[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](http://keldysh.ru/) • [Электронная библиотека](http://library.keldysh.ru/)

[Препринты ИПМ](http://library.keldysh.ru/preprints/) • [Препринт № 86 за 2015 г.](http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-86)

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Басс Л.П., Долголева Г.В., Потапенко И.Ф.

Численный расчет переноса тепла электронами в столкновительной плазме методом конечных разностей

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Басс Л.П., Долголева Г.В., Потапенко И.Ф. Численный расчет переноса тепла электронами в столкновительной плазме методом конечных разностей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 86. 22 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-86

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

Л.П. Басс, Г.В. Долголева, И.Ф. Потапенко

Численный расчет переноса тепла электронами в столкновительной плазме методом конечных разностей

Москва
2015

Л.П. Басс, Г.В. Долголева, И.Ф. Потапенко

Численный расчет переноса тепла электронами в столкновительной плазме методом конечных разностей

Предложен алгоритм численного решения кинетического уравнения для плазмы с учетом столкновений в 1D2V геометрии. Нелинейный интеграл столкновений рассчитывается с помощью полностью консервативных разностных схем. Самосогласованное электрическое поле вычисляется из условия электронейтральности на каждом шаге по времени. Представлены результаты расчетов релаксации локализованного начального возмущения температуры в столкновительной плазме в 1D2V геометрии.

Ключевые слова: кулоновские столкновения, уравнение Ландау - Фоккера - Планка, полностью консервативные разностные схемы, квазинейтральный предел

L.P. Bass, G.V. Dolgoliova, I.F. Potapenko

Numerical simulation of the electron heat transport in a collisional plasma by finite difference method

An algorithm for the numerical solution of the plasma kinetic equation in 1D2V geometry is suggested. The nonlinear collision operator is computed on the base of the completely conservative difference scheme. Self consistent electrical field is computed from the condition of quasi neutrality at each time step. The numerical results for the relaxation of the initial temperature perturbation in a collisional plasma in 1D2V geometry are presented.

Key words: Coulomb collisions, Landau - Fokker - Planck equation, completely conservative difference schemes, quasineutral limit

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 14-01-00251

Оглавление

Введение

Начиная с 70-х годов прошлого века, в связи с развитием лазерной технологии и проведением первых экспериментов по лазерному термоядерному синтезу, все больше растет интерес к вопросу взаимодействия лазерного излучения большой интенсивности с плазмой. При этом возникают значительные градиенты температуры и плотности, что ставит под сомнение возможность описания реальных лазерных экспериментов в рамках классической гидродинамики [1]. К настоящему времени накоплен целый ряд экспериментальных данных, подтверждающих представления о нелокальном характере теплопереноса в лазерной плазме и свидетельствующих о невозможности описания теплового переноса в рамках гидродинамических моделей, приводящих, например, к значительной переоценке потока энергии [2] - [4]. В то же время вопрос о величине теплового потока является одним из ключевых для успешного осуществления лазерного термоядерного синтеза (ЛТС), поскольку основная часть энергии падающего лазерного излучения поглощается достаточно далеко от области горения - вблизи критической плотности, а затем переносится вглубь плазмы тепловым потоком электронов, от величины которого зависят темп нагрева, температура и сжатие мишени.

Таким образом, создание и развитие многомерных кинетических кодов представляет не только самостоятельный научный интерес, но и, учитывая стремительный прогресс в суперкомпьютерных технологиях, является необходимым условием полноценного гидро-кинетического численного моделирования сложных крупномасштабных явлений в физике плазмы. Однако и более простые с технической точки зрения постановки задач являются весьма полезными, поскольку именно простые модели, которые дают надежные результаты, могут служить реперными точками для более сложных кодов. В этом русле лежит идея данной работы.

Важной характеристикой в исследованиях, связанными с ЛТС, является величина теплового потока, возникающего при релаксации горячего пятна. В кинетической теории тепловой поток является моментом функции распределения $f_e(\mathbf{v}, t)$ и определяется по формуле

$$\mathbf{q} = \frac{m}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{v} f_e(\mathbf{v}, t) \mathrm{V}^2,$$

здесь $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_e$ - направленная скорость электронов. В случае плавного градиента температуры для расчета теплового потока применима формула Спитцера-Харма, которая после соответствующего обезразмеривания принимает вид

$$\tilde{\mathbf{q}}_{SH}(\tilde{\mathbf{x}}) \simeq -\frac{128}{3\pi}\frac{Z_i+0.24}{Z_i+4.2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tilde{\mathbf{x}}}.$$

Однако уже при достаточно малых числах Кнудсена $\gamma \geq 0.05$ классическая теория переноса, а вместе с ней и данная формула, начинают расходиться с экспериментальными данными. В случае же резких градиентов, когда $\gamma \geq 0.1$, применение формулы приводит вообще к ощибочным результатам: тепловой поток превышает свое максимально возможное значение $\sim n_e v_{T_e} T_e$, соответствующее потоку свободных электронов. Таким образом, решение кинетического уравнения должно дать ответ границам применимости формулы Спитцера - Харма.

В настоящее время есть множество кодов для численного решения неоднородного кинетического уравнения в 1D по пространству и 2D в скоростном пространстве геометрии. При этом существует значительный разброс данных в зависимости от выбранного метода расчета.

Данная работа рассматривает построение регулярного разностного метода для расчета кинетического уравнения для плазмы с учетом столкновений в 1D2V геометрии. Нелинейный оператор кулоновских столкновений аппроксимируется с помощью полностью консервативной разностной схемы. Анализируются параметры нормировки уравнения, представлен алгоритм численного решения кинетического уравнения, приведен в общих чертах алгоритм расчета самосогласованного электрического поля, которое рассчитывается в амбиполярном приближении, исходя из условия электронейтральности на каждом шаге по времени. Представлены первые результаты моделирования: релаксация локализованного в пространстве начального возмущения температуры в столкновительной плазме в 1D2V геометрии для одного сорта частиц. Сравниваются результаты для разной степени столкновительности плазмы.

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений

Основным уравнением кинетической теории является нелинейное уравнение Больцмана [14]. Для функции распределения f_i частиц сорта i, зависящей от пространственной координаты $\mathbf{r}$, скорости $\mathbf{v}$ и времени $t \geq 0$, оно имеет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = \sum_j \hat{J}[f_i, f_j], \tag{1}$$

где m_i - масса частиц i-ого сорта, $\mathbf{F}_i$ - сила, действующая на частицы сорта i. В правой части уравнения стоит оператор (интеграл) столкновений Ландау

$$\hat{J}_{ij} = \frac{m_{ij}^2}{m_i^2 \, 2\pi e^4 \Lambda n} \, \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{w} g_{ij}^{(tr)}(\mathrm{u}) \left\{ \mathrm{u}^2 \delta^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta \right\} \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial v^\beta} - \frac{m_i}{m_j} \frac{\partial}{\partial w^\beta} \right) f_i(\mathbf{v}) f_j(\mathbf{w}), \tag{2}$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, m, n - масса частиц и плотность, Λ - кулоновский логарифм. Индикатрисса рассеяния равна произведению относительной скорости на сечение рассеяния $g(u, \mu) = u\sigma(u, \mu)$ и

$$g_{ij}^{(tr)}(\mathrm{u}) = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} d\mu \, g_{ij}(\mathrm{u}, \mu)(1 - \mu).$$

Столкновительный оператор для заряженных частиц (2) был впервые получен Ландау [15], как аппроксимация интеграла столкновений Больцмана (1) в предположении, что средняя энергия кулоновского взаимодействия мала по сравнению со средней кинетической энергией. Через 20 лет этот оператор был вновь выведен в форме нелинейного уравнения Фоккера - Планка [16], в котором коэффициенты уравнения выражаются через интегралы от функции распределения. По ряду причин именно эта форма уравнения стала очень популярной в численном моделировании задач управляемого термоядерного синтеза, начиная с 70х годов (см., например, [17], [18] и ссылки в них).

