



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 105 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Бахвалов П.А.**

Численная оценка порядка  
точности рёберно-  
ориентированных схем для  
уравнения переноса на  
сетках специального вида

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Бахвалов П.А. Численная оценка порядка точности рёберно-ориентированных схем для уравнения переноса на сетках специального вида // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 105. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2016-105](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-105)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-105>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**П. А. Бахвалов**

**Численная оценка порядка точности  
рёберно-ориентированных схем  
для уравнения переноса  
на сетках специального вида**

**Москва — 2016**

**Бахвалов П. А.**

**Численная оценка порядка точности рёберно-ориентированных схем для уравнения переноса на сетках специального вида**

Для уравнения переноса исследуется точность схем с рёберно-ориентированной реконструкцией переменных на сетках специальной структуры. Показывается, что использование разных стратегий измельчения сеток даже при сохранении качества элементов может приводить к разным величинам порядка точности.

**Ключевые слова:** EBR-схема, неструктурированная сетка

***Pavel Alexeevich Bakhvalov***

**Numerical estimation of accuracy order for transport equation on meshes of special structure**

For transport equation we investigate accuracy of EBR schemes on meshes with special structure. We show that different mesh refining strategies result in different order of accuracy despite quality of all mesh elements being constant.

**Key words:** EBR scheme, unstructured mesh

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 16-31-60072.

## **Оглавление**

Введение .....	3
Исследуемые численные методы.....	4
Постановка задачи.....	5
О точности на неструктурированных сетках.....	7
Тестирование.....	8
Заключение.....	31
Литература .....	31

## Введение

Схемы с рёберно-ориентированной реконструкцией переменных (Edge-Based Reconstruction schemes, EBR) [1] являются одним из классов схем для решения гиперболических систем уравнений на неструктурированных сетках, подразумевающим определение сеточных функций в узлах. Их достоинством является вырождение в конечные разности очень высокого (3-го или 5-го) порядка на трансляционно-симметрических сетках и сравнительно низкая вычислительная стоимость.

Прародителем EBR-схем является схема с линейной реконструкцией переменных Т. Barth [2], которая, в свою очередь, есть обобщение схемы Колгана – ван Лира [3][4] на неструктурированную сетку. Т. Barth называл свою схему противоточковой схемой повышенного порядка точности («higher order accurate upwind scheme»). Мы будем называть её линейной схемой, понимая под этим линейное восполнение функции при вычислении потока.

Линейная схема точна на линейной функции, то есть обладает первым порядком аппроксимации. Теоретический анализ точности линейной схемы на неструктурированной сетке нигде не проводился. В численных экспериментах линейная схема обычно показывает численный порядок, близкий к двум (см., например, [5], [6]), она часто называется схемой 2-го порядка [7]. То, что употребляемое название и действительный порядок численного метода иногда расходятся, уже отмечалось в [8].

Нестационарный метод коррекции потоков (схема UFC) [9] также основан на линейной схеме, то есть является рёберно-ориентированной схемой. Он характеризуется третьим порядком аппроксимации на трансляционно-симметрической сетке и третьим порядком точности на неструктурированной сетке для стационарных задач. В этом смысле схема UFC представляет собой гибрид схемы EBR<sup>3</sup><sup>1</sup> и метода коррекции потоков [6].

Как и линейная схема, схемы класса EBR<sup>2</sup> и схема UFC также обладают лишь точностью на линейной функции<sup>3</sup>, то есть первым порядком аппроксимации в максимальной норме. Несмотря на это, они обеспечивают пониженную численную ошибку по сравнению как с линейной схемой, так и со стационарным методом коррекции потоков. Порядок точности на неструктурированных сетках по EBR-схемам, оцениваемый в численном эксперименте, как правило, варьируется между 2 и 3 [1][9] и зависит от выбора конкретной схемы и мелкости сетки. Например, для схемы EBR<sup>3</sup> в [9] было показано, что он близок к трём на достаточно грубых сетках, но при измельчении понижается до 2.

---

<sup>1</sup> Под схемой EBR<sub>n</sub> понимаются схемы класса EBR, обладающие n-м порядком аппроксимации на трансляционно-симметрической сетке. Точное определение этих схем дано в [1].

<sup>2</sup> В этой работе будем рассматривать только EBR-схемы, построенные с использованием барицентрических ячеек. В противном случае утверждение о точности на линейной функции несправедливо.

<sup>3</sup> Стационарный метод коррекции потоков [6][7] обладает точностью на квадратичной функции.

В недавних исследованиях (в частности, [5]) нами было обнаружено, что при дальнейшем измельчении сетки численный порядок точности систематически падает ниже двух. Этот же эффект можно заметить и в работах других авторов [6]. Полученный результат побудил нас к дальнейшему исследованию точности рёберно-ориентированных схем на неструктурированных сетках.

В настоящей работе приведён пример задачи и последовательности расчётных сеток, на которых рассматриваемые схемы — линейная, EBR3, EBR5 и UFC — имеют порядок точности выше единицы, но ниже двух.

## Исследуемые численные методы

В настоящей работе мы будем решать одномерное уравнение переноса в двумерной постановке:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t \in (0, \infty), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Все исследуемые в настоящей работе численные методы представляют собой консервативные вершинно-центрированные схемы. Для уравнения переноса (1) их можно записать в общем виде

$$\left( \frac{du}{dt} \right)_i + \frac{1}{v_i} \sum_{j \in N_1(i)} n_{ij}^x f_{ij} = 0,$$

где  $N_1(i)$  — множество узлов, соединённых ребром с узлом  $i$ , не включая сам узел  $i$ ;  $\mathbf{n}_{ij}$  — ориентированная площадь, ассоциированная с ребром  $ij$ , построенная на основе барицентрических ячеек (см. [2] или [5]) и направленная к направлению узла  $j$ ; индекс  $x$  определяет её  $x$ -компоненту;  $v_i$  — величина объёма барицентрической ячейки узла  $i$ ;  $f_{ij}$  — поток, определённый на ребре  $ij$ . Консервативность обеспечивается условиями  $f_{ij} = f_{ji}$ ,  $\mathbf{n}_{ij} = -\mathbf{n}_{ji}$ . Способ определения потока  $f_{ij}$  определяет конкретную разностную схему. Поскольку в настоящей работе рассматриваются только задачи с периодическими граничными условиями, мы не будем говорить о граничных условиях в описании схем.

Линейная схема была предложена в работе [2]. В ней при  $n_{ij}^x > 0$  поток  $f_{ij}$  интерполируется в центры рёбер по формуле

$$f_{ij} = u_i + \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{2} \cdot (\nabla u)_i, \quad (\nabla u)_i = \frac{1}{v_i} \sum_{j \in N_1(i)} \mathbf{n}_{ij} u_j.$$

Здесь  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор узла  $i$ . При  $n_{ij}^x < 0$  формулы остаются теми же с заменой  $i$  на  $j$  и наоборот.

Идея схем с реконструкцией вдоль направления ребра (EBR) заключается в том, чтобы использовать для интерполяции в центр ребра  $ij$  значения в узлах  $i$  и  $j$ , а также значения, интерполированные на содержащую это ребро прямую.

Впервые эта идея была предложена в 1987 году [10], то есть ещё за 4 года до линейной схемы Т. Barth, однако из-за неудачного выбора точек на продолжении рёбер не получила быстрого развития. Этот недостаток был устранён в [11]. Для схемы EBR5 используются не одно, а три дополнительных интерполированных значения, что позволяет достичь 5-го порядка аппроксимации на равномерной сетке. Подробно этот алгоритм описан в [1].

Нестационарный метод коррекции потоков (UFC) заключается в следующем. Вначале в каждом узле некоторым образом вычисляется градиент со вторым порядком точности. Затем, как и в линейной схеме, он используется для линейной реконструкции функции в центр ребра. Такая аппроксимация конвективного члена точна на квадратичной функции на произвольной неструктурированной сетке и показывает 3-й порядок точности в стационарном случае. Эта схема была разработана в [6],[5]. Однако в стационарном случае порядок равен двум, причём даже на равномерной решётчатой сетке. Для исправления этого недостатка уже готовая аппроксимация конвективного оператора усредняется по соседним узлам с заранее известными весами. В результате в нестационарном случае схема теряет точность на квадратичной функции, однако приобретает третий порядок на равномерной сетке и в целом улучшает точность. Подробнее эта схема описана в [9].

Интегрирование по времени во всех расчётах будет проводиться с использованием линейной схемы Рунге-Кутты 3-го порядка при числе Куранта 0.5.

## Постановка задачи

Рассмотрим уравнение переноса (1) с гладкими начальными данными

$$u(0, x) = \exp\left(-\ln(2)\left(\frac{x - x_0}{b}\right)^2\right).$$

Полуширину гауссиана зададим равным  $b=6$ , а центр начального возмущения  $x_0$  поместим в середину расчётной области. Результатом расчёта будут максимальная и интегральные нормы разности сеточной функции и значений точного решения в сеточных узлах на момент времени  $t = 1$ :

$$e_\infty(t) = \max_i |u_i(t) - u(t, x_i)|, \quad e_p(t) = \left(\sum_i |u_i(t) - u(t, x_i)|^p v_i\right)^{1/p} / \left(\sum_i v_i\right)^{1/p}.$$

Расчёт будем проводить на сетках, полученных следующим образом. Возьмём равномерную сетку из равнобедренных прямоугольных треугольников, катеты которых направлены вдоль осей координат и имеют длину  $h$ . Размер области по горизонтали положим равным 100; а число слоёв по вертикали обозначим за  $N_1$ . К горизонтальной границе этой сетки присоединим сетку из правильных треугольников с длиной ребра  $h$ , и число её слоёв по вертикали обозначим за  $2N_2$ . На всех границах зададим периодические граничные условия (для этого число слоёв по вертикали у области, покрытой

правильными треугольниками, сделано чётным). Таким образом, период сетки по горизонтали равен 100, а по вертикали —  $(N_1 + \sqrt{3}N_2)h$ . Будем называть такие сетки сетками I типа. Фрагмент такой сетки с  $N_1 = 3$  и  $N_2 = 1$  представлен на рис. 1.

Также будет проведена серия расчётов на другой последовательности сеток (II типа), характерный фрагмент которых представлен на рис. 2. Сетка состоит из  $(2N + 1)$  слоёв правильных треугольников с ребром  $h$  (и высотой  $h\sqrt{3}/2$ ) и одного слоя специальной структуры с высотой  $f_3 h\sqrt{3}/2$ , один пространственный период которого изображён на рис. 3. При  $f_3 = f_1 + f_2$  (определения  $f_1$  и  $f_2$  см. на рис. 3) сетка получается симметричной относительно прямой  $y = f_3/2$ .

