_T + \bar{\lambda}_T) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} u' + (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u' + \bar{\lambda}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} v' + \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} v' + \\
& + \bar{\lambda}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} w' + \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} w' + T' \frac{\partial}{\partial x} \left((2\bar{\mu}_T + \bar{\lambda}_T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\lambda}_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \\
& + \left((2\bar{\mu}_T + \bar{\lambda}_T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{\lambda}_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} T' +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} u' + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial x} v' + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu}_T \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) T' \\
& + \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} u' + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} w' + \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} T', \\
\Sigma'_2 = & \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} u' + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u' + \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} v' + \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v' + \\
& + T' \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mu}_T \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \bar{\mu}_T \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} T' + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} u' + \frac{\partial}{\partial y} (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \frac{\partial}{\partial y} v' + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} w' + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left((2\bar{\mu}_T + \bar{\lambda}_T) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{\lambda}_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) T' + \\
& + \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} v' + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} w' + \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} T', \\
\Sigma'_3 = & \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} u' + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} u' + \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} w' + \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w' + \\
& + T' \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} T' + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial z} v' + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} w' + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} T' + \\
& + \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} u' + \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} v' + (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} w' + \bar{\lambda}_T \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z} T', \\
\Pi' = & \left(4\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 2\bar{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x} u' + 2\bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} u' + 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} u' + \\
& + 2\bar{\mu} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} v' + \left(4\bar{\mu} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + 2\bar{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right) \frac{\partial}{\partial y} v' + 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} v' + \\
& + 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} w' + 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} w' + 2\bar{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z} w' + \\
& + \bar{\mu}_T \left(2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \bar{\lambda}_T \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 \right) T'.
\end{aligned}$$

В качестве граничных условий будем предполагать равенство нулю возмущений компонент скорости и температуры на обтекаемой поверхности и на бесконечности по нормали к ней.

4. Локально-параллельное приближение

В случае обтекания тонкой пластины уравнения (9) рассматриваются в области

$$\{(x, y, z) : 0 < x < 1, \quad 0 < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty\}, \quad (10)$$

где x – продольное, z – поперечное, а y – направление по нормали к поверхности, с нулевыми граничными условиями при $y = 0$ и ∞ для компонент скорости и температуры. К этому случаю можно свести и течение над выпуклой поверхностью малой кривизны, записывая уравнения (9) в криволинейных ортогональных координатах и отбрасывая члены, связанные с кривизной, которые будут малы. Вид уравнений при этом сохранится.

Систему (9) в области (10) можно записать в локально-параллельном приближении. Для этого предположим, что основное течение локально не зависит от x , то есть можно пренебречь первыми производными основного течения по x , а возмущения являются гармоническими по времени и пространственным переменным x и z функциями вида:

$$f'(x, y, z, t) = f''(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$$

с временной частотой ω и волновыми числами α и β в направлениях x и z соответственно. Кроме того, будем предполагать $\bar{v} = 0$. Тогда уравнения (9) примут вид:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(-i\omega u'' + i\alpha \bar{u}u'' + i\beta \bar{w}u'' + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} v'' \right) &= -\frac{i\alpha}{\gamma M_\infty^2} p'' + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \Sigma_1'', \\ \bar{\rho} (-i\omega v'' + i\alpha \bar{u}v'' + i\beta \bar{w}v'') &= -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p''}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \Sigma_2'', \\ \bar{\rho} \left(-i\omega w'' + i\alpha \bar{u}w'' + i\beta \bar{w}w'' + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} v'' \right) &= -\frac{i\beta}{\gamma M_\infty^2} p'' + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \Sigma_3'', \\ \bar{\rho} \left(-i\omega T'' + i\alpha \bar{u}T'' + i\beta \bar{w}T'' + \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} v'' \right) &= \\ &= -(\gamma - 1)\bar{\rho} \left(i\alpha \bar{T}u'' + \bar{T} \frac{\partial}{\partial y} v'' + i\beta \bar{T}w'' \right) + \\ &+ \frac{\gamma}{\text{Pr}_\infty \text{Re}_\infty} \left(-\alpha^2 \bar{\kappa} T'' + \left(\frac{\partial}{\partial y} \bar{\kappa} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\kappa}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) T'' - \beta^2 \bar{\kappa} T'' + \right. \\ &\quad \left. + T'' \frac{\partial}{\partial y} \bar{\kappa}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) + \gamma(\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{\text{Re}_\infty} \Pi'', \\ -i\omega \rho'' + i\alpha \bar{\rho} u'' + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\rho} v'' + i\beta \bar{\rho} w'' + i\alpha \bar{u} \rho'' + i\beta \bar{w} \rho'' &= 0, \\ p'' &= \bar{\rho} T'' + \rho'' \bar{T}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Sigma_1'' &= -\alpha^2 (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) u'' + \mathbf{i}\alpha\bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial y} v'' - \alpha\beta\bar{\lambda} w'' + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} u'' + \mathbf{i}\alpha \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} v'' + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} T'' - \beta^2 \bar{\mu} u'' - \alpha\beta \bar{\mu} w'', \\
\Sigma_2'' &= \mathbf{i}\alpha \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} u'' - \alpha^2 \bar{\mu} v'' + \mathbf{i}\alpha \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} T'' + \mathbf{i}\alpha \frac{\partial}{\partial y} \bar{\lambda} u'' + \frac{\partial}{\partial y} (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \frac{\partial}{\partial y} v'' + \\
&\quad + \mathbf{i}\beta \frac{\partial}{\partial y} \bar{\lambda} w'' - \beta^2 \bar{\mu} v'' + \mathbf{i}\beta \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} w'' + \mathbf{i}\beta \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} T'', \\
\Sigma_3'' &= -\alpha\beta \bar{\mu} u'' - \alpha^2 \bar{\mu} w'' + \mathbf{i}\beta \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} v'' + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} w'' + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu}_T \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} T'' - \\
&\quad - \alpha\beta \bar{\lambda} u'' + \mathbf{i}\beta \bar{\lambda} \frac{\partial}{\partial y} v'' - \beta^2 (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) w'', \\
\Pi'' &= 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} u'' + 2\mathbf{i}\alpha \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} v'' + 2\mathbf{i}\beta \bar{\mu} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} v'' + 2\bar{\mu} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} w'' + \\
&\quad + \bar{\mu}_T \left(\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right) T''.
\end{aligned}$$

Исключив плотность с помощью уравнения состояния, окончательно получим

$$\begin{aligned}
\bar{\rho} \left(-\mathbf{i}\omega u'' + \mathbf{i}\alpha \bar{u} u'' + \mathbf{i}\beta \bar{w} u'' + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} v'' \right) &= -\frac{\mathbf{i}\alpha}{\gamma M_\infty^2} p'' + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \Sigma_1'', \\
\bar{\rho} (-\mathbf{i}\omega v'' + \mathbf{i}\alpha \bar{u} v'' + \mathbf{i}\beta \bar{w} v'') &= -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p''}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \Sigma_2'', \\
\bar{\rho} \left(-\mathbf{i}\omega w'' + \mathbf{i}\alpha \bar{u} w'' + \mathbf{i}\beta \bar{w} w'' + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} v'' \right) &= -\frac{\mathbf{i}\beta}{\gamma M_\infty^2} p'' + \frac{1}{\text{Re}_\infty} \Sigma_3'', \quad (11) \\
\bar{\rho} \left(-\mathbf{i}\omega T'' + \mathbf{i}\alpha \bar{u} T'' + \mathbf{i}\beta \bar{w} T'' + \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} v'' \right) &= \\
&= -(\gamma - 1) \bar{\rho} \left(\mathbf{i}\alpha \bar{T} u'' + \bar{T} \frac{\partial}{\partial y} v'' + \mathbf{i}\beta \bar{T} w'' \right) + \\
&+ \frac{\gamma}{\text{Pr}_\infty \text{Re}_\infty} \left(-\alpha^2 \bar{\kappa} T'' + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\kappa} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\kappa}_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) T'' - \beta^2 \bar{\kappa} T'' \right) \\
&\quad + \gamma(\gamma - 1) \frac{M_\infty^2}{\text{Re}_\infty} \Pi'', \\
\mathbf{i}\alpha \bar{\rho} \bar{T} u'' + \left(\bar{T} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + \bar{T} \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \right) v'' + \mathbf{i}\beta \bar{\rho} \bar{T} w'' + \\
&+ (\mathbf{i}\omega \bar{\rho} - \mathbf{i}\alpha \bar{\rho} \bar{u} - \mathbf{i}\beta \bar{\rho} \bar{w}) T'' - (\mathbf{i}\omega - \mathbf{i}\alpha \bar{u} - \mathbf{i}\beta \bar{w}) p'' = 0.
\end{aligned}$$