Мы рассматриваем одномерный по пространству азимутально симметричный случай в пространстве скоростей для функции распределения $f(x, v, \mu, t)$, $v = |\mathbf{v}|$, $-1 \leq \mu = \cos\vartheta \leq 1$.

Для анализа столкновительных процессов введем важные параметры: среднюю длину электрон-ионного пробега λ_{ei}, тепловую скорость v_{th} и электрон-ионную частоту столкновений ν_{ei}, имеющие вид

$$v_{th} = \sqrt{3T/m_e}, \quad \nu_{ei} = \frac{v_{th}}{\lambda_{ei}}.$$

Эти параметры дают нам возможность масштабировать время, пространство и скорость

$$t \sim \nu_{ei} \, t, \quad x \sim x/\lambda_{ei}, \quad v \sim v/v_{th}.$$

Таким же образом мы установим масштаб для электрического поля и функции распределения

$$E \sim \frac{eE}{m_e v_{th} \nu_{ei}}, \quad f \sim f_e \cdot \frac{v_{th}^3}{n_0},$$

n_0 - начальная электронная плотность.

В этих безразмерных переменных система уравнений (1) с уравнениями для электрического поля примет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} - E \frac{\partial f}{\partial v_x} = \frac{1}{Z} I_{ee} + I_{ei}\,, \\ &\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{j_x(x)}{\alpha^2}\,, \\ &\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1 - n(x)}{\alpha^2}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где уравнение Максвелла - Пуассона должно быть выполнено в начальный момент времени. Вместо уравнения Пуассона (третье уравнение в (3)) используется уравнение Максвелла - Ампера. Эти уравнения эквивалентны, если уравнение Пуассона справедливо в начальный момент времени. Ионы предполагаются неподвижными, плотность нормирована на единицу (следовательно, времена расчета должны быть меньше чем $t_{ii} \sim 2000\, t_{ee}$).

Важным параметром является параметр α, который есть не что иное, как обратный плазменный параметр, и в большинстве задач является малой величиной: $\alpha = \nu_{ei}/\omega_{pe} \ll 1$, ω_{pe} - электронная плазменная частота, $n = n_e/n_0$, Z - зарядовое ионное число. В данной работе мы рассматриваем случай однозарядных ионов $Z = 1$.

Предельная система получается, когда параметр $\alpha \to 0$ и соответствует квазинейтральному пределу: $j \to 0$. Она может быть записана как

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} - E \frac{\partial f}{\partial v_x} = \frac{1}{Z} \hat{J}_{ee} + \hat{J}_{ei}\,, \\ &j = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

с $n = 1$ в начальный момент. Когда $\alpha \to 0$, уравнение Максвелла - Пуассона вырождается в алгебраическое уравнение $n = 1$ и мы не можем получить из этого уравнения электрическое поле на столкновительных временах.

Уравнение решается в сферической системе координат. Однако для сокращения описания мы используем и декартову координату: $v_x = v \cdot \mu$.

Коэффициенты в операторе столкновений, зависящие от функции распределения, мы используем в сокращенном описании, а именно через так называемые изотропные потенциалы Розенблюта, которые не зависят от угла. Для аппроксимации уравнения конечными разностями выбирается дважды дивергентная форма записи оператора столкновений [19, 20], которая обеспечивает выполнение закона сохранения частиц и энергии в дискретном случае:

$$\partial_t f_\alpha = (1/v^2)\, \partial_v \left[(1/v) \partial_v W(f_\alpha; v)\right] \;+\; (1/v^2)\, C(f_\alpha; v)\, \partial_\mu \left[(1-\mu^2) \partial_\mu f_\alpha\right] \tag{5}$$

$$\text{для}\;\; 0 \le v < \infty,\;\; 0 \le \mu \le 1,\;\; t \ge 0; \qquad \alpha = e, i,$$

при следующих граничных условиях для функции распределения:

$$\lim_{v\to\infty} f_\alpha \to 0, \quad f|_{v=0} \ - \ \text{ограничена.}$$

В уравнении (5) нелинейный оператор $W(f_\alpha; v)$ имеет симметричную форму

$$W(f_\alpha; v) = \sum_{\beta=e,i} \int_0^v \left\{ \frac{m_e}{m_\beta} F_\beta(x) \left[p_\alpha(x,\mu) - p_\alpha(v,\mu) \right] - \right.$$
$$\left. - \frac{m_e}{m_\alpha} P_\beta(x) \left[f_\alpha(x,\mu) - f_\alpha(v,\mu) \right] \right\} x^2 dx,$$

и функция, на которую умножается угловой оператор рассеяния, есть сумма моментов функций распределения электронов и ионов

$$C(f_\alpha; v) = \frac{m_e}{m_\alpha} \frac{1}{2v} \sum_{\beta=e,i} \left[N_\beta(v) - \ R_\beta(v)/v^2 + v P_\beta(v) \right].$$

Здесь

$$F_\alpha(v) = \int_{-1}^{1} f_\alpha(v,\mu) d\mu = 2\int_0^1 f_\alpha(v,\mu) d\mu, \quad N_\alpha(v) = \int_0^v F_\alpha(x) x^2 dx,$$

и

$$p_\alpha(v,\mu) = \int_v^\infty f_\alpha(x,\mu) x dx, \quad P_\alpha(v) = \int_{-1}^{1} p_\alpha(v,\mu) d\mu, \quad R_\alpha(v) = \int_0^v P_\alpha(x) x^2 dx.$$

Функция распределения нормирована на единицу

$$n = \int_{-1}^{1} d\mu \int_0^\infty dv v^2 f_\alpha(v,\mu,t) = \int_0^\infty dv v^2 F_\alpha(v,t) = 1.$$

Если нет источников или стоков, то выполняется закон сохранения энергии системы

$$\mathcal{E} = \sum_{\alpha=e,i} \frac{m_\alpha}{m_e} \int_{-1}^{1} d\mu \int_0^\infty dv v^4 f_\alpha(v,\mu,t) = const.$$

Неравновесные электронная $T_e(t)$ и ионная $T_i(t)$ температуры, выраженные в энергетических единицах, выражаются следующим образом

$$T_e(t) = \frac{1}{3} \int_0^\infty dx x^4 F_e(x,t), \quad T_i(t) = \frac{1}{3} \frac{m_i}{m_e} \int_0^\infty dx x^4 F_i(x,t).$$

Закон сохранения энергии позволяет определить равновесную температуру T_{eq} равенством

$$T_e(t) + T_i(t) = T_e^{\,0} + T_i^0 = 2\, T_{eq}.$$

Тогда единственным равновесным решением для системы есть распределение Максвелла

$$f_\alpha^m(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2} \frac{m_\alpha}{m_e T_{eq}} \right)^{3/2} exp \left(-\frac{3}{2} \frac{m_\alpha}{m_e} \frac{v^2}{T_{eq}} \right), \qquad \alpha = e, i.$$

Это справедливо для решения полной электрон-ионной системы (в пространственно однородном случае). Задача о релаксации температур является одним из тестов для любой задачи столкновительной плазмы.

Решение на некотором временном интервале эволюционного нелинейного кинетического пространственно-однородного уравнения Ландау - Фоккера - Планка основывается на полностью консервативных разностных схемах, которые сохраняют число частиц и энергию системы. При этом вводится следующее часто применяемое упрощение. Одна компонента (функция распределения) рассчитывается из кинетического уравнения, а вторая - электроны или ионы (в зависимости от постановки физической задачи), предполагается максвелловской. Тогда решение для максвелловской компоненты определяется формулой для обмена температур. Если основной компонентной являются электроны, то расчет будет длительным, поскольку тогда шаг по времени на три порядка меньше по сравенению с расчетом ионной компоненты.

Мы будем использовать явную схему расчета. Тогда кроме ограничения на шаги сетки, обусловленных кинетическим уравнением, возникает условие Куранта. Однако, явная схема дает ясный алгоритм вычисления амбиполярного поля, что является ее достоинством.

