



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Орлов Ю.Н., Федоров С.Л.**

Моделирование  
распределений  
функционалов на ансамбле  
траекторий нестационарного  
случайного процесса

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Орлов Ю.Н., Федоров С.Л. Моделирование распределений функционалов на ансамбле траекторий нестационарного случайного процесса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 101. 14 с. doi:[10.20948/prepr-2016-101](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-101)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-101>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**Ю.Н. Орлов, С.Л. Федоров**

**Моделирование распределений  
функционалов на ансамбле траекторий  
нестационарного случайного процесса**

**Москва — 2016**

## **Орлов Ю.Н., Федоров С.Л.**

Моделирование распределений функционалов на ансамбле траекторий нестационарного случайного процесса

Исследуются выборочные распределения функционалов, в том числе моментов, заданных на модельных реализациях ансамбля траекторий нестационарного случайного процесса, эволюция функции распределения которого определяется некоторым эмпирическим уравнением типа диффузии со сносом. Предлагаемый подход с использованием кинетического уравнения совместно с методом генерации случайной траектории позволяет решить ряд практических задач в области стохастического управления, связанных с эффектами самоорганизации в сложных системах.

**Ключевые слова:** нестационарный временной ряд, ансамбль траекторий, математическое моделирование, распределение функционалов

## **Orlov Yu.N., Fedorov S.L.**

Functional distributions modeling over trajectories ensemble of non-stationary time series

The empirical distributions of functional including moments, defining over the ensemble of trajectories of non-stationary time-series, are investigated. The distribution of time-series is determined by some empirical kinetic equation of diffusion type. This approach enables to solve several problems in the area of stochastic control, connecting with self-organization effects.

**Key words:** non-stationary time series, ensemble of trajectories, mathematical modeling, functional distributions

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект  
№ 15-01-07944

## **Содержание**

Введение .....	3
1. Статистический анализ функционалов на ансамбле траекторий .....	4
2. Функционалы качества связи между точками .....	6
3. Уравнение эволюции среднего значения функционала качества .....	8
4. Эффекты нестационарности и функционал качества.....	9
Литература .....	14

## Введение

В настоящей работе излагается метод исследования статистических свойств функционалов, заданных на траектории некоторого случайного процесса. Интерес представляют функционалы, не являющиеся моментами функции распределения, а зависящие от последовательности значений случайных величин в выборке. Характерными примерами таких функционалов являются:

- так называемый SIR (signal-to-interference-ratio), т.е. отношение мощности полезного сигнала к мощности прочих сигналов в точке, где находится приемопередающее устройство;
- доля доходности определенной акции в инвестиционном портфеле;
- отношение разности положительных и отрицательных приростов значений случайной величины к размаху наблюдаемой выборки;
- относительная сила взаимодействия двух произвольных материальных точек в общем поле взаимодействующих тел и т.п.

Приведенные примеры функционалов возникают при исследовании поведения сложных систем взаимодействующих тел, когда требуется описать эффекты этого взаимодействия не для любой произвольной подсистемы, а для конкретной выделенной подсистемы. Особенность этих функционалов в том, что они не являются моментами функции распределения системы тел по координатам, хотя и определяются только взаимным расположением тел. Поскольку априорная зависимость таких функционалов от расстояния между подсистемой и остальной системой неизвестна, то функция распределения функционалов не может быть автоматически получена из функции распределения системы тел по координатам. Тем не менее, такое преобразование может быть проведено, если указанная зависимость монотонна.

Следовательно, в общем случае требуется моделирование не только движения тел в фазовом пространстве параметров, описывающих их состояния, но и моделирование функционалов на ансамбле траекторий. Особый интерес представляет ситуация, когда сами траектории зависят от таких функционалов, что характерно для движения в самосогласованных полях и для моделей социальных групп. В частности, основным примером в данной работе является моделирование вероятности устойчивой телефонной связи между движущимися устройствами, что актуально для больших групп людей на площадях, в торговых или офисных центрах, кинотеатрах, стадионах и т.п.

Статистические эффекты, возникающие при описании коммуникации подсистем в рамках определенных динамических или кинетических моделей, представляют большой интерес не только в технических областях, но и в экономике, социологии, демографии. Моделирование в этих областях часто использует методы статистической симуляции, так что создание алгоритмов нестационарного описания случайного процесса в виде ансамбля траекторий с определенными законами эволюции их выборочных распределений открывает новые возможности для анализа и прогнозирования поведения сложных систем.

## 1. Статистический анализ функционалов на ансамбле траекторий

В работе [1] был предложен метод генерации траектории случайного процесса, функция распределения которого нестационарна, но уравнение ее эволюции известно. В [2, 3] этот метод был расширен на генерацию ансамбля траекторий, распределение которых эволюционирует в соответствии с заданным кинетическим уравнением. В работах [4, 5] представлена структура программного комплекса, реализующего задачу генерации ансамбля случайных нестационарных траекторий и анализа функционалов на них.

Опишем кратко методологию проводимого далее анализа, следуя [2, 5].

Пусть плотность функции распределения (далее ПФР)  $f(x, t)$  удовлетворяет определенному кинетическому уравнению, например, уравнению Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(x, t)f) - \frac{\lambda(t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Это уравнение решается численно при заданном начальном условии

$$f(x, t)|_{t=0} = \rho(x).$$

Решение строится на временном горизонте  $T$ . Шаг по времени для простоты выбираем единичным. После этого в каждый момент времени  $t = 1, 2, \dots, T$  можно сгенерировать случайное число из функции распределения (далее ФР)  $F(x, t)$ , считая

$$F(x, t) = \int_0^x f(y, t) dy. \quad (2)$$

В частности, если решение уравнения (1) представлено в виде гистограммы  $f_j(t)$ , где  $j$  есть номер классового интервала, на который разбита область интегрирования, то непрерывная строго монотонная ФР имеет вид

$$F(x, t) = (nx - j) \cdot f_{j+1}(t) + \sum_{k=1}^j f_k(t), \quad x \in [(j-1)/n; j/n], \quad j = 1 \div n. \quad (3)$$

Алгоритм генерации случайных чисел, образующих в совокупности одну из возможных траекторий временного ряда на заданном промежутке времени, состоит в следующем.