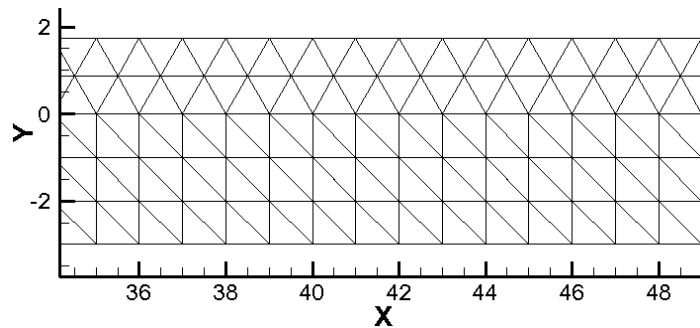


Рис. 1. Фрагмент расчётной сетки I типа при  $N_1 = 3$  и  $N_2 = 1$

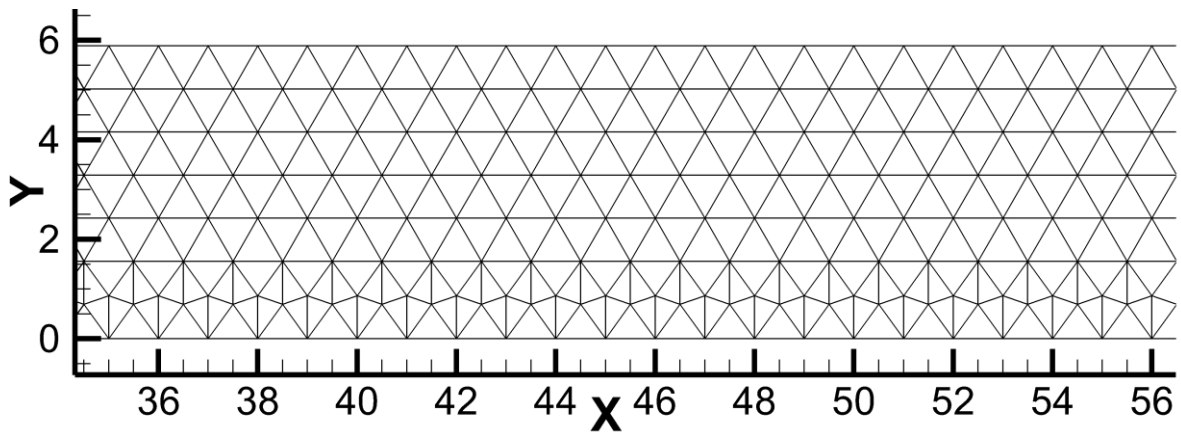


Рис. 2. Расчётная сетка II типа,  $N=2, f_1 = 0.8, f_2 = 1, f_3 = 1.8$

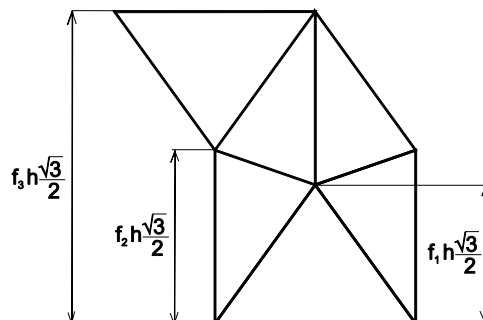


Рис. 3. Группа элементов расчётной сетки II типа,  $f_1 = 0.8, f_2 = 1, f_3 = 1.8$

## О точности на неструктурированных сетках

Говоря о точности разностных схем на неструктурированных сетках, в первую очередь отметим, что одного универсального определения порядка точности не существует. В большинстве работ, посвящённых исследованию точности, доказываются оценки вида

$$\|u_h - \Pi u\| \leq O(h^\delta) \quad (1)$$

при  $h \rightarrow 0$ , где  $u$  — точное решение дифференциальной задачи,  $u_h$  — численное решение, полученное в результате расчёта по разностной схеме,  $\| \cdot \|$  — некоторая норма,  $\Pi$  — некоторый оператор, сопоставляющий точному решению сеточную функцию,  $h$  — некоторый параметр, называемый шагом сетки. Эти оценки доказываются для решений  $u$ , принадлежащих некоторому пространству.

На последовательность сеток также накладываются дополнительные условия. Если допустить быстрое стремление максимального угла треугольника к  $\pi$ , то большинство численных схем потеряют сходимость к точному решению. Поэтому, например, в [12] предполагается, что объёмы ячеек  $v$  удовлетворяют условию  $mh^2 < v < Mh^2$  (для двумерного случая), где  $m$  и  $M$  — некоторые константы, не зависящие от  $h$ . В [8] для гибридной сетки сделано дополнительное предположение, что количество соседей у каждого сеточного элемента ограничено сверху.

Также в [8] было введено понятие *однородного измельчения* треугольной сетки. Оно заключается в том, что для измельчения сетки вдвое по линейному размеру треугольник разбивается на четыре равные части. Было показано, что при однородном измельчении сетки простейшая конечно-объёмная схема обладает первым порядком точности в максимальной норме для гладких решений, тогда как при произвольном измельчении сетки, удовлетворяющем условию  $mh^2 < v < Mh^2$ , порядок точности в максимальной норме может падать до  $1/2$ .

В настоящей работе мы ограничиваемся сетками определённой структуры, ввиду чего мы не будем оценивать сходимость при произвольном измельчении сетки. Экспериментальные оценки сходимости рассматриваемых схем на неструктурированных сетках можно найти в других работах [5],[1],[9]. Но на используемых нами сетках мы рассмотрим различные стратегии измельчения.

На рис. 4 приведён пример двух стратегий измельчения для сеток I типа. Слева представлена исходная треугольная сетка, по центру и справа — два варианта измельчённых сеток. Во всех трёх сетках предполагается периодичность по  $Y$ . Сетка в середине получена путём однородного измельчения исходной. Этот же результат можно получить, если при уменьшении  $h$  (рассматриваем только случай  $h = 2^{-m}$ ) изменять количество слоёв прямоугольных и правильных треугольников как  $N_1 = O(1/h)$ ,  $N_2 = O(1/h)$ .



Другая стратегия изображена на рис. 4 справа. В этом случае для получения сетки с шагом  $h/2$  мы масштабируем исходную расчётную сетку в два раза по линейному размеру и, пользуясь совпадением сетки на противоположных границах, дублируем масштабированную сетку четыре раза, чтобы сохранить размеры расчётной области. Этот же результат можно получить, если при уменьшении  $h$  сохранить число слоёв прямоугольных и правильных треугольников:  $N_1 = O(1)$ ,  $N_2 = O(1)$ .

Отметим, что однородное измельчение может быть использовано для любой сетки, а вторая стратегия измельчения — для любой периодической сетки. В частности, обе эти стратегии могут быть применены к сетке II типа.

Также отметим, что обе стратегии не ухудшают качества сетки.

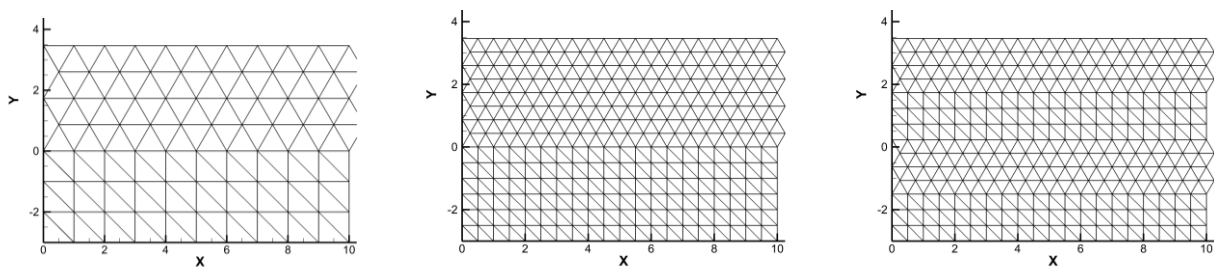


Рис. 4. Треугольная сетка и две стратегии её измельчения

## Тестирование

Рассмотрим набор сеток I типа с шагом  $h = 2^{-m}$ ,  $m = 0..12$ , при разных значениях параметра  $N_1$  и  $N_2$ . Из этого набора можно сформировать разные последовательности. Обозначим сетку с параметрами  $h$ ,  $N_1$  и  $N_2$  символом  $[h, N_1, N_2]$ . Мы рассмотрим три вида последовательностей сеток:

- 1) последовательность  $\{[2^{-m}, 2^m, 2^m], m \geq 0\}$ , получаемая путём однородного измельчения сетки  $[1, 1, 1]$ ;
- 2) последовательности вида  $\{[2^{-m}, 1, 2^m], m \geq 0\}$ , в которых сетки содержат 1 слой прямоугольных треугольников и  $2^{m+1}$  слоёв правильных треугольников;
- 3) последовательности вида  $\{[2^{-m}, N_1, N_2], m \geq 0\}$ , получаемые путём применения второй стратегии измельчения к сетке  $[1, N_1, N_2]$ .

Начнём с рассмотрения поведения схем при однородном измельчении. На рис. 5–8 приведены графики сходимости решения к точному. На рис. 5 приводятся результаты расчётов по линейной схеме, на рис. 6 — по схеме EBR3, на рис. 7 — по схеме EBR5, на рис. 8 — по схеме UFC. Каждая линия соответствует своей норме:  $L_\infty$ ,  $L_2$  и  $L_1$ . График приведён в двойном логарифмическом масштабе. Видно, что для линейной схемы численный порядок близок к двум в нормах  $L_2$  и  $L_1$ , а в норме  $L_\infty$  он не похож на целое число и лежит между 1 и 2. Для остальных рассматриваемых схем порядок близок к двум в  $L_1$ , тогда как в  $L_2$  и  $L_\infty$  он меньше двух.

Теперь рассмотрим последовательность сеток  $\{[2^{-m}, 1, 2^m], m \geq 0\}$ . То есть зафиксируем  $N_1 = 1$  (во всех сетках будет ровно один слой прямоугольных треугольников) и будем держать постоянной ширину слоя из правильных треугольников. Соответствующие результаты приведены на рис. 9–12. Результаты в целом похожи на полученные при однородном измельчении. Там, где порядок не равен двум, можно заметить, что он оказывается немного больше, чем при однородном измельчении.

Наконец, рассмотрим последовательности сеток с фиксированным числом слоёв  $N_1$  и  $N_2$ . Ввиду большого многообразия возможных вариантов, рассмотрим случаи  $N_1 = N_2$  и  $N_1 = 1$ . Численная ошибка по рассматриваемым схемам в нормах  $L_\infty$  и  $L_1$  приведена на рис. 13–16 для «линейной» схемы, на рис. 17–20 – для схемы EBR3, на рис. 21–24 – для схемы EBR5 и на рис. 25–26 – для схемы UFC. Для каждой схемы приведены 4 рисунка: первые два соответствуют последовательностям вида  $\{[2^{-m}, n, n], m \geq 0, n = 1..8\}$ , а вторые два — последовательностям вида  $\{[2^{-m}, 1, n], m \geq 0, n = 1..8\}$ . В каждой паре первый рисунок соответствует норме  $L_\infty$ , второй — в норме  $L_1$ . Каждый рисунок состоит из двух графиков. По горизонтали в логарифмическом масштабе отложен шаг сетки. По вертикали на верхнем графике в логарифмическом масштабе отложена ошибка в соответствующей норме, а на нижнем — ошибка, делённая на  $h^2$ . Последнее позволяет лучше увидеть отклонение сходимости от второго порядка. Разные цвета маркеров соответствуют разным числам  $n$ , толстая чёрная линия соответствует  $n = 2^m$ .

На рисунках 13–28 можно наблюдать следующие феномены:

1) при фиксированных числах  $N_1$  и  $N_2$  график ошибки во всех нормах выходит на второй порядок. Но чем больше число слоёв, тем меньший шаг сетки  $h = w(N_1, N_2)$  нужно брать, чтобы увидеть асимптотику;

2) начиная с некоторого числа  $N_1 = m$  ошибка перестаёт зависеть от  $N_1$  при фиксированном шаге  $h$ ;

3) при выполнении условия  $N_1 > m$  численный порядок ошибки меньше двух и относительно стабилен, хотя и немного «плывёт» при измельчении сетки;

4) хотя схемы EBR3, EBR5 и UFC призваны улучшить точность по сравнению с линейной схемой, в рассмотренном примере на достаточно подробной сетке в максимальной норме они дают ошибку до 30 раз большую, чем линейная схема.

