



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Кушнирук М.С., Иванов Д.С.

Алгоритмы управления движением группы спутников с использованием аэродинамической силы сопротивления для предупреждения столкновений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Кушнирук М.С., Иванов Д.С. Алгоритмы управления движением группы спутников с использованием аэродинамической силы сопротивления для предупреждения столкновений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 99. 30 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-99>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

М.С. Кушнирук, Д.С. Иванов

**Алгоритмы управления движением
группы спутников с использованием
аэродинамической силы сопротивления
для предупреждения столкновений**

Москва — 2015

Кушнирук М.С, Иванов. Д.С.

Алгоритмы управления движением группы спутников с использованием аэродинамической силы сопротивления для предупреждения столкновений

Предложен подход к управлению группой спутников, направленный на предотвращение столкновений между аппаратами. Введено понятие запрещенной зоны, попадание в которую может привести к их столкновению. Найдено оптимальное по энергетике управление, обеспечивающее касание относительной траекторией спутников запрещенной зоны. Рассмотрена кусочно-линейная аппроксимация оптимального управления и проведено сравнение двух алгоритмов с точки зрения точности. Проведено исследование точности управления при наличии дискретности управления и ошибок исполнения команд.

Ключевые слова: групповой полет спутников, предотвращение столкновений, алгоритм управления

Kushniruk M.S., Ivanov D.S.

Collision Avoidance Algorithms for Satellite Formation Flying by Using Aerodynamic Drag

Collision avoidance approach for formation flying satellites in a Low Earth Orbit by aerodynamic drag is proposed. Energy optimal control to obtain tangent trajectory to forbidden zone is developed. A piecewise-linear approximation of optimal control is considered. Comparison of the two algorithms in terms of accuracy is performed. The accuracy of the control in the presence of discrete control and command execution error is studied.

Key words: satellite formation flying, collision avoidance, control algorithm

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 13-01-00665, 14-01-31313.

Введение

Во время управления движением группой спутников, летящих на небольших относительных расстояниях, остро стоит проблема безопасного маневрирования. При реконфигурации относительной траектории, стыковке, задачах инспектирования необходимо избегать опасного сближения спутников, которое может привести к столкновению. Кроме того, в связи с возрастающим объемом космического мусора на околоземных орбитах, все большую актуальность приобретает проблема уклонения активных спутников от закончивших свой срок существования аппаратов или их обломков.

Алгоритмы управления групповым полетом для предотвращения столкновений, как правило, нацелены на уменьшение вероятности опасного сближения. В работе [1] представлен подход для прогнозирования вероятности столкновения с учетом точности определения относительного движения, действующих возмущений и неточности исполнения маневра для уклонения от опасного сближения. В этой работе предложен алгоритм для вычисления необходимого маневра в случае прогнозируемого близкого пролета, который минимизирует одновременно вероятность столкновения и расход характеристической скорости. Похожий подход используется и в работе [2] при построении оптимального импульсного маневра для уклонения от столкновения, однако наряду с минимизацией характеристической скорости проводится максимизация расстояния относительного пролета, что уменьшает вероятность столкновения. Релейное управление, построенное в работе [3], также обеспечивает минимизацию вероятности столкновения, даже в случае, если аппарат движется по заданной траектории, которая приводит к столкновению. В работе [4] рассматривается один из видов оптимального управления – метод роя частиц. Систему движений уравнений приводят к упрощенной линеаризованной форме. Задача непопадания в запрещенную зону сводится к задаче линейного программирования с ограничениями в форме неравенств. Следует заметить, что оптимальные алгоритмы, рассмотренные в вышеупомянутых работах, требуют численной оптимизации, что может быть труднореализуемо на бортовых вычислительных машинах.

Другим распространенным подходом для предотвращения столкновений является метод искусственных потенциальных полей, рассмотренный, например, в работе [5]. Космический аппарат образует вокруг себя потенциальное поле, имеющее форму сферы. Согласно алгоритму управления при попадании внутрь этой сферы другого аппарата или космического мусора на него начинает действовать отталкивающая сила, направленная по радиусу от одного спутника ко второму. В качестве функции потенциала обычно рассматривается экспоненциальная или обратная пропорциональная зависимость от расстояния между спутниками. В зависимости от способа задания потенциальных функций можно получить траектории с обходом препятствий с той или иной степенью «риска» (степени приближения друг к другу). То есть если заранее задать

запрещенную зону, в которой вероятность столкновения достаточно высока, то подходы, основанные на методе потенциалов, не обеспечивают непопадания в запрещенную зону, которое возможно при определенных начальных условиях. Метод потенциальных полей требует управления по всем направлениям, что бывает невозможным для некоторых видов управления. Этот метод напрямую реализуется при управлении спутниками, несущими переменные статические заряды одного знака. Под действием кулоновских сил спутники отталкиваются друг друга. Эти силы значительны при относительно небольших расстояниях между спутниками и быстро убывают при удалении спутников друг от друга.

Наряду с оптимальным управлением, требующим больших вычислительных затрат, и методом потенциальных полей существуют более простые и легко реализуемые алгоритмы. Например, в работе [6] построен алгоритм на основе поведенческого управления для реконфигурации группы спутников. В случае попадания спутников в сферическую запрещенную зону во время реконфигурации аппаратам дается заданный отталкивающий импульс, направленный по радиус-вектору. Такой импульс прикладывается до тех пор, пока аппарат находится в запрещенной зоне. Такое управление не является оптимальным и приводит к перерасходу характеристической скорости, однако доказано, что оно эффективно предотвращает столкновения при реконфигурации. Другой достаточно простой подход предложен в работе [7]. Относительное движение спутников в группе представляется через разницу элементов орбиты. В случае, когда два аппарата в какой-то момент попадают в одну точку, проводится маневр для фазирования орбиты одного из спутников, благодаря чему аппараты разлетаются на заданное расстояние друг от друга.

Большинство вышеупомянутых работ предполагает использование двигателей малой тяги для совершения маневров, предотвращающих столкновения. Однако если производится отталкивающий импульс по радиус-вектору между спутниками, выбрасываемое рабочее тело может привести к выходу из строя приборов, установленных на соседних спутниках, при полете на небольших расстояниях. В настоящей работе рассматривается управление с использованием аэродинамической силы сопротивления, которое эффективно справляется с задачей предотвращения столкновения на низких околоземных орбитах и не требует затрат рабочего тела. Если спутники имеют переменную площадь сечения, то, управляя ориентацией аппаратов, можно получить разницу между действующими на два спутника аэродинамическими силами.

В настоящей работе построены два алгоритма для предотвращения столкновений: оптимальное по энергетике управление, основанное на функции Понтрягина, и линейное управление. Оптимальное управление нацелено на гарантированное избегание столкновения и обеспечивает непопадание внутрь запрещенной зоны вокруг спутника – строится касательная траектория к сферической запрещенной зоне. Аналитическое решение задачи с закрепленными концами на основе линейной модели относительного движения позволяет уменьшить объем необходимых для управления расчетов, что упрощает реализацию алгоритма на бортовом компьютере. Однако

разработанное оптимальное управление оказывается возможным упростить ещё больше с помощью линейного управления, которое обеспечивает траекторию, близкую к касательной. В настоящей работе проведено сравнение двух алгоритмов с точки зрения точности при дискретности управления и ошибок использования команд.

1. Используемые модели

Для построения управления при решении задачи уклонения от столкновения в настоящей работе используется линейная модель относительного движения спутников. Предполагается, что основное воздействие на аппараты на низкой околоземной орбите оказывает только трансверсальная компонента аэродинамической силы. При таком предположении движение по нормали к орбите является неуправляемым и рассматривается управление движением только в плоскости орбиты. Изменять величину трансверсальной составляющей аэродинамической силы удастся путём поворота спутника относительно центра масс, что приводит к изменению эффективного сечения относительно набегающего потока. Задача уклонения от столкновения сводится к построению траектории, огибающей "запрещенную" зону в виде окружности в плоскости орбиты, которая определяется неточностью определения относительного движения с помощью бортовых средств навигации.

1.1. Уравнения движения

Будем рассматривать систему, состоящую из двух спутников, движущихся по близким орбитам. Для описания траекторий в таком случае удобно пользоваться уравнениями движения, записанными в относительных координатах. Общий вид уравнений относительного движения двух спутников достаточно сложен для аналитического рассмотрения, поэтому в настоящей работе используется система уравнений Хилла-Клохесси-Уилтшира, которая описывает относительное движение двух спутников, летящих по близким околокруговым орбитам в центральном поле тяготения Земли [8,9]. Используется опорная система координат, ее начало (опорная точка O) движется по круговой орбите радиуса r_0 с угловой скоростью $\omega = \sqrt{\mu/r_0^3}$, где μ – гравитационный параметр Земли. Ось Oz направлена от центра Земли к опорной точке, ось Oy направлена по нормали к плоскости орбиты, ось Ox дополняет тройку до правой (рис.2).

