ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 84 за 2015 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Балашов В.А., Савенков Е.Б.

Применение квазигидродинамической системы уравнений для прямого моделирования течений в микрообразцах горных пород

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Балашов В.А., Савенков Е.Б. Применение квазигидродинамической системы уравнений для прямого моделирования течений в микрообразцах горных пород // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 84. 20 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-84

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

В.А. Балашов, Е.Б. Савенков

Применение квазигидродинамической системы уравнений для прямого моделирования течений в микрообразцах горных пород

Москва, 2015

В.А. Балашов, Е.Б. Савенков, Применение квазигидродинамической системы уравнений для прямого моделирования течений в микрообразцах горных пород.

Аннотация

В работе рассматривается задача определения коэффициента проницаемости микрообразцов горных пород по данным их микротомограммы на основе прямого гидродинамического моделирования. В качестве базовой математической модели течения используется квазигидродинамическая (КГиД) система уравнений движения вязкого теплопроводного сжимаемого газа. Рассмотрено определение проницаемости образцов, как модельных пористых сред, так и реальных, микротомограммы которых взяты из открытых источников. Для модельных пористых сред результаты расчетов сравниваются с аналитическими значениями, а для реальных — со значениями, полученными с помощью метода решеточных уравнений Больцмана, и значениями из открытых источников. Показано, что подход, основанный на КГиД уравнениях, не уступает аналогам.

Ключевые слова: квазигидродинамическая система уравнений, проницаемость, цифровой керн

V.A. Balashov, E.B. Savenkov, Application of quasihydrodynamic equation for direct numerical simulation of flow in core samples.

Abstract

The paper is concerned with direct numerical modeling techniques for determination of macroscopic permeability coefficient of samples of naturally occurring geological media using their micro-CT images. Basic mathematical model of flow is based on quasihydrodynamic (QHD) equations of viscous heat-conducting compressible gas flows. Determination of permeability coefficient of artificial and real porous media is discussed. Publicly available micro-CT images are used. Results of computations for artificial porous media are compared with the analytic ones, for real porous media — with the results obtained by Lattice Boltzmann method and results published elsewhere. It is showed that approach based on QHD equations is highly competitive with other approaches.

Key words and phrases: quasihydrodynamic equations, permeability, digital rock physics

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00549).

Введение

Методы математического моделирования широко используются для анализа процессов, протекающих при разработке нефтегазовых месторождений. Одной из основных проблем при этом является определение макроскопических фильтрационных свойств геологических сред. До недавнего времени единственным источником таких сведений были результаты натурных и лабораторных исследований.

В последние годы развивается новое направление методов вычислительного эксперимента, связанное с прямым численным моделированием процессов в поровом пространстве пород. При этом оно описывается дискретной геометрической моделью, построенной на основе компьютерной микротомограммы образца породы. В результате появляется возможность частичной замены вычислительными экспериментами лабораторных, проводимых, в частности, для определения проницаемости образцов пород. Одним из наиболее распространенных методов, применяемых для моделирования таких течений, является метод решеточных уравнений Больцмана [1].

В данной работе для моделирования течения в поровом пространстве использован подход, основанный на квазигидродинамических (КГиД) уравнениях [2, 3, 4]. Указанный метод основан на макроскопическом (гидродинамическом) описании среды, является консервативным, позволяет использовать реалистичные уравнения состояния и изначально позволяет описывать неизотермические течения. Вместе с тем, как и метод решеточных уравнений Больцмана, он обладает такими удобными свойствами, как логическая простота вычислительного алгоритма и возможность эффективного распараллеливания.

КГиД система является модификацией системы уравнений Навье -Стокса, в которую включены малые физически обоснованные слагаемые диссипативного характера. Малость этих слагаемых гарантирует, что модифицированные модели можно использовать для анализа течений, описываемых классическими моделями гидродинамики. Примеры применения КГиД системы для расчета слабосжимаемых течений представлены в работе [5].

1 Квазигидродинамическая система уравнений

КГиД система уравнений для описания течений вязкого теплопроводного сжимаемого газа без учета внешних сил имеет вид [3, 4]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_m = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{j}_m \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}, \tag{1b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{\boldsymbol{u}^2}{2} + \varepsilon\right)\right] + \nabla \cdot \left[\boldsymbol{j}_m\left(\frac{\boldsymbol{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right] + \nabla \cdot \boldsymbol{q} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{u}), \tag{1c}$$

где ρ — плотность, $\boldsymbol{u}$ — вектор скорости, $\boldsymbol{j}_m$ — вектор плотности потока массы, p — давление, $\boldsymbol{\Pi}$ — тензор вязких напряжений, ε — внутренняя энергия единицы массы, $\boldsymbol{q}$ — вектор плотности теплового потока. Определяющие соотношения для потоков консервативных величин имеют вид:

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Pi}_{\text{NS}} + \rho\, \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{w},$$
$$\boldsymbol{j}_m = \rho(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}), \quad \boldsymbol{q} = -\varkappa \nabla T,$$

где T — температура, $\boldsymbol{I}$ — единичный тензор, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, $\boldsymbol{\Pi}_{\text{NS}}$ — классический тензор вязких напряжений Навье-Стокса.

Эти соотношения отличаются от классических присутствием в них вектора $\boldsymbol{w}$, который имеет размерность скорости и определяется выражением:

$$\boldsymbol{w} = \tau\left[(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p\right],$$

где $\tau > 0$ — вещественный параметр, имеющий размерность времени. Для разреженных газов параметр τ может быть интерпретирован как среднее время столкновений между молекулами газа [4]. При описании течений плотных газов и жидкостей входящие в (1) члены с τ следует рассматривать как физически обоснованные регуляризаторы, обеспечивающие устойчивость центральных разностных аппроксимаций. Термин «физически обоснованные» здесь отражает как способ получения КГиД системы, так и факт наличия у нее необходимых для математических моделей гидродинамики свойств, например, справедливость балансового соотношения для энергии и выполнение энтропийного неравенства.