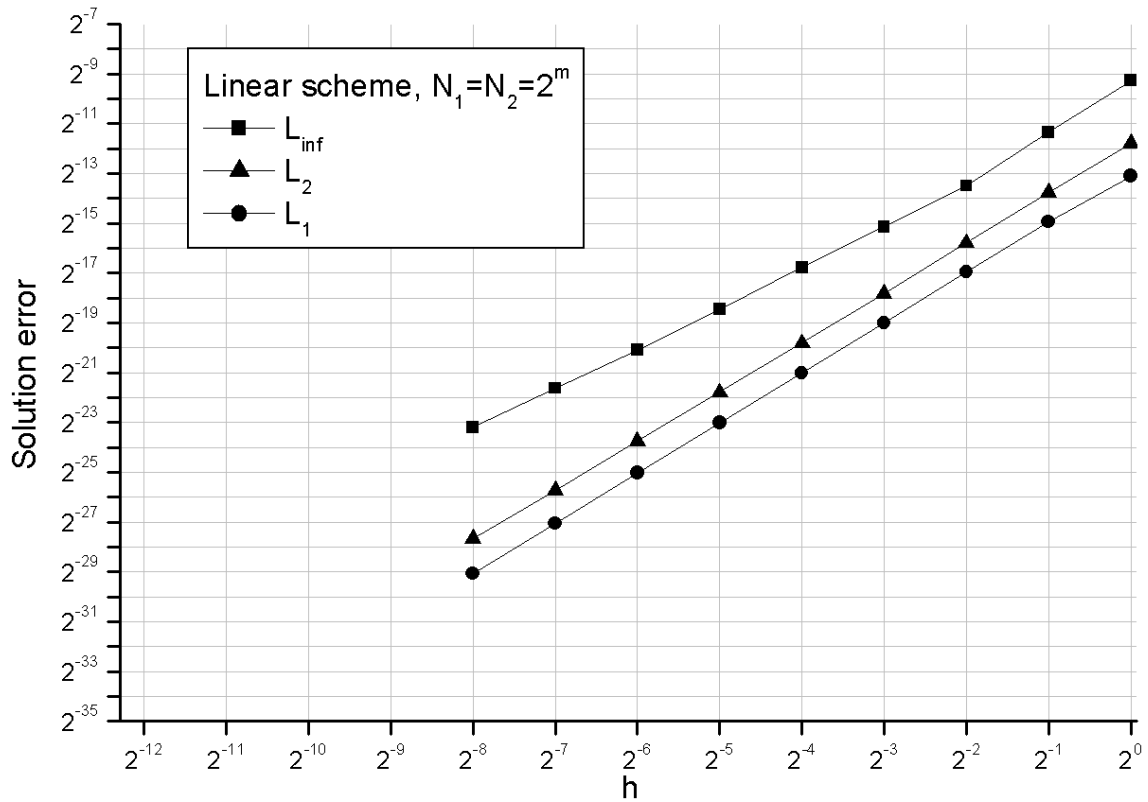


Рис. 5. Сходимость линейной схемы при однородном измельчении

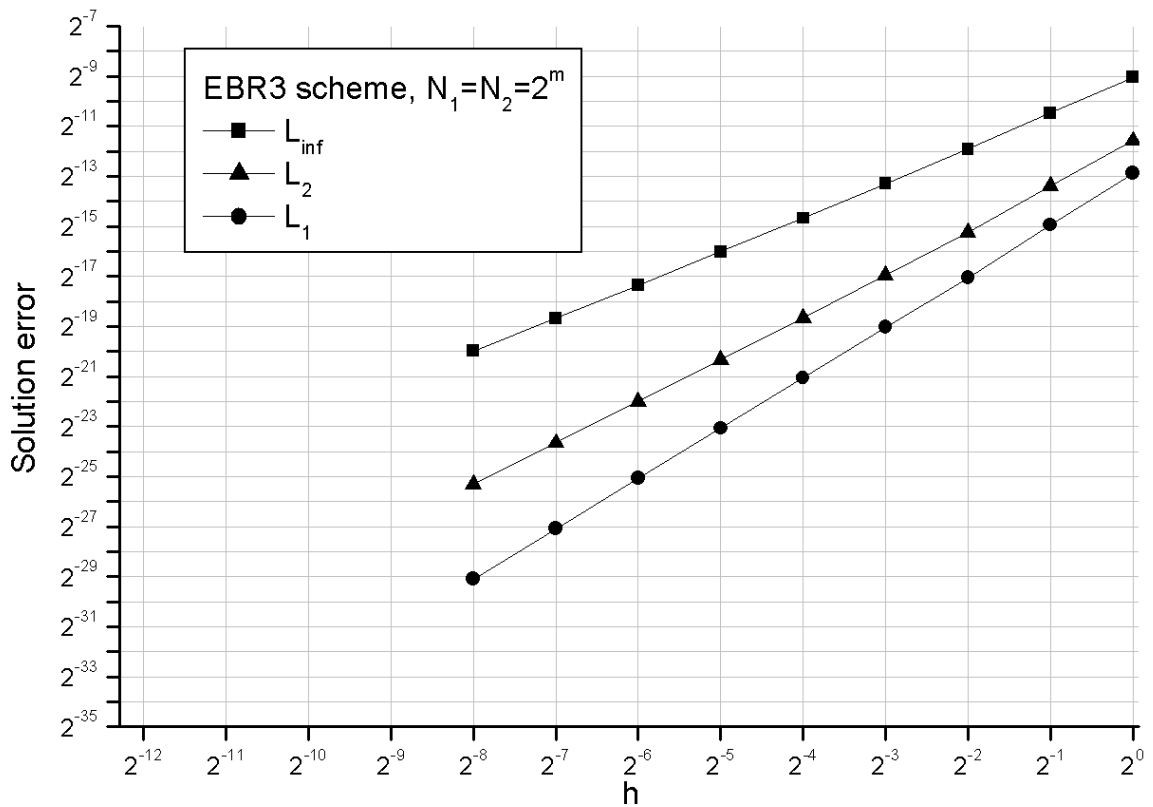


Рис. 6. Сходимость схемы EBR3 при однородном измельчении

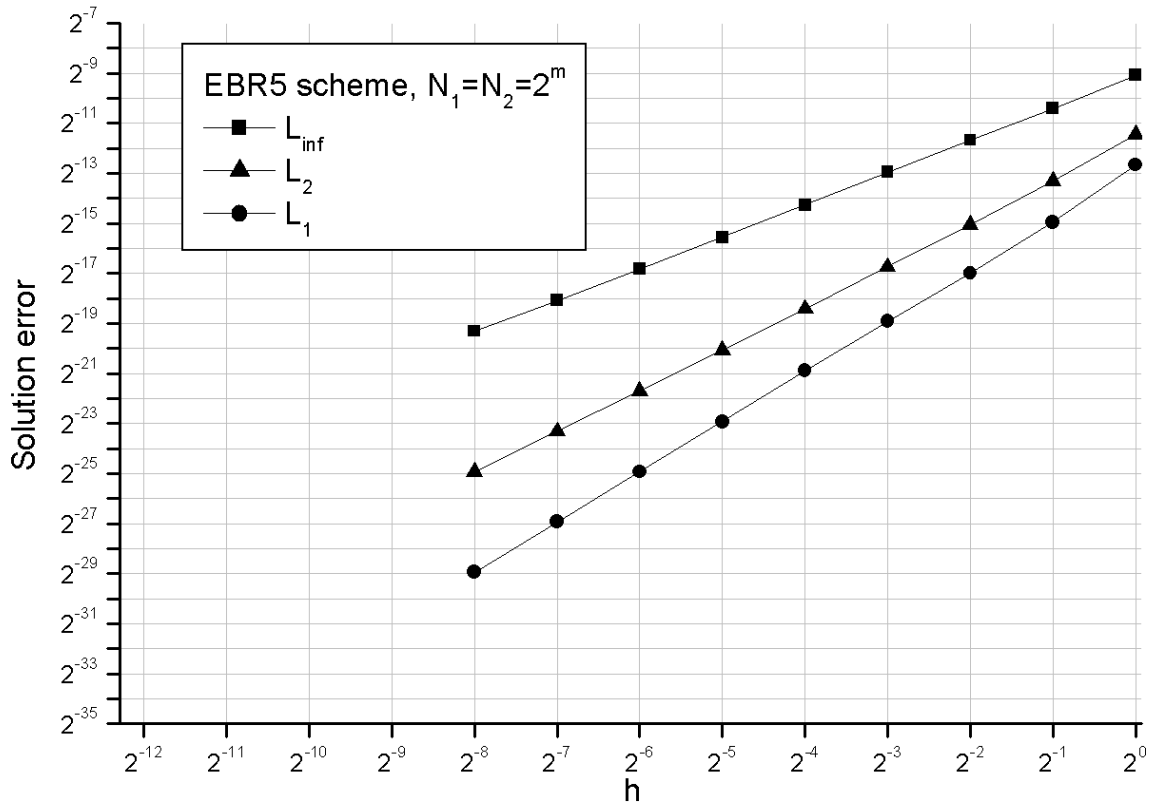


Рис. 7. Сходимость схемы EBR5 при однородном измельчении

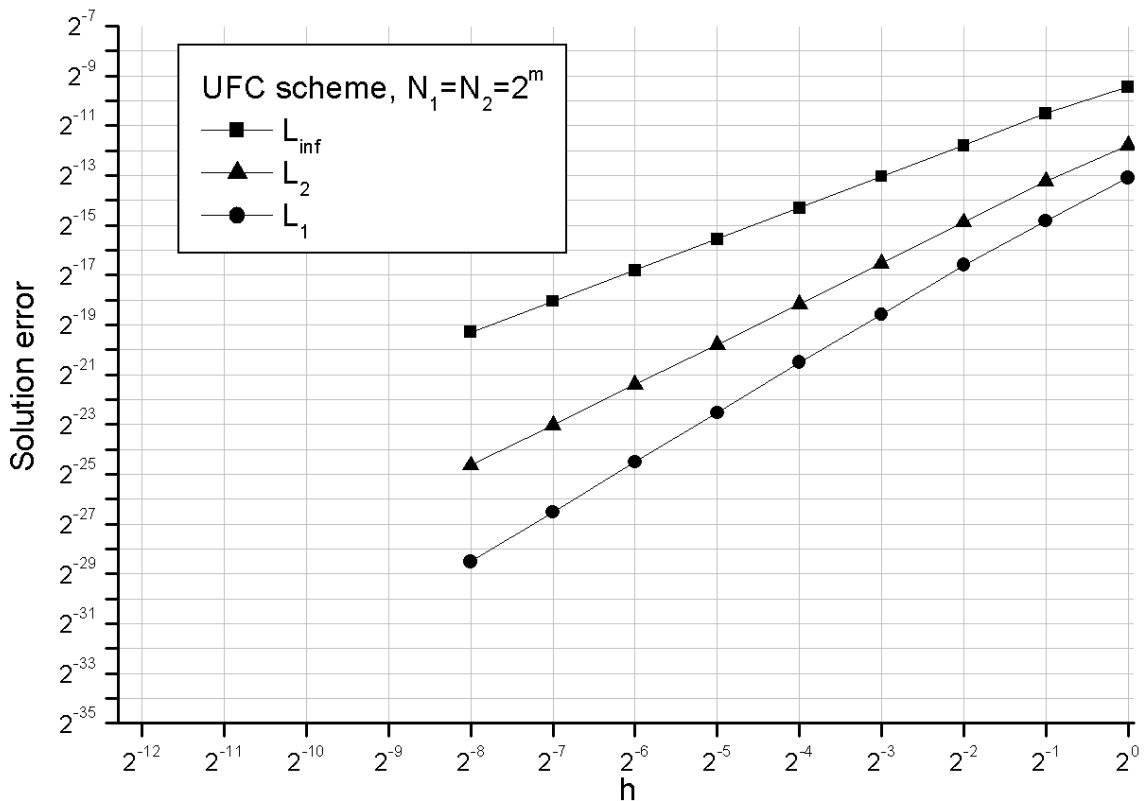


Рис. 8. Сходимость схемы UFC при однородном измельчении

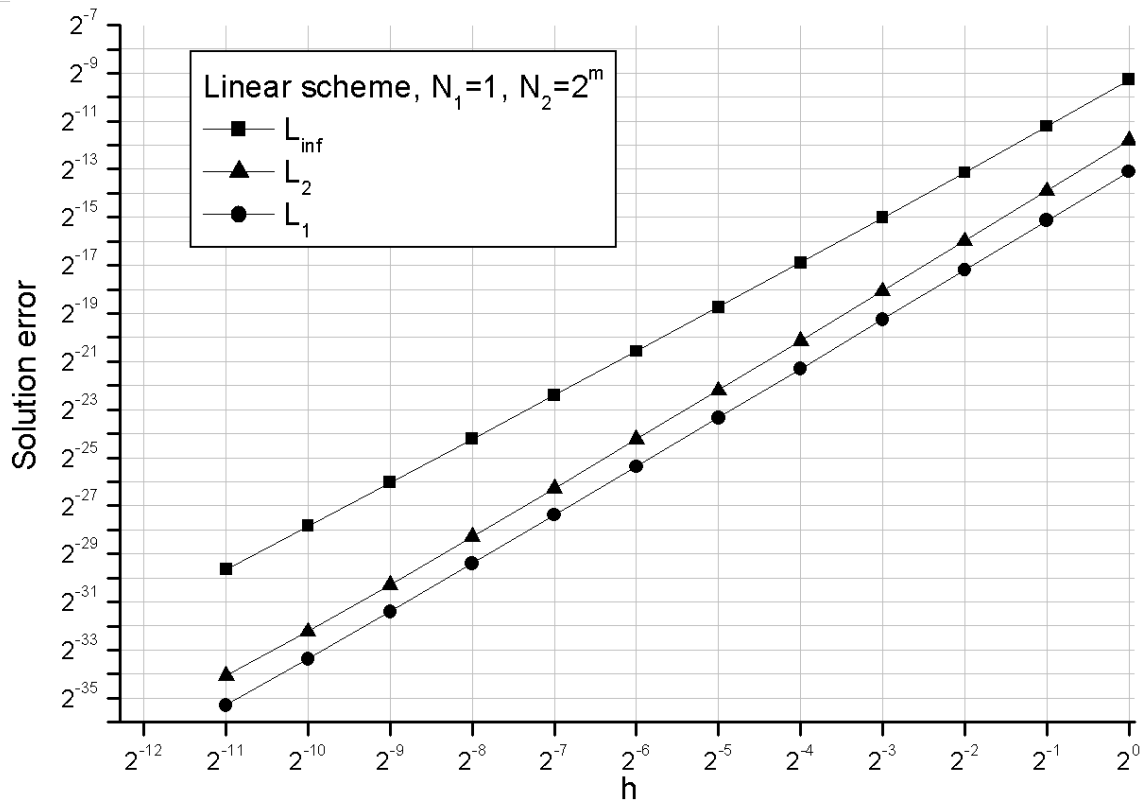


Рис. 9. Сходимость линейной схемы при измельчении с сохранением одного слоя прямоугольных треугольников

