



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 95 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Афендииков А.Л., Меркулов К.Д.,
Пленкин А.В.**

Сравнительный анализ
подходов к численному
моделированию
газодинамических течений
на двухуровневых
адаптивных расчетных
сетках

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Афендииков А.Л., Меркулов К.Д., Пленкин А.В. Сравнительный анализ подходов к численному моделированию газодинамических течений на двухуровневых адаптивных расчетных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 95. 24 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-95>

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

А.Л. Афендииков, К.Д. Меркулов, А.В. Плёнкин

**Сравнительный анализ подходов
к численному моделированию
газодинамических течений
на двухуровневых адаптивных
расчетных сетках**

Москва — 2015

Афендииков А.Л., Меркулов К.Д., Плёнкин А.В.

Сравнительный анализ подходов к численному моделированию газодинамических течений на двухуровневых адаптивных расчетных сетках

На примере задачи Седова сравниваются различные подходы к моделированию газодинамических течений на адаптивных расчетных сетках. В качестве критерия измельчения сетки используются индикаторы гладкости на основе В-сплайнов и на основе комплексных и вещественных вейвлетов Добеши.

Ключевые слова: идеальный газ, выделение особенностей, задача Седова, В-сплайны, вейвлеты.

Andrei Afendikov, Kirill Merkulov, Andrey Plenkin

Comparative analysis of approaches for modeling of gasdynamic flows on two-level adaptive grids

Different approaches to the modeling of gas-dynamic flows on adaptive grids compares in the example of the Sedov's problem. Smoothness indicators based on the B-splines, and on the basis of complex and real Daubechies wavelets are used as a criterion for mesh refinement.

Key words: ideal gas, detection of singularity, Sedov's problem, B-spline, wavelet.

Работа выполнена при поддержке двух первых авторов Российским научным фондом, Проект 14-11-00872. Работа третьего автора поддержана РФФИ, грант 14-01-00566

Оглавление

Введение	3
1 Описание методик расчета на адаптивных сетках с использованием индикаторов гладкости.....	5
1.1 Методики расчета на адаптивных сетках	5
1.2 Индикатор гладкости на основе вейвлетов Добеши.....	7
1.3 Индикатор гладкости на основе В - вейвлетов	9
2 Численное моделирование	11
2.1 Математическая модель идеального газа	11
2.2 Задача Седова о сильном взрыве.....	12
2.3 Численный метод	13
2.4 Метод Годунова	15
2.5 Метод Русанова	15
2.6 Методики расчета задачи Седова	16
3 Сравнение индикаторов.....	16
Заключение	22
Список литературы	23

Введение

Реализация алгоритмов решения задач газовой динамики на параллельных вычислительных системах сверхвысокой производительности связана с рядом трудностей и особенностей. Желание использовать графические ускорители приводит к необходимости упрощения вычислительных алгоритмов и узкой локализации расчетных шаблонов, а для повышения точности расчетов требуются подробные сетки, и, как следствие, расчеты могут идти весьма долгое время.

Декартовы сетки идеально подходят для алгоритмов, приспособленных для использования GPU, благодаря простоте программной реализации методов расщепления по направлениям, регулярным шаблонам обращения в память, отсутствию необходимости вычисления нормалей и прочих геометрических характеристик расчетных ячеек. Однако использование структурированных декартовых сеток для получения качественного результата зачастую налагает такие ограничения на их размер, что вычислительные эксперименты могут занимать астрономическое время.

Математическое моделирование физических явлений, которые описываются кусочно-гладкими функциями, имеющими локализованные области с большими градиентами рассматриваемых величин и т.д., налагает жесткие ограничения на структуру численного алгоритма. Распространённые подходы к численному решению таких задач (методы конечных элементов, конечных объёмов, конечных разностей, спектральные методы) будут неэффективны на равномерных сетках, когда высокое разрешение требуется лишь локально, а в остальной области высокая точность решения достигается и на грубой сетке. Уменьшение размера всех расчетных ячеек приводит к значительному росту вычислительной сложности задачи, а повышение порядка аппроксимации разностной схемы – к появлению осцилляций и усложнению алгоритма.

Поэтому целесообразно использовать сетки с возможностью выборочного

измельчения элементов. Признак деления крупной ячейки на несколько малых может быть разным: высокий локальный градиент сеточной функции, пограничный слой вблизи обтекаемого тела, граница раздела фаз в многофазной задаче.

Ключевую роль в адаптивных расчетах играют индикаторы гладкости. Эти алгоритмы на вход получают численные поля физических величин, заданные для текущей сетки, а на выходе указывают, где ее следует измельчить или укрупнить.

В данной работе рассматриваются два индикатора гладкости:

1) индикатор, построенный на основе вещественных и комплексных вейвлетов Добеши [5, 6, 7, 8, 9];

2) индикатор на основе вейвлетов, построенных из В-сплайнов методом лифтинга [3], [4].

В настоящей работе при использовании обоих индикаторов предполагается, что анализируемые поля найдены численно в центрах ячеек равномерной прямоугольной декартовой сетки. Отметим, что применение таких индикаторов при анализе газодинамических полей в расчетах на многоуровневых адаптивных сетках является отдельной задачей, которая будет рассмотрена в следующей публикации.

Таким образом, в работе предлагаются и сравниваются несколько вариантов применения указанных индикаторов гладкости при анализе данных только на простейших двухуровневых адаптивных сетках.

Следует отметить, что эффективность применения индикаторов гладкости зависит от точности выбранного численного алгоритма. Например, при расчете задач с сильными ударными волнами методом Годунова может проявляться так называемый эффект карбункула [1] – излом (неправильная конфигурация) фронта ударной волны. Никакой индикатор для измельчения сетки не позволит исключить подобные эффекты, они позволяют лишь качественно оценить сеточное решение, выявить области с его резким локальным изменением. Если

ошибки порождаются газодинамическим решателем, то измельчение сетки в неверно считающихся областях может даже усилить негативный эффект.

В данной работе сравниваются результаты численного моделирования точечного взрыва (задача Седова [2]) на двухуровневых адаптивных сетках с использованием указанных индикаторов, различных решателей и различных вариантов применения индикаторов к газодинамическим полям, заданным на адаптивной расчетной сетке.