Сгруппируем члены при u'', v'', w'', T'', p'' и запишем полученную систему уравнений в виде:

$$(-\alpha^2 A + i\alpha B - i\omega C + D) \Phi = 0, \quad (12)$$

где $\Phi = (u'', v'', w'', T'', p'')^T$, а A , B , C и D – операторные 5×5 матрицы, элементы которых приведены в приложении А.

Для дискретизации по y системы (11) можно использовать метод коллокаций [9]. Для этого выбираем некоторое достаточно большое $y_{\max} > 0$ и граничные условия для амплитуд компонент скорости и температуры возмущения при $y = \infty$ заменяем на

$$u''(y_{\max}) = v''(y_{\max}) = w''(y_{\max}) = T''(y_{\max}) = 0.$$

В качестве сетки по y выбираем точки $y_j = y(s_j)$, где

$$y(s) = \sigma \frac{1+s}{b-s}, \quad -1 \leq s \leq 1,$$

$\sigma > 0$ – масштабирующий множитель, $b = 1 + 2\sigma/y_{\max}$,

$$s_j = \cos \frac{\pi j}{N+1}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (13)$$

т.е. корни многочлена Чебышева второго рода степени N , и точки $s_0 = 1$ и $s_{N+1} = -1$. Для аппроксимации производных давления используем интерполяционные многочлены Лагранжа на сетке (13), для аппроксимации производных компонент скорости и температуры используем интерполяционные многочлены Лагранжа на сетке (13) с добавлением узлов ± 1 . Для расчета значений производных элементарных интерполяционных многочленов Лагранжа используем методы, описанные в работе [7].

Описанная выше аппроксимация системы (11) приводит к системе вида (12) с блочными числовыми комплексными матрицами A , B , C и D блочного размера 5×5 с блоками размера $N \times N$. При этом каждый из блоков каждой из этих числовых матриц является дискретным аналогом соответствующего блока одноименной операторной матрицы из приложения А.

5. Технология расчета положения ламинарно-турбулентного перехода

Используемая авторами технология расчета положения ламинарно-турбулентного перехода подробно описана в работах [1, 2] для случая вязкого несжимаемого пограничного слоя. В рассматриваемом в данной работе

более общем случае вязкого сжимаемого пограничного слоя с учетом теплопереноса схема этой технологии требует изменений, связанных с необходимостью учета возмущений с $\beta \neq 0$, так как при $M_\infty > 1$ такие возмущения могут нарастать сильнее возмущений с $\beta = 0$ [3]. Основные этапы расчета следующие:

- Расчет основного течения каким-либо CFD кодом, настроенным на ламинарное обтекание.
- Грубая локализация пограничного слоя и построение в нем расчетной сетки для численного анализа устойчивости. Интерполяция на эту сетку параметров основного течения, рассчитанных на первом этапе. Уточнение границы пограничного слоя на основе расчета толщин вытеснения. Оценка максимальных значений волновых чисел α и β , при которых возможна неустойчивость соответствующих возмущений. Выбор сеток по α и β .
- Определение вещественных частот ω , при которых в пограничном слое существуют области нарастания возмущений. Для этого фиксируются вещественные α и β и при различных значениях числа Рейнольдса решаются проблемы собственных значений вида (12) относительно ω . Если все найденные таким образом собственные значения ω имеют отрицательные мнимые части, то делается вывод, что при рассматриваемых значениях α и β все малые возмущения затухают, иначе находится минимальное число Рейнольдса (левая граница области неустойчивости), при котором максимальная мнимая часть собственных значений ω проблемы (12) равна нулю. В последнем случае соответствующее вещественное собственное значение ω будет частотой, при которой имеет место нарастание возмущений вниз по потоку.
- Расчет нарастания малых возмущений. При каждом найденном на предыдущем этапе значении частоты ω , начиная с левой границы области неустойчивости, вниз по потоку решаются нелинейные проблемы собственных значений (12) относительно спектрального параметра α . Затем по мнимым частям найденных α , отвечающих наиболее нарастающим возмущениям, распространяющимся вниз по потоку, определяются степени нарастания этих возмущений — так называемые N -факторы.
- По огибающей всех рассчитанных N -факторов и заданным пороговым N -факторам, отвечающим представляющей интерес степени турбулентности набегающего потока, рассчитываются положения начала и конца ламинарно-турбулентного перехода.

6. Результаты численных экспериментов

В качестве примера рассмотрим задачу, ориентированную на исследование положения ламинарно-турбулентного перехода на плоской пластине под нулевым углом атаки (без продольного градиента давления) в аэродинамической трубе при числе Маха $M_\infty = 1.47$, давлении торможения $P_0 = 0.7 \text{ atm}$, температуре торможения $T_0 = 291 \text{ K}$ и единичном числе Рейнольдса $Re_1 = 10.5 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$.

Соответствующее двумерное ламинарное обтекание рассчитывалось с помощью пакета программ ANSYS CFX для пластины длины $L = 0,5 \text{ m}$ при $d = 0$ и постоянном коэффициенте теплопроводности. Расчетная область представляла собой прямоугольник, часть нижней стороны которого совпадала с поверхностью пластины, а высота выбиралась так, чтобы ударная волна не взаимодействовала с верхней границей расчетной области. Пластина полагалась бесконечно тонкой. Геометрия и сетка строились средствами ANSYS Workbench.

Расчетная область покрывалась регулярной прямоугольной сеткой с постоянным шагом $\Delta x = 0.2 \text{ mm}$ в продольном направлении и сгущением по нормали к поверхности пластины. Для этого у поверхности выделялась подобласть I высоты 1.5 mm , включавшая в себя пограничный слой. Подобласть II располагалась над подобластью I. Высота всей расчетной области составляла 0.55 m . В подобласти I в вертикальном направлении бралось 30 узлов с параметром сгущения 20 к поверхности пластины. В подобласти II в вертикальном направлении бралось 150 узлов с параметром сгущения 110 по направлению к поверхности пластины. Левая граница расчетной области отодвигалась на 8 ячеек от носика пластины. Правая граница отодвигалась от конца пластины на 23 ячейки. Общее число ячеек расчетной сетки составляло 456000.

На левой и верхней границах расчетной области задавалось граничное условие `pressure-far-field` с параметрами, соответствующими набегающему потоку ($P_\infty = 19650 \text{ Pa}$, $T_\infty = 203.2 \text{ K}$, $M_\infty = 1.47$). На правой границе ставилось условие `pressure-outlet` с заданием статического давления $P_\infty = 19650 \text{ Pa}$, и температуры $T_0 = 291 \text{ K}$. На поверхности пластины задавалось условие прилипания и постоянства температуры $T_w = 291 \text{ K}$.