При расчете используется декартова ортогональная сетка с равными шагами по пространству. Для построения разностной схемы для системы уравнений (1) будем использовать явные разностные аппроксимации по времени и центральные — по пространству. Величина τ определяется в каждой расчетной ячейке как [3]

$$\tau = \frac{\eta}{c_s^2 \rho} + \alpha^* \frac{h}{c_s},$$

где h — шаг сетки, $\alpha^* > 0$ — заданный безразмерный схемный параметр, не меняющийся в ходе расчета, c_s — скорость звука, η — коэффициент динамической вязкости. Далее во всех расчетах $\alpha^* = 0.5$.

2 Течение в трубе квадратного сечения

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе квадратного сечения. Пусть высота и ширина трубы $L_x = L_z = a$, длина $L_y = 3a$, где $a = 1$ м. Ось трубы параллельна координатной оси Oy, стороны параллельны координатным плоскостям xOy и yOz. Из системы уравнений Навье-Стокса для определения скорости в трубе в стационарном случае имеем ([6], стр. 244):

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \quad v_y = v_y(x, z), \quad p = p(y).$$

Решая это уравнение, получаем выражение для скорости $\boldsymbol{v} = (0, v_y, 0)$, где:

$$v_y(x, z) = -\frac{16a^2 \nabla p}{\pi^4 \eta} \sum_{k,n=1;odd}^{\infty} \frac{1}{nk(n^2 + k^2)} \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi k z}{a}\right). \tag{2}$$

Отсюда для объемного расхода получаем:

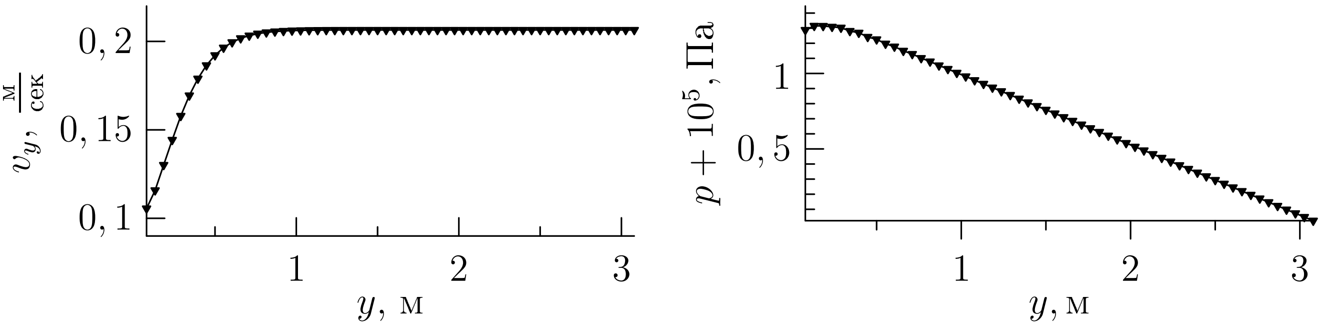
$$Q = -\frac{64a^4 \nabla p}{\pi^6 \eta} \sum_{n,k=1;odd}^{\infty} \frac{1}{n^2 k^2 (n^2 + k^2)} \approx -\frac{a^4 \nabla p}{\eta} 0.035144, \tag{3}$$

где $\nabla p = \partial p / \partial y$, и суммирование в выражениях ведется по нечетным n и k.

Рассматривается течение совершенного вязкого теплопроводного газа со следующими параметрами: $\eta = 0.1665$ Па · сек, $\varkappa = 0.0233$ кг · м/(К · сек^3), $\mathcal{R} = 296.8$ Дж/(кг · К). Начальные значения: $p_0 = 10^5$ Па, $\rho_0 = 1.251$ кг/м^3. Для расчета выбрана сетка размером $19 \times 57 \times 19$, с шагом $h = 1/19$ м.

Граничные условия:

- на входной границе ($y = 0$): $\boldsymbol{v} = (0, 0.1, 0)$, $\rho = 1.251$, $\partial p / \partial y = 0$;
- на выходной границе ($y = L_y$): $\partial \boldsymbol{v} / \partial y = \boldsymbol{0}$, $\partial \rho / \partial y = 0$, $p = 10^5$;



(a) Скорость (b) Давление

Рис. 1: Распределение давления p и компоненты скорости v_y вдоль оси трубы $x = L_x/2$, $y \in [0, L_y]$, $z = L_z/2$.

Таблица 1

z-координата	расчет	формула (2)
$1.5h$	0.06696	0.06612
$3.5h$	0.13176	0.13107
$5.5h$	0.17439	0.17380
$7.5h$	0.19848	0.19795
$9.5h$	0.20627	0.20575

- на остальных границах расчетной области ставятся условия прилипания: $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, $\partial p/\partial \boldsymbol{n} = 0$, $\partial \rho/\partial \boldsymbol{n} = 0$, где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к границе.

Градиент давления $\nabla p = -0.4650\,\text{Па/м}$ (в области, где граничные условия на входной границе не оказывают существенного влияния на характер течения). По формуле (3) получаем $Q_{\text{теор}} = 0.0982\,\text{м}^3/\text{сек}$, в расчетах объемный расход $Q = 0.0992\,\text{м}^3/\text{сек}$. Относительное отклонение составляет 1%.

На рисунках 1 представлено распределение компоненты скорости v_y и давления p вдоль оси трубы. Видно, что у входной границы наблюдается «концевой» эффект, вызванный фиксацией постоянной скорости на входе. В таблице 1 и на рисунке 2 представлены полученные в расчете и по формуле (2) значения скорости вдоль прямой $x = L_x/2$, $y = 2L_y/3$, $z \in [0, L_z]$.

Отметим, что еще один вариант постановки граничных условий — фиксация давления на входной и выходной границах области. В этом случае все расчеты дают то же самое решение с той лишь разницей, что нет концевых эффектов.