1 Описание методик расчета на адаптивных сетках с использованием индикаторов гладкости

1.1 Методики расчета на адаптивных сетках

Предполагается, что расчет ведется в области Ω , где в каждый момент времени заданы две вложенные равномерные декартовы сетки H_1, H_2 с шагами h и $h/2$ соответственно. Под двухуровневой адаптивной сеткой подразумевается смешанная сетка, где часть ячеек сетки H_1 разбита на четыре ячейки из H_2 , так что построенная сетка адаптирована к рассматриваемому решению. Можно выделить два подхода к адаптивному расчету на двухуровневых сетках: «измельчение грубой сетки» и «укрупнение мелкой сетки». Далее описываются этапы вычислений, выполняемые в каждом из подходов на одном шаге расчета по времени.

Измельчение грубой сетки:

- 1) Данные с адаптивной неравномерной сетки переносятся на грубую сетку (например, осреднением).
- 2) К данным на грубой сетке применяется индикатор гладкости.

3) По данным индикатора строится новая адаптивная сетка. То есть там, где индикатор сигнализирует о нерегулярности, строится мелкая сетка, а в остальной области оставляется грубая сетка.

4) Данные с существующей адаптивной сетки переносятся на новую сетку.

5) Выполняется шаг расчета на новой адаптивной сетке.

Плюсы такого подхода заключаются в том, что перенесение данных с мелкой сетки – более простой и менее требовательный к качеству данных процесс, чем восполнение данных на мелкую сетку с крупной, и в том, что применение индикатора к данным на грубой сетке, вычислительно менее затратно. Минусы же заключаются в том, что при анализе гладкости теряется часть информации с мелкой сетки.

Укрупнение мелкой сетки:

1) Данные с адаптивной сетки переносятся на равномерную мелкую сетку (например, сносом).

2) К данным на мелкой сетке применяется индикатор гладкости.

3) Строится новая адаптивная сетка. Если хотя бы в одной из четырех ячеек мелкой сетки, соответствующих одной ячейке грубой сетки, индикатор сообщает о наличии сингулярности, все четыре ячейки оставляются мелкими, а в противном случае они объединяются в одну ячейку грубой сетки.

4) Данные с существующей адаптивной сетки переносятся на новую сетку.

5) Выполняется шаг расчета на новой адаптированной сетке.

Следует отметить, что во втором подходе нарушение гладкости может привноситься в ходе проектирования данных с грубой сетки на мелкую на первом этапе.

В настоящей работе рассматриваются два метода восполнения данных на мелкую сетку из данных на адаптивной сетке.

Первый метод заключается в сносе значений из ячейки грубой сетки на четыре ячейки мелкой сетки.

Во втором методе данные с адаптивной сетки сначала переносятся на грубую сетку осреднением. Затем к полученным данным применяется обратное двумерное вейвлет-преобразование, которое соответствует интерполяции данных с грубой сетки на мелкую сетку. Преобразование заключается в свертке строк и столбцов матрицы, соответствующей данным на грубой сетке – x , с вейвлет фильтром ξ :

$$y_n = \sum_i \xi_{n-2i} x_i,$$

где свертка выполняется сначала по строкам, а потом по столбцам. В качестве вейвлет-фильтра использовалась вещественная компонента низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши с шестью ненулевыми коэффициентами.

1.2 Индикатор гладкости на основе вейвлетов Добеши

В качестве исходных данных используются результаты расчета полей плотности и давления, заданных в узлах или центрах ячеек расчетной сетки.

В случае, когда поля газодинамических величин заданы в ячейках равномерной декартовой сетки, полю можно поставить в соответствие матрицу.

В результате обработки матрицы каждому её элементу сопоставляется число, которое характеризует течение в окрестности узла (нет разрывов, сильный разрыв, слабый разрыв и т.д.).

Обработку данных можно условно разделить на четыре этапа:

- 1) обработка строк матриц с помощью вейвлетов и выделение особенностей,
- 2) обработка столбцов матриц с помощью вейвлетов и выделение осо-

бенностей,

- 3) объединение результатов обработки строк и столбцов,
- 4) фильтрация артефактов и классификация особенностей.

На первом и втором этапах производится независимая обработка массивов, соответствующих строкам и столбцам матрицы. Обрабатываются только массивы, у которых число узлов N больше 6, это число определяется количеством ненулевых элементов в фильтрах вейвлетов, используемых при обработке. Вычисляется два преобразования $m(x)$ и $c(x)$:

$$m_k = \sum_n \eta_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad c_k = \sum_n \zeta_{n-2k} \sum_i \xi_{n-2i} x_i, \quad \text{для } 0 \leq k < N,$$

где x_i – элементы анализируемого массива, продолженные на границах из соображений косой симметрии, ξ_i и η_i – вещественная и мнимая компоненты низкочастотного фильтра симметричного комплексного вейвлета Добеши 6 (dcoms6), ζ_i – вещественный фильтр классического вейвлета Добеши 6 (daub6). Цифра 6 обозначает, что фильтры имеют 6 ненулевых элементов. Указанные преобразования соответствуют двум детекторам, которые используются совместно для повышения точности локализации разрывов (основной детектор более точен и выдает меньше артефактов, а корректор помогает уточнить локализацию и избавиться от дополнительных артефактов за счет введения порога чувствительности). В каждом из четырех полученных массивов выделяются два типа элементов:

- 1) ‘нули’ – если значения двух соседних элементов массива имеют разный знак или только одно из значений нулевое, то выделяется элемент с минимальным по модулю значением. Два первых и два последних элемента не выделяются;

- 2) ‘локальные экстремумы модуля’ – элемент выделяется, если модуль значения поля в нем больше заданного порога чувствительности α , но не меньше модулей значений четырех его левых и правых соседей и строго боль-

ше модуля значения хотя бы одного из ближайших соседей. Три первых и три последних узла не выделяются.

Из множества *нулей* исключаются точки, соответствующие осцилляциям. Считается, что точка соответствует осцилляциям, если слева и справа от нее в радиусе трех точек есть выделенные *нули*.

Таким образом, каждый элемент массива получает некоторый набор из 4 возможных меток: *mz*, *se*, *me*, *cz*. Символ ‘*m*’ означает, что метка относится к основному детектору, ‘*c*’ – к корректору. Символы ‘*z*’ и ‘*e*’ определяют, какие структуры были выделены в детекторе: ‘*z*’ соответствует *переходам через ноль*, а ‘*e*’ – *локальным экстремумам модуля*. При этом первые две метки соответствуют сильным разрывам, а последние – слабым разрывам.