Расчет амбиполярного электрического поля

При решении неоднородного кинетического уравнения для расчета движения частиц плазмы необходимо учитывать самосогласованное электромагнитное поле. В общем случае, оно является решением системы уравнений Власова-Максвелла, которую, как составную часть численного решения неоднородного кинетического уравнения (1) - (2) методом расщепления по физическим процессам, следует разрешать на каждом шаге по времени. В частном случае, когда магнитное поле отсутствует, для вычисления электростатического поля применяется уравнение Пуассона. Такой подход, однако, является малоэффективным, если речь идет о задачах, где продолжительность времени счета составляет от нескольких десятков до сотен характерных времен электрон-ионных столкновений τ_{ei}, поскольку критерием устойчивости численного решения уравнения Пуассона является ограничение шага по времени $\Delta t < 2\omega_p^{-1}$, а $\tau_{ei}\omega_p \ll 1$. Поэтому в некоторых работах, посвященных переносу в плазме ЛТС (см., например, [29] - [32]), применяется модель амбиполярного электрического поля, когда вместо уравнения Пуассона решается уравнение Максвелла-Ампера. Переформулируем постановку задачи следующим образом.

Умножаем первое уравнение из системы (3) на v_x, интегрируем обе части уравнения (для сокращения описания $v_x = v$). Используя выражение для тока

$$j = -\int f v dv,$$

получим

$$-\frac{\partial j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int v^2 f dv\right) - E\int v\frac{\partial f}{\partial v} = \int \hat{J}_{ei} v dv. \tag{6}$$

Производная по времени уравнения Максвелла - Ампера в электростатическом случае приводит к

$$\frac{\partial j}{\partial t} = -\alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \tag{7}$$

Используя (6), получим

$$\alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - E\int v\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\int v^2 f dv\right) + \int \hat{J}_{ei}\, v dv. \tag{8}$$

Поскольку

$$E\int v\frac{\partial f}{\partial v} = -n \cdot E,$$

система (3) с уравнением (8) перейдет в следующую систему

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x} - E\frac{\partial f}{\partial v_x} = \frac{1}{Z}\hat{J}_{ee} + \hat{J}_{ei}, \\ &\alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + nE = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\int v^2 f dv\right) + \int \hat{J}_{ei} v dv, \end{aligned} \tag{9}$$

в которой уравнение Максвелла - Пуассона должно быть выполнено в начальный момент времени.

Для предельного случая $\alpha \to 0$ система (9) примет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x} - E\frac{\partial f}{\partial v_x} = \frac{1}{Z}\hat{J}_{ee} + \hat{J}_{ei}\,, \\ &E = \frac{1}{n} \cdot \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\int v^2 f dv\right) + \int \hat{J}_{ei} v dv\right], \end{aligned} \tag{10}$$

где $n = 1$ и $j = 0$ в начальный момент времени. Третье уравнение из системы (3) налагает условие $j = 0$, когда $\alpha = 0$, которое должно выполняться в начальный момент времени.

Алгоритм численного решения неоднородного кинетического уравнения

Перейдем к описанию дискретной модели. Пусть пространство неоднородно вдоль оси Ox, рассмотрим расчетную область размера $L \gg \delta L$, где δL - характерный масштаб неоднородности задачи. Разобьем эту область на N_c ячеек и введем пространственно-временную сетку $\omega = \omega_h \times \omega_t$, где

$$\begin{aligned}
&\omega_x = \{X_{l+1} = X_l + \Delta x,\ l = 0, 1, ..., L_m,\ X_0 = -L/2,\ X_{L_m} = L/2\},\\
&\omega_t\ = \{t^{n+1} = t^n + \triangle t,\ n = 0, 1, ...,\ t^0 = 0\},\\
&\omega_v = \{v_{k+1} = v_k + \Delta v,\ k = 0, 1, ..., K_m,\ v_0 = 0,\ v_{k_m} = v_{max}\},\\
&\omega_\mu = \{\mu_{j+1} = \mu_j + \Delta\mu,\ j = 0, 1, ..., J,\ \mu_0 = -1,\ \mu_J = 1\}\,.
\end{aligned}$$

Начальное распределение по скорости с заданной температурой для каждой точки по x можно выбрать либо максвелловским, либо в виде δ-функции, т.е. изотропным моноэнергетическим.

Классическая численная схема для уравнения Максвелла-Ампера в столкновительном режиме записывется как

$$E_l^{n+1} = E_l^n - \frac{j_i^n \Delta t}{\alpha^2}\,.$$

Устойчивость такой явной схемы зависит от параметра α. Когда этот параметр стремится к нулю, это уравнение не может быть использовано для вычисления электрического поля на новом шаге по времени. Поэтому целесообразно использовать неявную схему для уравнения:

$$\frac{E_l^{n+1} - E_l^n}{\Delta t} = -\frac{j_i^{n+1}}{\alpha^2}\,. \tag{11}$$

Граничные условия по x можно выбрать периодическими или отражательными в зависимости от постановки задачи. Мы рассматриваем условие равенства нулю функции распределения $f = 0$, $x = -L/2$ для частиц, летящих в положительном направлении, и $f = 0$, $x = L/2$ для частиц, летящих в отрицательном направлении. Дискретные уравнения в граничных точках аппроксимируются, исходя из законов сохранения.

Мы не будем подробно описывать аппроксимацию оператора электрического поля, поскольку в данной работе рассматривается численное решение уравнения

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v\mu\,\frac{\partial f_e}{\partial x} = \hat{J}_{ee}(f_e, f_e)\,.$$

Однако, для более полного изложения приведем общий вид оператора

$$Ef = E\frac{\partial f}{\partial v_x} = E\mu\frac{1}{v^2}\frac{\partial \phi}{\partial v} + E\frac{1}{v^2}\frac{\partial \psi}{\partial \mu}\,.$$

Здесь использованы обозначения.

$$\phi = f \cdot v^2, \quad \psi = v \cdot (1-\mu^2)\, f\,.$$

В общем случае аппроксимация дана уравнением

$$Ef \propto \frac{(E^{n+1}\phi^n)_{l,k+\frac{1}{2},j} - (E^{n+1}\phi^n)_{l,k-\frac{1}{2},j}}{\Delta v}\,,$$

где

$$(E^{n+1}\phi^n)_{l,k+\frac{1}{2},j} = E_l^{n+1}\frac{1}{v_k^2}\mu_j\left(\frac{\phi^n_{l,k,j}+\phi^n_{l,k+1,j}}{2}\right) - |E_l^{n+1}\mu_j|\left(\frac{\phi^n_{l,k+1,j}-\phi^n_{l,k,j}}{2}\right).$$

Условия в граничных точках ставятся исходя из закона сохранения числа частиц.

Аппроксимация адвективного члена (переноса)

$$I^x = v_x\frac{\partial f}{\partial x} = v\mu\frac{\partial f}{\partial x}$$

выглядит следующим образом

$$I^x_{l,k,j} = v_k\{\mu_j(f^n_{l+1,k,j} - f^n_{l-1,k,j}) - |\mu_j|[f^n_{l+1,k,j} - 2f^n_{l,k,j} + f^n_{l-1,k,j}]\}. \tag{12}$$

Аппроксимация столкновительного оператора подробно дана в [19], [20].

Тогда функция распределения на следующем шаге по времени определяется

$$f_{l,k,j} = f^n_{l,k,j} - \frac{dt}{2\Delta x}I^x_{l,k,j} + dt\cdot\hat{J}_{l,k,j}\,.$$

Релаксация возмущения температуры

В качестве первого шага рассмотрим уравнение для одного сорта частиц и без учета электрического поля. Найдем численное решение релаксации локализованного начального возмущения температуры (созданного, например, коротким лазерным импульсом) с помощью кинетического уравнения для функции распределения электронов f_e:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v\mu\,\frac{\partial f_e}{\partial x} = \hat{J}_{ee}(f_e, f_e).$$

При этом мы ввели "коэффициенты столкновительности k_c и переноса k_{tr}" в уравнение:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + k_{tr} v \mu \frac{\partial f_e}{\partial x} = k_c \, \hat{J}_{ee}(f_e, f_e),$$

для наглядности взаимодействия двух операторов. В начальный момент времени электроны имеют максвелловское распределение по скоростям, локализованное в точке $x = 0$, $v = 1$ с профилем температуры гауссова вида

$$f(x, v, \mu, t)|_{t=0} =: \; e^{-50\, x^2} \cdot e^{-10\, (v-1)^2} \quad \text{для} \quad \mu \in [-1, 1] \, .$$

То есть, в начальный момент времени ток равен нулю, поскольку функция одинакова для всех μ - изотропна по углам.