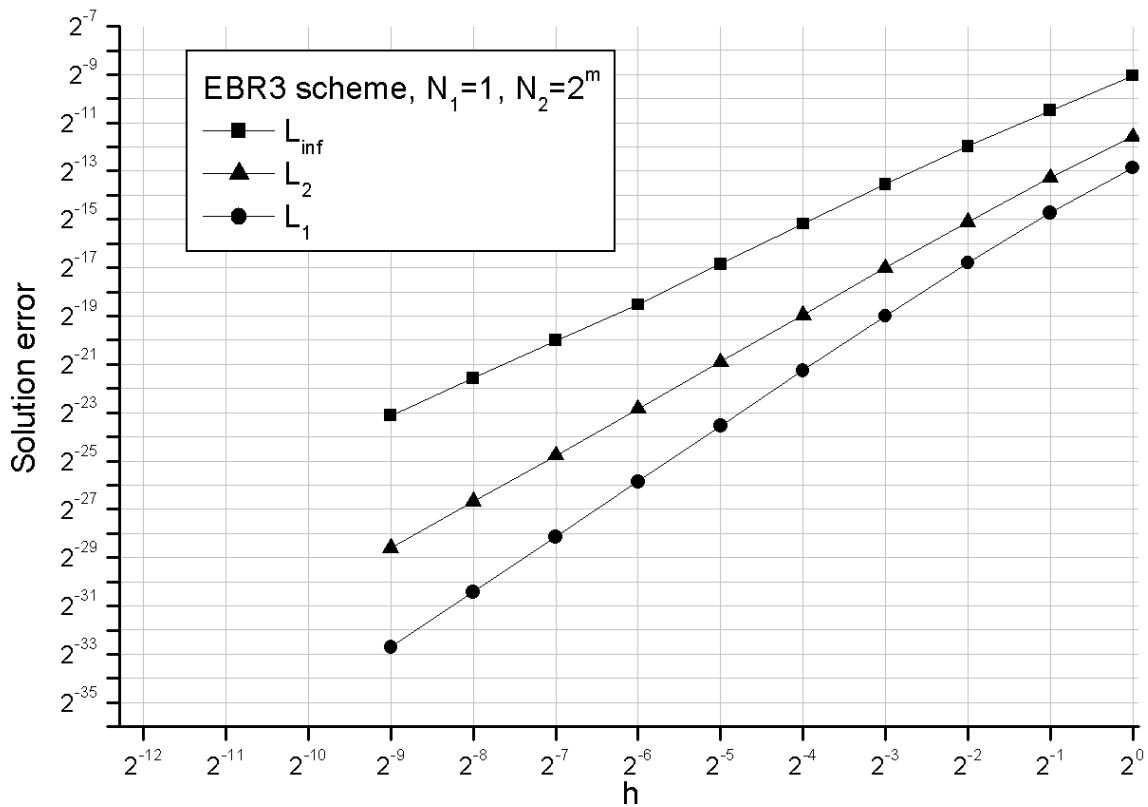


Рис. 10. Сходимость схемы EBR3 при измельчении с сохранением одного слоя прямоугольных треугольников

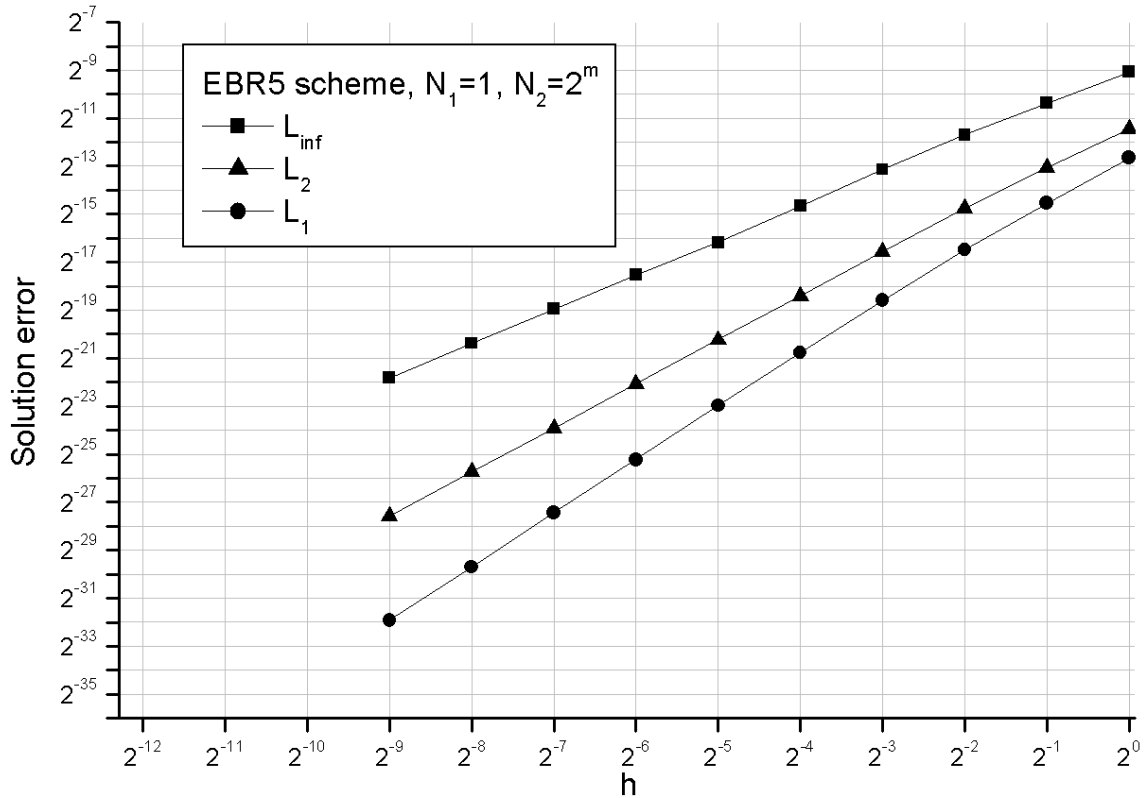


Рис. 11. Сходимость схемы EBR5 при измельчении с сохранением одного слоя прямоугольных треугольников

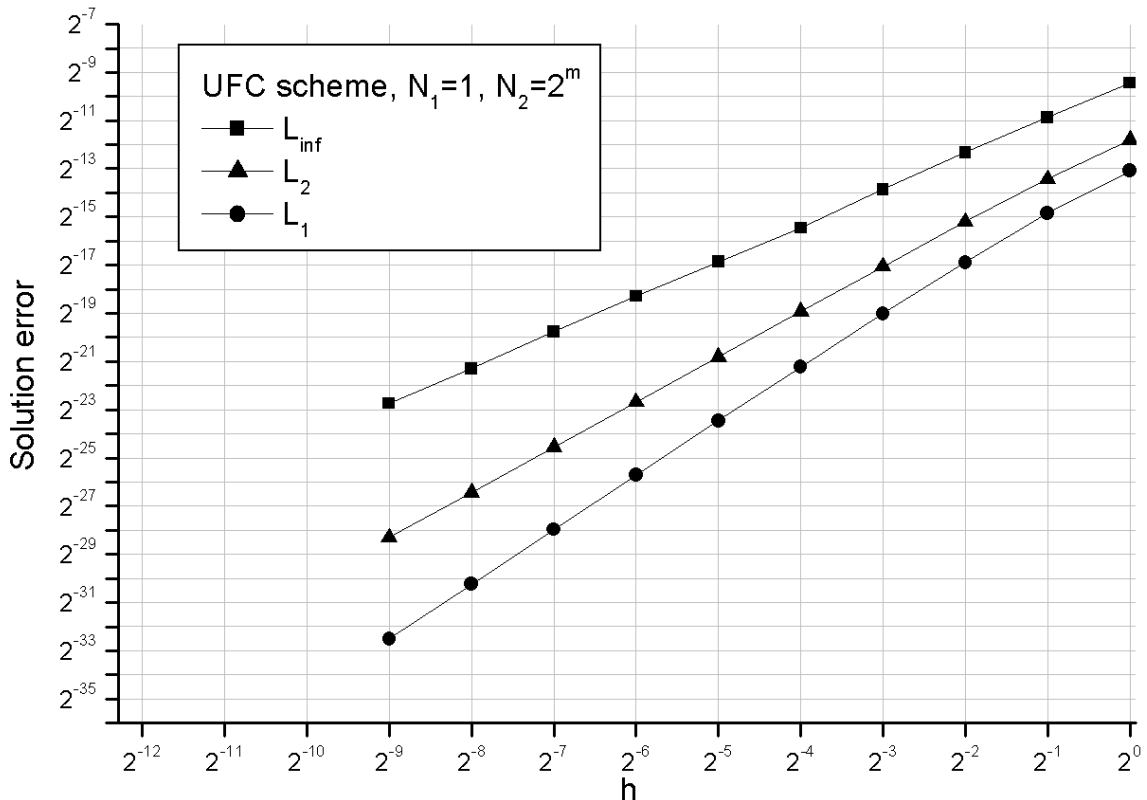


Рис. 12. Сходимость схемы UFC при измельчении с сохранением одного слоя прямоугольных треугольников