Генерируется стационарный равномерно распределенный на  $[0; 1]$  ряд чисел  $\{y_k\}$  длиной  $T$ . Отвечающий ему ряд с распределением  $F(x, t)$  из (2-3) строится по формуле обращения соответствующей локальной по времени функции распределения, движущейся в скользящем окне длины  $T$ :

$$y_k = F_N(x_k, k). \quad (4)$$

Генерируя набор равномерно распределенных выборок, получаем соответствующий набор траекторий, которые можно рассматривать как ансамбль решений кинетического уравнения.

Пусть на выборке длины  $T$  задан некоторый функционал  $\Psi\{x(t-T+1), \dots, x(t)\}$ . Это может быть, например, статистика в виде скользящей

средней, а может быть и некоторая сложная конструкция в виде управления некоторой другой случайной траекторией.

При тестировании функционала  $\Psi$  требуется определить, во-первых, его статистические свойства на выборках, отвечающих данной модели эволюции ПФР, и, во-вторых, изучить устойчивость функционала при изменении параметров уравнения эволюции или при разладке динамики ПФР.

Первая задача решается следующим образом. Пусть выбран интересующий нас фрагмент временного ряда и на нем построен пучок виртуальных траекторий числом  $N$ . Обозначим  $\Psi_j$  значение функционала на  $j$ -й траектории. Его статистические свойства полностью определяются выборочным распределением  $\Phi_N(\Psi)$ , которое строится по имеющимся  $N$  значениям. В частности, можно определить среднее, дисперсию, нормированное среднее и т.п. величины:

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Psi_j, \quad \sigma_{\Psi}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\Psi_j - \bar{\Psi})^2, \quad S_{\Psi} = \frac{\bar{\Psi}}{\sigma_{\Psi}}. \quad (5)$$

Решение второй задачи требует предварительной кластеризации фрагментов временного ряда по типичным состояниям и определения характерных изменений скорости и диффузии с тем, чтобы можно было ввести разумные коэффициенты модуляции. В частности, изменяя скорость в крайних ее значениях, можно проверить устойчивость функционала на изменение волатильности (размаха выборки). Влияние корреляции между элементами ряда на значение функционала изучается варьированием коэффициента диффузии.

Вычисляя статистики вида (5) функционала управления на наборе траекторий, отвечающих разным значениям сноса и диффузии, можно определить допустимые пределы, внутри которых управление устойчиво. Чувствительность функционала определяется его логарифмической производной по параметру, например:

$$\Lambda_{\Psi} = \frac{\partial \ln \bar{\Psi}}{\partial \ln \lambda}. \quad (6)$$

Задавая допустимые границы вариации в (6), можно в численном эксперименте получить допустимые границы вариации параметров уравнения Фоккера-Планка.

Стандартным примером функционалов являются моменты функции распределения, а уравнения эволюции трех первых моментов (нулевого, первого и второго порядков) известны как уравнения гидродинамики. Часто бывает, однако, что требуется изучить функционалы, зависящие от последовательности значений случайных величин в выборке, которые к тому же не являются линейными относительно выборочной функции распределения. Такие функционалы и рассматриваются в настоящей работе.

## 2. Функционалы качества связи между точками

Рассмотрим функционалы, зависящие не прямо от ПФР  $f(x,t)$ , а заданные в виде функций от расстояний между движущимися точками, положения которых образуют в совокупности ансамбль траекторий случайного процесса. Пусть  $x_i^\alpha$  — положение  $i$ -ой точки в некоторой области  $V$  в  $n$ -мерном пространстве, верхний индекс  $\alpha$  нумерует координаты в этом пространстве. Число точек в рассматриваемой системе случайно движущихся тел равно  $N+2$ . Расстояние между точками будем вычислять в декартовой прямоугольной системе координат, хотя для дальнейшего выбор конкретной нормы не принципиален. Итак, пусть

$$r_{ij}^2 = \sum_{\alpha=1}^n (x_i^\alpha - x_j^\alpha)^2. \quad (7)$$

Введем некоторую функцию от расстояния между двумя точками

$$\varphi_{ij} \equiv \varphi(r_{ij}).$$

Будем далее называть функцию  $\varphi$  функцией связи между точками. Выберем определенную пару точек, например, 1 и 2. Рассмотрим функционал «качества связи» между заданной парой точек, имеющий вид:

$$S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\varphi_{12}}{\sum_{j=3}^{N+2} \varphi_{1j}}. \quad (8)$$

Сумма в знаменателе формулы (8) представляет собой умноженное на  $N$  среднее значение функции связи с первой точкой, определяемое как

$$U(\mathbf{r}_1) = \int_V \varphi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (9)$$

где  $\rho(\mathbf{r}')$  есть плотность распределения оставшихся  $N$  точек в области  $V$ . Удобно ввести далее расстояние  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12}$  и рассматривать все остальные точки в системе отсчета, связанной со второй частицей. Тогда функционал качества связи (8) примет вид

$$S \equiv S(r) = \frac{\varphi(r)}{NU(r)}. \quad (10)$$

Представляют интерес такие распределения  $\rho(r)$ , при которых функция  $S(r)$  в (10) монотонна. Тогда по распределению  $\rho(r)$  можно построить плотность распределения случайной величины  $S$ . Эта плотность имеет вид

$$g(S) = (S^{-1}(r))' \rho(S^{-1}(r)). \quad (11)$$

Пусть функция связи монотонна и ограничена, область  $V$  представляет собой единичный трехмерный шар, а распределение в области равномерно. Тогда для степенных мономов функция (10) монотонна. Например, если  $\varphi(r) = r^2$ , то  $U(r) = r^2 + 3/5$  и  $S(r)$  монотонна.