Расчет положения перехода e^N -методом проводился с профилями пограничного слоя, полученными интерполяцией результатов описанных выше расчетов ламинарного обтекания на новую прямоугольную сетку. Для интерполяции данных использовались кубические сплайны. По направлению x новая сетка была равномерной и имела 900 узлов. По направлению

y параметры этой сетки были следующими: $y_{\max} = 0.374$ m, $N_y = 200$, $b = 0.01$. Расчеты включали проверку сходимости по шагу сетки и слабой зависимости результатов от варьирования остальных параметров расчета для подтверждения требуемой точности итоговых результатов.

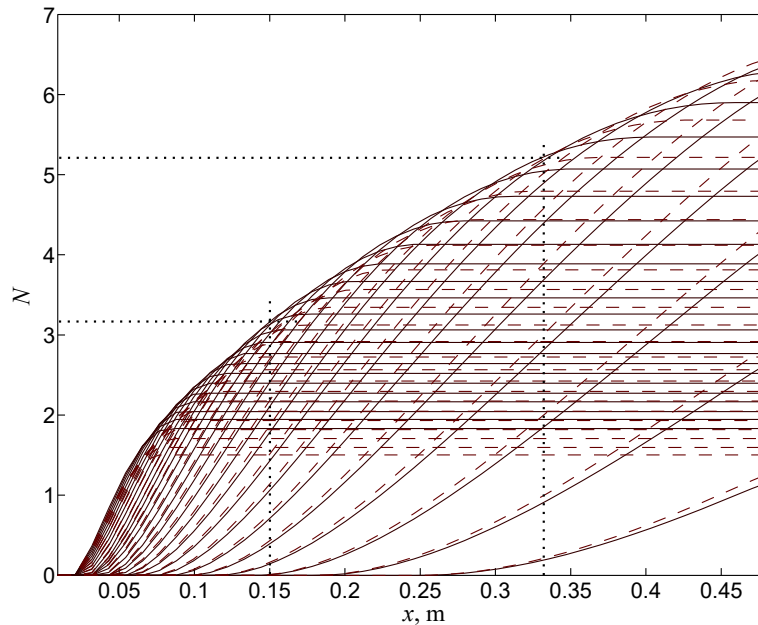


Рис. 1: Расчет N -факторов и положения перехода при обтекании плоской пластины для $\phi = 50^\circ$ (—) и 55° (---).

На рис. 1 показан результат расчетов N -факторов для 30 актуальных временных частот из диапазона $f = \omega U_\infty / (2\pi L_{\text{ref}}) = 0.25\text{--}30$ КГц, взятых с равным шагом при углах наклона волнового вектора $\phi = \arctan \beta / \alpha = 50^\circ$ и 55° , соответствующих максимально нарастающим волнам неустойчивости. Пунктиром показаны положения начала $x_{\text{Tран}} \approx 0.15$ m ($\text{Re} \approx 1.58 \times 10^6$) и конца $x_{\text{Turb}} \approx 0.33$ m ($\text{Re} \approx 3.47 \times 10^6$) перехода, соответствующие пороговым N -факторам 3.15 и 5.2. Эти результаты хорошо согласуются с приведенными в работе [10].

7. Заключение

В данной работе описаны и обоснованы уравнения распространения малых возмущений в пограничном слое над выпуклой поверхностью малой кривизны, обтекаемой потоком вязкой сжимаемой среды с учетом теплопереноса. Приведены результаты расчетов N -факторов и положений начала и конца Л-Т перехода в локально-параллельном приближении для плоской пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком под нулевым углом атаки. Результаты хорошо согласуются с известными расчетными и экспериментальными данными. Это показывает возможность использования

описанных уравнений в программном комплексе, разрабатываемом в ИПМ им. Келдыша РАН и ориентированном на расчет положения Л-Т перехода в аэродинамических приложениях с учетом сжимаемости и теплопереноса в широком диапазоне чисел Маха и Прандтля.