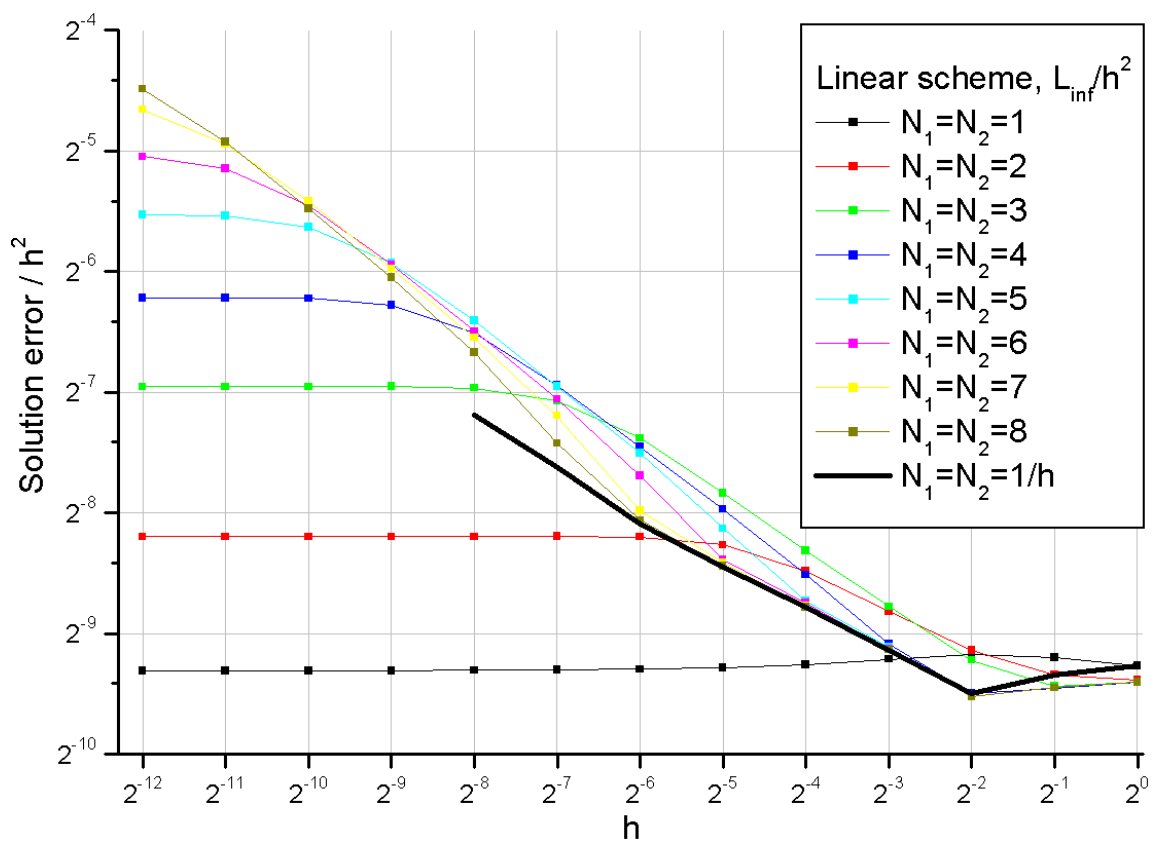
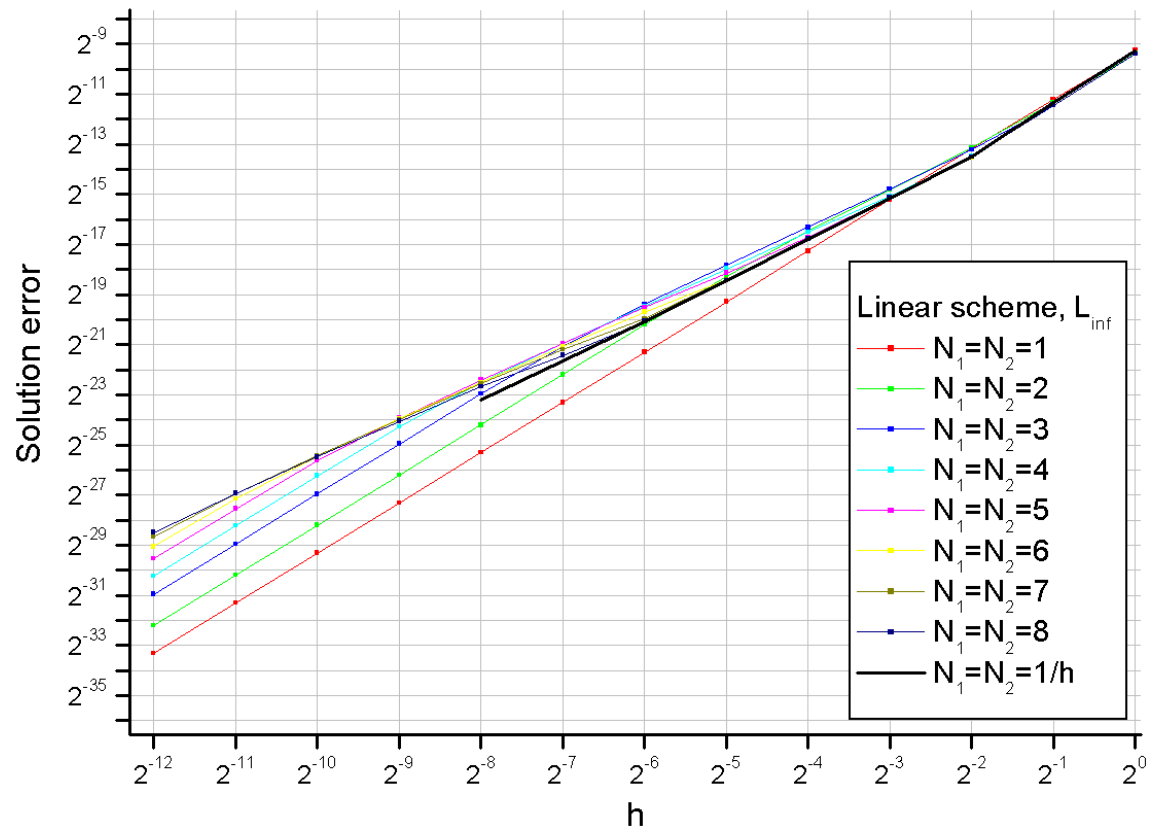


Рис. 13. Сходимость «линейной» схемы на последовательностях сеток  $[2^{-m}, n, n]$  и  $[2^{-m}, 2^m, 2^m]$  в норме  $L_{\infty}$

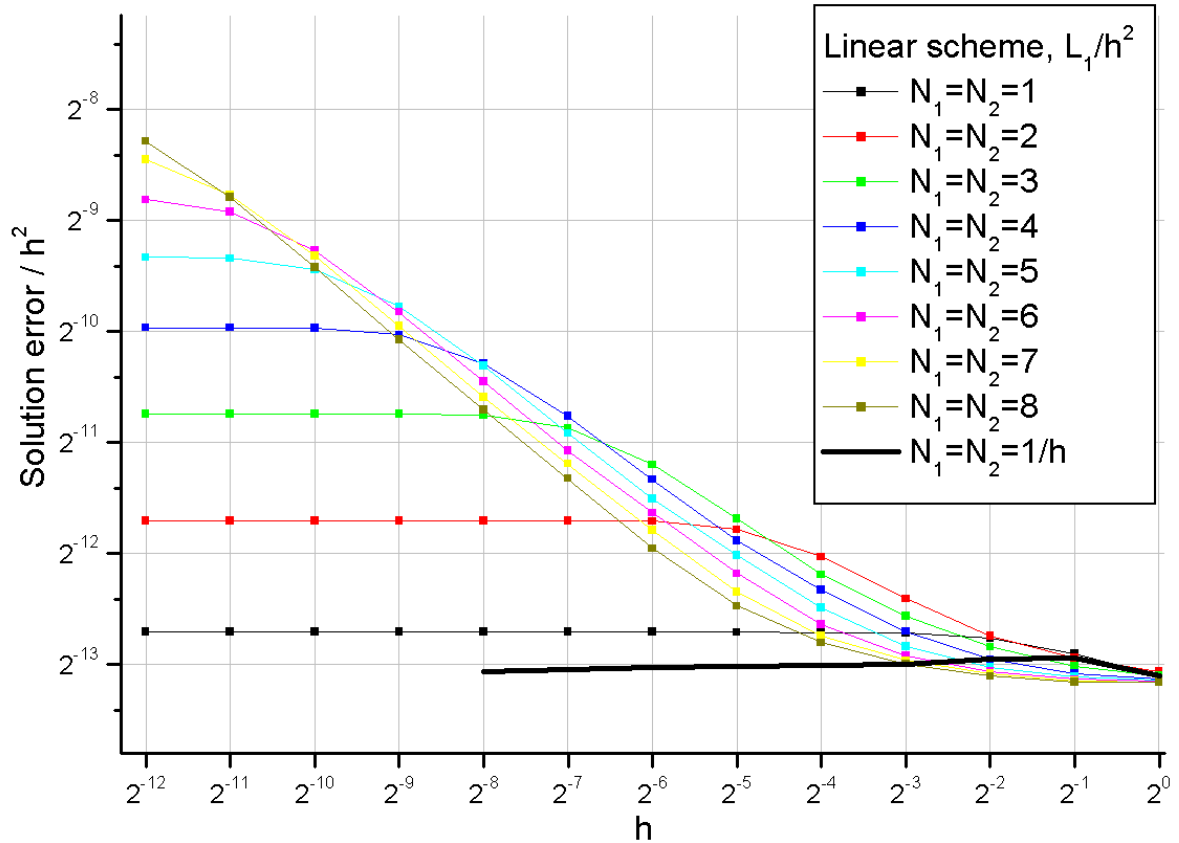
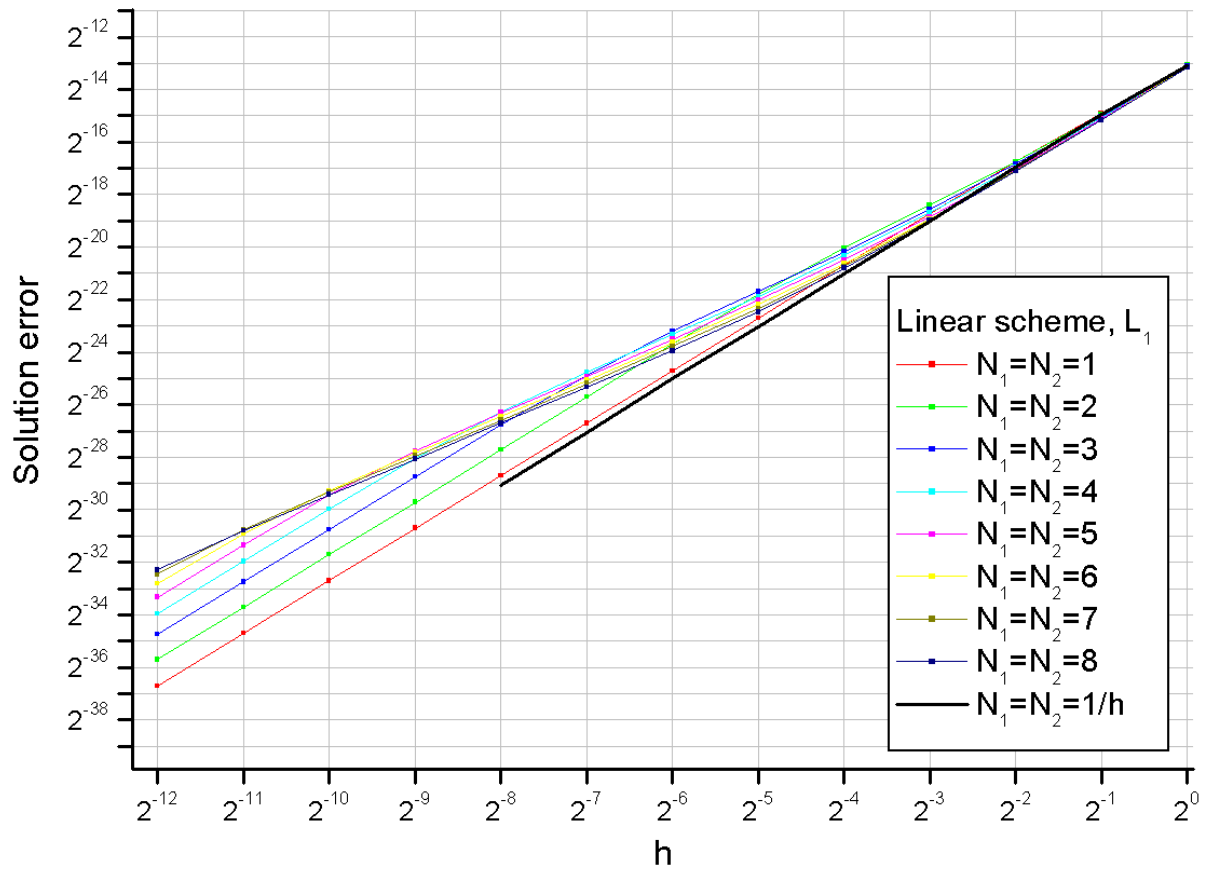


Рис. 14. Сходимость «линейной» схемы на последовательностях сеток  $[2^{-m}, n, n]$  и  $[2^{-m}, 2^m, 2^m]$  в норме  $L_1$