Ниже представлены графики релаксации функции распределения, тока и энергии. На рис. 1 - рис. 3 приведены графики функции распределения для пространственно однородного случая. На рис. 1 зависимость функции от скорости представлена в момент времени $t = 0.5$ для трех значений μ. В тепловой области максвелловское распределение устанавливается за время порядка единицы, однако для установления распределения в высокоэнергетичной и, следовательно, менее столкновительной области требуется значительно большее время. На рис. 2 зависимость функции распределения от скорости в логарифмическом масштабе наглядно передает характер высокоэнергетической области при $t = 1$ и $t = 10$. Из рисунка можно оценить период времени необходимый для формирования горячих хвостов распределения. Рис. 3 дает вид функции распределения для тех же моментов времени $t = 1$ и $t = 10$ в двух масштабах - линейном и логарифмическом. Отметим, что ко времени $t = 1$ функция распределения становится практически изотропной.

рис. 1

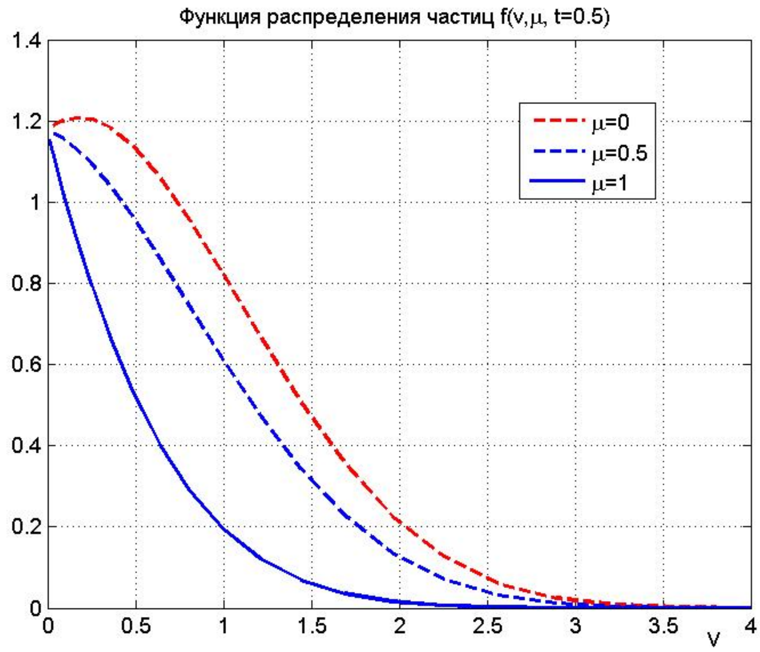


рис. 2

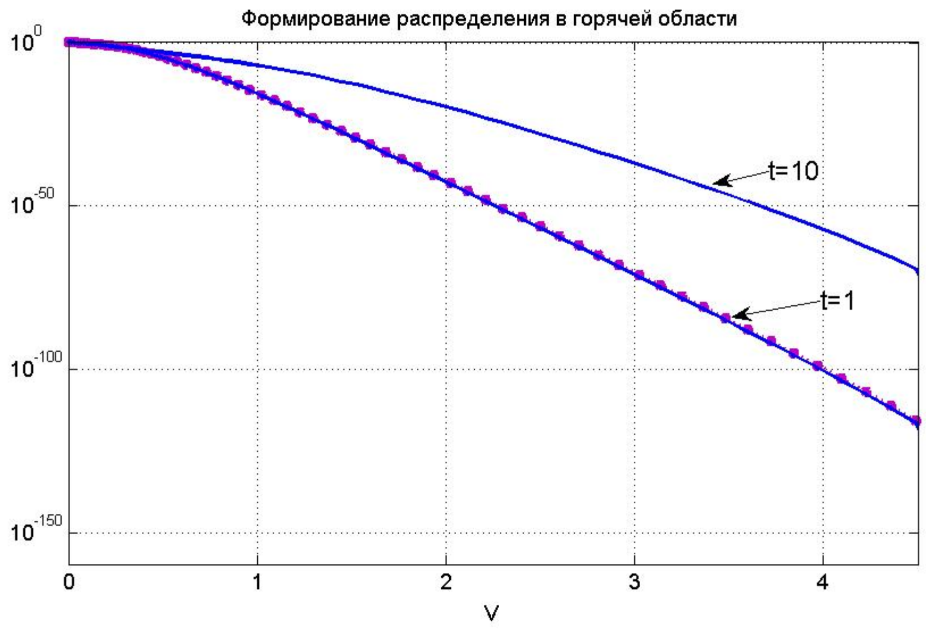
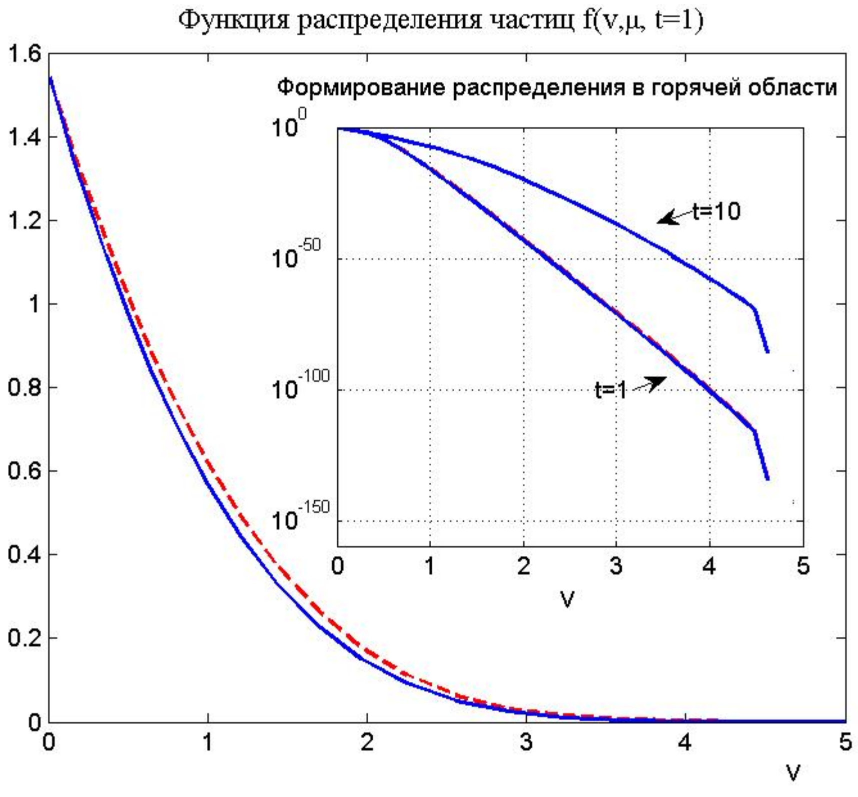


рис. 3



Далее представлены графики (рис. 4 - рис. 6) начального распределения в различных видах (трехмерном и контурном) и различных координатах для пространственной задачи (от μ зависимости нет).