Заметим, что сравнение с аналитическим решением, полученным в рамках несжимаемого приближения, является корректным, поскольку в настоящей работе рассматривается случай *слабосжимаемого* течения.

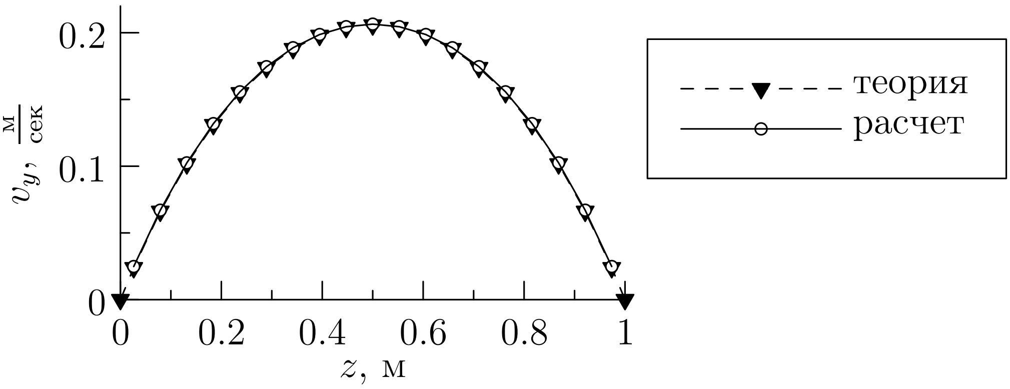


Рис. 2: Распределение скорости v_y, полученное в расчетах, вдоль прямой $x = L_x/2$, $y = 2L_y/3$, $z \in [0, L_z]$.

3 О расчете коэффициента проницаемости

На основе приведенной системы уравнений (1) был реализован параллельный программный комплекс для моделирования течений в цифровых микрообразцах горных пород. Геометрическая модель порового пространства задается трехмерным бинарным массивом, в котором единичное значение соответствовало ячейке сетки, отнесенной к матрице породы (*неактивные* ячейки), нулевое — ячейке, отнесенной к поровому пространству(*активные* ячейки). Геометрические размеры ячеек определяются разрешением томографии. Расчет проводится только в активных ячейках. Число расчетных ячеек определяется пористостью образца и сеточной размерностью дискретной модели.

Поскольку микротомограмма (сегментированная) образца представляет собой бинарный массив, состоящий из нулей и единиц, во всех расчетах используется декартова ортогональная расчетная сетка с равными шагами по пространству.

На входной и выходной границах расчетной области фиксируются значения давления, а для скорости ставятся «мягкие» условия (см. ниже). На остальных границах области ставятся условия прилипания. Объемный расход Q вычисляется на основании скорости, усредненной по образцу (скорости фильтрации) [7, 8, 9, 10]:

$$U = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{j_y}{\rho} \, d\Omega, \qquad (4)$$

где Ω — область, занимаемая всем образцом, $|\Omega|$ — объем образца. Отметим, что Ω включает в себя как поровое пространство, так и скелет. Для объемного расхода имеем выражение $Q/A = U$, где A — площадь сечения образца плоскостью, перпендикулярной направлению течения. В дискретном случае выражение (4) принимает вид

$$U = \frac{1}{N_x N_y N_z} \sum_i \frac{(j_y)_i}{\rho_i}, \tag{5}$$

где суммирование ведется только по активным ячейкам. Коэффициент проницаемости k определяется из закона Дарси:

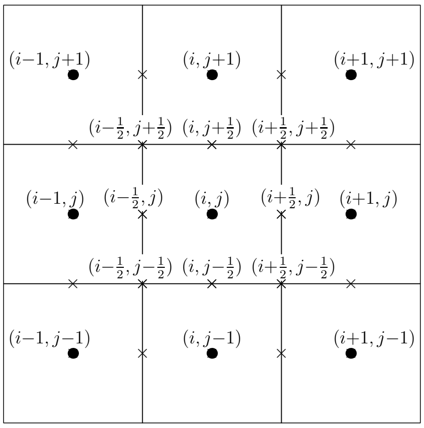
$$\frac{Q}{A} = -\frac{k}{\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L}, \tag{6}$$

где $p_{1,2}$ — значения давления на входной и выходной границах, L — длина образца вдоль исследуемого направления. Расчет проводится до тех пор, пока значение коэффициента проницаемости не перестанет существенно меняться.

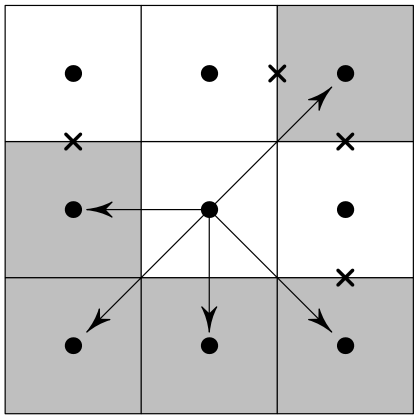
Отметим, что есть и другие подходы и методики постановки вычислительного эксперимента для расчета коэффициента проницаемости (см., например, [8]).

Отдельно отметим особенность реализации условия прилипания в расчетной программе. Для учета граничных условий на границе между активной и неактивной областью используется метод «фиктивных» ячеек. Суть его в том, что в неактивную ячейку, граничащую с активной, копируется значение плотности и давления, а скорость записывается с обратным знаком, так что на границе выполняется условие прилипания. Так как в разностной схеме используется двадцатисемиточечный шаблон (девятиточечный в двумерном случае, см. рисунок 3a), конфигурация неактивных ячеек может оказаться «причудливой» и в некотором смысле «противоречивой». Например, на рисунке 3b показан случай, когда неясно, какие значения скорости, плотности и давления записать в неактивную ячейку, расположенную в верхнем правом углу, чтобы на всех ее гранях точно выполнялось условие прилипания. Поскольку не хочется усложнять расчет сложной логикой постановки граничных условий, выбран самый простой путь: при расчете одной ячейки во все неактивные ячейки шаблона копируются плотность и давление, а скорость копируется с обратным знаком. Таким образом, для некоторых ячеек шаблона граничное условие прилипания выполняется с точностью $O(h)$. На рисунке 3b условно обозначена упомянутая процедура. В точках, обозначенных «крестиками», граничные условия прилипания выполняются приближенно.