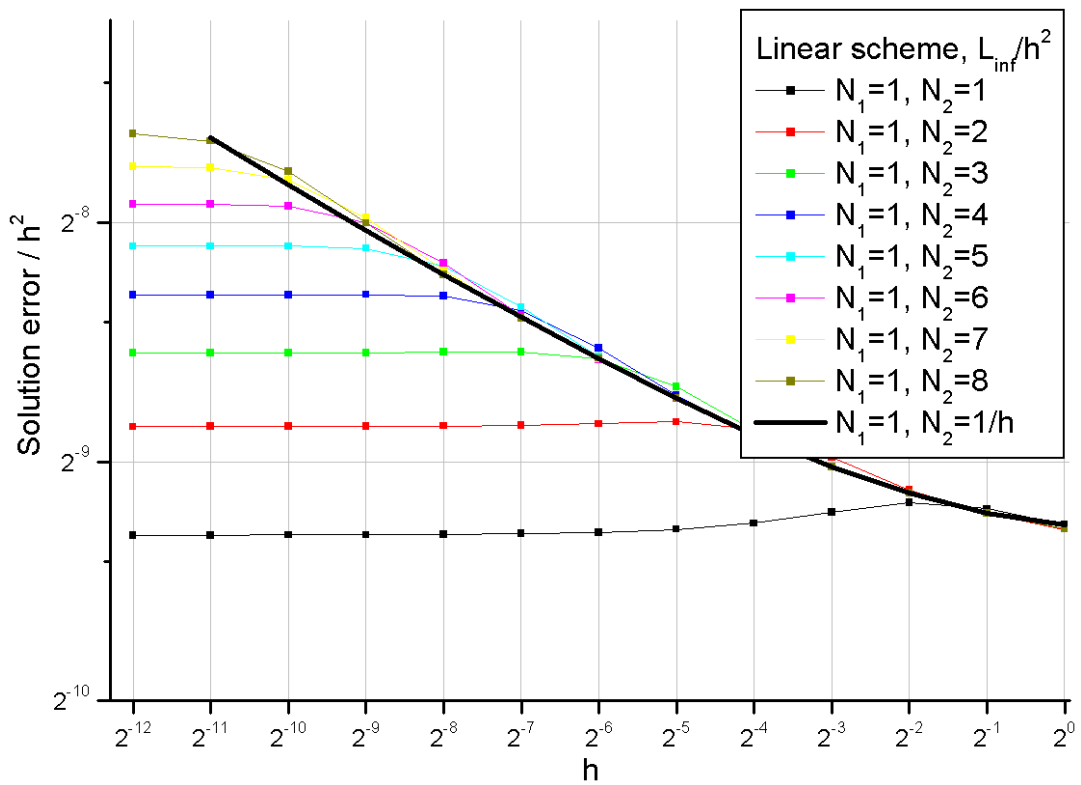
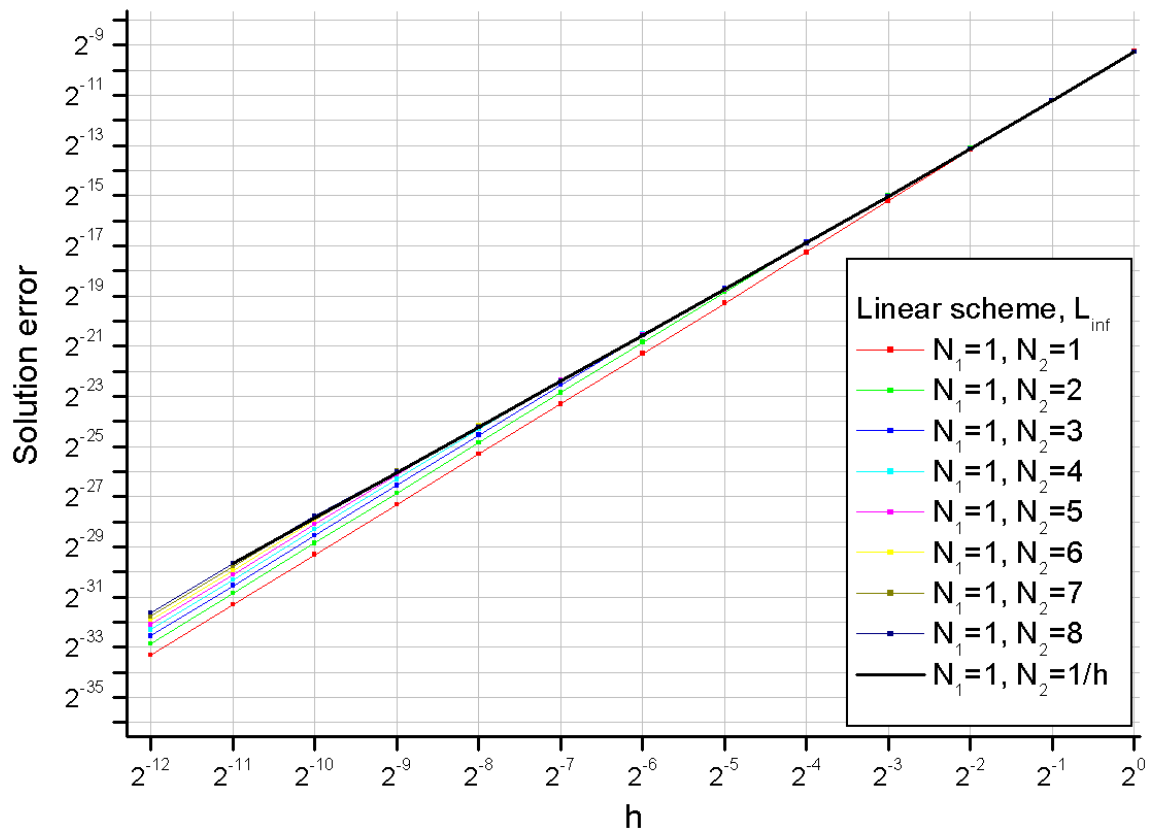


Рис. 15. Сходимость «линейной» схемы на последовательностях сеток  $[2^{-m}, 1, n]$  и  $[2^{-m}, 1, 2^m]$  в норме  $L_{\infty}$

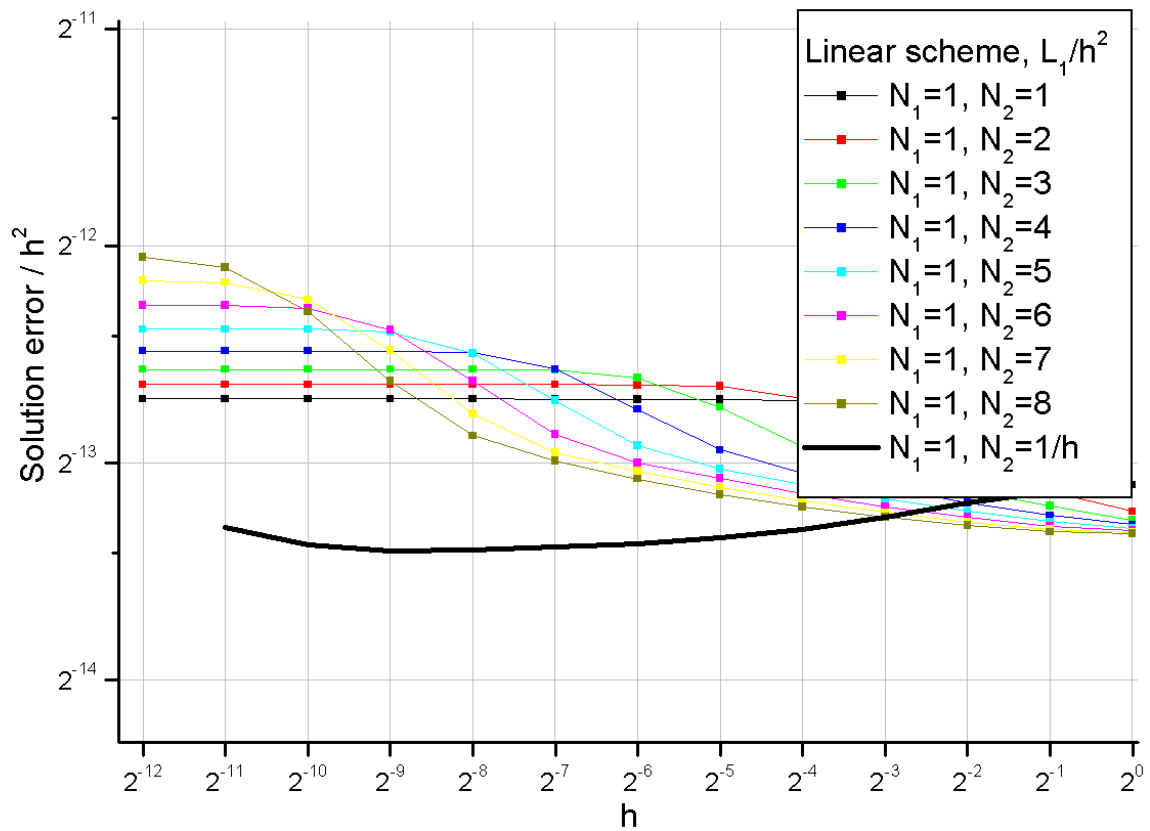
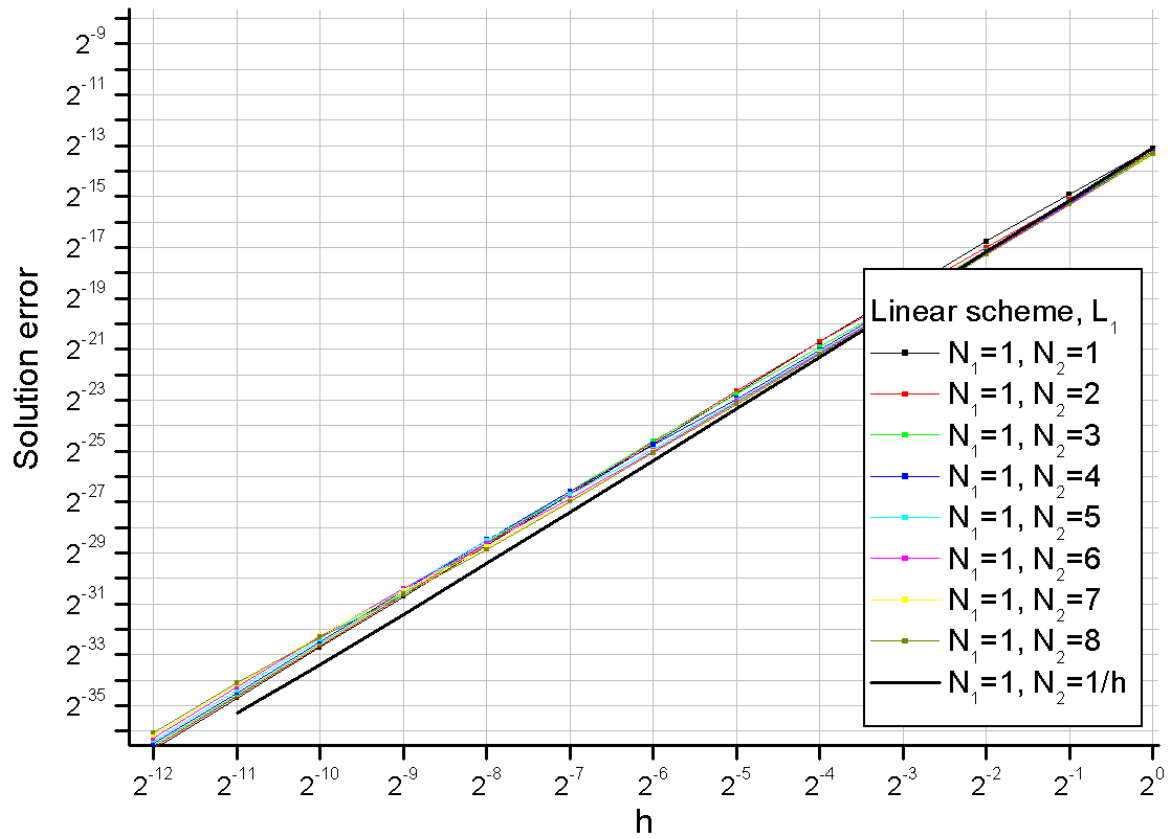


Рис. 16. Сходимость «линейной» схемы на последовательностях сеток  $[2^{-m}, 1, n]$  и  $[2^{-m}, 1, 2^m]$  в норме  $L_1$