Другой пример: пусть  $\varphi(r) = 1/(r^2 + a^2)$ ,  $a > 0$ . Такая функция связи характерна для анализа отношения сигнал/интерференция при моделировании качества связи движущихся приемо-передающих устройств [6-8]. Тогда

$$U(r) = \frac{3a}{r} \left( \arctg \frac{r}{a} + \frac{1}{2} \left( \arctg \frac{1-r}{a} - \arctg \frac{1+r}{a} \right) \right) - \frac{3}{4r} \ln \left( \frac{(1-r)^2 + a^2}{(1+r)^2 + a^2} \right). \quad (12)$$

В этом случае функция (10) также монотонна. Ее график имеет вид:

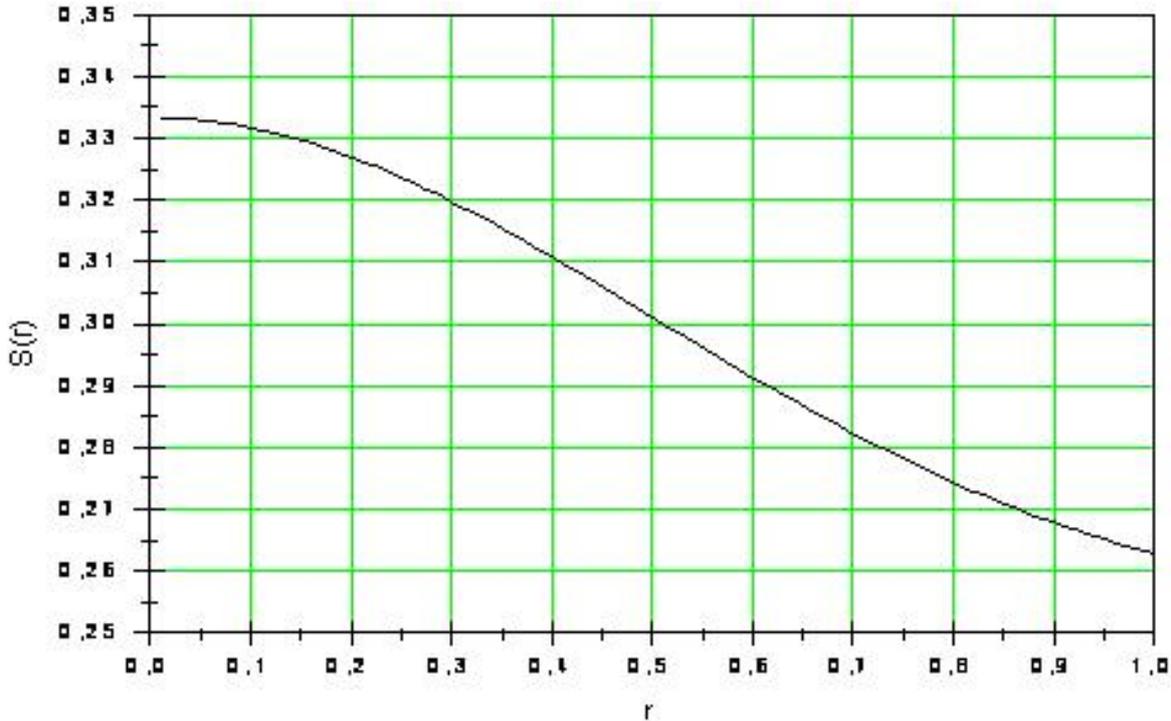


Рис. 1. Вид функции  $S(r)$  при  $a = 1$

Если распределение  $\rho(\mathbf{r}')$  в (9) неравномерно, то монотонного поведения функционала (10) может и не быть. Такая ситуация возникает при анализе движущихся точек. Тогда от статического рассмотрения функционала (10) следует перейти к анализу его динамического изменения, когда плотность  $\rho(\mathbf{r}')$  меняется со временем. С точки зрения практической реализации такой ситуации будем предполагать, что распределение точек со временем меняется согласно кинетическому уравнению (1) относительно ПФР  $f(r, t)$ . Конкретные положения выборочных точек, которые образуют траектории процесса нестационарного случайного блуждания, получаются по формуле (4) на основе решения кинетического уравнения на заданном горизонте. Тогда вместо (9) имеем

$$U(r, t) = \int_V \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'. \quad (13)$$

Точки 1 и 2, связь между которыми изучается с помощью функционала (13), движутся по тому же статистическому закону, что и прочие точки

системы, т.е. в каждый момент времени они случайно перемещаются в пространстве в соответствии с тем, какая конкретная выборочная траектория реализована для моделирования движения двух выбранных точек. Подчеркнем, что уравнение (1) записано относительно ПФР приращений координат, так что модельная траектория  $i$ -й частицы представляет собой траекторию суммарного приращения случайной величины  $x_i(t)$ . Это позволяет задать произвольную случайную траекторию для самого функционала качества  $S$ .

Поскольку выбранная пара точек произвольна, то качество связи между двумя точками определяется средним значением функционала  $S(r,t)$ , где

$$S(r,t) = \frac{\varphi(r)}{NU(r,t)}. \quad (14)$$

Среднее значение величины (14) образует временной ряд:

$$q(t) = \int S(r,t) f(r,t) d^3r. \quad (15)$$

### 3. Уравнение эволюции среднего значения функционала качества

Выведем уравнение эволюции среднего значения функционала качества связи между двумя точками, т.е. величины (15). Из (13-15) имеем

$$N \frac{dq}{dt} = \int \frac{\varphi(r)}{U(r,t)} \frac{\partial f(r,t)}{\partial t} d^3r - \int \frac{\varphi(r)}{U^2(r,t)} \frac{\partial U(r,t)}{\partial t} f(r,t) d^3r. \quad (16)$$

Считая, что на границе области функция распределения обращается в ноль, для производной  $\frac{\partial U}{\partial t}$  получаем после подстановки производной  $\frac{\partial f}{\partial t}$  из уравнения (1), интегрирования по частям и замены возникающей после этого действия производной функции  $\varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  по  $\mathbf{r}'$  на производную по  $\mathbf{r}$  следующее выражение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\lambda}{2} \Delta U + \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \int \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{u}(\mathbf{r}',t) f(\mathbf{r}',t) d^3r'. \quad (17)$$

Это означает, что при нулевой скорости среднее поле меняется во времени таким же образом, как и функция распределения, т.е. согласно уравнению диффузии с тем же коэффициентом, что и в (1). При ненулевой скорости снос функции  $U$  имеет другой знак, чем снос  $f$ .