Список литературы

- [1] *Бойко А. В., Нечепуренко Ю. М., Жучков Р. Н., Козелков А.С.* Блок расчета положения ламинарно-турбулентного перехода для пакета ЛО-ГОС. // Теплофизика и Аэромеханика 2014. Vol. 21. № 2. P. 201–220.
- [2] *Boiko A. V., Nечepurenko Yu. M., Abalakin I. V., Bobkov V.G.* Numerical prediction of laminar-turbulent transition on an airfoil. // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling 2014. Vol. 29. № 4. P. 205–218.
- [3] *Mack L. M.* Boundary-layer linear stability theory. In AGARD Report No. 709: Special course on stability and transition of laminar flow. 1984. P. 3-81.
- [4] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие: Для ун-тов: В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 731 с.
- [5] *Hein S.* Nonlinear nonlocal transition analysis. Göttingen, Germany, 2005. DLR FB No. 2005–10. 160 p.
- [6] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. 712 с.
- [7] *Weideman J. A. C., Reddy S. C.* A MATLAB differentiation matrix suite. // ACM Trans. Math. Software. 2000. Vol. 26, № 4. P. 465–519.
- [8] *Anderson E., Bai Z., Bischof C., Demmel J., Dongarra J., Du Croz J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., Ostrouchov S., Sorensen D.* LAPACK users guide. Philadelphia: SIAM, 1992.
- [9] *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A.* Spectral methods. Fundamentals in single domains. Berlin: Springer, 2006.
- [10] *Mack L.M.* A numerical method for the prediction of high-speed boundary-layer transition using linear theory. In: Aerodynamic Analyses Requiring Advanced Computers. Washington: NASA, 1975. P. 101–123.

Содержание

1. Введение	3
2. Уравнения тепло-массопереноса	4
3. Уравнение распространения малых возмущений	7
4. Локально-параллельное приближение	11
5. Технология расчета положения ламинарно-турбулентного перехода	13
6. Результаты численных экспериментов	15
7. Заключение	16
Список литературы	17
А. Приложение	19

А. Приложение

Матрица A является диагональной с диагональными элементами

$$a_{11} = -\frac{2\bar{\mu} + \bar{\lambda}}{\text{Re}_\infty}, \quad a_{22} = -\frac{\bar{\mu}}{\text{Re}_\infty}, \quad a_{33} = -\frac{\bar{\mu}}{\text{Re}_\infty}, \quad a_{44} = -\frac{\gamma\bar{\kappa}}{\text{Re}_\infty\text{Pr}_\infty}, \quad a_{55} = 0.$$

Ненулевые элементы матрицы C имеют вид

$$c_{11} = \bar{\rho}, \quad c_{22} = \bar{\rho}, \quad c_{33} = \bar{\rho}, \quad c_{44} = \bar{\rho}, \quad c_{54} = -\bar{\rho}, \quad c_{55} = 1.$$

Элементы матрицы B имеют вид

$$\begin{aligned} b_{11} &= \bar{\rho}\bar{u}, & b_{12} &= -\frac{\bar{\lambda}D_y + D_y\bar{\mu}}{\text{Re}_\infty}, & b_{13} &= -\mathbf{i}\beta\frac{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{\text{Re}_\infty}, \\ b_{14} &= 0, & b_{15} &= \frac{1}{\gamma M_\infty^2}, \\ b_{21} &= -\frac{\bar{\mu}D_y + D_y\bar{\lambda}}{\text{Re}_\infty}, & b_{22} &= \bar{\rho}\bar{u}, & b_{23} &= 0, & b_{24} &= -\frac{\bar{\mu}_T\bar{u}_y}{\text{Re}_\infty}, & b_{25} &= 0, \\ b_{31} &= -\mathbf{i}\beta\frac{\bar{\lambda} + \bar{\mu}}{\text{Re}_\infty}, & b_{32} &= 0, & b_{33} &= \bar{\rho}\bar{u}, & b_{34} &= b_{35} = 0, \\ b_{41} &= (\gamma - 1)\bar{\rho}\bar{T}, & b_{42} &= -2\gamma(\gamma - 1)\frac{M_\infty^2}{\text{Re}_\infty}\bar{\mu}\bar{u}_y, \\ b_{43} &= 0, & b_{44} &= \bar{\rho}\bar{u}, & b_{45} &= 0, \\ b_{51} &= \bar{\rho}\bar{T}, & b_{52} &= b_{53} = 0, & b_{54} &= -\bar{\rho}\bar{u}, & b_{55} &= \bar{u}, \end{aligned}$$