На третьем этапе определяется окончательный набор меток, которыми обладают элементы матрицы. Набор меток, которые получает элемент, определяется как объединение всех меток, которые он получил при обработке проходящих через него строки и столбца.

Наконец, для удаления артефактов к полученным меткам применяется набор фильтров, разработанный в [5].

1.3 Индикатор гладкости на основе В-вейвлетов

Этот индикатор основан на анализе коэффициентов вейвлет разложения исходной дискретной функции $\{f_i\}$, $0 \leq i < 2N$ по базису вейвлетов, построенному на основе базиса В-сплайнов k -ой степени методом лифтинга [3], [4].

При этом сначала вычисляется сглаживающее преобразование, определяемое формулой:

$$c_i = \sum_{j=0}^{k+1} \beta_j \tilde{f}_{2i+j}, \quad \beta_j := 2^{-k-1} \binom{k+1}{j},$$

$$\text{где } 0 \leq i < N, \text{ а } \tilde{f}_l = \begin{cases} f_l, & l < 2N \\ 2f_{2N-1} - f_{2(2N-1)-l}, & l \geq 2N \end{cases}$$

Здесь проведено нечетное продолжение функции $\{f_i\}$, $0 \leq i < 2N$ на область значений $2N \leq i < 4N$.

Затем вычисляются вейвлетные коэффициенты, которые для вейвлета, имеющего p нулевых моментов, определяются по формуле:

$$d_i = f_{2i} - \sum_{j=0}^p \alpha_j \tilde{c}_{i+j}, \text{ где } 0 \leq i < N, \text{ а } \tilde{c}_l = \begin{cases} c_l, & l < N \\ 2c_{N-1} - c_{2(N-1)-l}, & l \geq N \end{cases}$$

где для удобства ниже приведены α_j -коэффициенты, вычисленные в ходе процедуры лифтинга (см. [4]).

Таблица. 1. Таблица коэффициентов α_j для $k=4$

p \ j	0	1	2	3
1	1	0	0	0
2	2	-1	0	0
3	2.875	-2.75	0.875	0
4	3.625	-5	3.125	-0.75

В двумерном случае разложение функции $\{g_{ij}\}$, $0 \leq i < 2N$, $0 \leq j < 2N$ производится сначала по строкам, где каждая строка разлагается на сглаженную компоненту $\{l_{ij}\}$, $0 \leq i < 2N$, $0 \leq j < N$ и вейвлетную компоненту $\{h_{ij}\}$, $0 \leq i < 2N$, $0 \leq j < N$. Затем обе компоненты разлагаются по столбцам. В результате получаем одну сглаженную компоненту $\{ll_{ij}\}$, $0 \leq i < N$, $0 \leq j < N$ и три вейвлетных компоненты: $\{lh_{ij}\}$, $\{hl_{ij}\}$, $\{hh_{ij}\}$, $0 \leq i < N$, $0 \leq j < N$.

Пусть на прямоугольной сетке задана расчетная величина $\{g_{ij}\}$, $0 \leq i < 2N$, $0 \leq j < 2N$ (например, плотность или давление газодинамического течения). И задан порог δ (величина которого обуславливается шагом расчетной сетки и качеством расчета). Тогда можно вычислить вейвлетное разложение $\{g_{ij}\}$ и определить множество флагов:

$$flag_{ij} = \left(lh_{\lfloor i/2 \rfloor \lfloor j/2 \rfloor} > \delta \right) \vee \left(hl_{\lfloor i/2 \rfloor \lfloor j/2 \rfloor} > \delta \right) \vee \left(hh_{\lfloor i/2 \rfloor \lfloor j/2 \rfloor} > \delta \right), \quad 0 \leq i < 2N, \quad 0 \leq j < 2N.$$

Флаги определяют области, где необходимо сохранить мелкую сетку, в остальных областях можно использовать более грубую сетку.

Отметим, что

$$d_i = d_i(f_{2i}; \dots; f_{2i+2p+k-1}).$$

Таким образом, преобразование является сильно несимметричным. Поэтому флаги смещаются относительно положения индексируемых ими особенностей. Чтобы скомпенсировать сдвиг, определим величину $s = \left\lfloor \frac{(2p+k)}{4} \right\rfloor$ и при адаптации сетки будем использовать смещенные флаги:

$$\tilde{flag}_i = \begin{cases} flag_{i+s}, & i+s < 2N \\ flag_{2N-1}, & i+s \geq 2N \end{cases}, \quad 0 \leq i < 2N.$$

В экспериментальной части данной работы использовался индикатор на основе В-вейвлетов первой степени с двумя нулевыми моментами.

2 Численное моделирование

2.1 Математическая модель идеального газа

Математическая постановка задачи о движении идеального газа сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) + \operatorname{grad}(p) = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} H) = 0, \end{cases}$$

в области $V(\Gamma) \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной некоторой заданной замкнутой кривой $\Gamma = \Gamma(x, y)$. Здесь введены стандартные обозначения: \mathbf{U} – вектор скорости, ρ –

плотность, p – давление, $H = E + p/\rho$ – полная удельная энтальпия, $E = e + 0.5U^2$ – полная удельная энергия, e – удельная внутренняя энергия.

Уравнения системы соответствуют законам сохранения массы, импульса и энергии. Для замыкания системы в данной работе применяется уравнение состояния (УРС) идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho e$.

Для уравнений Эйлера ставится стандартная начально-краевая задача в области $V(\Gamma)$.

2.2 Задача Седова о сильном взрыве

Для тестирования различных численных методов часто используется задача о сильном точечном взрыве (задача Седова).

Ее постановка выглядит так: в центре бесконечной области, заполненной неподвижной средой плотности ρ_1 с давлением p_1 вкладывается энергия E_0 .