Далее, первое слагаемое в (16) с использованием (1) преобразуется к виду:

$$\int \frac{\varphi(r)}{U(r,t)} \frac{\partial f(r,t)}{\partial t} d^3r = - \int \frac{\varphi(r)}{U(r,t)} \operatorname{div}(\mathbf{u}f) d^3r + \frac{\lambda}{2} \int \frac{\varphi(r)}{U(r,t)} \Delta f d^3r.$$

После интегрирования по частям получаем:

$$\int \frac{\varphi}{U} \frac{\partial f}{\partial t} d^3r = \int f \cdot \left( \mathbf{u} \nabla + \frac{\lambda}{2} \Delta \right) \left( \frac{\varphi}{U} \right) d^3r.$$

В результате уравнение (16) принимает вид:

$$N \frac{dq}{dt} = \int_V \left( \left( \mathbf{u} \nabla + \frac{\lambda}{2} \Delta \right) \left( \frac{\varphi}{U} \right) - \frac{\varphi}{U^2} \left( \frac{\lambda}{2} \Delta U + \operatorname{div} \mathbf{J} \right) \right) f(r, t) d^3 r. \quad (18)$$

Это уравнение сложным нелинейным образом зависит от функции распределения точек, т.е. от плотности ансамбля их выборочных траекторий. Следовательно, актуальной задачей является численное моделирование статистик, связанных с распределением величин  $S(r, t)$  и  $q(t)$ .

#### 4. Эффекты нестационарности и функционал качества

Рассмотрим следующий статистический эксперимент. Генерируется набор временных рядов, выборочная плотность функции распределения которых в окне длиной  $T=1000$  шагов эволюционирует на горизонте длиной  $T$  от красной кривой на рис. 2 до зеленой. Красная кривая – начальное условие в уравнении (1), а зеленая – то, во что оно перешло через 1000 шагов по времени при некоторых заданных функциях сноса  $u(x, t)$  и диффузии  $\lambda(t)$ . Распределения выбраны близкими по форме, но различающимися по норме сильнее, чем этого можно ожидать для конечных стационарных выборок. Это сделано для того, чтобы выявить эффект нестационарности даже на относительно слабо меняющихся распределениях.

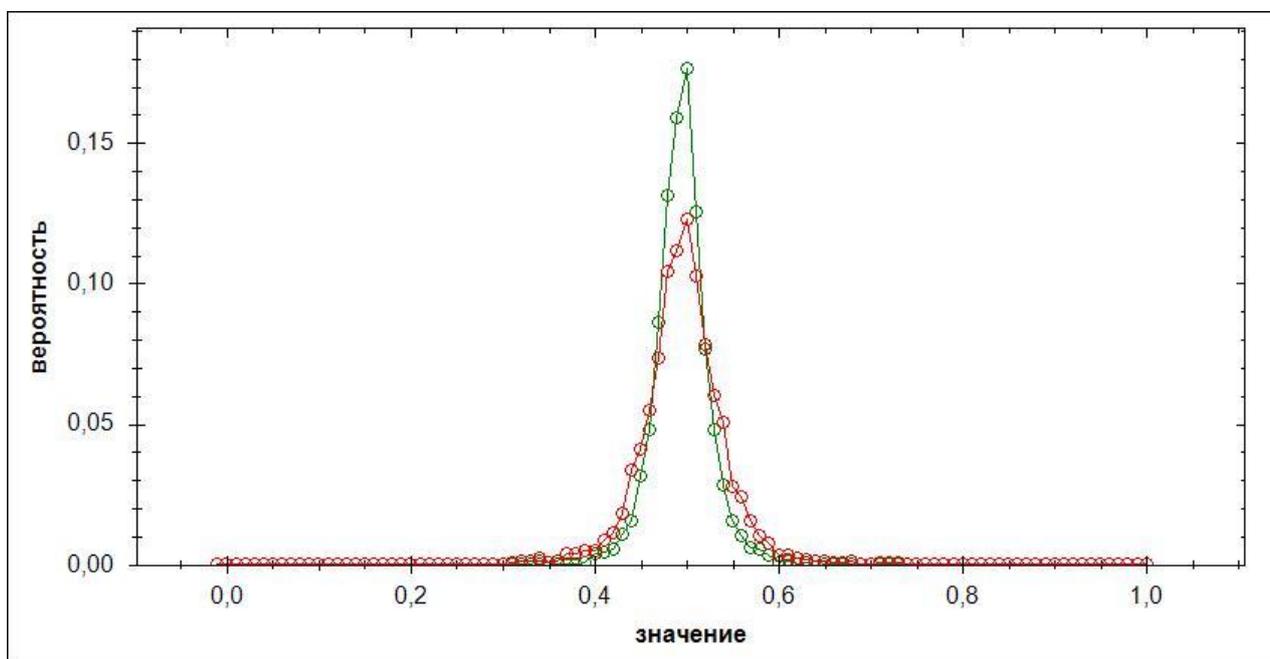


Рис. 2. Начальное и конечное распределения приростов координат, нормированных на  $[0;1]$

В соответствии с методом моделирования случайных траекторий (4) были сгенерированы 1000 выборок по каждому из трех измерений в кубе со стороной 10. На границах куба были поставлены условия идеального отражения. Получившийся пучок траекторий трактовался как траектории точек, для которых вычислялся функционал качества связи. Временной ряд такого

функционала для выбранной пары траекторий в случае функции связи  $\varphi(r) = r^2$  представлен на рис. 3.