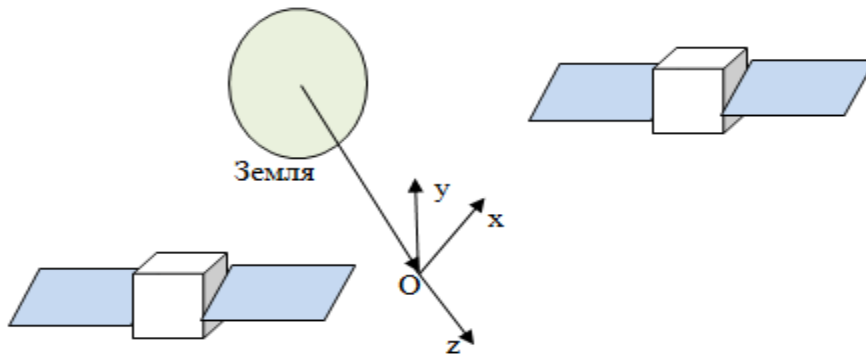


Рис.1. Система координат, связанная с опорной точкой O , движущейся по круговой орбите

Пусть $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ – координаты первого и второго спутников в опорной системе координат. Тогда для координат (x, y, z) вектора относительного положения спутников $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\dot{z}\omega, \\ \ddot{y} &= -y\omega^2, \\ \ddot{z} &= 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= -3c_1\omega t + 2c_2 \cos \omega t - 2c_3 \sin \omega t + c_4, \\ y(t) &= c_5 \sin \omega t + c_6 \cos \omega t, \\ z(t) &= 2c_1 + c_2 \sin \omega t + c_3 \cos \omega t, \end{aligned} \quad (2)$$

где константы интегрирования $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ выражаются через начальные условия

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0, \quad (3)$$

t_0 – момент времени, в который определены относительные координаты x_0, y_0, z_0 и относительные скорости $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$.

1.2. Модель аэродинамической силы

Рассмотрим управляемое движение двух спутников. Будем предполагать, что оба спутника имеют одинаковую форму. Каждый из спутников состоит из центральной части, имеющей форму шара, и тонкой плоской пластины. К

каждому спутнику приложена аэродинамическая сила сопротивления, которая состоит из двух компонент: действующей на центральную часть и на пластины. Также будем предполагать, что сопротивление центральной части не зависит от ориентации спутника в пространстве и одинаково для обоих спутников, а сопротивление пластины зависит положения нормали к пластине по отношению к направлению набегающего потока. Запишем уравнения относительного движения с учетом аэродинамической силы в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2\dot{z}\omega + f_x, \\ \ddot{y} &= -y\omega^2 + f_y, \\ \ddot{z} &= 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2 + f_z,\end{aligned}\tag{4}$$

где $\mathbf{f} = [f_x \ f_y \ f_z]^T = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$ – разница удельных аэродинамических сил. Удельную аэродинамическую силу, действующую на каждый из спутников, можно представить так:

$$\mathbf{f}_i = -\frac{1}{m}\rho V^2 S \left\{ (1-\varepsilon)(\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i)\mathbf{e}_v + 2\varepsilon(\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i)^2 \mathbf{n}_i + (1-\varepsilon)\frac{\nu}{V}(\mathbf{e}_v, \mathbf{n}_i)\mathbf{n}_i \right\}.\tag{5}$$

Здесь ρ – плотность атмосферы на расстояние r_0 от центра Земли, m – масса спутника, V – скорость набегающего потока (предполагается одинаковой для двух спутников), S – площадь пластины, \mathbf{n}_i – единичный вектор внешней нормали к пластине, \mathbf{e}_v – единичный вектор, направленный по скорости набегающего потока, ε и ν – коэффициенты взаимодействия молекул атмосферы с поверхностью спутника, $i=1,2$. По современным представлениям схемы взаимодействия газа с поверхностью спутника таковы, что $\varepsilon \approx 0.1$ и $\nu/V \approx 0.1$ [10]. Поэтому вторым и третьим слагаемым в силе (5) можно пренебречь, тогда остается только одна компонента по вектору скорости, которая совпадает для круговой орбиты с компонентой f_x :

$$f_i = -\frac{1}{2}\rho C V^2 S \cos \beta_i.$$

Здесь $C = 1 - \varepsilon$ – аэродинамический коэффициент сопротивления, β_i – угол между направлением набегающего потока и нормалью i -ой пластины, которая образует острый угол с набегающим потоком, $i=1,2$. Заметим, что углы β_i лежат в пределах $[0; \pi/2]$. Будем рассматривать близколетящие спутники, поэтому плотность атмосферы и скорость набегающего потока для обоих спутников можно считать одинаковыми. Также на начальном этапе будем предполагать, что плотность атмосферы не изменяется вдоль орбиты.

Сделаем замену $\alpha_i = 90^\circ - \beta_i$. После преобразований получаем формулу для разницы аэродинамических сил сопротивления:

$$f_x = -\frac{1}{2}\rho CV^2 S(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = \frac{1}{2}\rho CV^2 S \sin \Delta\alpha,$$

где $\Delta\alpha = \arcsin(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$. Для любого $\Delta\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$ существует бесконечное множество пар α_1 и α_2 , которые удовлетворяют равенству, записанному выше. Для однозначности наложим условие на α_1 и α_2 : $\alpha_1\alpha_2 = 0$, что означает, что только один из спутников во время управления отклоняется от направления набегающего потока. При повороте первого спутника значение $\Delta\alpha > 0$, а при повороте второго спутника $\Delta\alpha < 0$.

При действии только трансверсальной компоненты аэродинамической силы движение по нормали к опорной орбите является неуправляемым, поэтому это движение в работе не рассматривается. Кроме того, для большинства миссий группового полета, связанных, например, с дистанционным зондированием Земли, важно движение именно в плоскости орбиты, т.е. в плоскости Oxz . Запишем уравнения Хилла в виде линейной системы для осей Ox и Oz

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

где приняты следующие обозначения:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\omega & 3\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$B_x = -\frac{1}{2}\rho C V^2 S, \quad u = \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1.$$

При изменении разности синусов углов α_1 и α_2 создается управляющее воздействие. Однако следует заметить, что разность синусов не может лежать вне интервала $[-1; 1]$ при условии $\alpha_1, \alpha_2 \in [0; \pi/2]$. Это накладывает ограничения на возможное значение управляющего воздействия. Вне интервала $[-1; 1]$ управление нереализуемо и не имеет физического смысла.

1.3. Радиус запрещенной зоны

Для предотвращения опасного сближения необходимо определить область вокруг спутника, в которой опасность столкновения недопустимо высока, и строить управление таким образом, чтобы избежать попадания в эту "запрещенную" зону. Размер запрещенной области может определяться

точностью определения относительного движения с помощью бортового навигационного оборудования. Так как ошибки определения движения задаются ковариационной матрицей ошибок, то наиболее естественная форма "запрещенной" области – это эллипсоид, в центре которого находится спутник. Размер и положение эллипсоида обусловлены текущими ошибками знания траектории. Будем рассматривать эллипсоиды ошибок таких размеров, чтобы вероятность нахождения спутника внутри них была близка к 100%. Для построения "запрещенной" зоны в плоскости орбиты, необходимо спроецировать эллипсоид ошибок. В результате получится некоторый эллипс, попадание спутника в который угрожает столкновением. Однако удобнее строить траекторию, огибающую не эллипс, а окружность, с радиусом, равным большой полуоси эллипса.

Предположим, что в момент времени t_0 начальные условия (3) заданы с ошибкой $\mathbf{e} = [e_x \ e_y \ e_z \ e_{\dot{x}} \ e_{\dot{y}} \ e_{\dot{z}}]^T$, которая распределена по нормальному закону с нулевым вектором математического ожидания и ковариационной матрицей $K(t_0) \in R^{6 \times 6}$. Пусть компоненты вектора \mathbf{e} независимы, а матрица имеет диагональный вид $K(t_0) = \text{diag}(\sigma_x^2, \dots, \sigma_z^2)$.

Плотность вероятности для случайного вектора \mathbf{e} :

$$p(\mathbf{e}|0, K(t)) = N(\mathbf{e}|0, K(t)) = \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{\det K(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T K(t)^{-1} \mathbf{e}\right). \quad (7)$$

Выражение $\mathbf{e}^T K(t)^{-1} \mathbf{e} = \chi^2 = \text{const} > 0$ есть положительная определенная квадратичная форма для вектора \mathbf{e} . Поэтому в соответствии с теорией поверхностей второго порядка настоящее уравнение представляет собой уравнение шестимерного эллипсоида относительно вектора \mathbf{e} (эллипсоид равной плотности вероятности или эллипса рассеивания). Уравнение эллипсоида можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{e_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{\sigma_z}\right)^2 + \left(\frac{e_{\dot{x}}}{\sigma_{\dot{x}}}\right)^2 + \left(\frac{e_{\dot{y}}}{\sigma_{\dot{y}}}\right)^2 + \left(\frac{e_{\dot{z}}}{\sigma_{\dot{z}}}\right)^2 = \chi^2. \quad (8)$$

Разделим правую и левую часть уравнения (8) на χ^2

$$\left(\frac{e_x}{\chi\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{\chi\sigma_y}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{\chi\sigma_z}\right)^2 + \left(\frac{e_{\dot{x}}}{\chi\sigma_{\dot{x}}}\right)^2 + \left(\frac{e_{\dot{y}}}{\chi\sigma_{\dot{y}}}\right)^2 + \left(\frac{e_{\dot{z}}}{\chi\sigma_{\dot{z}}}\right)^2 = 1, \quad (9)$$

где $\chi\sigma_i$ являются главными полуосями шестимерного эллипсоида.

Если спроецировать шестимерный эллипсоид на плоскость Oxz , то получится двухмерный эллипс. В общем случае, если матрица $K(t)$ не диагональная, главные оси этого эллипса не совпадают с осями системы координат Oxz . Приведем эллипс к главным осям, повернув систему координат. Тогда новые средние квадратичные отклонения σ_1, σ_2 выразятся через $\chi\sigma_x, \chi\sigma_z$. Определим радиус запрещенной зоны как большую полуось двухмерного эллипса рассеяния:

$$R = \max(\sigma_1, \sigma_2). \quad (10)$$

Величина χ выбирается таким образом, чтобы практически все значения вектора \mathbf{e} лежали внутри шестимерного эллипсоида. То есть, если определить область $E_\chi = \{\mathbf{e}: \mathbf{e}^T K(t)^{-1} \mathbf{e} \leq \chi^2\}$, то вероятность нахождения ошибки внутри запрещенной области определяется так:

$$P(E_\chi) = 1 - \varepsilon, \quad (11)$$

где $\varepsilon \ll 1$.