рис. 4

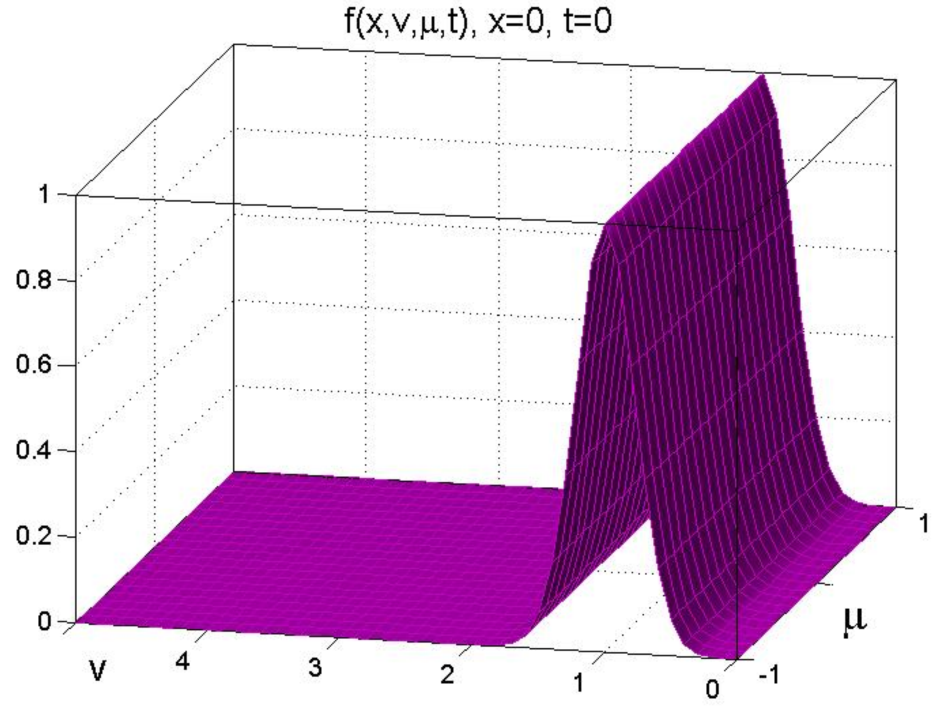

f(x,v,μ,t), x=0, t=0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
v
4
3
2
1
0
-1
μ
1

рис. 5

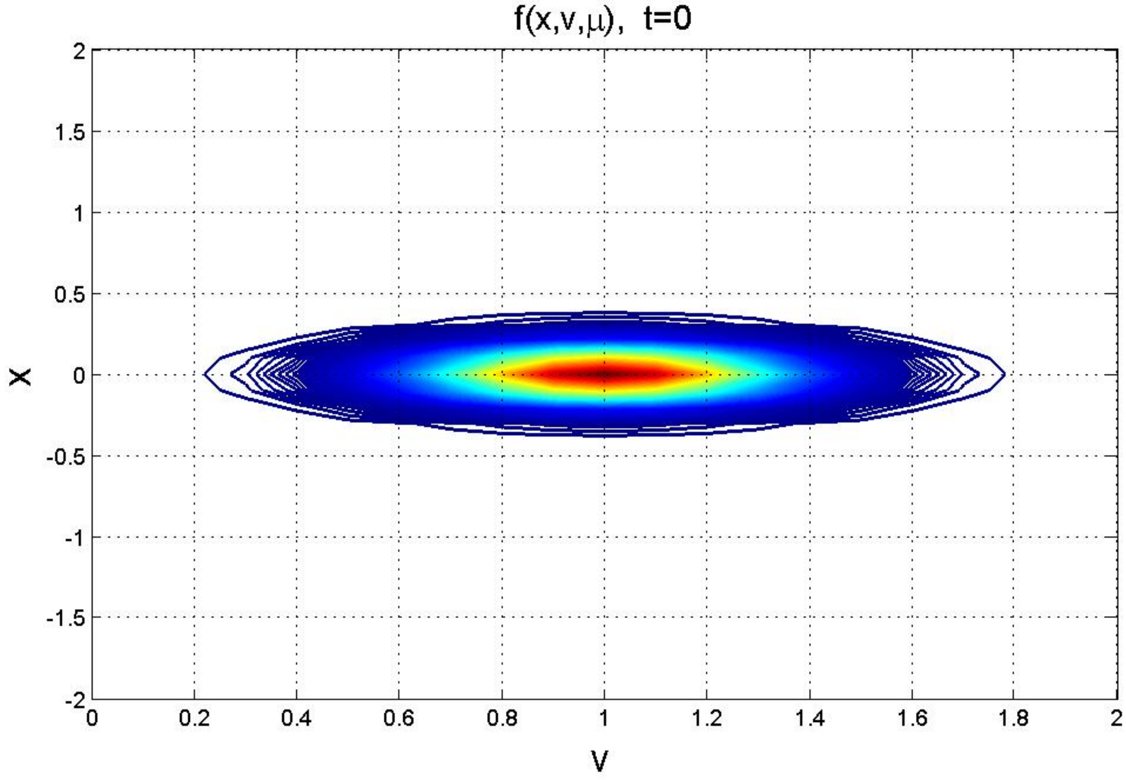
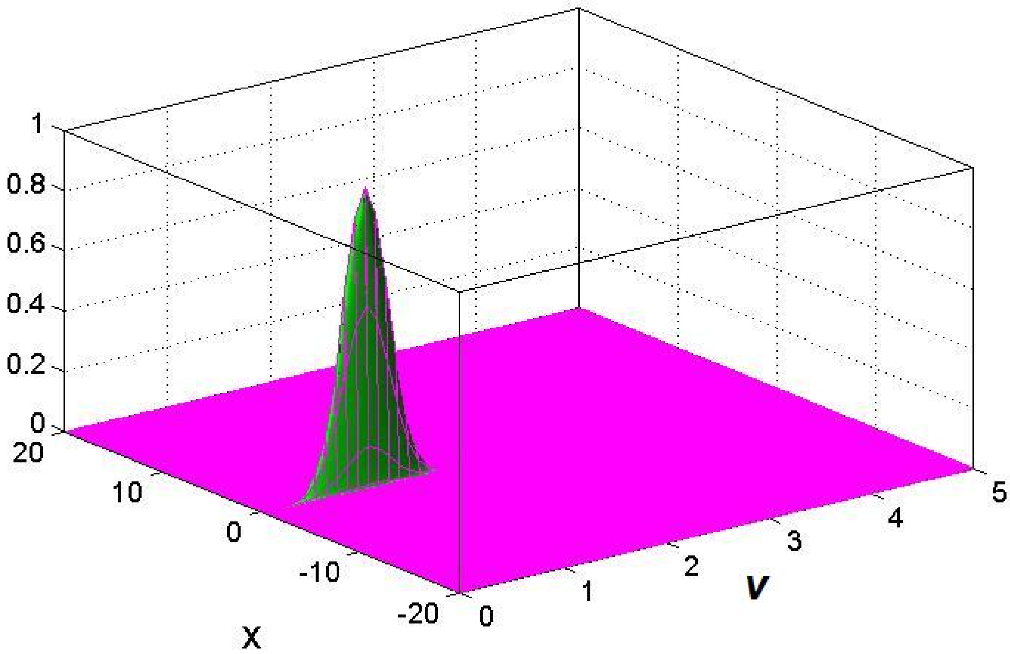

f(x,v,μ), t=0
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
v

рис. 6



Графики пространственно-временной зависимости температуры (средней энергии) в направлении x: $T_x = \int dvv^2v_x^2$ (рис. 7 - рис. 10) приведены для различных моментов времени и для различной степени столкновительности (соотношение коэффициентов k_c, k_{tr} в кинетическом уравнении).