Задача связана с распространением сильных ударных волн и имеет аналитическое решение. При сравнительно малой величине давления относительно плотности соотношения на ударной волне можно записать как:

$$\begin{cases} U_2 = \frac{2}{\gamma+1}c, \\ \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1, \\ p_2 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_1c^2. \end{cases}$$

Точное решение задачи для случая цилиндрической симметрии, моделируемого в данной работе, выражается в виде закона движения и формулы скорости ударной волны:

$$r_2(t) = \left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/4} \sqrt{t},$$

$$c(t) = \frac{1}{2r_2(t)} \sqrt{\frac{E}{\rho_1}},$$

где $E_0 = \alpha E$, а множитель α можно получить из соотношения

$$r_2 = \left(\frac{\alpha E_0}{\rho_1}\right)^{\frac{1}{2+\gamma}} t^{\frac{2}{2+\gamma}}.$$

Для оценки качества численного решения нас особенно интересует положение ударной волны и величина пика плотности на ней. Можно подобрать величину заряда и начальные условия так, что аналитическое решение задачи через некоторый момент времени будет соответствовать целым значениям параметров. Например, при $\rho_1 = 1$, сравнительно малой числовой величине начального давления и вложенной энергии $E_0 \approx 0,244816$ в момент времени $t = 1$ ударная волна будет находиться на расстоянии $r_2 = 1$ от эпицентра взрыва и величина плотности на ней будет близка к $\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$, т. е. для используемого в расчетах $\gamma = 1,4$ имеем $\rho = 6$.

2.3 Численный метод

Для интегрирования системы уравнений движения идеального газа мы используем метод конечных объемов, записанный для двухуровневых декартовых сеток с локальной адаптацией. При расчете суммарного потока применяется метод расщепления по направлениям (вдоль координатных осей). Согласно вышеописанному формату расчетной сетки, для выбранной грани каждая ячей-

ка имеет одну соседнюю ячейку этого же уровня или две – следующего.

Расчет вектора консервативных переменных на следующем временном слое проводится по формуле:

$$\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{lvl,i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{lvl,i,j}} \left[\sum_{\sigma x} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} + \sum_{\sigma y} s_{\sigma} \mathbf{F}_{\sigma} \right],$$

где $\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^n$ – значение вектора консервативных переменных в ячейке уровня lvl с

виртуальными индексами (i, j) на этом уровне на временном шаге с номером n ,

$\mathbf{Q} = (\rho, \rho U_x, \rho U_y, \rho E)^T$ – вектор консервативных переменных, а

$\mathbf{F}_k = (\rho U_k, \rho U_k U_x + p \delta_k, \rho U_k U_y + p \delta_k, \rho U_k H)^T$, $k = x, y$ – векторы потоков по

направлениям. $\sum_{\sigma k} \mathbf{F}_{\sigma}$ – сумма потоков через все грани, перпендикулярные оси k .

Потоки по каждому из направлений суммируются вдоль всей границы ячейки, умноженные на соответствующие «площади» части границы.

При измельчении сетки всем потомкам сносится значение примитивного вектора переменных (ρ, U_x, U_y, p) или применяется специальный оператор подсеточной реконструкции, при объединении четырех ячеек в одну в качестве значения консервативного вектора переменных в ячейке берется среднее арифметическое консервативных векторов в ячейках-потомках.

Сами потоки вдоль осей могут насчитываться методом Годунова [10] или Русанова [11]. Приведем ниже краткое описание каждого метода. Обозначим за \mathbf{Q}_L и \mathbf{Q}_R значения вектора \mathbf{Q} слева и справа от грани ячейки соответственно.

Аналогично величины \mathbf{F}_L и \mathbf{F}_R будут значениями вектора потока \mathbf{F} слева и справа от грани соответственно. Тогда $\mathbf{A}_L = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \right)_L$, $\mathbf{A}_R = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \right)_R$ – значения

матриц Якоби слева и справа от грани соответственно. За $\lambda_{\max}(\mathbf{A}_L)$, $\lambda_{\min}(\mathbf{A}_L)$,

$\lambda_{\max}(\mathbf{A}_R)$, $\lambda_{\min}(\mathbf{A}_R)$, соответственно, обозначим максимальное и минимальное собственные значения матриц \mathbf{A}_L и \mathbf{A}_R . Тогда формулы вычисления искомого потока \mathbf{F}_i^0 через грань слева направо для каждого метода будут выглядеть следующим образом.

2.4 Метод Годунова

$$\mathbf{F}_i^0 = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_i^*),$$

где \mathbf{Q}_i^* – точное решение задачи Римана. Для двучленного УРС и, как его частного случая, УРС идеального газа это решение подробно описано в [10]. Если в расчете используется другое уравнение состояния, его необходимо аппроксимировать двучленным УРС. Это делается следующим образом. Пусть ρ, p, ξ – значения плотности, давления и внутренней энергии в данной ячейке на некотором временном шаге, ξ_0 – выражение внутренней энергии через те же давление и плотность из двучленного уравнения состояния. Тогда неизвестные параметры аппроксимации γ, p_0, c_0 находятся из решения следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \xi(p, \rho) = \xi_0(p, \rho) \\ \frac{\partial \xi}{\partial \rho}(p, \rho) = \frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}(p, \rho) \\ \frac{\partial \xi}{\partial p}(p, \rho) = \frac{\partial \xi_0}{\partial p}(p, \rho) \end{cases}$$

2.5 Метод Русанова

$$\mathbf{F}_i^0 = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R - s_{\max}(\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L)),$$

где s_{\max} – максимальный спектральный радиус, вычисляемый следующим об-

разом:

$$s_{\max} = \max(s_+, -s_-),$$

$$s_+ = \max(\lambda_{\max}(\mathbf{A}_L), \lambda_{\max}(\mathbf{A}_R), 0),$$

$$s_- = \min(\lambda_{\min}(\mathbf{A}_L), \lambda_{\min}(\mathbf{A}_R), 0).$$

2.6 Методики расчета задачи Седова

Для расчета задачи Седова ставится начально-краевая задача в квадратной области $[-1, 2; 1, 2] \times [-1, 2; 1, 2]$. Во всех ячейках устанавливается поле примитивных переменных $(\rho, U_x, U_y, p) = (1, 0, 0, 10^{-6})$, на границах – условие свободного протекания. Рассматривается базовая сетка размером 200×200 ячеек. В круге радиуса 0,1 от начала координат устанавливается другое значение плотности, соответствующее суммарно вложенной энергии 0,244816, равномерно распределенной по данному кругу. Ячейка считается попавшей в круг, если ее центр попал внутрь. Рассматриваются два типа сеток: базовая и адаптивная (ее конфигурация изменяется по ходу расчета согласно полю индикаторов). Для расчетов на адаптивной сетке в области повышенной плотности ячейки предварительно измельчаются, подсчет индикаторов проводится по полю плотности.