Пусть ошибки меняются по линейному закону следующим образом

$$\mathbf{e}_{k+1} = \Phi_{k+1|k} \mathbf{e}_k, \quad (12)$$

где \mathbf{e}_k — вектор ошибок в момент времени t_k , Φ — матрица перехода, которую можно определить из (2) следующим образом:

$$\Phi_{k+1|k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6\Delta t\omega + 6\sin\omega\Delta t & -3\Delta t + \frac{4}{\omega}\sin\omega\Delta t & 0 & \frac{2}{\omega}\cos\omega\Delta t - 1 \\ 0 & \cos\omega\Delta t & 0 & 0 & \frac{1}{\omega}\sin\omega\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 4 - 3\cos\omega\Delta t & \frac{2}{\omega}(1 - \cos\omega\Delta t) & 0 & \frac{1}{\omega}\sin\omega\Delta t \\ 0 & 0 & 6\omega(\cos\omega\Delta t - 1) & -3 + 4\cos\omega\Delta t & 0 & -2\sin\omega\Delta t \\ 0 & -\omega\sin\omega\Delta t & 0 & 0 & \cos\omega\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega\sin\omega\Delta t & 2\sin\omega\Delta t & 0 & \cos\omega\Delta t \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $\Delta t = t_{k+1} - t_k$.

Ковариационную матрицу можно проинтегрировать с помощью матрицы перехода и получить её значение в произвольный момент времени t :

$$K(t_{k+1}) = \Phi_{k+1|k} K(t_k) \Phi_{k+1|k}^T. \quad (14)$$

Таким образом, если в начальный момент времени была задана ошибка определения относительной траектории с помощью ковариационной матрицы, то в каждый момент времени, используя (14), можно найти её значение в момент времени t_{k+1} . Зная ковариационную матрицу и значение ε , можно построить шестимерный эллипсоид (11), спроецировать его на плоскость Oxz и определить радиус запрещенной зоны согласно (10).

2. Алгоритмы управления

Сформулируем постановку задачи для построения управления с целью уклонения от столкновения. Пусть в момент времени t_0 заданы начальные условия относительного движения $[x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0]^T$ с известной ковариационной матрицей ошибки $K(t_0)$. Если при интегрировании уравнений движения (1) траектория движения спутника попадает в запрещенную зону, вычисленную согласно уравнениям (14) и (10), то необходимо облететь запрещенную зону по касательной траектории. Для уклонения от столкновения выбрана именно касательная к запрещенной зоне траектория, так как она предотвращает опасное сближение, с одной стороны, и требует минимальных затрат ресурса управления, с другой стороны.

При такой постановке задачи предотвращения столкновения возникает вопрос: за какое время до попадания в запрещенную зону необходимо начинать управлять аппаратами? Ответ на этот вопрос зависит от точности прогнозирования траектории, величины максимального управляющего воздействия, размеров запрещенной области и минимального расстояния до объекта при движении без управления. Линейные уравнения (1) применимы для описания относительного движения на коротких интервалах времени и дают большую ошибку на длинных интервалах. Поэтому если их использовать для прогнозирования движения, то стоит ограничиться небольшим отрезком времени, например, одним витком. Максимальное управляющее воздействие в основном зависит от плотности атмосферы на высоте полета группы спутников и от переменной составляющей площади аппарата по набегающему потоку. Чем больше максимальное воздействие, тем позже можно начать управлять для обеспечения касания запрещенной зоны. Однако для любого воздействия будет существовать момент "точки невозврата", после которой избежать попадания в запрещенную зону будет невозможно. Поэтому необходимо вычислить этот момент времени, чтобы начать уклоняться от столкновения заранее.

Рассмотрим два типа управления, обеспечивающего касательную траекторию к запрещенной зоне. Сначала построим закон управления, линейно изменяющийся во времени, который достаточно просто реализовать на практике. Потом выведем оптимальное по расходу управляющего воздействия управление,

обеспечивающее касание, и сравним эти два алгоритма. При построении алгоритмов на начальном этапе предполагается, что момент начала маневра уклонения задан и размеры запрещенной области известны.

2.1. Управление по линейному закону

Для решения задачи уклонения рассмотрим управление, которое подчиняется линейному закону. Пусть управление имеет вид

$$u(t) = u_0 \left(1 - \frac{t - t_0}{T - t_0} \right). \quad (15)$$

u_0 – начальное значение управления, t_0 – время начала маневра, T – время касания запрещенной зоны. Заметим, что величина управления в момент касания запрещенной зоны равняется нулю. Будем считать, что u_0 и T – неизвестные, которые зависят от начальных условий и радиуса запрещенной зоны.

Подставляя выражение (15) в уравнения движения (4) и решая систему дифференциальных уравнений, получаем решение для координат и скоростей по осям Ox и Oy :

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 \sin(\omega(t - t_0)) + a_5 \cos(\omega(t - t_0)), \\ \dot{x}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + a_4 \omega \cos(\omega(t - t_0)) - a_5 \omega \sin(\omega(t - t_0)), \\ z(t) &= a_6 + a_7 t + a_8 t^2 + a_9 \sin(\omega(t - t_0)) + a_{10} \cos(\omega(t - t_0)), \\ \dot{z}(t) &= a_7 + a_8 t + a_9 \omega \cos(\omega(t - t_0)) - a_{10} \omega \sin(\omega(t - t_0)), \end{aligned} \quad (16)$$

где константы интегрирования a_i ($i=0, \dots, 10$) выражаются через начальные условия (3), время касания T и начальное значение управления u_0 .

Для касания запрещенной зоны необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned} x(T)^2 + z(T)^2 - R^2 &= 0, \\ x(T)\dot{x}(T) + z(T)\dot{z}(T) &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где R – радиус запрещенной зоны. Оба равенства обеспечивают касание окружности радиуса R в некоторой точке. Первое равенство – это совпадение точки на траектории с радиусом окружности, второе равенство – условие касания скорости.

Подставляя уравнения (16) в (17), получаем

$$\begin{aligned} f_1(u_0, T) &= 0, \\ f_2(u_0, T) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Функции $f_1(u_0, T)$ и $f_2(u_0, T)$ обращаются в нуль при значениях (u_0^*, T^*) , которые обеспечивают касание запрещенной зоны. Для нахождения (u_0^*, T^*) можно воспользоваться методом Ньютона

$$\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^k - (H)^{-1} \mathbf{f},$$

$$\mathbf{w}^k = \begin{pmatrix} u_0^k \\ T^k \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(u_0, T)}{\partial u_0} & \frac{\partial f_1(u_0, T)}{\partial T} \\ \frac{\partial f_2(u_0, T)}{\partial u_0} & \frac{\partial f_2(u_0, T)}{\partial T} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{u_0=u_0^k \\ T=T^k}}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(u_0^k, T^k) \\ f_2(u_0^k, T^k) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Начальное приближение можно взять $\mathbf{w}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ T^0 \end{pmatrix}$, где T^0 – время, когда траектория первый раз пересекает запрещенную зону при неуправляемом движении $u \equiv 0$. Условие остановки итерационного процесса имеет вид

$$|u_0^{k+1} - u_0^k| < \varepsilon_{u_0}, |T^{k+1} - T^k| < \varepsilon_T, \quad (20)$$

где $\varepsilon_T \ll 1$, $\varepsilon_{u_0} \ll 1$ – заранее заданные параметры.

Итерационный процесс (19) не требует больших вычислительных мощностей, так как матрица Якоби H получена явно, хотя имеет громоздкий вид. Обращение матрицы H , которая имеет размер 2×2 , также не требует большого количества операций. Решение системы (18) обычно занимает несколько итераций. Таким образом, линейное управление (15) может быть реализовано даже на маломощных бортовых компьютерах микроспутников.

2.2. Оптимальное управление

Построим оптимальное управление для предотвращения столкновения. При движении на низких околоземных орбитах большая полуось орбиты уменьшается пропорционально площади космических аппаратов по набегающему потоку. Поэтому в качестве минимизируемого функционала разумно взять квадрат от управления, чтобы уменьшить изменение большой полуоси орбиты спутника вследствие совершения маневра уклонения. В качестве краевых условий оптимального управления возьмем условия касания (17) запрещенной зоны. Сначала сформулируем в общем виде задачу оптимального управления, и затем применим принцип максимума для решения задачи уклонения в двух постановках – со свободным правым концом, когда точка касания окружности не определена заранее, и с фиксированными концами.

Задача оптимального управления. Принцип максимума

Рассмотрим динамическую систему, состояние которой в каждый момент времени t описывается вектор-функцией $\mathbf{x}(t) \in R^n$. На состояние системы можно воздействовать, изменяя управляемые параметры $\mathbf{u}(t) \in R^r$. Будем рассматривать класс кусочно-непрерывных управлений $\mathbf{u}(t)$.

При заданном управлении $\mathbf{u}(t)$ состояние системы изменяется во времени согласно закону:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (21)$$

где \mathbf{f} – нелинейная вектор функция, задающая уравнения движения.

Сформулируем задачу оптимального управления такой системой следующим образом: определить управление $\mathbf{u}^*(t)$, доставляющее экстремум функции Q вида:

$$Q = \int_{t_0}^T F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt + \Phi_0(t_0, T, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(T)) \rightarrow \max, \quad (22)$$

где t_0 – начальное время, T – время окончания управления, F и Φ_0 – некоторые нелинейные функции. Первое слагаемое (интегральная часть критерия) характеризует качество функционирования системы на всем промежутке управления $[t_0, T]$, второе слагаемое (терминальный член) – только конечный результат воздействия управления, определяемый начальным $\mathbf{x}(t_0)$ и конечным результатом $\mathbf{x}(T)$ состояниями и, возможно, моментами начала и окончания управления t_0 и T . В зависимости от задачи интегральная или терминальная часть критерия может быть равна нулю.