Подчеркнем, что конечной целью описанного численного эксперимента является определение значения коэффициента проницаемости образца горной породы по микротомограмме, которая, вообще говоря, не является точной. Иными словами, истинная геометрия порового пространства не известна, и поэтому постановка граничных условий прилипания с точностью $O(h)$ для рассматриваемой задачи является удовлетворительной.



(a) Шаблон разностной схемы для двумерного случая.



(b) Пример «противоречивой» конфигурации ячеек в расчетном шаблоне. Серым цветом помечены неактивные ячейки.

Рис. 3

Как видно из описанных ниже численных экспериментов, такой подход к реализации граничных условий не оказывает существенного влияния на значения как коэффициента проницаемости, так и гидродинамических полей.

Далее во всех расчетах используется совершенный вязкий теплопроводный газ с параметрами $\varkappa = 0.0233\,\text{кг}\cdot\text{м}/(\text{К}\cdot\text{сек}^3)$, $\mathcal{R} = 296.8\,\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$.

4 Модельная пористая среда

В этом разделе рассматриваются задачи определения проницаемости образцов некоторых модельных пористых сред и проводится сравнение полученных коэффициентов проницаемости с коэффициентами, вычисленными аналитически. При этом аналитическое решение найдено в приближении несжимаемой жидкости, тогда как в настоящей работе рассматривается жидкость, вообще говоря, сжимаемая (1a). Сравнение является корректным, поскольку здесь рассматриваются условия, при которых жидкость является *слабосжимаемой* [5].

4.1 Трубки квадратного сечения

Рассмотрим задачу определения коэффициента проницаемости модельной пористой среды, состоящей из пяти параллельных трубок квадратного сечения. На рисунке 4 схематично изображено сечение расчетной области плоскостью, параллельной плоскости zOx. Оси трубок параллельны оси Oy. Серым цветом обозначен скелет образца пористой среды, белым — поровое пространство. Для рассматриваемого случая значение коэффициента проницаемости k

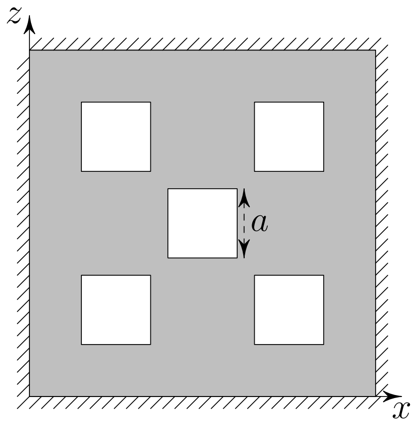


Рис. 4: Поперечное сечение образца, модельного порового пространства, состоящего из пяти одинаковых параллельных трубок квадратного сечения, направленных вдоль оси Oy. Серым цветом обозначен скелет.

возможно вывести аналитически. Действительно, на основании (3) имеем:

$$Q = -\frac{ma^4(p_1 - p_2)}{L\eta}\,0.035144,$$

где a — ширина стороны каждой трубки, $m = 5$ — число трубок. Используя это соотношение и закон Дарси (6), окончательно получаем выражение для коэффициента проницаемости:

$$k = \frac{ma^4}{A}\,0.035144 = a^2\phi\,0.035144, \tag{7}$$

где ϕ — пористость.

Расчет проводился для случая совершенного вязкого теплопроводного газа на нескольких сетках с различным числом ячеек. Коэффициент динамической вязкости газа $\eta = 1.665 \cdot 10^{-4}$ Па · сек. Начальные значения: $\rho_0 = 1.251$ кг/м^3, $\boldsymbol{v}_0 = \mathbf{0}$, $p_0 = 10^5$ Па.

Граничные условия:

- на входной границе: $\partial \boldsymbol{v}/\partial y = \mathbf{0}$, $\rho = 1.251$, $p = 10^5 + 1$;
- на выходной границе: $\partial \boldsymbol{v}/\partial y = \mathbf{0}$, $\partial \boldsymbol{v}/\partial y = 0$, $p = 10^5$;
- на остальных сторонах расчетной области, а также на скелете образца ставятся условия прилипания: $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, $\partial\rho/\partial\boldsymbol{n} = 0$, $\partial p/\boldsymbol{n} = 0$.

Ширина, длина и высота образца: $L_x = L_y = L_z = L = 10^{-3}$м. Длина стороны трубки $a = 2 \cdot 10^{-4}$м. Тогда для пористости имеем

$$\phi = \frac{ma^2 L_y}{L_x L_y L_z} = \frac{ma^2}{L^2} = 0.2.$$

Таблица 2

Размер сетки	h, 10^{-5}м	k^{qh}, 10^{-10}м^2	Число ячеек на сторону одной трубки
25^3	4.00	3.24014	5
50^3	2.00	2.92764	10
80^3	1.25	2.85955	16
100^3	1.00	2.84339	20
200^3	0.50	2.82091	40
400^3	0.25	2.81399	80
—	точное значение (8)	2.81152	—

Из соотношения (7) получаем $k = 2.81152 \cdot 10^{-10}$ м^2. В таблице 2 представлены значения коэффициента проницаемости k^{qh}, полученные в расчете на различных сетках.

4.2 Трубки круглого сечения

Теперь рассмотрим такую же модельную пористую среду, только с трубками *круглого* сечения. Поскольку рассматривается только декартова сетка с равными шагами по пространству, в рассматриваемом случае нельзя задать геометрию расчетной области точно. Данный расчет покажет, насколько сильно приближенная геометрия влияет на итоговое значение коэффициента проницаемости. На рисунке 5а приведен пример истинного сечения и сечения, используемого в расчетах.