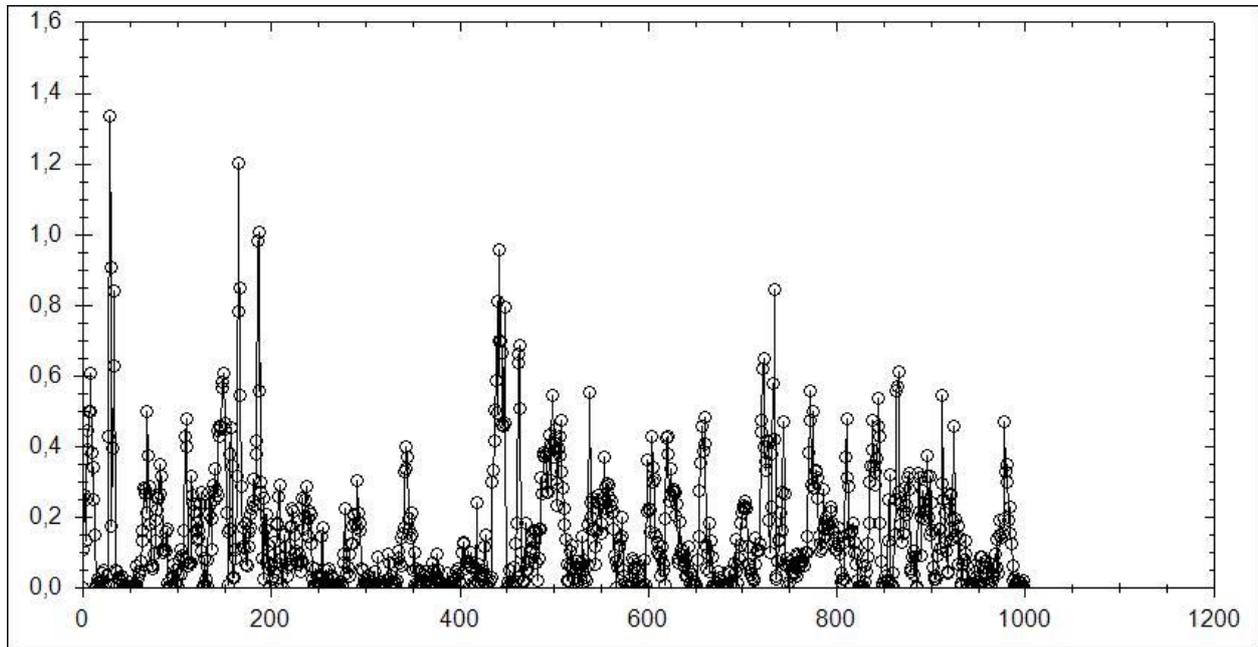


Рис. 3. Временной ряд функционала качества связи для  $\varphi(r) = r^2$

На рис. 4 представлены выборочные ФР соответствующего функционала качества  $S$  для различных значений параметра диффузии.

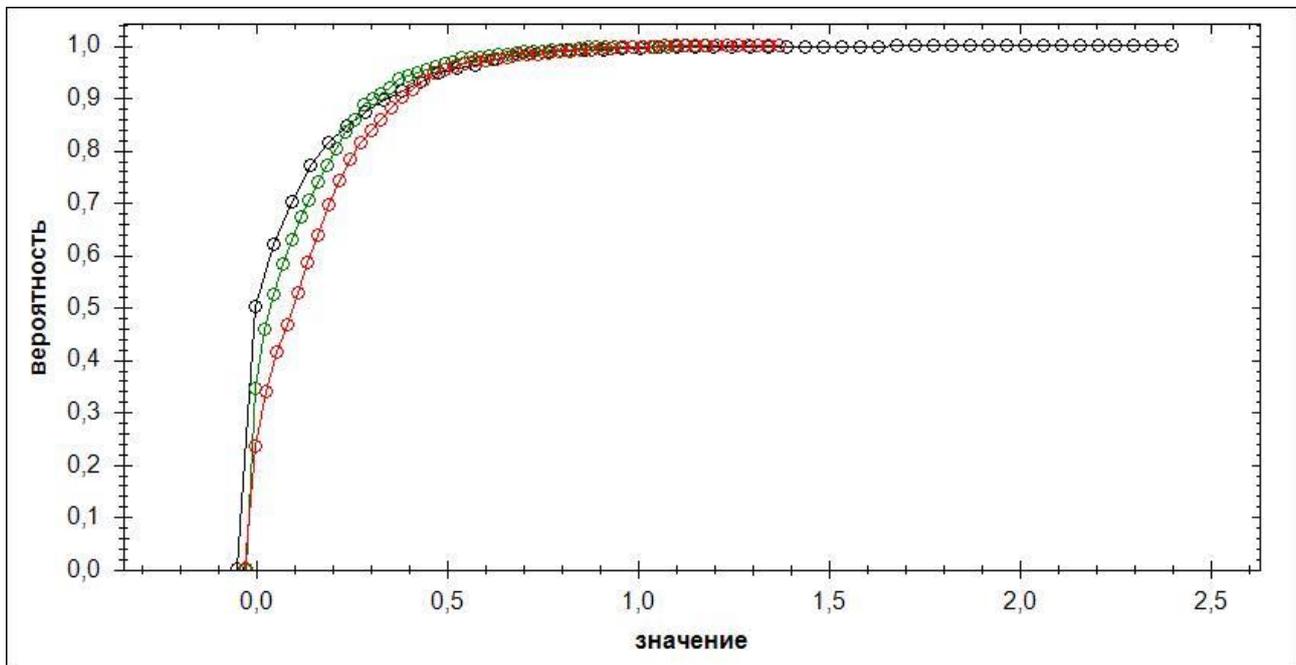


Рис. 4. Распределение функционала  $S(r(t), t)$  в зависимости от параметра диффузии  $\lambda/2$  при нулевой скорости сноса.  
Снизу вверх: 0,25 (красный), 0,5 (зеленый), 1 (синий).