На процесс функционирования системы могут накладываться дополнительные ограничения в форме краевых условий, задающих множество допустимых начальных и конечных состояний системы и моменты начала и окончания управления:

$$\Phi_i(t_0, T, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(T)), i = 1 \dots m. \quad (23)$$

Важным частным случаем (23) являются условия вида:

$$\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0 = 0; \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_T = 0, \quad (24)$$

соответствующие закреплению левому и правому концу фазовой траектории. Моменты времени начала и окончания управления, t_0 и T , могут быть как известными, тогда говорят о задаче с фиксированным временем управления, так

и неизвестными – возникает задача со свободными концами. Л.С. Понтрягиним доказано [11], что оптимальное управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ достигается при максимуме функции $\tilde{H}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$:

$$\tilde{M}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}_0) = \sup_{\mathbf{u} \in \Omega} \tilde{H}(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

где $\boldsymbol{\psi}$ – вектор сопряженных параметров, Ω – область допустимых значений управления.

Сформулируем теперь принцип максимума. Пусть $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t_0^*, T^*)$ – оптимальный процесс в задаче (21)–(23). Тогда найдутся одновременно не равные нулю множители Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$ и сопряженные параметры $\boldsymbol{\psi}$: $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1}$, $\lambda_0 \geq 0$ и $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbf{R}^n$ – такие, что выполнены следующие условия:

а) Функция Понтрягина задачи

$$\tilde{H}(t, \lambda_0, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \lambda_0 F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (25)$$

при каждом $t \in [t_0, T]$ достигает максимума при $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$.

б) Вектор-функция $\boldsymbol{\psi}(t)$ удовлетворяет сопряженной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_j(t)}{dt} = - \frac{\partial \tilde{H}(t, \lambda_0, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_j}; j = 1, \dots, n, \quad (26)$$

с краевыми условиями (условия трансверсальности)

$$\begin{aligned} \psi_j(t_0^*) &= - \left(\lambda, \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t_0^*, T^*)}{\partial x_j(t_0)} \right), \\ \psi_j(T) &= \left(\lambda, \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t_0^*, T^*)}{\partial x_j(T)} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

в) Выполняются условия на подвижные концы:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t, \lambda_0, \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \Big|_{t=t_0} &= \left(\lambda, \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t_0^*, T^*)}{\partial t_0} \right), \\ \tilde{H}(t, \lambda_0, \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \Big|_{t=T} &= - \left(\lambda, \frac{\partial \Phi_0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t_0^*, T^*)}{\partial T} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Множитель Лагранжа λ_0 определяет чувствительность оптимального решения задачи к виду интегральной части функционала. В вырожденном случае, если ограничения задачи таковы, что оптимальное управление $\mathbf{u}^*(t)$ не зависит от вида интеграла $F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, то из условий принципа максимума следует, что $\lambda_0 = 0$. В невырожденном случае $\lambda_0 > 0$, поэтому ее можно положить равной 1 (разделив функцию \tilde{H} на λ_0). Как правило, из постановки задачи понятно допускаются ли в ней вырожденные решения. При исследовании таких решений необходимо обращать внимание на выполнение условия теоремы о том, что множители λ и $\psi(t)$ не могут одновременно быть равными нулю.

Для задачи с закрепленными концами сопряженная функция $\psi(t)$ имеет свободные концы, т.е. соответствующие условия трансверсальности отсутствуют.

Обратно, для задачи со свободными концами, не содержащей ограничений (23), сопряженная функция имеет закрепленные концы, определяемые соотношениями (27).

Оптимальное управление для задачи предотвращения столкновения

Решим задачу перевода фазовой точки из начального состояния в точку касания запрещенной зоны при минимизации «затрат» на управление. Сформулируем задачу следующим образом. Пусть точка движется в плоскости Oxz по закону (4) во время $t \geq t_0$. Требуется найти кусочно-непрерывное ограниченное управление $u(t)$ ($|u(t)| \leq u^{\max}$ в промежутке времени $t_0 \leq t \leq T$), такое, чтобы точка, выйдя из начального положения (3), пришла в точку, которая удовлетворяет условиям касания (17). Кроме того, управление должно максимизировать функционал от квадрата управляющего воздействия

$$Q = \int_{t_0}^T (-u^2(t)) dt. \quad (29)$$

Положим $\lambda_0 = 1$. Эта задача относится к классу задач со свободным правым концом. Согласно формуле (22) $F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = -u^2(t)$. Запишем функцию Понтрягина (25):

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2}u^2 + \psi_1 \dot{x} + \psi_2 (u - 2\dot{z}\omega) + \psi_3 \dot{z} + \psi_4 (2\dot{x}\omega + 3z\omega^2). \quad (30)$$

Согласно принципу максимума Понтрягина оптимальное управление, максимизирующее функцию \tilde{H} , можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = -u + \psi_2 = 0.$$

Так как вторая производная функции Понтрягина $\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial u^2} = -1$ меньше нуля, то при $u = u^* = \psi_2$ функция Понтрягина принимает максимальное значение.

Найдем сопряженную систему из уравнений (26):

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 - 2\omega\psi_4, \\ \dot{\psi}_3 &= -3\omega^2\psi_4, \\ \dot{\psi}_4 &= -\psi_3 + 2\omega\psi_2. \end{aligned} \tag{31}$$

Условие трансверсальности можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_1(T) &= 2\lambda_1 x(T) + \lambda_2 \dot{x}(T), \\ \psi_2(T) &= \lambda_2 x(T), \\ \psi_3(T) &= 2\lambda_1 z(T) + \lambda_2 \dot{z}(T), \\ \psi_4(T) &= \lambda_2 z(T). \end{aligned} \tag{32}$$

В решения дифференциальных уравнений (4) и (31) с краевыми условиями (3) и (32) входят неизвестные: множители Лагранжа λ_1, λ_2 и время касания запрещенной зоны T .

Для нахождения трех неизвестных потребуется три уравнения. Одно уравнение берем из условия (28) на подвижный конец

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\psi_2(T)^2 + \psi_1(T)\dot{x}(T) + \psi_2(T)(\psi_2(T) - 2\dot{z}(T)\omega) + \psi_3(T)\dot{z}(T) + \\ &+ \psi_4(2\dot{x}(T)\omega + 3z(T)\omega^2) + \lambda_1(x(T)\dot{x}(T) + z(T)\dot{z}(T)) - \\ &+ \lambda_2(\dot{x}^2(T) + x(T)\ddot{x}(T) + \dot{z}^2(T) + z(T)\ddot{z}(T)) = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Остальные два уравнения берем из условия касания окружности:

$$\begin{aligned} x(T)^2 + z(T)^2 - R^2 &= 0, \\ x(T)\dot{x}(T) + z(T)\dot{z}(T) &= 0. \end{aligned} \tag{34}$$

После подстановки решений дифференциальных уравнений (4) и (31) с краевыми условиями (3) и (32), в условия (33) и (34), получаем три уравнения

$$\begin{aligned}
g_1(\lambda_1, \lambda_2, T) &= 0, \\
g_2(\lambda_1, \lambda_2, T) &= 0, \\
g_3(\lambda_1, \lambda_2, T) &= 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

Решение системы (35) можно найти численно методом Ньютона:

$$\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k - (G)^{-1} \mathbf{g}^k,$$

$$\mathbf{q}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \\ T^k \end{pmatrix}; G = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2, T)}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2, T)}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial g_1(\lambda_1, \lambda_2, T)}{\partial T} \\ \frac{\partial g_2(\lambda_1, \lambda_2, T)}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial g_2(\lambda_1, \lambda_2, T)}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial g_2(\lambda_1, \lambda_2, T)}{\partial T} \\ \frac{\partial g_3(\lambda_1, \lambda_2, T)}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial g_3(\lambda_1, \lambda_2, T)}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial g_3(\lambda_1, \lambda_2, T)}{\partial T} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{\lambda_1 = \lambda_1^k \\ \lambda_2 = \lambda_2^k \\ T = T^k}}; \tag{36}$$

$$\mathbf{g}^k = \begin{pmatrix} g_1(\lambda_1^k, \lambda_2^k, T^k) \\ g_2(\lambda_1^k, \lambda_2^k, T^k) \\ g_3(\lambda_1^k, \lambda_2^k, T^k) \end{pmatrix}.$$

Начальное приближение можно брать как $\mathbf{q}^0 = (0 \ 0 \ T^0)$, где T^0 – время, когда траектория первый раз пересекает запрещенную зону при $u \equiv 0$. Условие окончания итерационного процесса:

$$|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k| < \varepsilon_{\lambda_1}, |\lambda_2^{k+1} - \lambda_2^k| < \varepsilon_{\lambda_2}, |T^{k+1} - T^k| < \varepsilon_T, \tag{37}$$

где $\varepsilon_{\lambda_1} \ll 1$, $\varepsilon_{\lambda_2} \ll 1$, и $\varepsilon_T \ll 1$ – заранее заданные параметры.

Алгоритм оптимального по "затратам" управления в задаче со свободным правым концом требует нахождения уже трех неизвестных параметров и требует больше вычислительных затрат по сравнению с линейным управлением. Матрица Якоби G также выражается аналитически, но ее обращение занимает больше вычислительного времени. Однако, по сравнению с линейным управлением, оптимальное управление дает преимущество по расходу ресурса управления, что приводит к уменьшению скорости изменения большой полуоси орбиты спутника.