Аналитическое выражение для коэффициента проницаемости рассматриваемой пористой среды получается аналогично предыдущему случаю с той лишь разницей, что выражение для объемного расхода при течении через пять одинаковых трубок круглого сечения имеет вид:

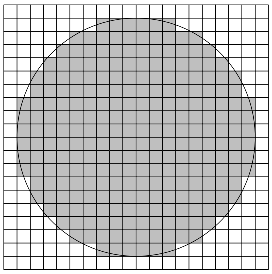
$$Q = -\frac{m\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L},$$

где R — радиус трубки. Здесь также $m = 5$. Таким образом, для коэффициента проницаемости справедливо:

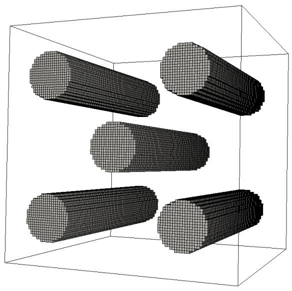
$$k = \frac{m\pi R^4}{8A}. \tag{8}$$

Таблица 3

Размер сетки	h, 10^{-5}м	k^{qh}, 10^{-10}м^2	Число ячеек на радиус трубки
50^3	2.0	2.003541	5
100^3	1.0	1.956676	10
200^3	0.5	1.968025	20
—	точное значение	1.963495	—



(a) Пример приближения геометрии на декартовой ортогональной сетке с равными по пространству шагами.



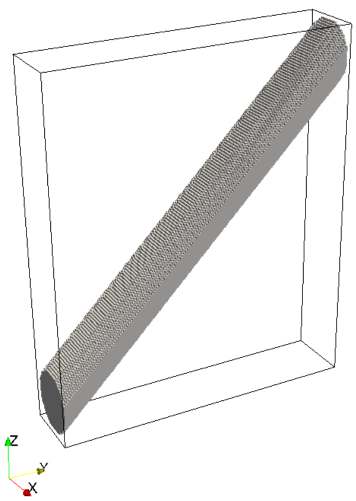
(b) *Поровое пространство* для модельной пористой среды, состоящей из пяти параллельных трубок круглого сечения. Сетка $100 \times 100 \times 100$.

Рис. 5

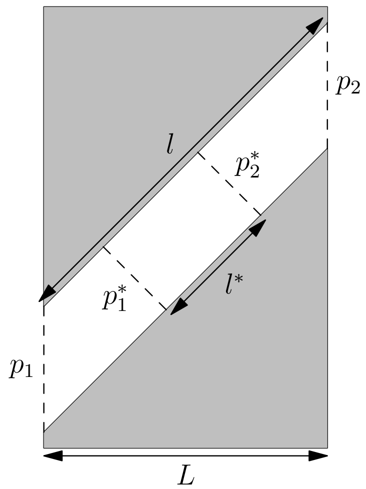
Поровое пространство показано на рисунке 5b. Параметры газа, начальные и граничные условия выбраны такими же, как и в предыдущем случае. В таблице 3 представлены расчитанные значения коэффициентов проницаемости для образца рассматриваемой пористой среды на разных сетках, и видно, что при мельчении шага значение k стремится к аналитическому. Таким образом, с одной стороны, наблюдается сходимость решения к точному значению, с другой — даже в самом «грубом» случае из рассмотренных относительное отклонение полученного значения k^{qh} от аналитического составляет $\approx 2\%$, что является приемлемой погрешностью.

4.3 Наклонная трубка эллиптического сечения

Теперь рассмотрим случай одной трубки эллиптического сечения с осью, имеющей угол 45° к оси Oy и лежащей в плоскости zOy (см. рисунок 6a). Здесь геометрия стенок трубки аппроксимируется «хуже», чем в рассматриваемых до этого случаях: стенки представляют собой «лесенку» из ячеек, а не ровную поверхность, параллельную координатной оси, как, например, в случае трубок квадратного сечения.



(a) Вид «порового пространства» в расчетной программе.



(b) Схема геометрии образца. Серым цветом обозначен скелет, белым – поровое пространство.

Рис. 6: Модельная пористая среда, состоящая из одной трубки с осью, наклоненной под углом 45° по отношению к оси Oy и параллельной плоскости zOy.

Сечения трубки плоскостями, параллельными xOz, являются окружностями радиуса $R = 10^{-4}$ м. Поэтому сечение плоскостью, перпендикулярной оси трубки, является эллипсом с полуосями $a = R$ и $b = R\cos(\pi/4) = R/\sqrt{2}$. Как известно (см., например, [11], стр. 83), для течения Пуазейля в трубе эллиптического сечения выражение для объемного расхода имеет вид:

$$Q = \frac{\pi \Delta p^*}{4\eta l^*} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \tag{9}$$

где Δp^* — скачок давления между плоскостями, расположенными на расстоянии l^* друг от друга (см. рисунок 6b).

Коэффициент динамической вязкости $\eta = 1.665 \cdot 10^{-4}$ Па · сек. Начальные значения: $\rho_0 = 1.251$ кг/м^3, $\boldsymbol{v}_0 = \mathbf{0}$, $p_0 = 10^5$ Па.

Граничные условия:

- на входной границе ($y = 0$): $\partial \boldsymbol{v}/\partial y = \mathbf{0}$, $\rho = 1.251$, $p = 10^5 + 0.1$;
- на выходной границе ($y = L_y$): $\partial \boldsymbol{v}/\partial y = \mathbf{0}$, $\partial \rho/\partial y = 0$, $p = 10^5$;
- на остальных сторонах расчетной области ставятся условия прилипания.