3 Сравнение индикаторов

Сначала сравним два подхода к расчету на адаптивных сетках методом «укрупнения мелкой сетки». В первом случае значения с грубой сетки сносятся на соответствующие ячейки мелкой сетки (рисунок 1), а во втором случае обеспечивается гладкий переход за счет использования обратного вейвлет-преобразования (рисунок 2). Как видно из рисунков, при сносе возникают дополнительные шумы и артефакты, что связано с возникновением особенностей

на границах ячеек. Далее при использовании индикатора на основе В-вейвлетов будет использоваться только второй подход.

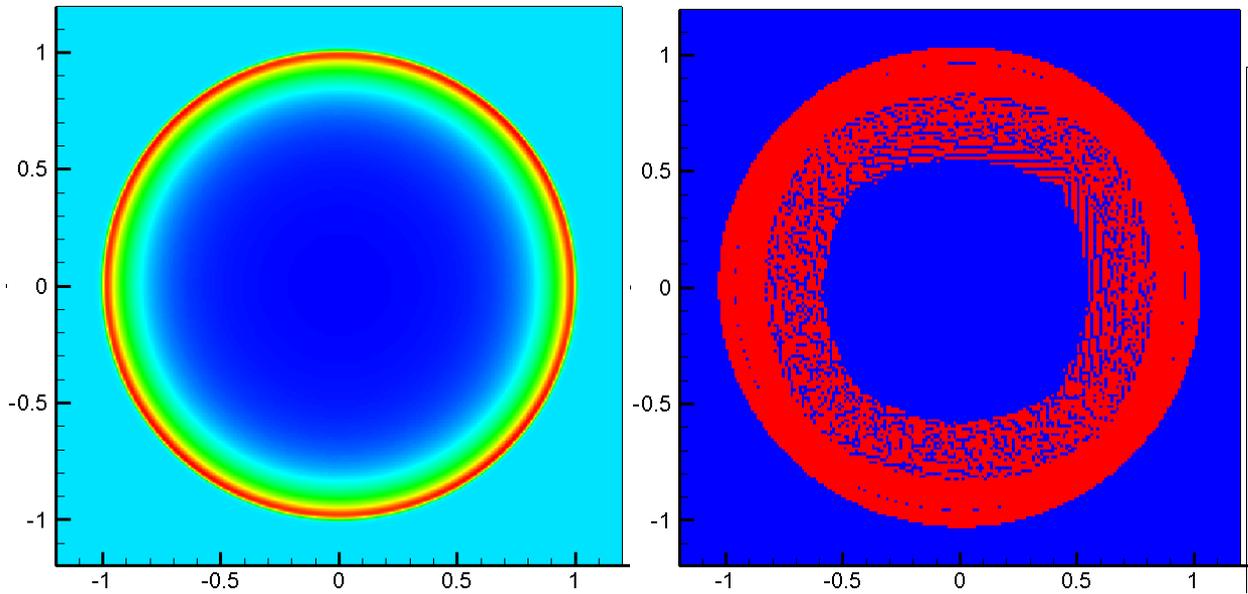


Рисунок 1 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе В-вейвлетов и сносе значений из ячейки грубой сетки на четыре ячейки мелкой сетки

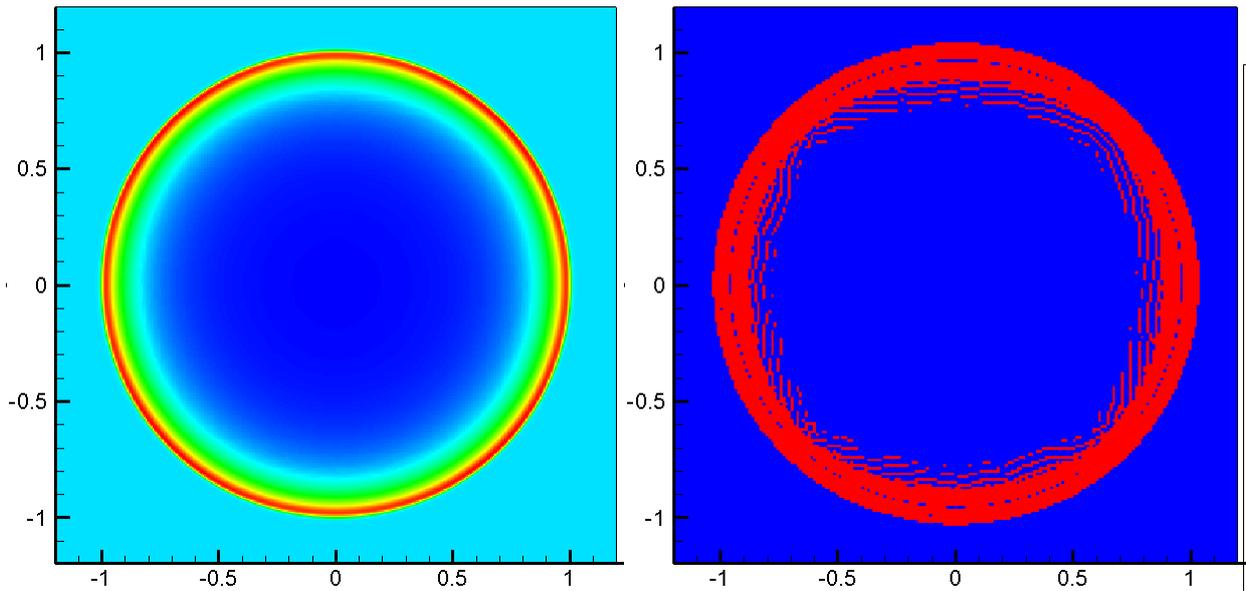


Рисунок 2 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе В-вейвлетов и гладком переносе значений из ячеек грубой сетки на ячейки мелкой сетки