Оптимальное управление с фиксированными концами для задачи предотвращения столкновения

Чтобы сократить объем вычислений на бортовом компьютере, необходимый для оптимального управления, попробуем зафиксировать точку касания

траектории запрещенной зоны. Другими словами, зададим конечное состояние $\mathbf{x}(T)$, которое можно найти, например, используя управление по линейному закону. Задача с фиксированными концами не требует выполнения условия трансверсальности, а следовательно, не нужно находить множители Лагранжа. Таким образом, остается только одна переменная – время окончания управления, которую необходимо найти.

Сформулируем эту задачу следующим образом. Пусть точка движется в плоскости Oxz по закону (4) при $t \geq t_0$. Требуется найти кусочно-непрерывное ограниченное управление $u(t)$ ($|u(t)| \leq u^{\max}$ в промежутке времени $t_0 \leq t \leq T$), такое, чтобы точка, выйдя из начального положения (3), пришла в точку

$$x(T) = x_T, z(T) = z_T, \dot{x}(T) = \dot{x}_T, \dot{z}(T) = \dot{z}_T. \quad (38)$$

Кроме того, управление должно максимизировать функционал от квадрата управляющего воздействия (29).

Функция Понтрягина (30), оптимальное решение $u = u^* = \psi_2$ и сопряженная система (31) вычисляются аналогично задаче со свободным правым концом. Но условие трансверсальности (32) для задачи с фиксированными концами не требуется.

В решение дифференциальных уравнений (4) и (31) с краевыми условиями (3) и (38) входит неизвестная T , которую можно найти из условия на подвижный конец (28).

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\psi_2(T)^2 + \psi_1(T)\dot{x}(T) + \psi_2(T)(\psi_2(T) - 2\dot{z}(T)\omega) + \psi_3(T)\dot{z}(T) + \\ + \psi_4(2\dot{x}(T)\omega + 3z(T)\omega^2) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

После подстановки решений дифференциальных уравнений (4) и (31) с краевыми условиями (3) и (38) в уравнение (39) получаем одно уравнение, которое зависит от времени касания окружности.

$$h(T) = 0. \quad (40)$$

Решение уравнения (40) можно найти численно методом Ньютона.

Следует отметить, что хотя для задачи с фиксированным правым концом необходимо найти только одну неизвестную из нелинейного уравнения (40), это значительно проще задачи со свободным концом, однако такая постановка задачи требует задания точки касания $\mathbf{x}(T)$. Чтобы ее определить, нужно решить уравнение (19) для линейного закона управления и найти еще две неизвестных. В результате получается, что задача с закрепленным концом требует нахождения трех неизвестных, так же как и задача со свободным концом. Тем не менее, с

вычислительной точки зрения задача с закрепленным концом несколько проще, так как не требует обращения матрицы Якоби размерностью 3×3 .

3. Исследование алгоритмов управления

Проведем моделирование работы рассмотренных алгоритмов для демонстрации их эффективности при решении задачи уклонения от столкновения. Также на примере конкретных начальных относительных траекторий и заданного размера запретной зоны исследуем зависимость максимального управления от времени начала маневра уклонения. Так как максимальный угол отклонения от набегающего потока не может составлять больше 90 градусов, то, таким образом, можно найти момент времени, после которого столкновение невозможно предотвратить. В случае оптимальной задачи можно аппроксимировать непрерывное управление дискретным, которое проще реализовать на практике.

3.1. Параметры численного моделирования

Рассмотрим опорную круговую орбиту высотой 400 км. Два аппарата движутся один относительно другого в опорной системе координат, связанной с круговой орбитой. Пренебрежем суточным изменением плотности атмосферы вдоль витка и будем считать ее постоянной $\rho = 10^{-11}$ кг/м³. Предположим, что коэффициент сопротивления пластины спутника при ее ориентации перпендикулярно набегающему потоку $C = 1$. Площадь пластин $S = 1$ м² одинакова для обоих спутников. Следовательно, коэффициент B_x при управлении в формуле (6) приблизительно равен 10^{-4} м/с². Время прогнозирования траектории для определения попадания в запрещенную зону T^0 равняется одному периоду.

Будем предполагать, что в начале каждого витка определяется вектор состояния. Точность определения вектора состояния определяется точностью навигационных приборов. Пусть ковариационная матрица состояния в момент времени t_0 после обработки измерений имеет следующий вид:

$$K(t_0) = \text{diag}(1 \text{ см}^2, 1 \text{ см}^2, 1 \text{ см}^2, 0.1 \text{ см}^2 / \text{с}^2, 0.1 \text{ см}^2 / \text{с}^2, 0.1 \text{ см}^2 / \text{с}^2). \quad (41)$$

Такая ковариационная матрица соответствует случаю некоррелированных ошибок определения относительного движения, среднеквадратическая ошибка составляет $\sigma = 1$ см по положению и $\sigma = 0.1$ см/с по скорости, что достижимо при обработке, например, видео-измерений относительного положения.

Проинтегрируем ковариационную матрицу на один виток согласно (14) и вычислим радиус запрещенной зоны, как описано в разделе 1.3. На рис. 2 представлена зависимость радиуса запрещенной зоны от времени. Как видно из рисунка, радиус значительно растет за виток. Максимальное значение радиуса

составляет $R_{\max} = 11$ м. Зафиксируем радиус запрещенной зоны для наихудшего сценария событий, положив $R = R_{\max}$.

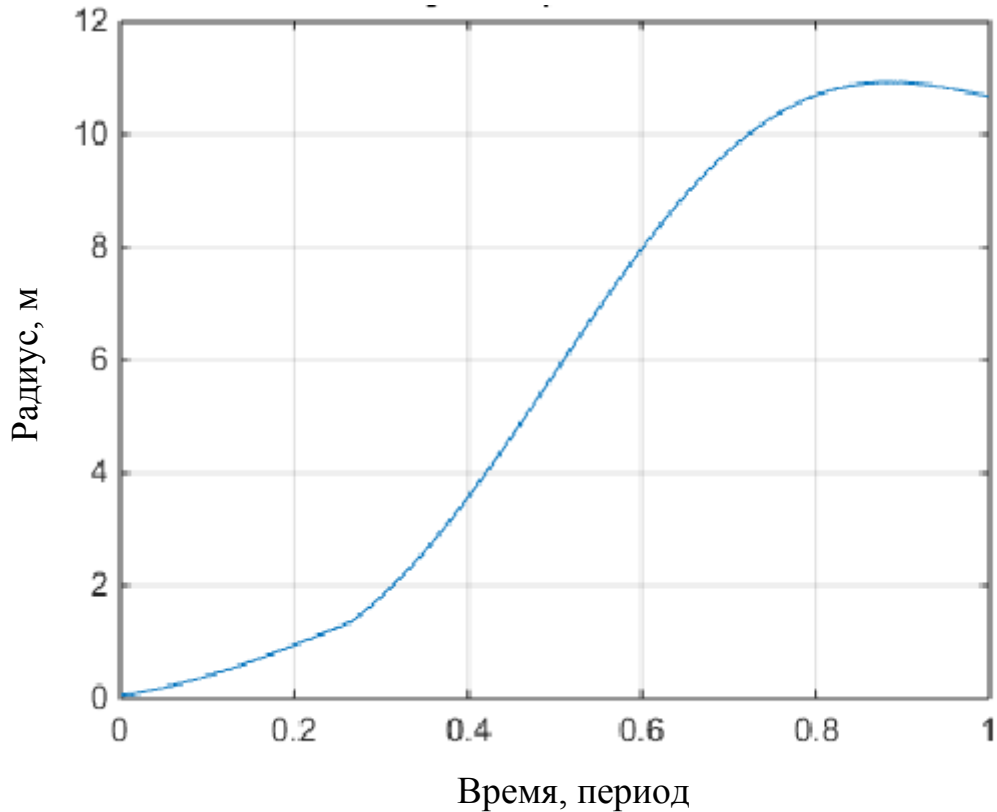


Рис.2. Зависимость радиуса запрещенной зоны от времени

3.2 Управление по линейному закону

Продемонстрируем работу алгоритма на основе линейного изменения управления для предотвращения столкновения. Зададим начальный вектор относительного состояния как:

$$\mathbf{x}_0 = [-45.01 \text{ м} \quad 0 \text{ м} \quad -47.76 \text{ м} \quad 0.108 \text{ м/с} \quad 0 \text{ м/с} \quad 0.041 \text{ м/с}]^T. \quad (42)$$

Если с такими начальными условиями проинтегрировать траекторию, то она пересечет запрещенную зону с радиусом $R = 11$ м (см. рис. 3). Если начать уклоняться в момент времени t_0 , то необходимо с помощью (19) определить начальное управление u_0 и момент окончания управления T . Для рассматриваемого примера после решения u_0 соответствует $\Delta\alpha = 52$ град, а $T \approx 0.11 \cdot T_{\text{орб}}$, где $T_{\text{орб}}$ – орбитальный период опорной круговой орбиты. На рис. 4 представлена линейная зависимость управления от времени. Из рисунка видно, что в момент времени $t = T$ управление равно нулю, как и должно получиться из построения зависимости управления от времени (15).