На рисунках 8 показаны распределение модуля скорости в сечении, перпендикулярном оси трубки, и изоповерхности давления, а на рисунках 7 — распределение модуля скорости и давления в сечении $x = L_x/2$. Расчеты проведены на сетке $32 \times 160 \times 192$ ячеек. Ближе к середине трубки изоповерхности являются плоскими. Неплоская форма около границ связана с тем, что давление там задано на плоскостях, *не перпендикулярных* к оси трубки.

Таблица 4

Размер сетки	h, 10^{-6}м	k^{qh}, 10^{-11}м^2	$Ql^*/\Delta p^*$, 10^{-13}м/(Па $\cdot$ сек)	N_R
$32 \times 160 \times 192$	6.25	6.30	1.23	16
$64 \times 320 \times 384$	3.125	5.92	1.17	32
—	«точное» значение	5.45	1.11	—

Получим аналитическое выражение для коэффициента проницаемости в рассматриваемом случае. При установившемся течении несжимаемой жидкости в трубе объемный расход через любое сечение постоянен. Поэтому для определения расхода в рассматриваемом случае постановки граничных условий можно измерить перепад давления между плоскостями, расположенными вдали от краев (см. рисунок 6b), и воспользоваться формулой (9). С другой стороны, расход входит в закон Дарси (6). Тогда выражение для коэффициента проницаемости принимает вид:

$$k = \frac{L\Delta p^*}{Al^*\Delta p} \cdot \frac{\pi a^3 b^3}{4(a^2+b^2)}. \tag{10}$$

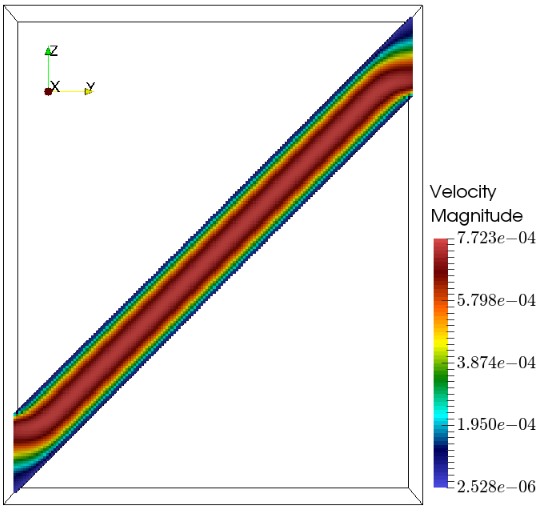
Вводя обозначение $\tilde{\tau} = l/L$ (*извилистость*), получим:

$$k = \frac{\pi a^3 b^3}{4(a^2+b^2)} \cdot \frac{1}{A\tilde{\tau}} \cdot \delta, \tag{11}$$

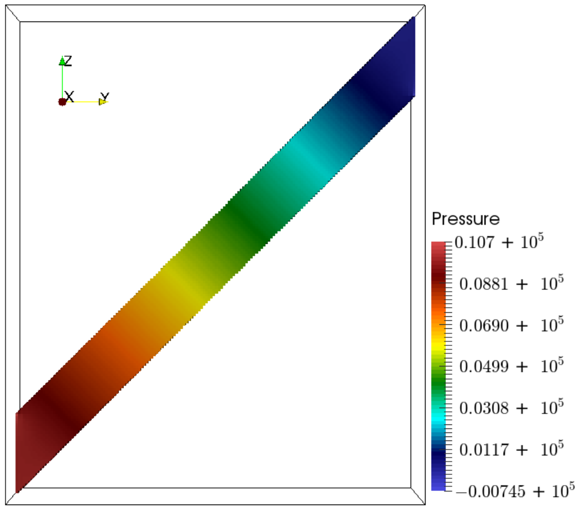
где $\delta = \Delta p^* l/(\Delta p l^*)$. В работе [12] принимают $\delta = 1$.

Из соотошения (9) заключаем, что отношение объемного расхода к градиенту давления является величиной постоянной и может быть найдено аналитически. В таблице 4 представлены значения $Ql^*/\Delta p^*$, полученные в расчетах на различных сетках, и аналитическое значение. Также там представлены полученные в расчете значения коэффициента проницаемости k^{qh} в зависимости от пространственного шага сетки h. Последняя колонка соответствует числу ячеек N_R на радиус окружности, получающейся в сечении трубки плоскостями, параллельными плоскости xOz.

На рисунке 9 показано распределение давления вдоль оси трубки, полученное при расчете на различных сетках. На нем также видно, что вдали от входной и выходной границ давление изменяется линейно.

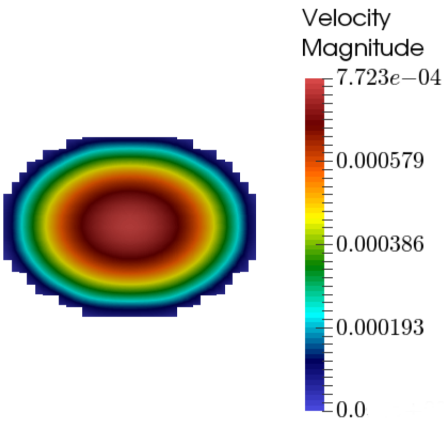


(a) Модуль скорости

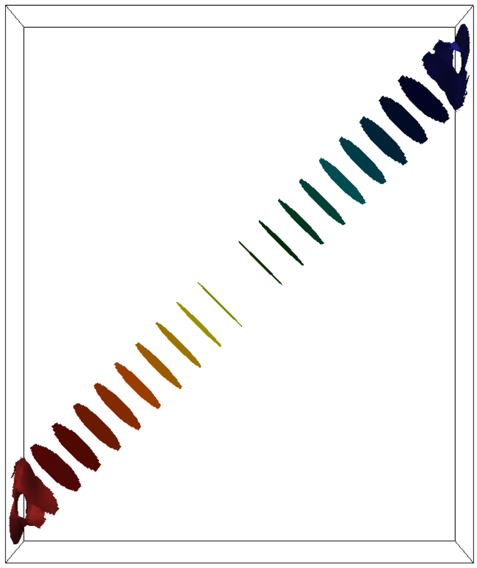


(b) Давление

Рис. 7: Распределение модуля скорости и давления в сечении $x = L_x/2$.