На рис. 4 наблюдается качественно ожидаемый результат: с увеличением коэффициента диффузии траектории расплываются быстрее, так что малые значения функционала качества превалируют над большими. Отдельные траектории могут, конечно, случайно сближаться, но в целом по ансамблю эффект достаточно хорошо заметен.

Иная ситуация с чувствительностью траекторий к вариации скорости сноса. В силу отражения от границ куба зависимость выборочной ФР от величины скорости имеет периодический характер (рис. 5). Величине сноса, отвечающей 0,25 от базового расчета, соответствует красная линия, сносу 0,5 отвечает зеленая линия (доля меньших значений функционала качества возрастает), сносу 0,75 отвечает черная линия (указанная доля уменьшается), базовому единичному сносу отвечает синяя линия (доля вновь возрастает), а сносу 1,25 отвечает оранжевая линия (доля вновь убывает).

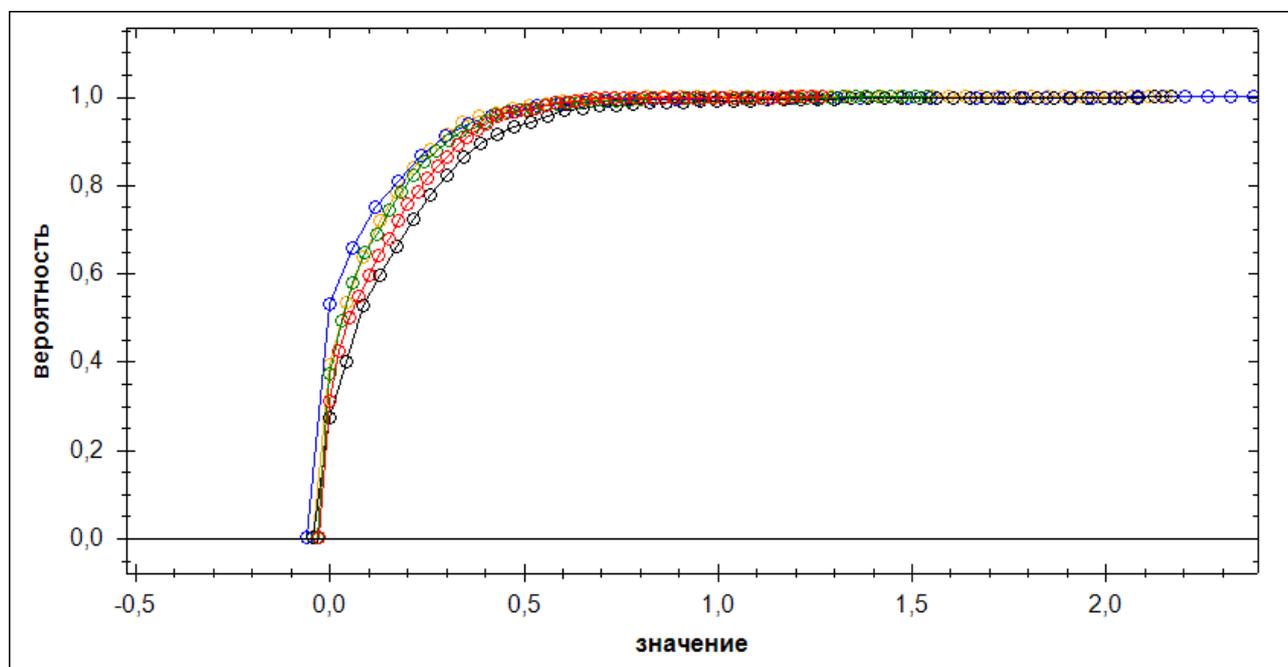


Рис. 5. Распределение функционала  $S(r(t), t)$  в зависимости от параметра сноса при нулевой диффузии

Таким образом, было выяснено, что выборка значений функционала (14) при меняющейся плотности распределения точек в ограниченной области образует нестационарный временной ряд. Выборочные ФР этого ряда явно различаются, если меняются статистические параметры уравнения эволюции плотности точек.

Рассмотрим теперь пример другой функции связи – а именно, функции  $\varphi(r) = 1/(r^2 + a^2)$ ,  $a = 0,02$ . Ненулевой параметр  $a$  в этой формуле отвечает минимальному расстоянию, на которое могут в данной модели сближаться две точки. График функционала качества для этой модели представлен на рис. 6.