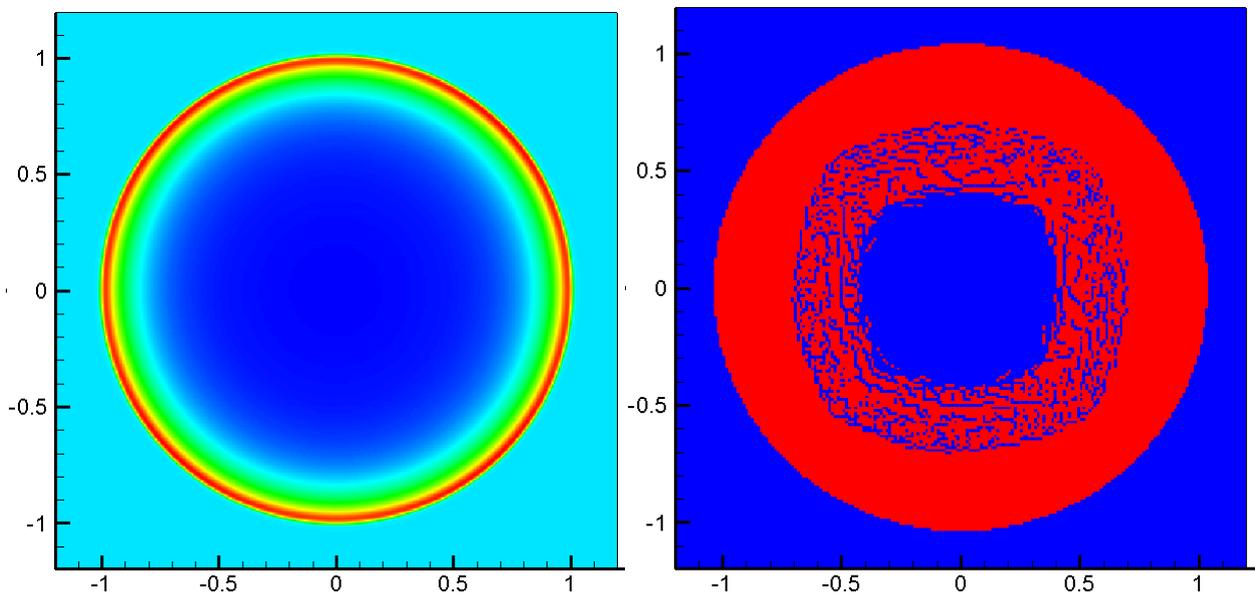


Рисунок 3 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе В-вейвлетов с порогом чувствительности 0.001

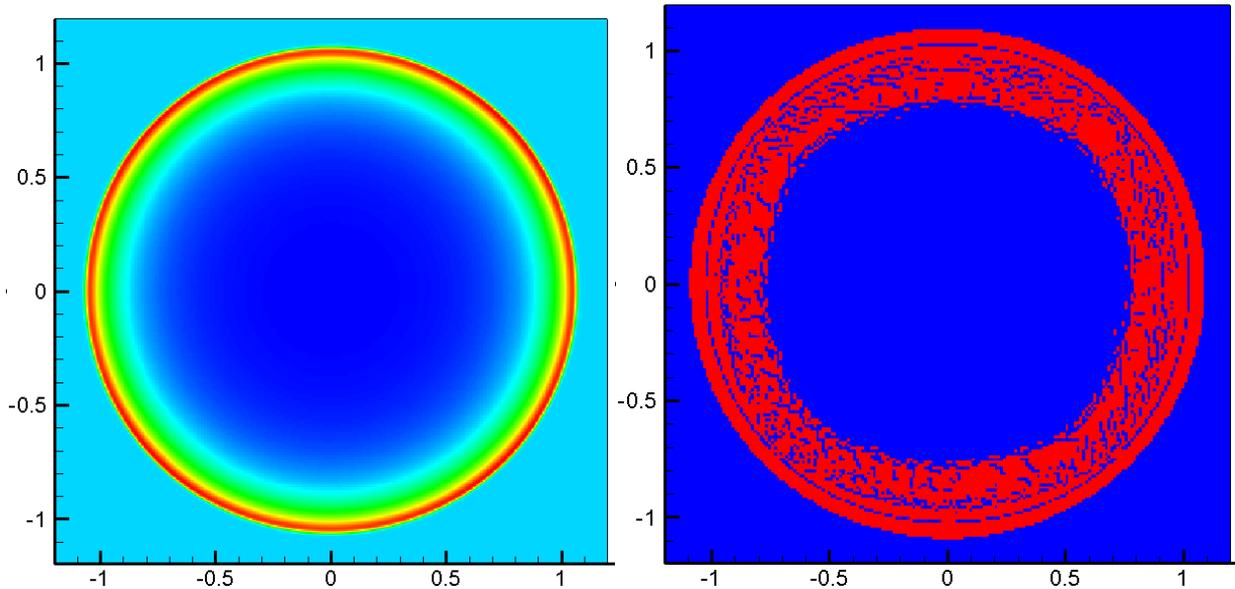


Рисунок 4 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе В-вейвлетов с порогом чувствительности 0.01

Уменьшить количество артефактов можно за счет подбора порога чувствительности (рисунки 3, 4). Однако подобрать порог так, чтобы сетка адаптировалась только к фронту ударной волны, не удастся.

Сравним полученные результаты с результатами расчетов, в которых в качестве индикатора гладкости использовался детектор на основе вейвлетов Добеши. Формирование индикаторов при этом производится по данным, заданным на грубой сетке, что соответствует подходу к адаптации, который мы обозначили «измельчение грубой сетки». Результаты расчетов с порогами чувствительности 0.001, 0.005 и 0.01 представлены на рисунках 5, 6 и 7 соответственно. Число разбиваемых и неразбиваемых ячеек базовой сетки составляет (9544, 30456), (3292, 36708) и (3284, 36716) соответственно. Как видно, ширина локализации ударной волны практически не зависит от величины порога, это объясняется тем, что детектор основан на локализации определенных структур: нулей и локальных максимумов модуля, больших порога. Тем не менее, при малом значении порога возникают дополнительные «артефактные» области адап-

тации сетки (рисунок 5).