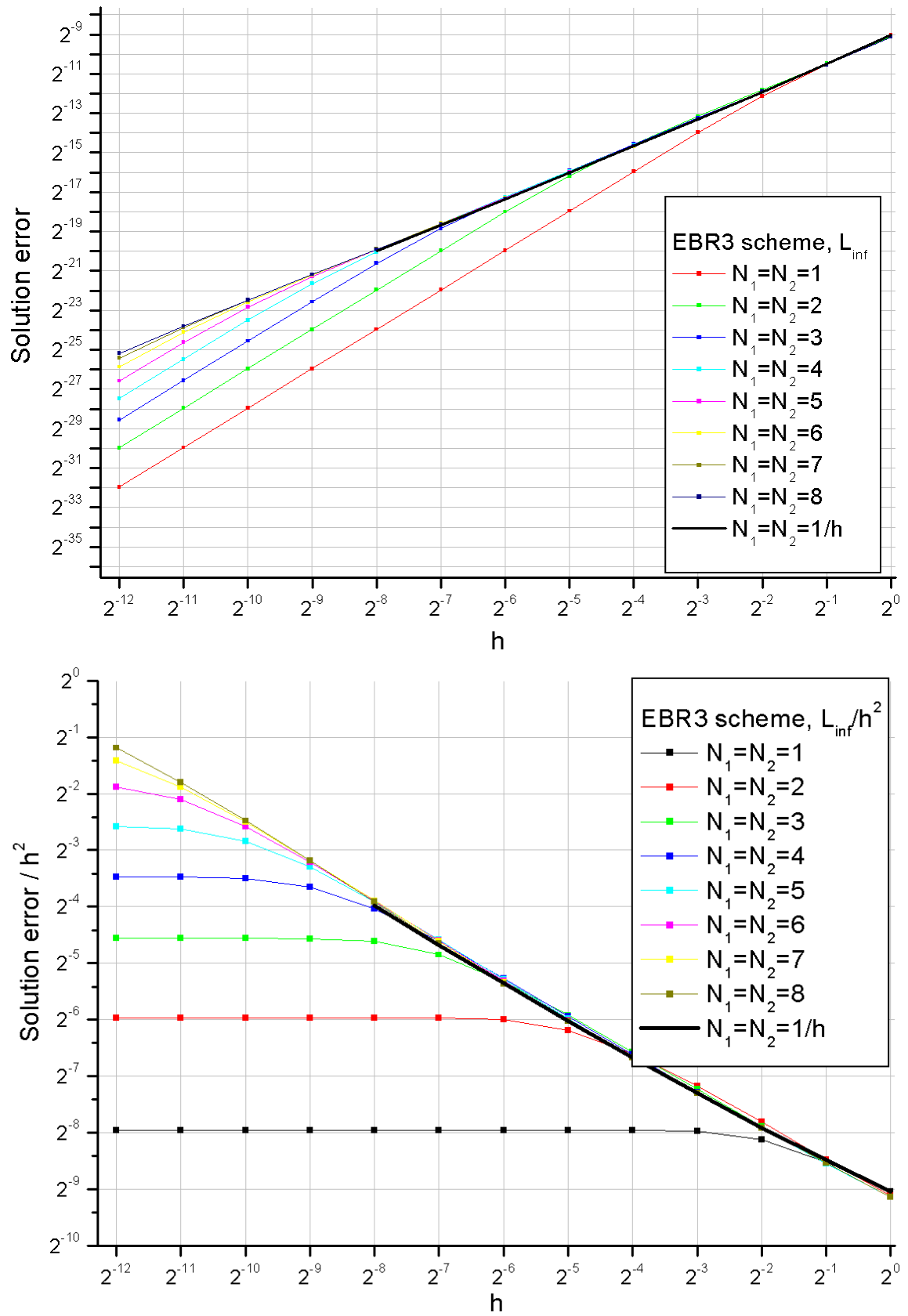


Рис. 17. Сходимость схемы EBR3 на последовательностях сеток  $[2^{-m}, n, n]$  и  $[2^{-m}, 2^m, 2^m]$  в норме  $L_{\infty}$

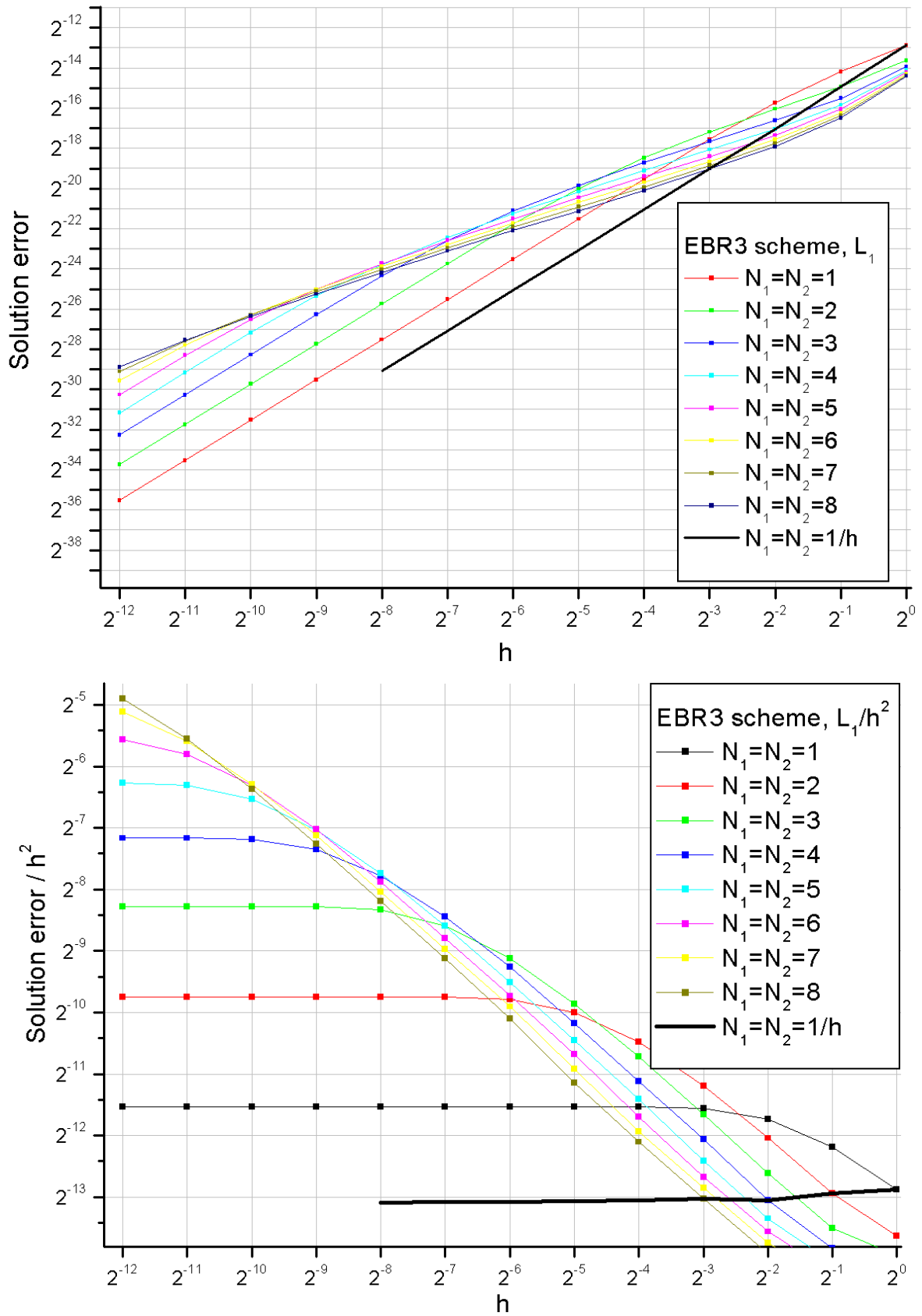


Рис. 18. Сходимость схемы EBR3  
на последовательностях сеток  $[2^{-m}, n, n]$  и  $[2^{-m}, 2^m, 2^m]$  в норме  $L_1$

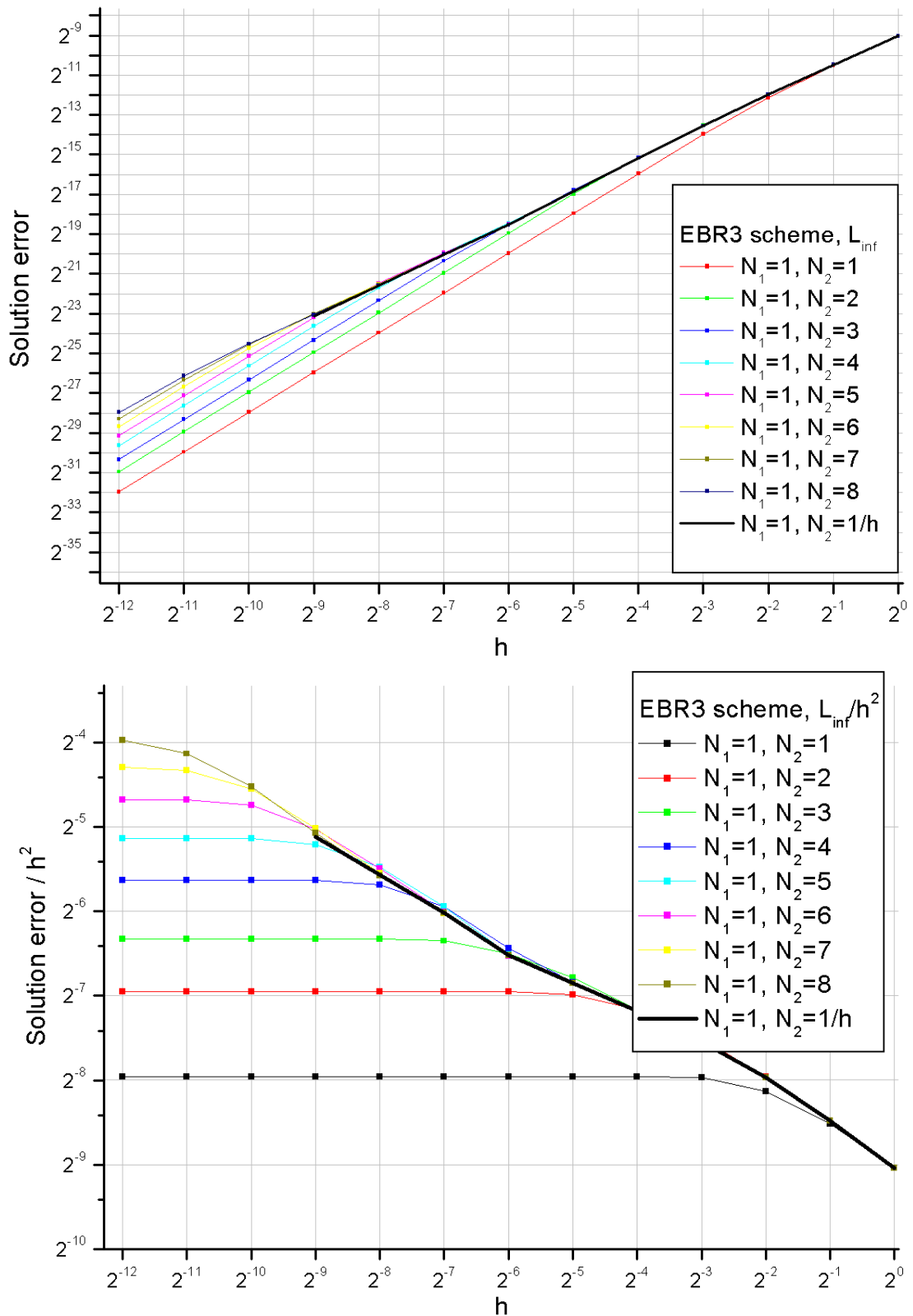


Рис. 19. Сходимость схемы EBR3  
на последовательностях сеток  $[2^{-m}, 1, n]$  и  $[2^{-m}, 1, 2^m]$  в норме  $L_{\infty}$