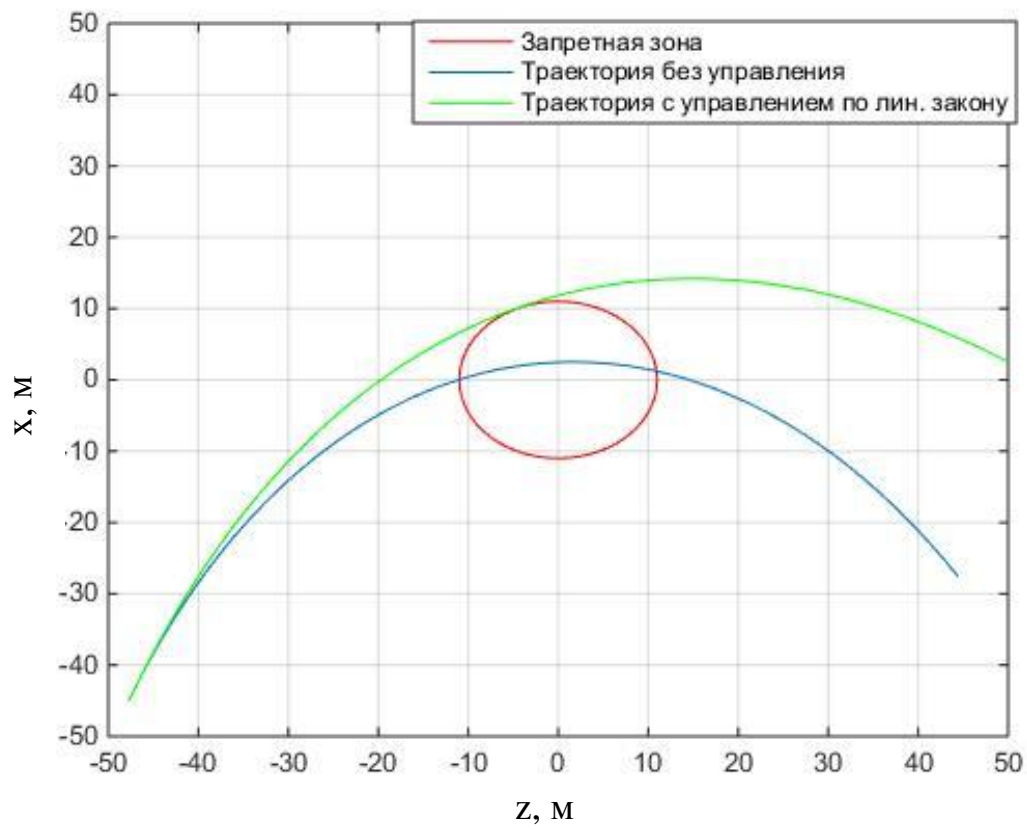


Рис. 3. Пример проекции траектории на плоскость Oxz

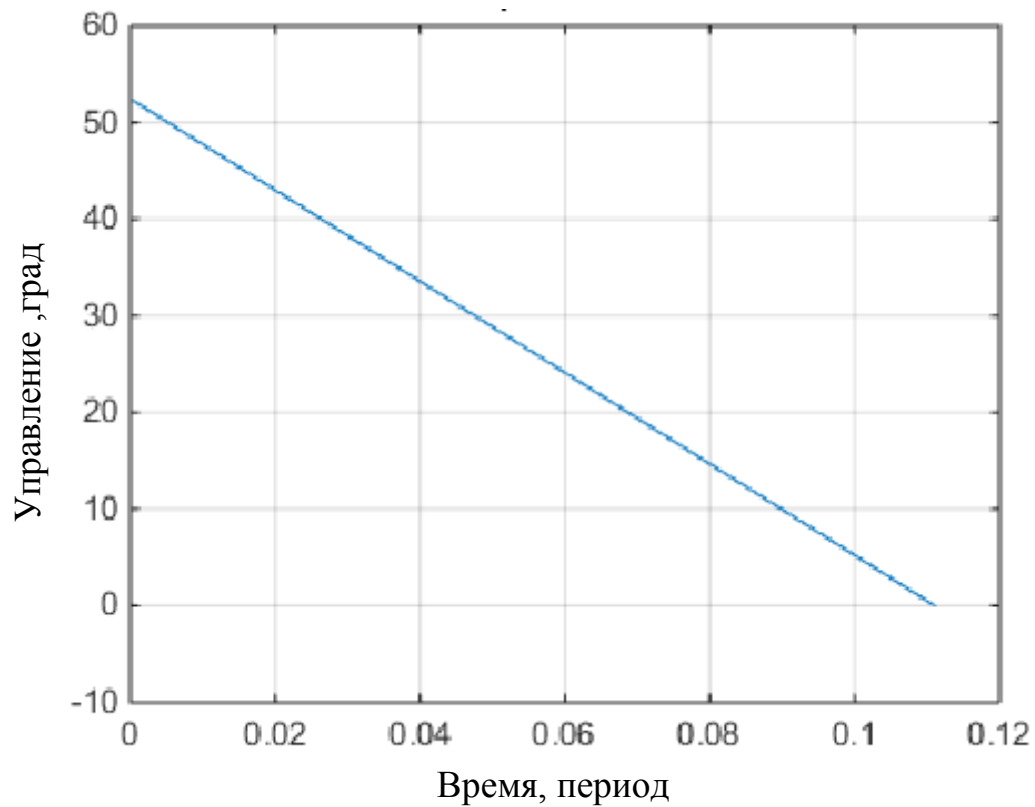


Рис.4. Зависимость разности углов от времени

Для того чтобы сравнить линейное управление с оптимальным, вычислим значение функционала (29) $Q_{lin} = -8.85 \cdot 10^{-7}$, которое характеризует расход ресурса управления. Чем больше этот функционал, тем медленнее будет уменьшаться большая полуось группы спутников.

Таким образом, алгоритм управления на основе линейного закона успешно справляется с задачей касания запрещенной зоны.

3.3. Оптимальное управление с фиксированными концами

Для тех же начальных условий (42) решим задачу оптимального управления с фиксированными концами. Согласно решению задачи уклонения по линейному закону точка касания запрещенной зоны определяется вектором состояния

$$\mathbf{x}_T = [10.05 \text{ м} \quad 0 \text{ м} \quad -4.62 \text{ м} \quad 0.043 \text{ м/с} \quad 0 \text{ м/с} \quad 0.096 \text{ м/с}]^T.$$

Для решения задачи необходимо определить время окончания управления из нелинейного уравнения (40). На рис. 5 представлена относительная траектория спутника под действием оптимального управления, а на рис. 6 представлена зависимость управления от времени.