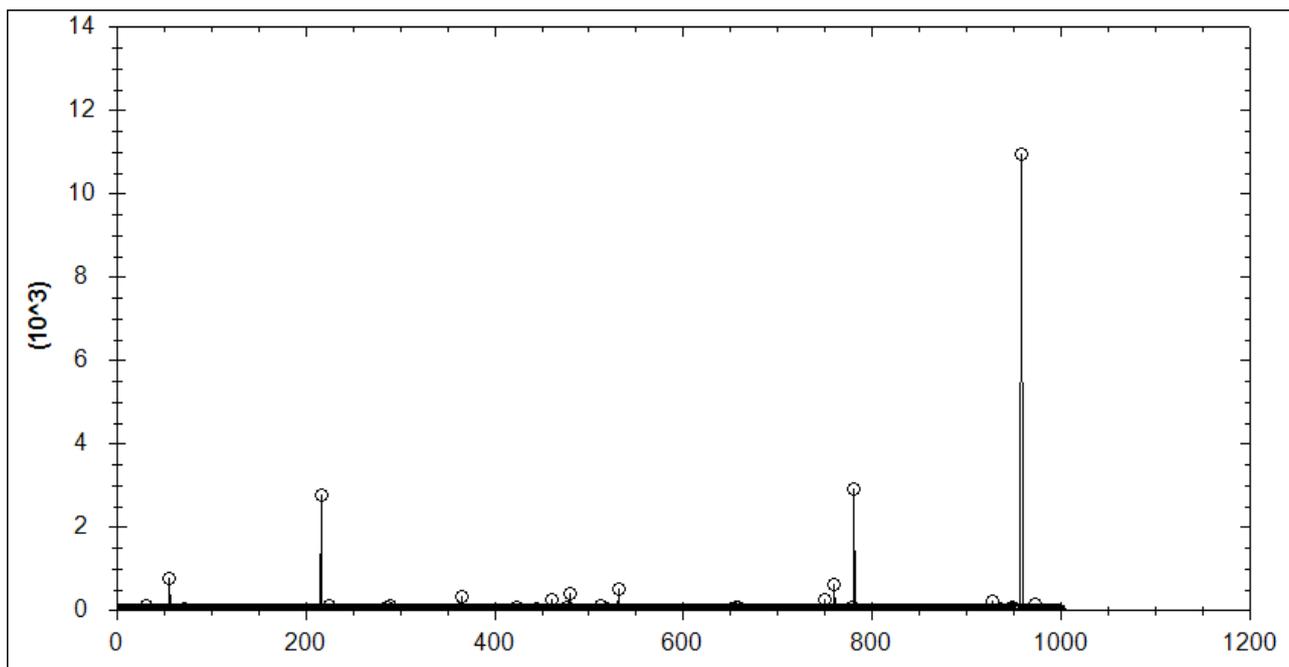


Рис. 6. Временной ряд функционала качества связи для  $\varphi(r) = 1/(r^2 + a^2)$

Видно, что теперь в отличие от рис. 3 существуют достаточно большие, хотя и редкие, значения функционала  $S$ . Примерно 80 % значений принадлежит области  $S < 0,2$ . На рис. 7 показаны распределения при меняющейся диффузии и нулевом сносе. В последний классовой интервал помещены значения, превосходящие величину 0,2, выбранную для удобства визуализации.

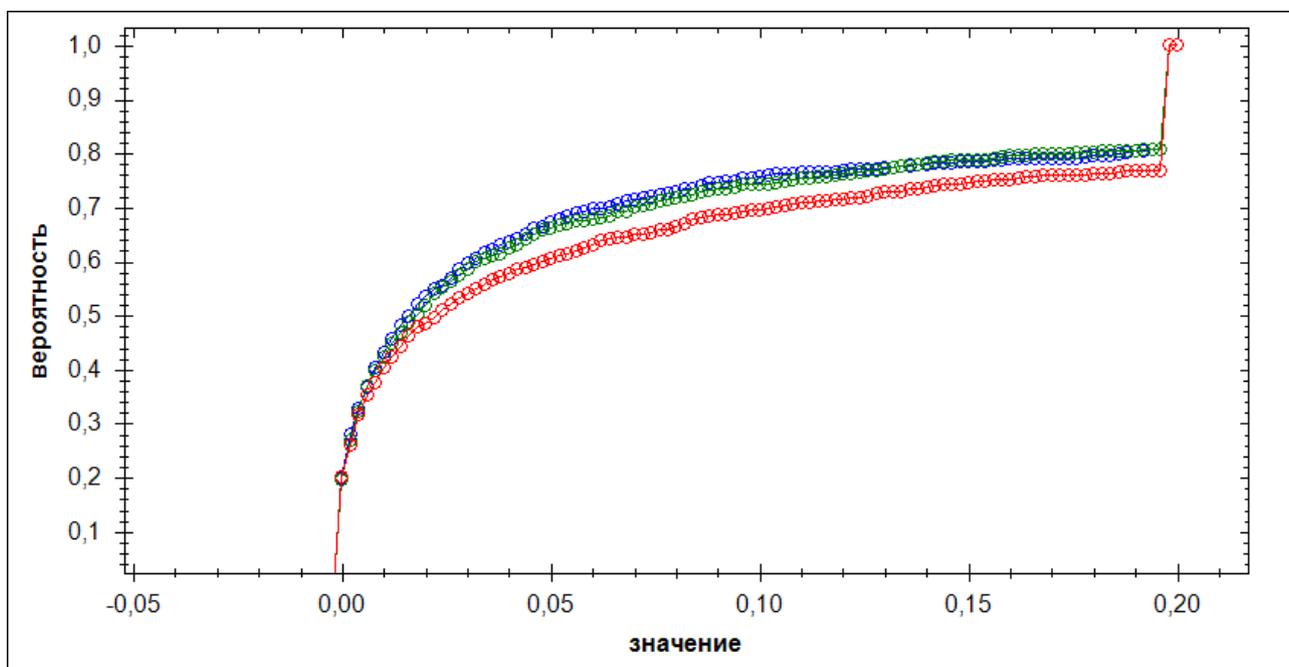


Рис. 7. Распределение функционала  $S(r(t), t)$  в зависимости от параметра диффузии  $\lambda/2$  при нулевой скорости сноса. Снизу вверх: 0,25 (красный), 0,5 (зеленый), 1 (синий).

Как и в примере на рис. 4, здесь на рис. 7 с увеличением параметра  $\lambda$  в уравнении (1) выборочная ФР функционала качества (14) сдвигается вверх, что означает сдвиг в область меньших значений  $S$ .

Аналогия с рис. 5 наблюдается и при вариации скорости сноса. Как и в примере выше, для функции связи  $\varphi(r) = 1/(r^2 + a^2)$  наблюдается периодическая зависимость выборочной ФР от величины скорости (рис. 8). Величине сноса, отвечающей 0,25 от базового расчета, соответствует красная линия. Величине сноса 0,5 отвечает зеленая линия, расположенная выше красной линии, что показывает, что доля меньших значений функционала качества возрастает. Сносу 0,75 отвечает черная линия (указанная доля уменьшается), базовому единичному сносу отвечает синяя линия (доля вновь возрастает), а сносу 1,25 отвечает оранжевая линия (доля вновь убывает).