где D_y означает оператор дифференцирования по y . В остальных случаях нижний индекс y означает первую производную по y . Элементы матрицы D имеют вид

$$\begin{aligned} d_{11} &= \mathbf{i}\beta\bar{\rho}\bar{w} - \frac{D_y\bar{\mu}D_y - \beta^2\bar{\mu}}{\text{Re}_\infty}, & d_{12} &= \bar{\rho}\bar{u}_y, & d_{13} &= 0, \\ d_{14} &= -\frac{D_y\bar{\mu}_T\bar{u}_y}{\text{Re}_\infty}, & d_{15} &= 0, \\ d_{21} &= 0, & d_{22} &= \mathbf{i}\beta\bar{\rho}\bar{w} - \frac{D_y(2\bar{\mu} + \bar{\lambda})D_y - \beta^2\bar{\mu}}{\text{Re}_\infty}, \\ d_{23} &= -\mathbf{i}\beta\frac{\bar{\mu}D_y + D_y\bar{\lambda}}{\text{Re}_\infty}, \\ d_{24} &= -\frac{\mathbf{i}\beta}{\text{Re}_\infty}\bar{\mu}_T\bar{w}_y, & d_{25} &= \frac{1}{\gamma M_\infty^2}D_y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{31} &= 0, & d_{32} &= \bar{\rho}\bar{w}_y - \mathbf{i}\beta \frac{\bar{\lambda}D_y + D_y\bar{\mu}}{\text{Re}_\infty}, \\
d_{33} &= \mathbf{i}\beta\bar{\rho}\bar{w} - \frac{D_y\bar{\mu}D_y - \beta^2(2\bar{\mu} + \bar{\lambda})}{\text{Re}_\infty}, \\
d_{34} &= -\frac{D_y\bar{\mu}_T\bar{w}_y}{\text{Re}_\infty}, & d_{35} &= \frac{\mathbf{i}\beta}{\gamma M_\infty^2}, \\
d_{41} &= -2\gamma(\gamma - 1)\frac{M_\infty^2}{\text{Re}_\infty}\bar{\mu}\bar{u}_yD_y, \\
d_{42} &= \bar{\rho}(\bar{T}_y + (\gamma - 1)\bar{T}D_y) - 2\mathbf{i}\beta\gamma(\gamma - 1)\frac{M_\infty^2}{\text{Re}_\infty}\bar{\mu}\bar{w}_y, \\
d_{43} &= \mathbf{i}\beta(\gamma - 1)\bar{\rho}\bar{T} - 2\gamma(\gamma - 1)\frac{M_\infty^2}{\text{Re}_\infty}\bar{\mu}\bar{w}_yD_y, \\
d_{44} &= \mathbf{i}\beta\bar{\rho}\bar{w} - \frac{\gamma}{\text{Pr}_\infty\text{Re}_\infty} \left(D_y(\bar{\kappa}D_y + \bar{\kappa}_T\bar{T}_y) - \beta^2\bar{\kappa} \right) - \\
&\quad -\gamma(\gamma - 1)\frac{M_\infty^2}{\text{Re}_\infty}\bar{\mu}_T(\bar{u}_y^2 + \bar{w}_y^2), \\
d_{45} &= 0, \\
d_{51} &= 0, & d_{52} &= \bar{\rho}_y\bar{T} + \bar{\rho}\bar{T}D_y, & d_{53} &= \mathbf{i}\beta\bar{\rho}\bar{T}, \\
d_{54} &= -\mathbf{i}\beta\bar{\rho}\bar{w}, & d_{55} &= \mathbf{i}\beta\bar{w}.
\end{aligned}$$