рис. 7

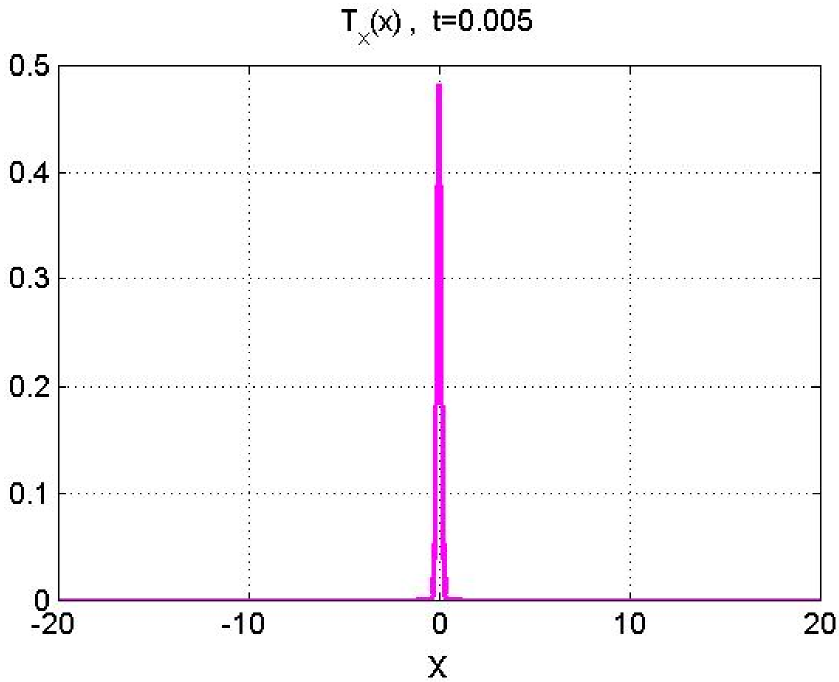
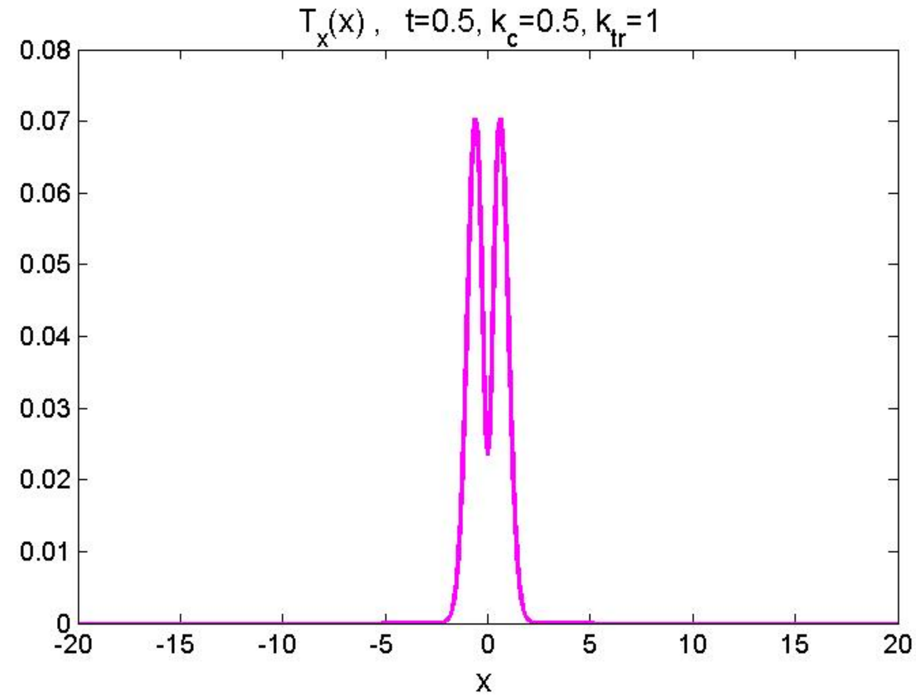


рис. 8



Характер "параллельной" пространству температуры T_x имеет вид бегущей волны, профиль которой релаксирует и размывается под действием столкновений, то есть кулоновской диффузии (рис. 9, рис. 10).

рис. 9

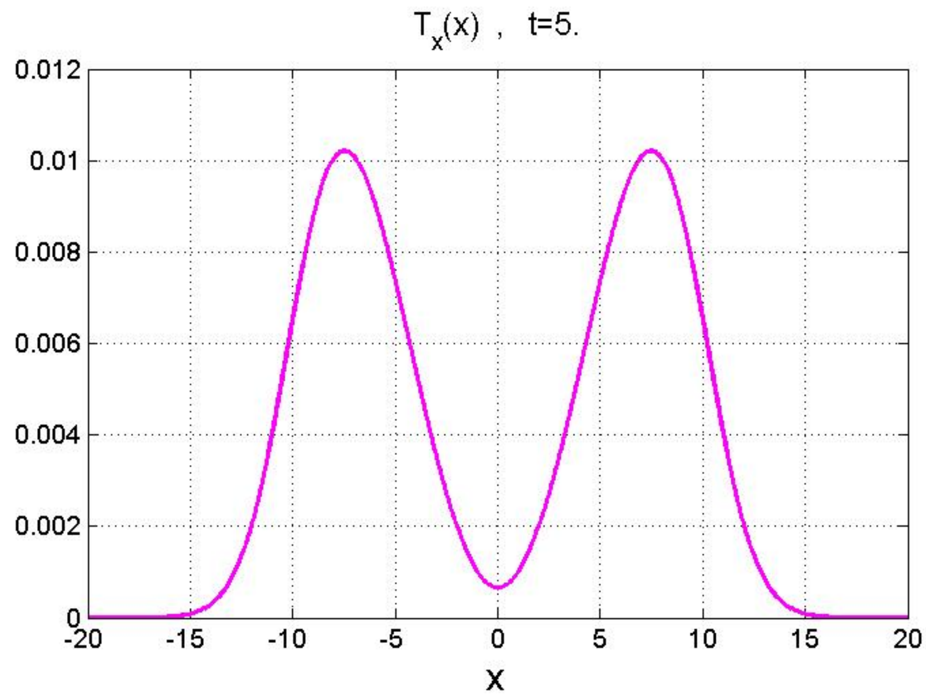
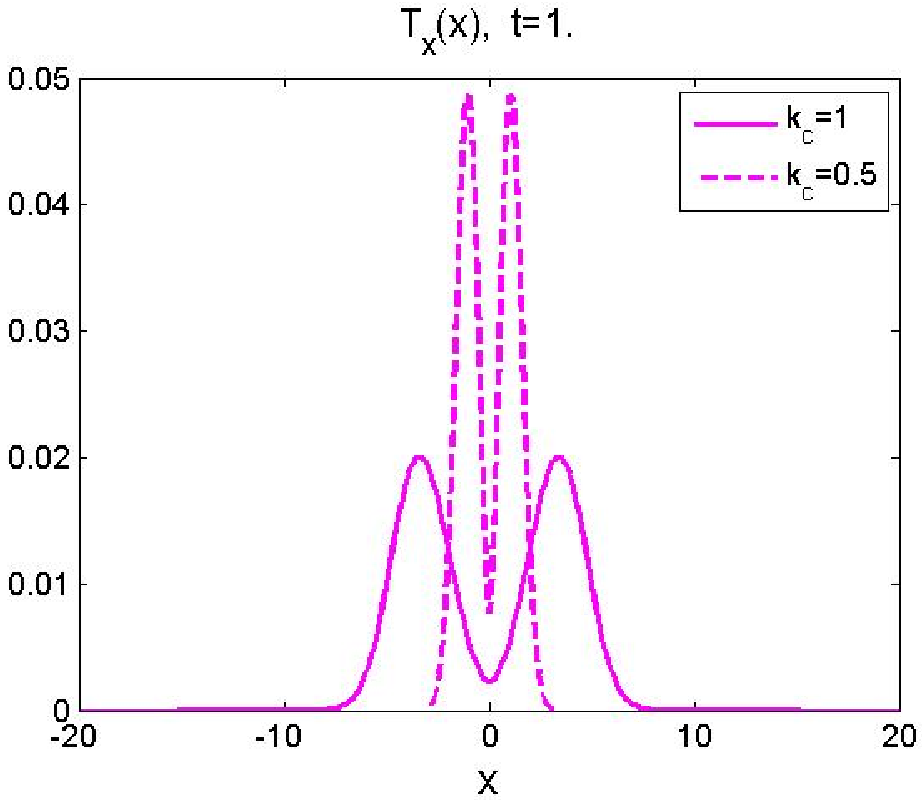


рис. 10



Зависимость распределения тока по пространству в разные моменты времени и для разных коэффициентов k_c, k_{tr} представлена ниже на рис. 11 и рис. 12. В начальный момент времени тока нет, затем он нарастает в области локализации распределения и далее размывается, уменьшаясь по абсолютной величине. Суммарный (интегральный) ток по пространству равен нулю.