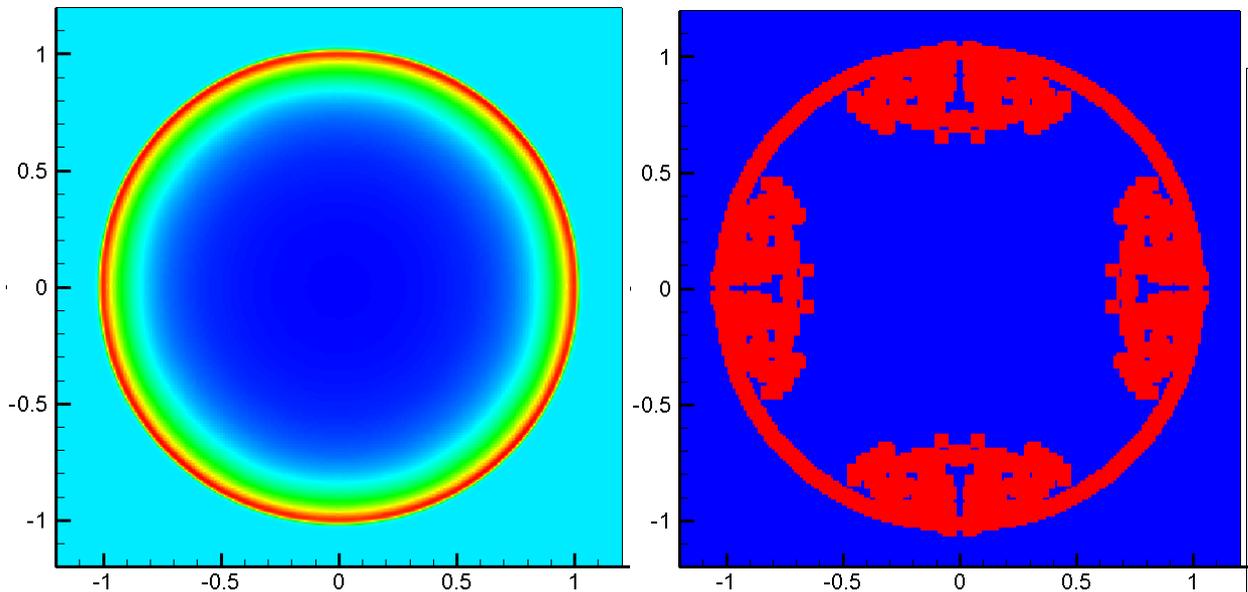


Рисунок 5 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе вейвлетов Добеши с порогом чувствительности 0.001

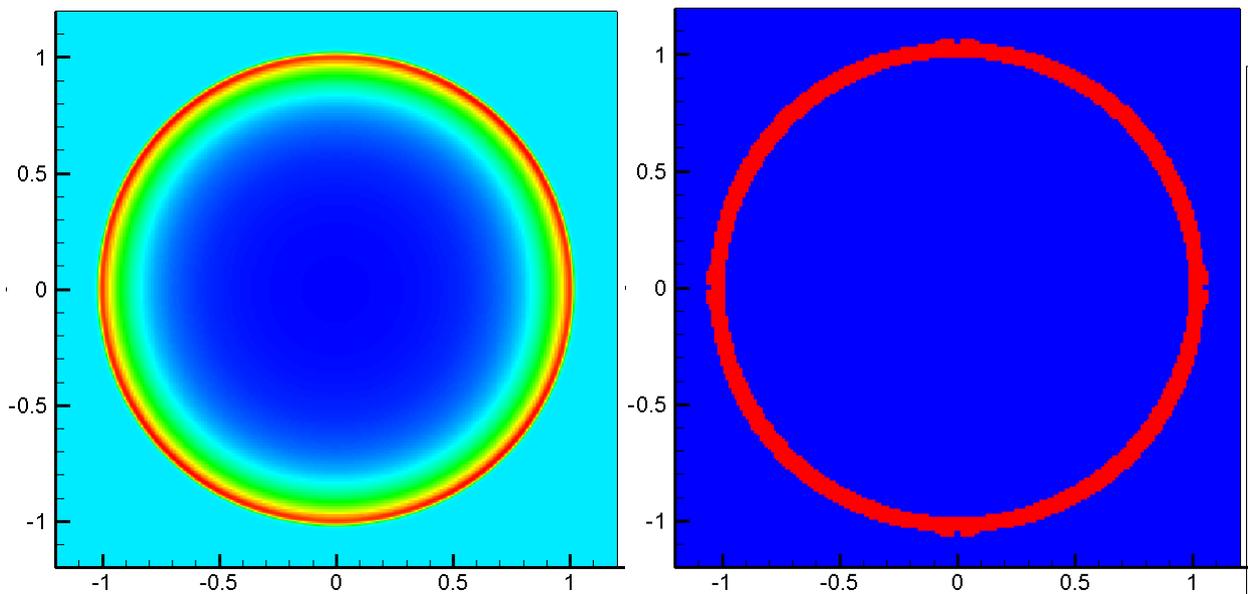


Рисунок 6 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе вейвлетов Добеши с порогом чувствительности 0.005

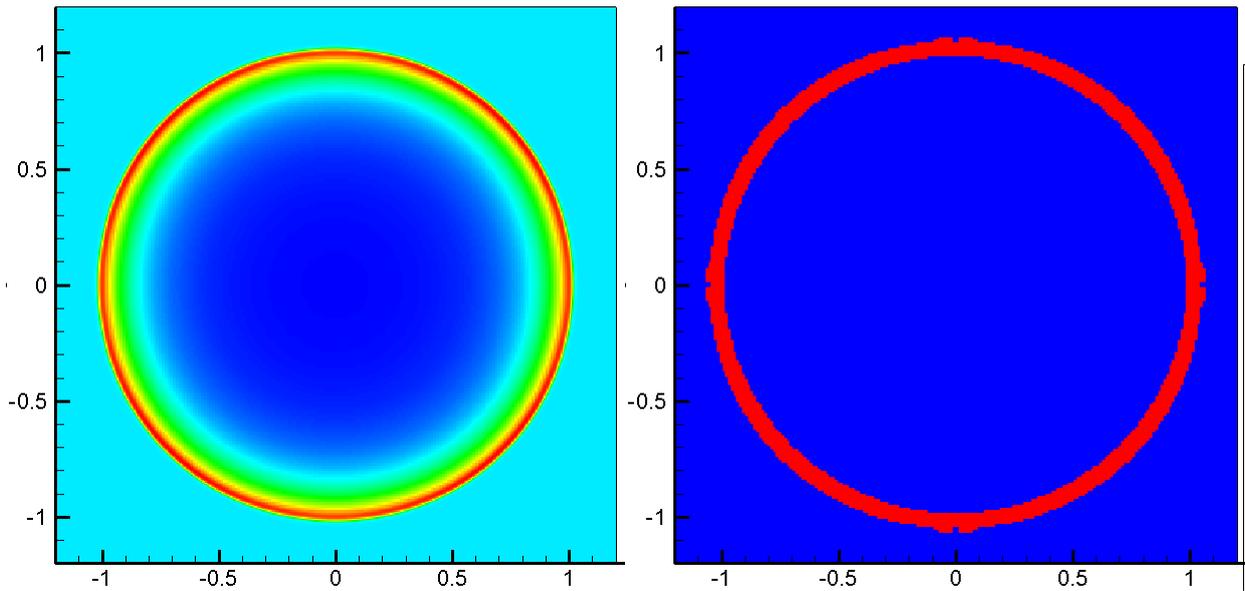


Рисунок 7 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Русанова при адаптации на основе вейвлетов Добеши с порогом чувствительности 0.01

Для исследуемой задачи индикатор на основе вейвлетов Добеши обеспечивает лучшую адаптацию (в том смысле, что все особенности локализируются на минимальном количестве ячеек исходной сетки). Тем не менее, индикатор на основе В-вейвлетов также позволяет локализовать все особенности, хотя при этом выделяется и большее количество артефактов, поскольку отсутствует постпроцессинг. Наличие артефактов на практике приводит к построению неоправданно мелкой сетки и замедлению счета.