(a) Распределение модуля скорости в сечении, перпендикулярном оси трубки.



(b) Изоповерхности давления, получившиеся в расчете течения в наклонной трубе.

Рис. 8

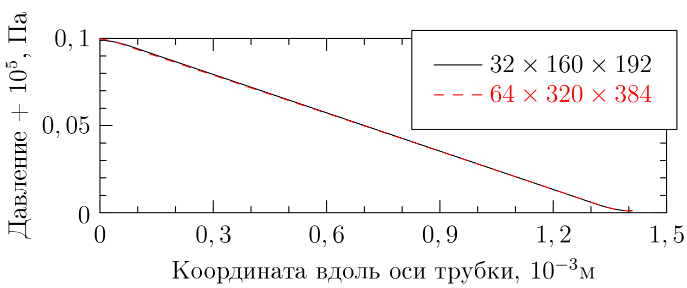


Рис. 9: Распределение давления вдоль оси наклонной трубки эллиптического сечения, полученное в расчетах. $\Delta p^*/l^* = 7.293 \cdot 10^{-4}$ Па/м(см. рисунок 6b).

Таблица 5

Образец	Направление	k^{qh}	k^{plb}	k^{ic}	Δ^{plb}	Δ^{ic}
sandstone_9 (300^3/22.2%/3.398мкм)	x	3441	3413	2735	0.8%	26%
	y	2803	2784	2093	0.7%	34%
	z	2563	2533	1844	1.0%	39%
sandstone_5 (300^3/21.1%/3.997мкм)	x	6330	6342	4638	0.2%	36%
	y	6590	6602	4874	0.2%	35%
	z	6556	6579	4440	0.4%	47%
carbonate_1 (400^3/23.3%/2.85мкм)	x	1139	1155	785	1.4%	45%
	y	2107	2135	1469	1.3%	43%
	z	1363	1380	1053	1.2%	29%

5 Моделирование течений в микрообразцах горных пород

В данном разделе представлены результаты расчетов коэффициентов проницаемости реальных пористых сред. Полученные значения сравниваются со значениями, вычисленными методом решеточных уравнений Больцмана.

Все приведенные ниже результаты расчетов соответствуют совершенному вязкому теплопроводному газу с параметрами:

$\eta = 1.665 \cdot 10^{-5}$Па $\cdot$ сек, $\varkappa = 0.0233$ кг $\cdot$ м/(К $\cdot$ сек^3), $\mathcal{R} = 296.8$ Дж/(кг $\cdot$ К) (азот N_2 при нормальных условиях). В начальный момент времени газ покоится: $\boldsymbol{v}_0 = \mathbf{0}$, $\rho_0 = 1.251$ кг/м^3, $p_0 = 10^5$ Па.

Граничные условия:

- на левой границе ($y = 0$): $\partial \boldsymbol{v}/\partial y = \mathbf{0}$, $\rho = 1.251$, $p = 10^5 + 0.1$;
- на правой границе ($y = L$): $\partial \boldsymbol{v}/\partial y = \mathbf{0}$, $\partial \rho/\partial y = 0$, $p = 10^5$;
- на остальных сторонах расчетной области, а также на скелете образца ставятся условия прилипания: $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, $\partial \rho/\partial \boldsymbol{n} = 0$, $\partial p/\partial \boldsymbol{n} = 0$.

Для расчетов использовались свободно доступные цифровые микрообразцы горных пород [13]. На рисунке 10 показаны линии тока, полученные в результате моделирования для образца sandstone_5 вдоль направления Ox.

В таблице 5 представлены полученные в результате расчетов коэффициенты проницаемости k^{qh} некоторых микрообразцов горной породы. Там же приведены значения k^{plb} коэффициента проницаемости, полученные с использованием свободно доступной программы Palabos (`www.palabos.org`), основанной на методе решеточных уравнений Больцмана и значения k^{ic} из [13]. Все значения приведены в мДарси. Также в таблице 5 представлены $\Delta^{ic,plb}$ —