рис. 11

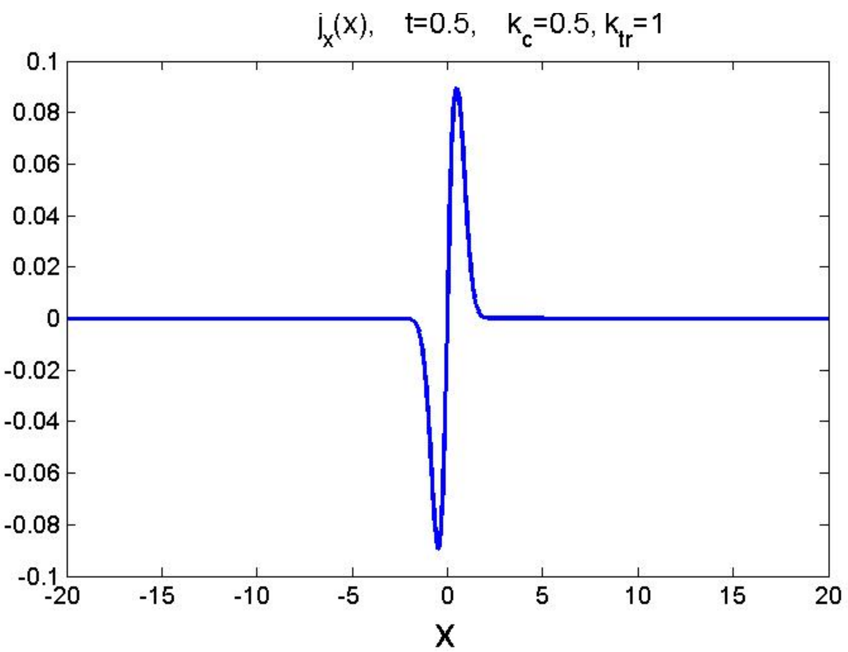
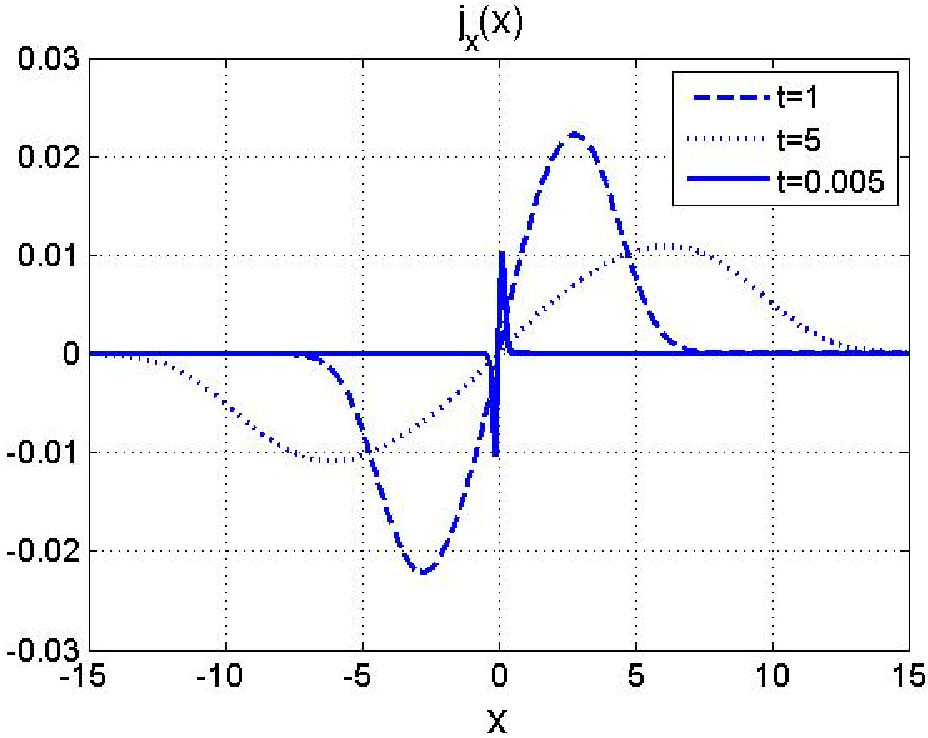


рис. 12



Функция распределения в момент времени $t = 5$ представлена в виде контурного рисунка 13 для трех значений $\mu = -1, 0, 1$ и трехмерного рисунка 14 для $\mu = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$.

рис. 13

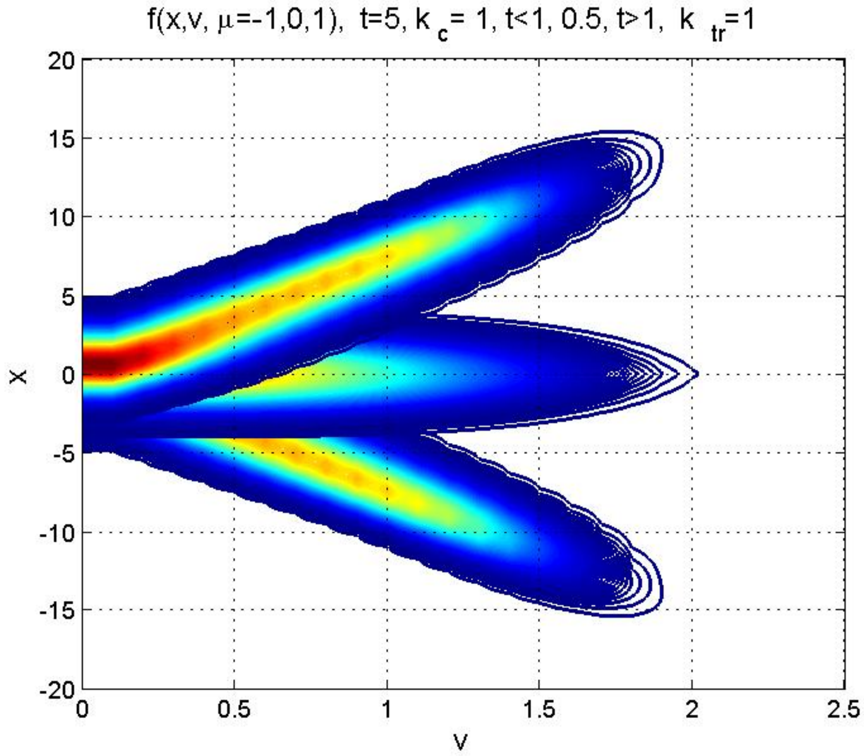
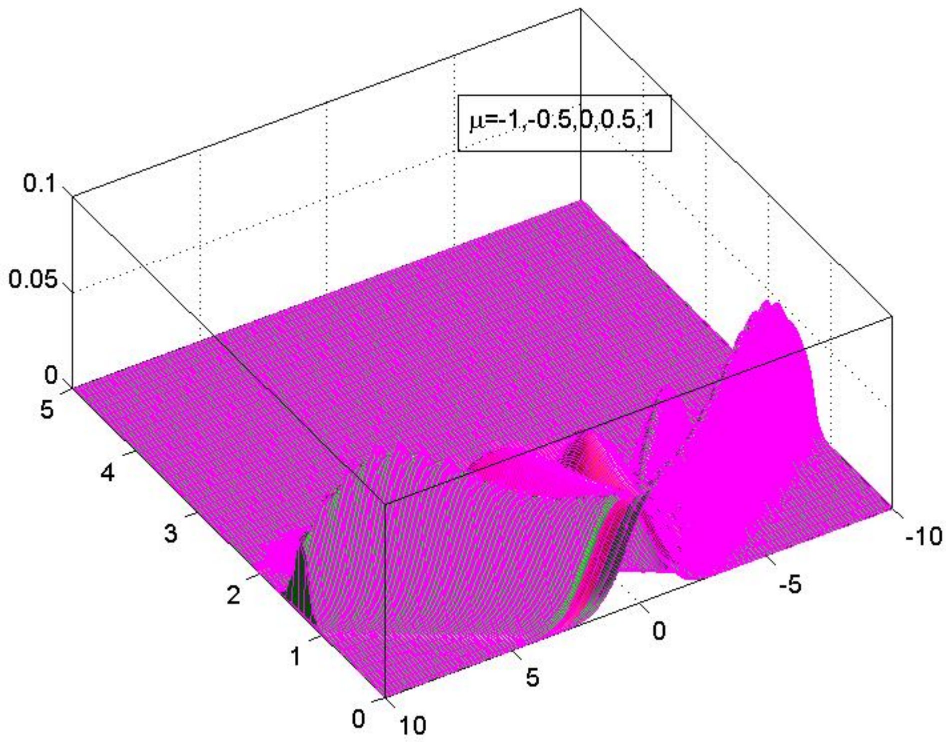