В заключении продемонстрируем, что индикаторы гладкости являются лишь инструментом и отображают лишь текущее состояние расчета. Так при численном моделировании задачи Седова методом Годунова возникает эффект карбункула [1], который порождает особенности на осях $x=0, y=0$. И хотя индикатор правильно локализует положение фронта и даже дополнительно измельчает сетку в окрестности карбункула (рисунок 8), это не помогает избавиться от алгоритмической особенности только за счет адаптации расчетной сетки.

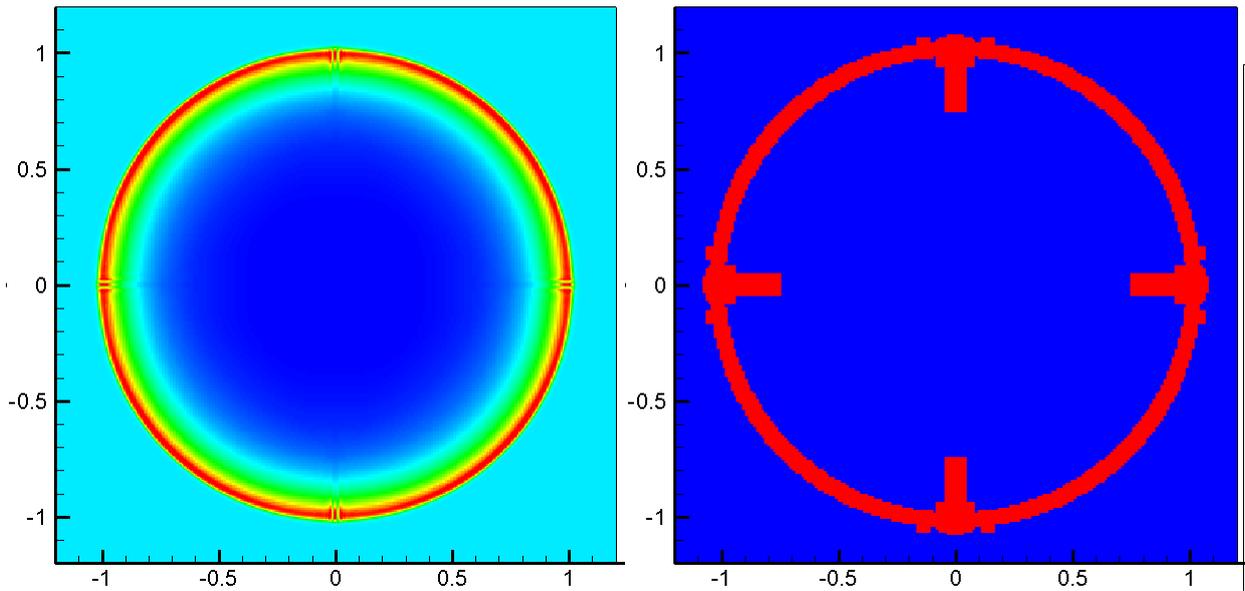


Рисунок 8 – Распределение плотности и флагов адаптации в расчете по методу Годунова при адаптации на основе вейвлетов Добеши с порогом чувствительности 0.01

Заключение

В работе представлено сравнение результатов численного моделирования задачи Седова на адаптивных расчетных сетках с использованием в качестве критерия адаптации двух индикаторов гладкости (на основе В-вейвлетов и на основе вейвлетов Добеши), а также различных подходов к адаптации сетки.

Результаты показали, что для анализа данных на мелкой сетке нельзя переносить их с грубой сетки простым сносом. Требуется либо использовать интерполяцию, либо проводить анализ на грубой сетке.

Если адаптировать сетку к ударной волне, то оба индикатора позволяют ее выделить, но индикатор на основе В-вейвлетов дает больше артефактов. Однако этот индикатор лучше локализован, что позволяет его использовать в расчетах на многоуровневых сетках и для адаптации сеток к другим сингулярностям решения.

Список литературы

1. Pandolfi M., D'Ambrosio D. Numerical instabilities in upwind methods: analysis and cures for the “carbuncle” phenomena // *J. Comput. Phys.* 2001. 166, N 2. 271–301.
2. Л. И. Седов. Методы подобия и размерности в механике. Наука, М. - 1977. – С. 243-274.
3. W. Sweldens The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 3:186–200, 1996.
4. А. Л. Афондииков., К.Д. Меркулов, А. В. Плёнкин. Динамическая локальная адаптация сеток на основе вейвлет-анализа в задачах газовой динамики. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 99. 26 с.
5. А. Л. Афондииков, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин. Вейвлетный анализ локализованных структур в идеальной и вязкой моделях // *Математическое Моделирование.* – 2011. – № 1. – С. 41–50.
6. А. Л. Афондииков, Л. И. Левкович-Маслюк, А. Е. Луцкий, А. В. Плёнкин Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа // *Математическое моделирование.* – 2008. – № 7. – С. 65–84.
7. J.-M. Lina, L. Gagnon. Image enhancement with symmetric Daubechies wavelets // *Wavelet Applications in Signal and Image Processing III.* – 1995. – SPIE Proceedings V. 2569 – P. 196–207.
8. И. Добеши. Десять лекций по вейвлетам. – Москва-Ижевск : НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 464 с.
9. W. Lawton. Application of complex valued wavelet transform to subband decomposition // *IEEE Transactions on Signal Processing.* – 1993. – V. 41. – № 12. – P. 3566–3568.
10. С. К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. Численное решение многомерных задач газовой динамики. Под ред.

С.К. Годунова. М.: Наука. – 1976. – 400 с.

11. В. В. Русанов. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // ЖВМиМФ – 1:2 (1961). – С. 267-279.