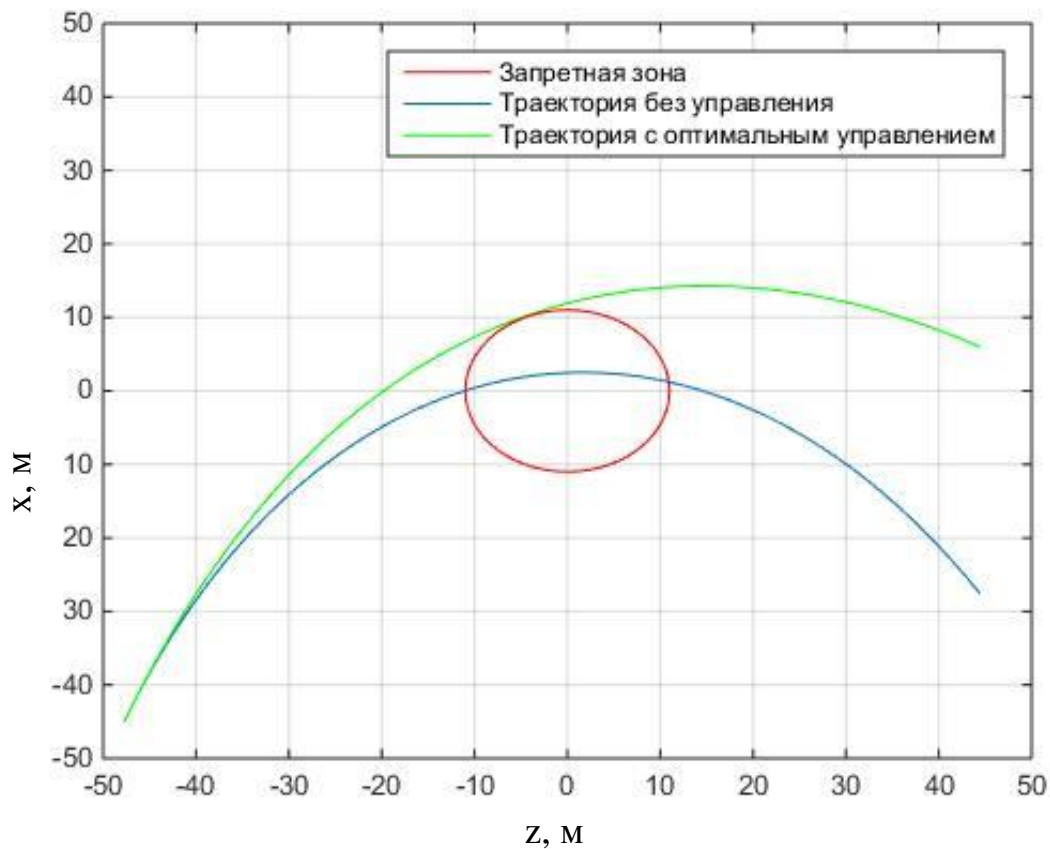


Рис.5. Проекция траектории на плоскость Oxz

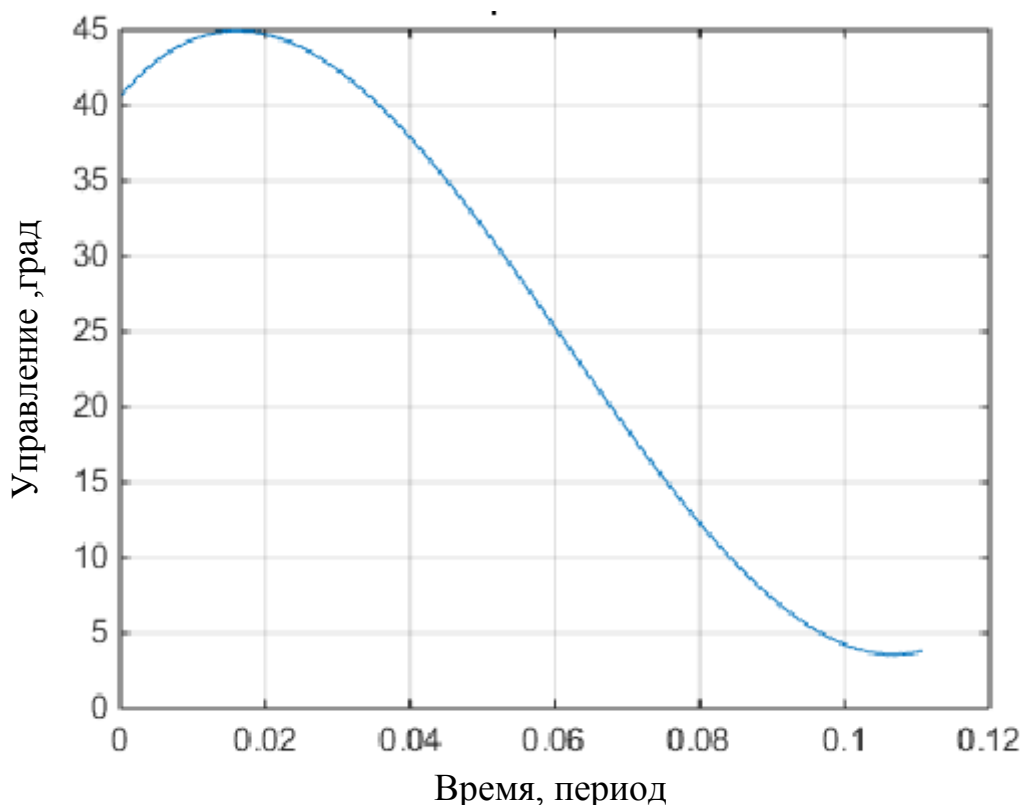


Рис.6. Зависимость разности углов от времени

Значение функционала при оптимальном управлении (29) $Q_{opt} = -8.66 \cdot 10^{-7}$, что больше, чем Q_{liner} . Время касания и максимальный угол поворота получились примерно такими же, как и с линейным управлением.

Таким образом, оптимальное управление успешно справляется с задачей касания запрещенной зоны, показав большее значение функционала по сравнению с линейным управлением. Однако особое внимание следует уделить времени начала управления, так как начиная с некоторого времени величина управления становится нереализуемой, то есть разность синусов углов между плоскостями спутников и набегающего потока становится по модулю больше единицы.

3.4. Зависимость управления от момента начала управления

Рассмотрим прежний пример с начальными условиями (42). Но теперь будем изменять момент времени начала управления. За начало отсчета примем время прогнозируемого вхождения в запрещенную зону. Из рис. 7 видно, что при $t = -0.05 \cdot T_{orb}$, соответствующем приблизительно 5 минутам, управление достигает своего максимального значения 90° . Если начать уклоняться позже, то уже невозможно будет избежать попадания в запрещенную зону. Из графика видно, что для рассматриваемого примера управление нужно включать в промежутке от $-0.3 \cdot T_{orb}$ до $-0.05 \cdot T_{orb}$. Если включать управления слишком рано ($t_0 < -0.3 \cdot T_{orb}$), то сложно на аппаратном уровне обеспечить точность задания маленьких углов ориентации космического аппарата. Хотя, как можно увидеть

из рис. 8, на котором представлена зависимость функционала Q от времени, чем раньше начинается управление, тем больше значение функционала и, как следствие, меньше изменение большой полуоси спутника.

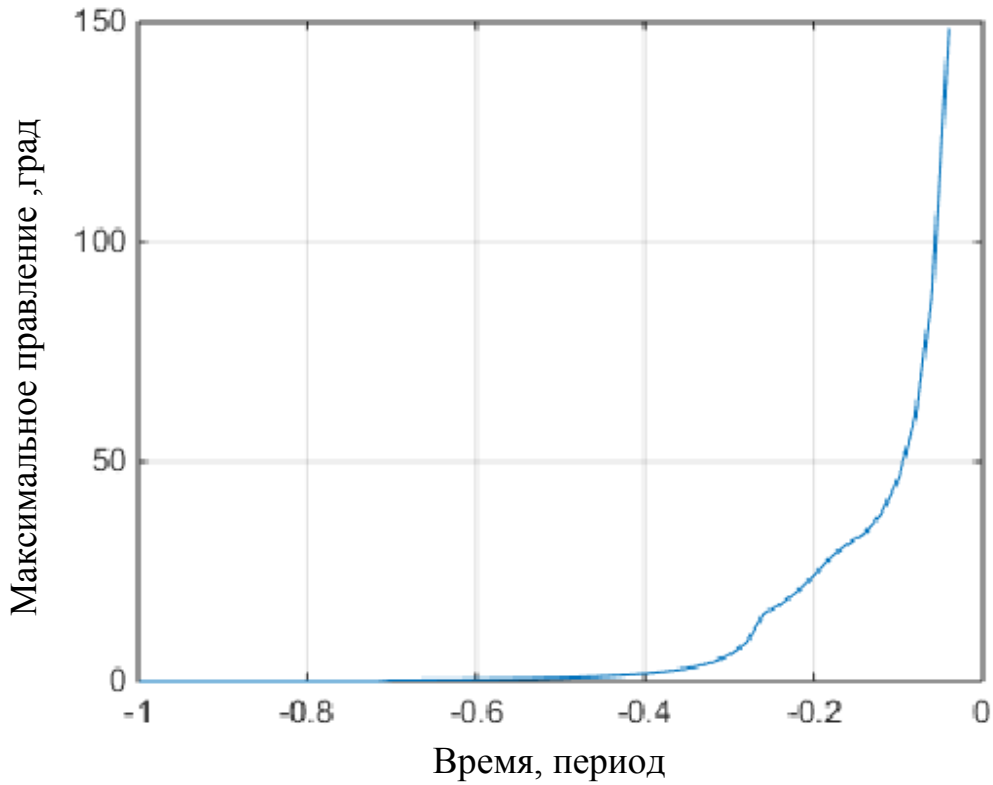


Рис.7. Зависимость максимального угла от времени

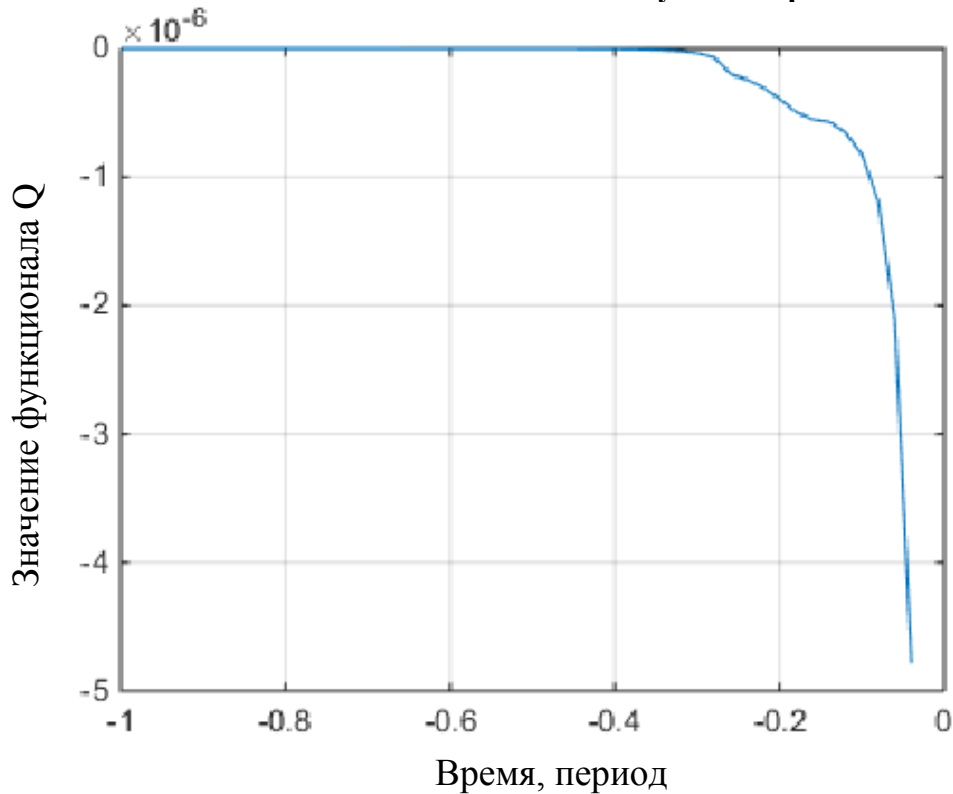


Рис.8. Зависимость функционала от времени

3.5. Дискретное приближение управления

На практике сложно реализовать непрерывное управление движением относительно центра масс. Часто реальные системы управления космическим аппаратом работают дискретно, согласно выбранному шагу по управлению. Кроме того, алгоритмически проще стабилизировать ориентацию аппарата, чем отслеживать заранее заданную фазовую траекторию. Поэтому зададим дискретное приближение рассчитанного управления и сравним ошибки с непрерывным управлением. В качестве примера рассмотрим аппроксимацию оптимального управления с закрепленными концами.

Начальное и конечное состояние, радиус запрещенной зоны зададим такими же, как и в разделе 3.3. Возьмем шаг дискретизации по углу 4 град, а продолжительность стабилизации 2 минуты. Рассмотрим, насколько такая дискретная реализация управления скажется на ошибке траектории. Под ошибкой траектории будет предполагать максимальное отклонение траектории от траектории согласно идеальному непрерывному управлению

$$\max_{t \in [t_0; T]} e(t),$$

где $e(t) = \sqrt{(x_{op}(t) - x_d(t))^2 + (z_{op}(t) - z_d(t))^2}$, x_{op}, z_{op} – координаты траектории при непрерывном управлении, x_d, z_d – координаты при дискретном управлении.