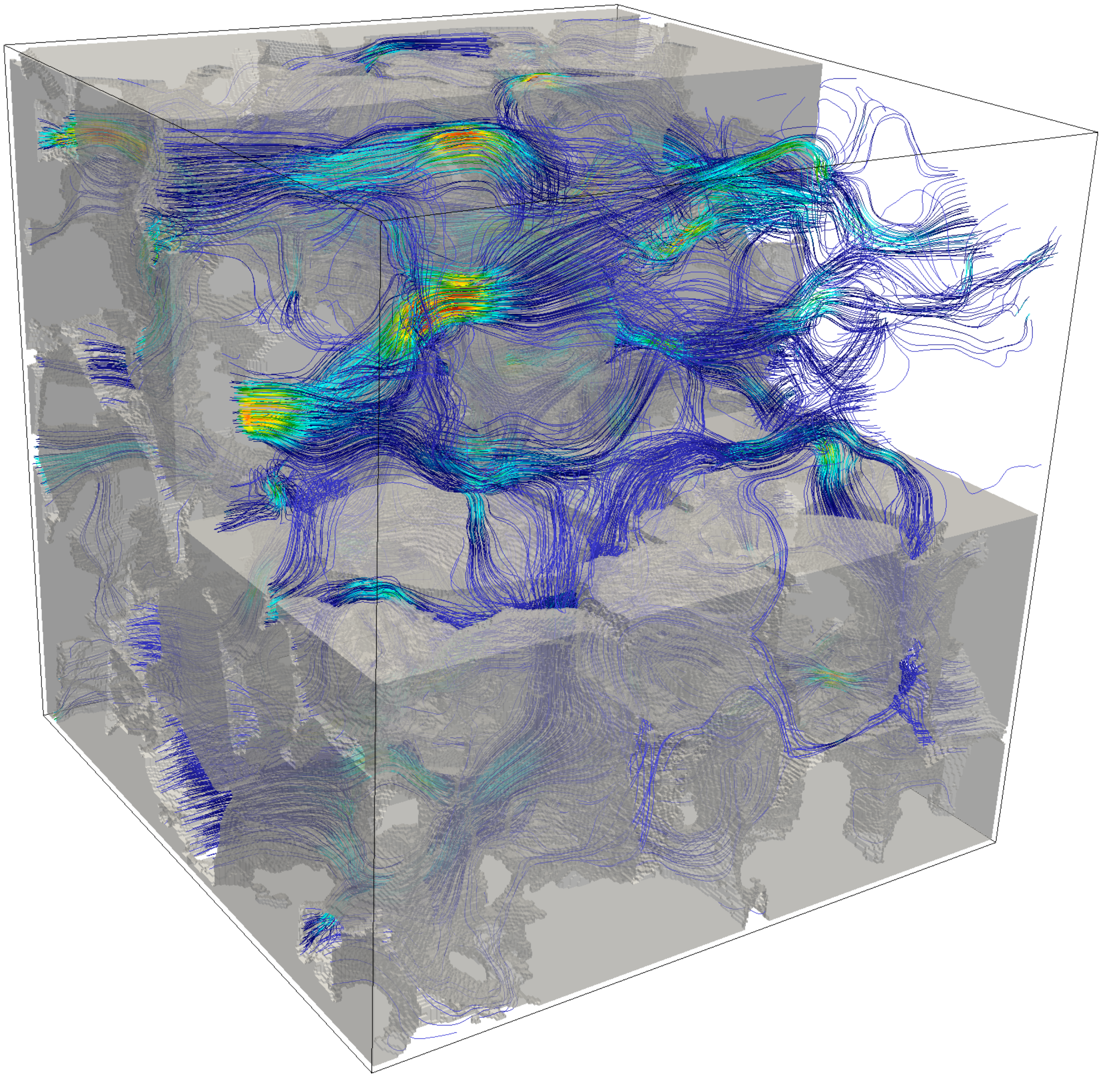


Рис. 10: Линии тока, полученные в расчете течения в образце sandstone_5 вдоль направления Ox.

Таблица 6

степень измельчения	сетка	$k^{qh}, 10^{-12}$м^2	$k^{plb}, 10^{-12}$м^2
$\times 1$	100^3	2.97505	2.90547
$\times 2$	200^3	2.36869	2.44105
$\times 4$	400^3	2.18531	2.20491

относительные отклонения значений $k^{ic,plb}$ от значения k^{qh}. В названии микрообразцов представлены значения размерности цифрового образца (число ячеек), пористости и разрешение соответственно.

Наблюдается хорошее совпадение представленных в данной работе результатов с опубликованными и полученными другим методом. Возможные отличия могут быть связаны с неполным воспроизводством условий вычислительного эксперимента, а также использованием в настоящей работе более полной математической модели течения.

Теперь рассмотрим, как увеличение разрешения может влиять на значение проницаемости. Для этого «вырежем» угол размером $100\times 100\times 100$ ячеек из образца sandstone_1 ($h = 8.683\cdot 10^{-6}$м) и измельчим его в 2 и в 4 раза. Подчеркнем, что при этом область течения остается неизменной, меняется лишь разрешение, с которым описывается структура течения. Полученные значения коэффициентов проницаемости представлены в таблице 6. Уменьшение коэффициента проницаемости с увеличением степени мельчения расчетной сетки также наблюдается в работе [9]. Это подтверждает тот факт, что, вообще говоря, определение проницаемости зависит от качества разрешения самых мелких участков порового пространства.

6 Заключение

Полученные результаты позволяют рассматривать подход, основанный на КГиД системе уравнений, как перспективный метод построения эффективных явных алгоритмов для моделирования течений в сложных пространственных областях, в частности, микротомограммах образцов горных пород. При этом они обладают лучшими, чем подходы на основе решеточных уравнений Больцмана свойствами, в плане корректности, общности и полноты описания течения.

Список литературы

[1] S. Succi. The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Clarendon Press, 2001.

[2] Б.Н. Четверушкин. Кинетические схемы и квазигидродинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.

[3] Т. Г. Елизарова. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Научный мир, 2007.

[4] Ю. В. Шеретов. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.

[5] В.А. Балашов, Е.Б. Савенков. Численное исследование квазигидродинамической системы уравнений для расчета течений при малых числах Маха // Журнал вычислительной математики и математической физики 55(10):1773–1782, 2015.

[6] Л.И. Седов. Механика сплошной среды, том 2. М. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

[7] Н.Е. Леонтьев. Основы теории фильтрации. Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ Москва, 2009.

[8] R. Guibert, P. Horgue, G. Debenest, M. Quintard. A comparison of various methods for the numerical evaluation of porous media permeability tensors from pore-scale geometry. // Mathematical Geosciences pages 1–19, 2015.

[9] R. Guibert, M. Nazarova, P. Horgue, G. Hamon, P. Creux, G. Debenest. Computational permeability determination from pore-scale imaging: Sample size, mesh and method sensitivities. // Transport in Porous Media 107(3):641–656, 2015.

[10] M. Piller, G. Schena, M. Nolich, S. Favretto, F. Radaelli, E. Rossi. Analysis of hydraulic permeability in porous media: From high resolution x-ray tomography to direct numerical simulation. // Transport in Porous Media 80(1):57–78, 2009.

[11] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т., том VI. Гидродинамика. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

[12] G. Mavko, T. Mukerji, J. Dvorkin. The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis of Porous Media. Cambridge University Press, 2nd edition, 2009.

[13] H. Dong, M. Blunt. Pore-network extraction from micro-computerized-tomography images. // Physical Review E 80(3):036307–1 – 036307–11, 2009.

Содержание