рис. 14



Заключение

В данной работе мы представили общую схему расчета релаксации горячего пятна в слабостолкновительной плазме в одномерном по пространству и двумерном по пространству скоростей. Для численного решения выбран конечно-разностный подход. Решение кинетического уравнения с нелинейным оператором столкновений Ландау - Фоккера - Планка основано на полностью консервативных разностных схемах. Задача рассматривается для времен значительно превышающих столкновительные времена. В этих условиях для электростатического случая электрическое самосогласованное поле учитывается из условия квазинейтральности плазмы. Приведена основная идея учета полевого члена в разностной модели. Приведены примеры расчета релаксации распределения, в начальный момент локализованного как по пространству, так и по скорости. Анализ взаимного влияния на характер решения столкновительного оператора и оператора переноса явно учитывается с помощью весовых коэффициентов k_c, k_{tr}, введенных в кинетическое уравнение. В последующих работах предполагается включить в алгоритм расчета ионы и самосогласованное поле. В частности, предполагается сравнить результаты расчета теплового потока с формулой Спицера - Харма.

Библиографический список

[1] Bickerton R.J. Thermalconduction limitation in laser fusion // Nucl. Fusion, 1973, v. 13, p. 457.

[2] De Groot J.S., Estabrook K.G., Glenzer S.H., Kruer W.L., Matte J.P. Nonlocal electron heat transport in laser driven hohlraums // Bull. Am. Phys. Soc., 1993, v.42, p. 1997.

[3] Kruer W.L. Electron-energy transport in laser-produced plasmas // Comments Plasma Phys., 1979, v. 5, p. 69.

[4] Delettrez J. Thermal electron transport in direct-drive laser fusion // Can. J. Phys., 1986, v. 64, p. 932.

[5] Forslund D.W. Instabilities associated with heat conduction in the solar wind and their consequences // J. Geophys. Res., 1970, v. 17, p. 75.

[6] Snyder P.B., Hammet G.W., Dorland W. Landau fluid models of collisionless magnetohydrodynamics // Phys. Plasmas, 1997, v. 4, p. 3974.

[7] Furkal E., Smolyakov A.I., Hirose A. Nonlocal electron kinetics in a weakly ionized plasma // Phys. Rev. E, 1998, v. 58, p. 965.

[8] Malone R.C., McCrory R.L., Morse R.L. Indication of strongly flux-limited electron termal conduction in laser- target experiments // Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 721.

[9] Chang Z., Callen J.D. Unified fluid/kinetic description of plasma microinstabilities. Part I: Basic equation in a sheared slab geometry // Phys. Fluids B, 1992, v. 4, p. 1167.

[10] Batishchev O.V., Krasheninnikov S.I., Catto P.J., Batishcheva A.A., Sigmar D.J., Xu X.Q., Byers J.A., Rognlien T.D., Cohen R.H., Shoucri M.M., Shkarofskii I.P. Kinetic effects in tokamak scrape-off layer plasmas // Phys. Plasmas, 1997, v. 4, p. 1672.

[11] Shvarts D., Delettrez J., McCrory R.L., Verdon C.P. Self-consistent reduction of the Spitzer-Harm electron thermal heat flux in steep temperature gradients in laser-produced plasmas // Phys. Rev. Lett., 1981, v. 47, p. 267.

[12] Gray D.R., Kilkenny J.D. The measurements of ion-acoustic turbulence and reduced thermal conductivity caused by a large temperature gradient in a laser heated plasma // Plasma Physics, 1980, v. 22, p. 81.

[13] Bell A.R., Evans R.G., Nicholas D.J. Electron energy transport in steep temperature gradients in laser-produced plasmas // Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 263.

[14] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. - Москва: Мир, 1978, 496 с.

[15] Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // ЖЭТФ, 1937, № 7, 203.

[16] Rosenbluth M.N., MacDonald W.M., Judd D. Fokker-Planck equation for an inverse-square force // Phys.Rev., 1957, v. 107, p. 1.

[17] Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. - М.: Наука, 1982, 338 с.

[18] Karney C.F.F. Fokker-Planck and quasi linear code // Computer Physics Reports, 1986, v. 4, p. 183-244.

[19] Потапенко И.Ф. "Энциклопедия низкотемпературной плазмы" . Раздел XX. Модели кинетической теории. Моделирование слабостолкновительной плазмы на основе нелинейного кинетического уравнения Ландау-Фоккера-Планка, глава 5, стр.52-72, 2009.

[20] I.F. Potapenko, A.V. Bobylev, E. Mossberg, Deterministic and stochastic methods for nonlinear Landau–Fokker–Planck kinetic equations with applications to plasma physics, Transp. Theory Stat. Phys. 37 (2008) 113–170.

[21] Бобылев А.В. О разложении интеграла столкновений Больцмана в ряд Ландау // ДАН СССР, 1975, т. 225, № 3, с. 535-538.

[22] Бобылев А.В. Приближение Ландау в кинетической теории газов и плазмы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, АН СССР, 1974. № 76. 49 с.

[23] Bobylev A.V., Nanbu K. Theory of collision algorithms for gases and plasmas based on the Boltzmann equation and the Landau-Fokker-Planck equation // Phys. Rev. E., 2000, v. 61, p. 4576-4586.

[24] Бобылев А.В., Карпов С.А., Потапенко И.Ф. Метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.2012. № 21. 27 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-21

[25] Бобылев А.В., Карпов С.А., Потапенко И.Ф. Методы типа Монте-Карло для моделирования кулоновских столкновений в многокомпонентной

плазме // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 26. 32 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-26

[26] Бобылев А.В., Потапенко И.Ф., Карпов С.А. Метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы // Математическое моделирование, 2012, т. 24, № 9, с. 35-49.

[27] Bobylev A.V., Potapenko I.F., Karpov S.A. DSMC methods for multicomponent plasmas // AIP Conference Proceedings. 2012, v. 1501, p. 541-548.

[28] Nanbu K. Theory of cumulative small-angle collisions in plasmas // Phys.Rev. E. 1997. Vol. 55. Pp. 4642-4652.

[29] Detering F., Bychenkov V.Yu., Rozmus W., Sydora R., Capjack C.E. Langevin representation of laser heating in PIC simulations // Computer Physics Communications, 2002, v. 143, p. 48-53.

[30] Joyce G., Lampe M., Slinker S.P., Manheimer W.M. Electrostatic particle-in-cell simulation technique for quasineutral plasma // J.Comput.Phys., 1997, v. 138, p. 540-562.

[31] Schurtz G.P., Nicolai Ph.D., Busquet M. A nonlocal electron conduction model for multidimensional radiation hydrodynamics codes // Physics of Plasmas, 2000, v. 7, p. 4238.

[32] S. Guisset, S. Brull, B. Dubroca, E. d'Humi'eres, S. Karpov and I. Potapenko, Asymptotic-Preserving scheme for the M1-Maxwell system in the quasi-neutral regime. CICP, to appear.

[33] Epperlein E.M., Short R.W. A practical nonlocal model for electron heat transport in laser plasmas // Phys. Fluids B, 1991, v. 3, p. 3092.

[34] Batishchev O.V., Bychenkov V.Yu., Detering F., Rozmus W., Sydora R., Capjack C.E., Novikov V.N. Heat transport and electron distribution function in laser produced plasmas with hot spots // Phys. Plasmas, 2002, v. 9, p. 2302.

[35] Brantov A.V., Bychenkov V.Yu., Batishchev O.V., Rozmus W. Nonlocal heat wave propagation due to skin layer plasma heating by short laser pulses // Comp. Phys. Comm., 2004, v. 164, p. 67.