Приближение непрерывного оптимального управления дискретным дано на рис. 9, а на рис. 10 представлен пример относительной траектории спутника под действием непрерывного и дискретного оптимального управления. Как видно из рисунка, дискретное управление уже не обеспечивает касание запрещенной зоны, а ошибка траектории составляет около 0.35 метра. Значение функционала составило $Q_d = -8.93 \cdot 10^{-7}$, что на 3% хуже, чем при непрерывном управлении. Однако ухудшение функционала можно считать незначительным, притом что управление стало проще реализовать на практике благодаря дискретизации.

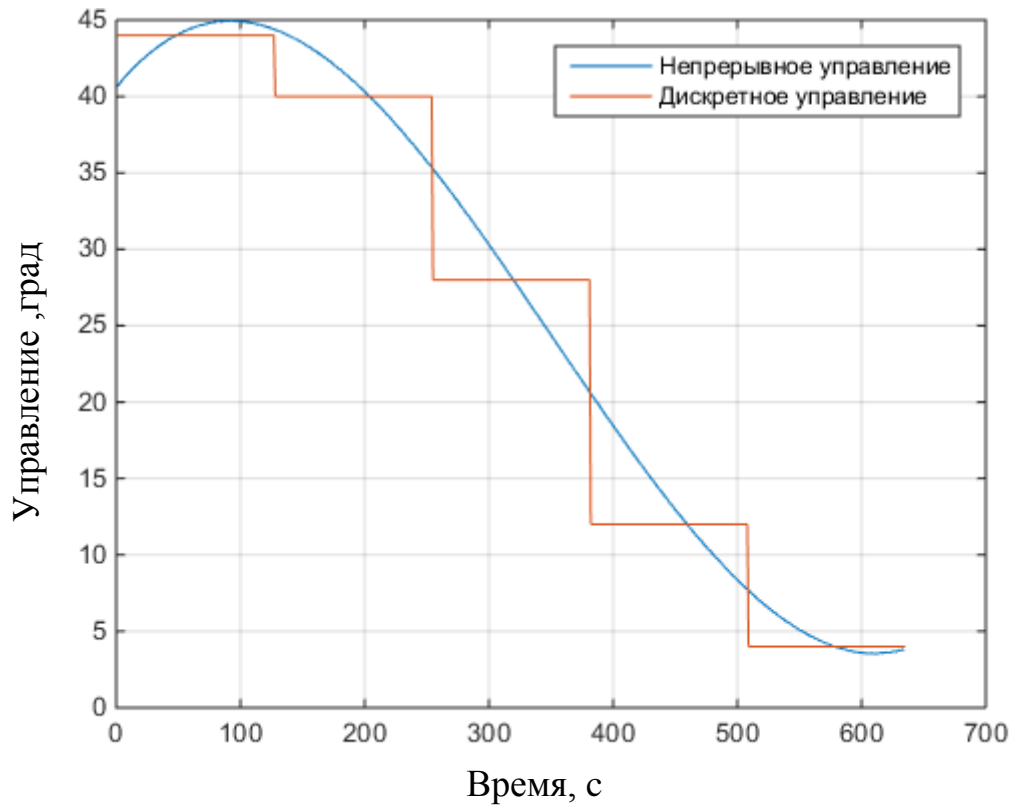
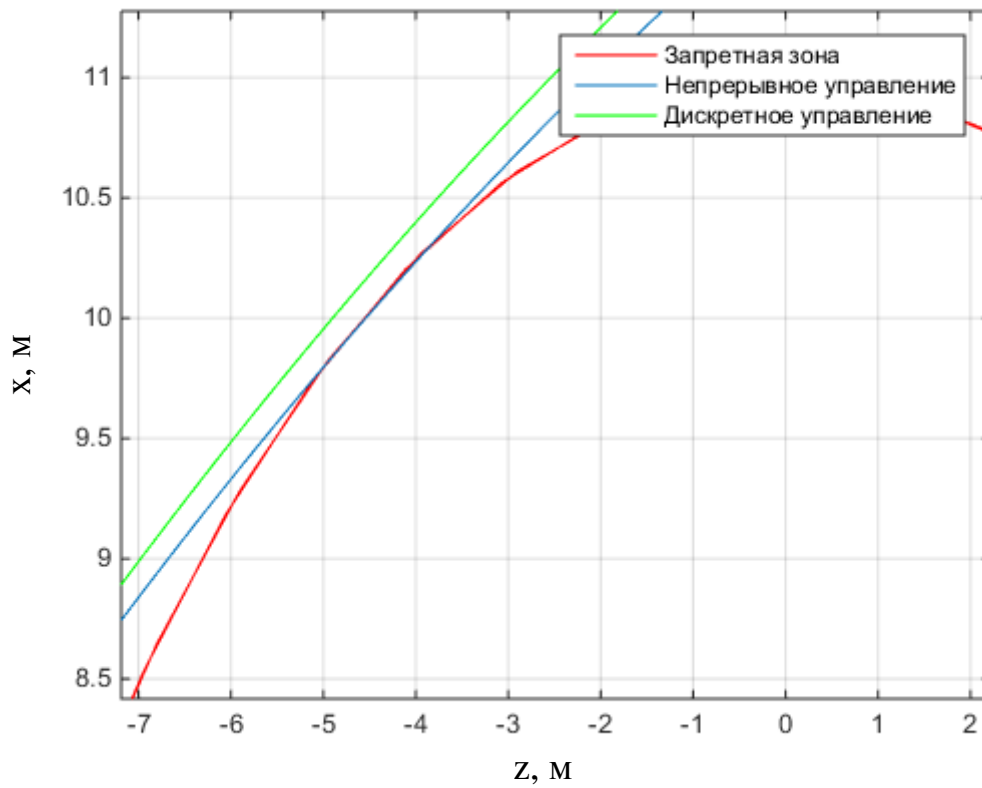


Рис.9. Зависимость разности углов от времени

Рис.10. Пример проекции траектории на плоскость Oxz

Заключение

В настоящей работе разработаны два типа алгоритмов управления для предотвращения столкновения спутников, летящих в групповом полете на низкой околоземной орбите. Линейный и оптимальный алгоритмы управления не требуют больших вычислительных затрат в отличие от известных алгоритмов. Они могут быть реализованы на бортовом компьютере и обеспечивают гарантированный облет запрещенной зоны вокруг спутников. В случае оптимального непрерывного управления рассмотрено дискретное исполнение поворотов относительно центра масс, что проще реализовать на практике, и показано, что ошибка траектории при этом незначительно мала. Моделирование работы алгоритмов показало, что при одинаковых начальных условиях оптимальное управление обеспечивает меньшее изменение большой полуоси орбиты спутника по сравнению с линейным управлением и дискретным исполнением непрерывного управляющего сигнала.

Список литературы

1. Slater G.L., Byram S.M., Williams T.W. Collision Avoidance for Satellites in Formation Flight // *J. Guid. Control. Dyn.* 2006. Vol. 29, № 5. P. 1140–1146.
2. Bombardelli C., Hernando-Ayuso J. Optimal Impulsive Collision Avoidance in Low Earth Orbit // *J. Guid. Control. Dyn.* 2015. Vol. 38, № 2. P. 217–225.
3. Qi Y., Jia Y. Active collision avoidance manoeuvre design based on equidistant interpolation // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2011. Vol. 69, № 11-12. P. 987–996.
4. Huang H., Zhuang Y. Optimal satellite formation reconfiguration using co-evolutionary particle swarm optimization in deep space // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2015. Vol. 113. P. 149–163.
5. Lee D., Sanyal A.K., Butcher E. a. Asymptotic Tracking Control for Spacecraft Formation Flying with Decentralized Collision Avoidance // *J. Guid. Control. Dyn.* 2015. Vol. 38, № 4. P. 587–600.
6. Schlanbusch R., Kristiansen R., Nicklasson P.J. Spacecraft formation reconfiguration with collision avoidance // *Automatica.* Elsevier Ltd, 2011. Vol. 47, № 7. P. 1443–1449.
7. Jochim E.F., Fiedler H., Krieger G. Fuel consumption and collision avoidance strategy in multi-static orbit formations // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2011. Vol. 68, № 7-8. P. 1002–1014.
8. Hill G.W. Researches in Lunar Theory // *Am. J. Math.* 1878. Vol. 1. P. 5–26.
9. Schweighart S., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight // *J. Guid. Control. Dyn.* 2002. Vol. 25, № 6. P. 1073–1080.
10. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова Думка, 1984. 187 с.
11. Ногин В.Д. Введение в оптимальное управление. Учебно-методическое пособие. СПб.: Изд-во “ЮТАС,” 2008. 92 с.

Содержание

Введение	3
1. Используемые модели.....	5
1.1. Уравнения движения	5
1.2. Модель аэродинамической силы	6
1.3. Радиус запрещенной зоны	8
2. Алгоритмы управления.....	11
2.1. Управление по линейному закону	12
2.2. Оптимальное управление.....	13
Задача оптимального управления. Принцип максимума	14
Оптимальное управление для задачи предотвращения столкновения	16
Оптимальное управление с фиксированными концами для задачи предотвращения столкновения	18
3. Исследование алгоритмов управления.....	20
3.1. Параметры численного моделирования.....	20
3.2. Управление по линейному закону	21
3.3. Оптимальное управление с фиксированными концами.....	23
3.4. Зависимость управления от момента начала управления	24
3.5. Дискретное приближение управления	26
Заключение.....	28
Список литературы.....	29