Подчеркнем, что для другой геометрии области зависимость ФР от скорости сноса будет отличаться от приведенной в данной работе.

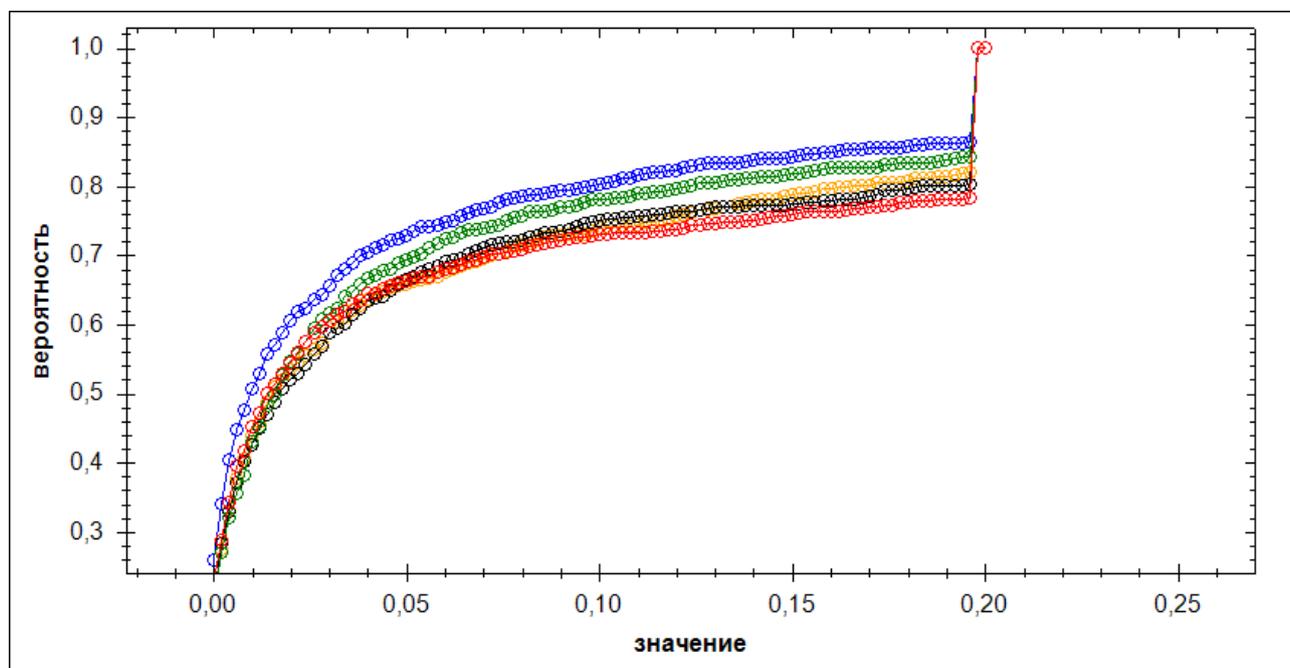


Рис. 8. Распределение функционала  $S(r(t), t)$  в зависимости от параметра сноса при нулевой диффузии

Таким образом, проведенный численный анализ показал, что моделирование нестационарного ряда приводит к принципиально другим распределениям функционалов, заданных вдоль траекторий случайного процесса, чем при стационарном рассмотрении ситуации. Это означает, что нестационарный вариант моделирования случайных выборок по методу, аналогичному Монте-Карло, имеет практическую актуальность и может применяться к широкому кругу задач как в физико-технических областях, так и в социально-экономических сферах.

### Литература

1. Босов А.Д., Кальметьев Р.Ш., Орлов Ю.Н. Моделирование нестационарного временного ряда с заданными свойствами выборочного распределения // Математическое моделирование, 2014. – № 3. С. 97-107.
2. Орлов Ю.Н., Федоров С.Л. Генерация нестационарных траекторий временного ряда на основе уравнения Фоккера-Планка // Труды МФТИ, 2016. – Т. 8. № 2. С. 126-133.
3. Орлов Ю.Н. Кинетические методы исследования нестационарных временных рядов. – М.: МФТИ, 2014.
4. Ключкова Л.В., Орлов Ю.Н., Федоров С.Л. Моделирование ансамбля нестационарных траекторий с помощью уравнения Фоккера-Планка // Журнал Средневолжского математического общества, 2016. – Т.18. № 1.
5. Орлов Ю.Н., Федоров С.Л. Методы численного моделирования процессов нестационарного случайного блуждания. – М.: МФТИ, 2016. – 112 с.
6. Hesham ElSawy, Ekram Hossain, Mohamed-Slim Alouini Analytical Modeling of Mode Selection and Power Control for Underlay D2D Communication in Cellular Networks // IEEE Ieee Transactions on Communications, Vol. 62, No. 11. – 2014, pp.4147-4161.
7. A. Samuylov, A. Ometov, V. Begishev, R. Kovalchukov, D. Moltchanov, Yu. Gaidamaka, K. Samouylov, S. Andreev and Ye. Koucheryavy, “Analytical Performance Estimation of Network-Assisted D2D Communications in Urban Scenarios with Rectangular Cells,” in Transactions on Emerging Telecommunications Technologies (John Wiley & Sons, 2015), preprint DOI: 10.1002/ett.2999 (2015).
8. Yu. Orlov, S. Fedorov, A. Samuylov, Yu. Gaidamaka, D. Molchanov. Simulation of Devices Mobility to Estimate Wireless Channel Quality Metrics in 5G Network // Proc. ICNAAM, September 19-25, 2016, Rhodes, Greece.