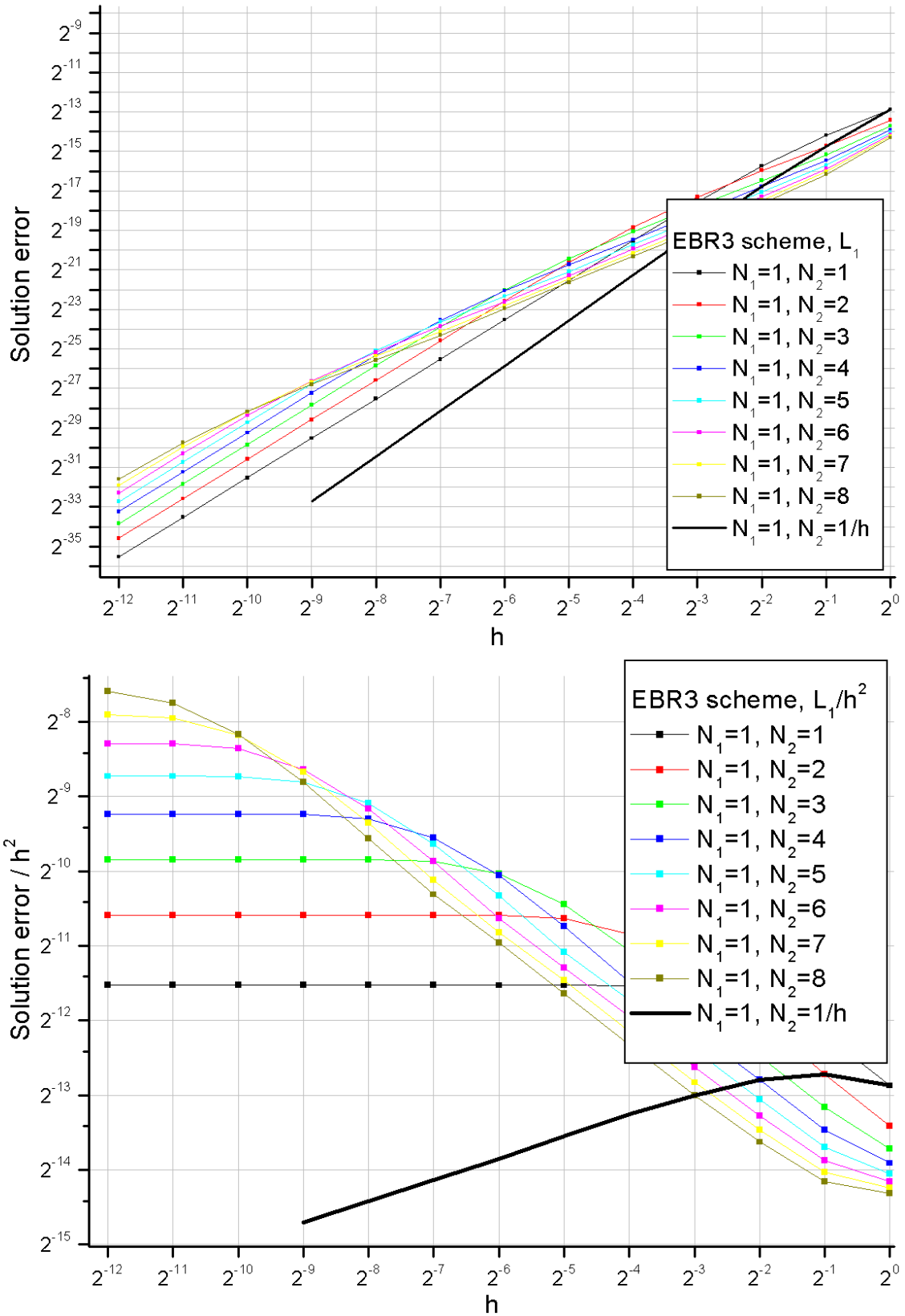


Рис. 20. Сходимость схемы EBR3  
на последовательностях сеток  $[2^{-m}, 1, n]$  и  $[2^{-m}, 1, 2^m]$  в норме  $L_1$

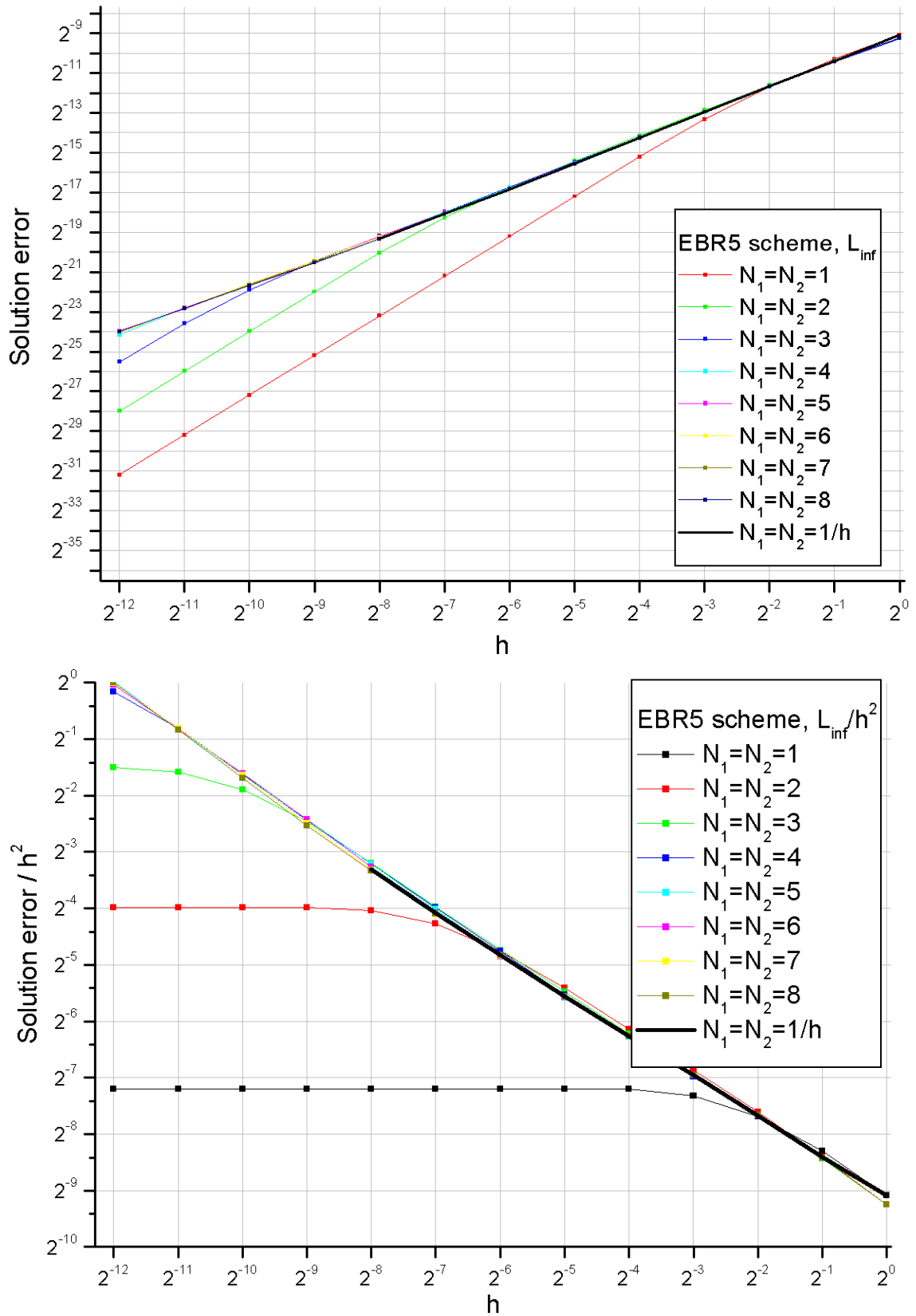


Рис. 21. Сходимость схемы EBR5 на последовательностях сеток  $[2^{-m}, n, n]$  и  $[2^{-m}, 2^m, 2^m]$  в норме  $L_\infty$

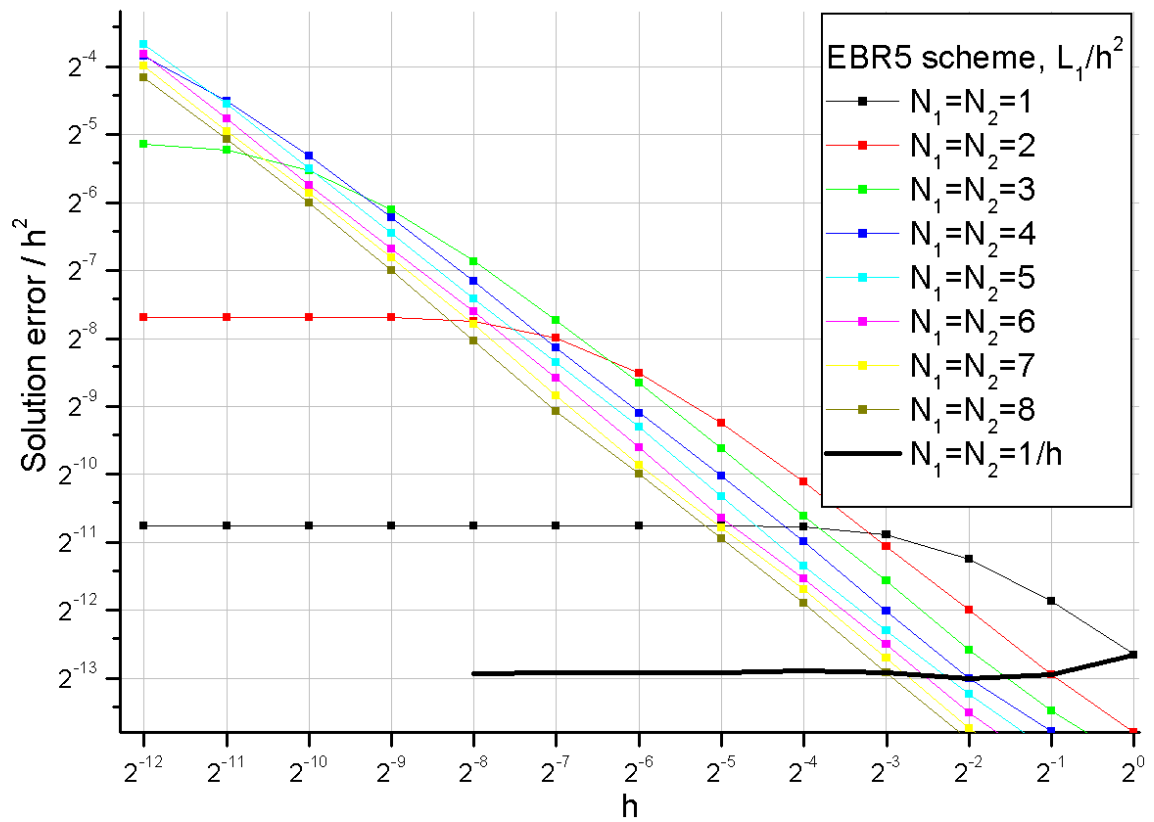
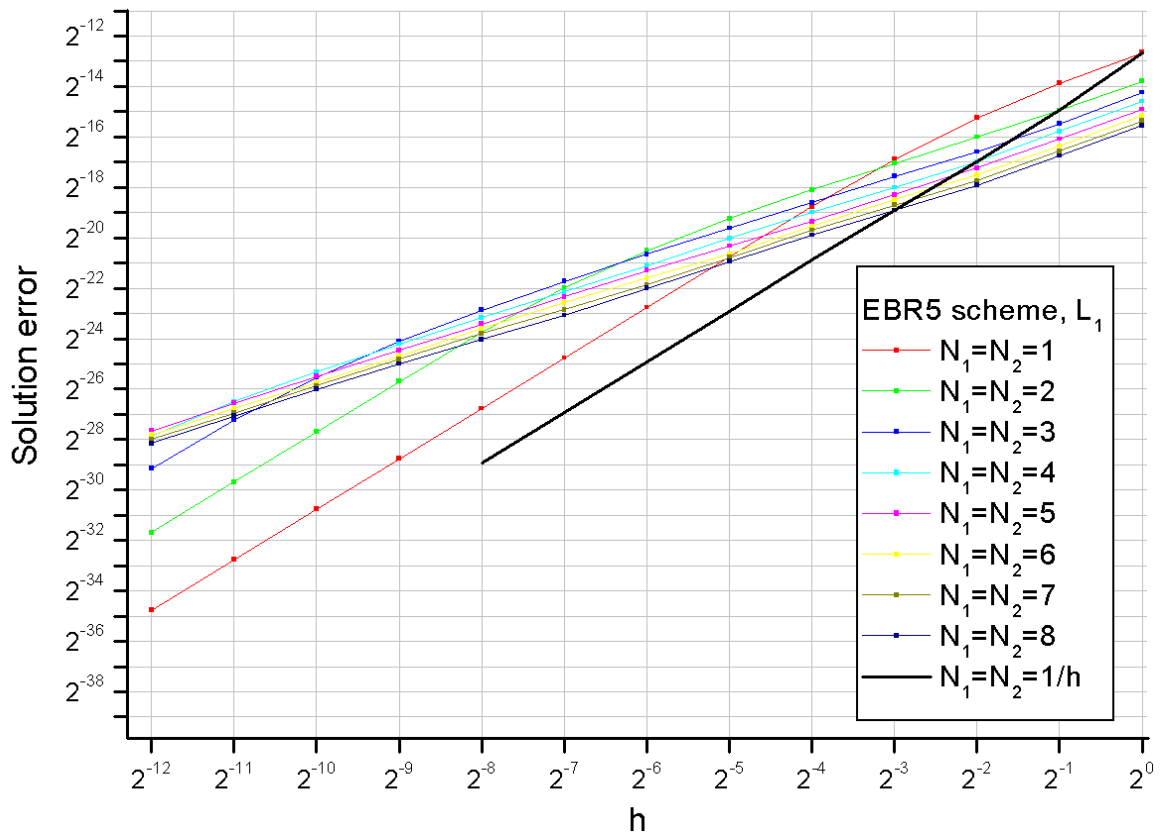


Рис. 22. Сходимость схемы EBR5  
на последовательностях сеток  $[2^{-m}, n, n]$  и  $[2^{-m}, 2^m, 2^m]$  в норме  $L_1$



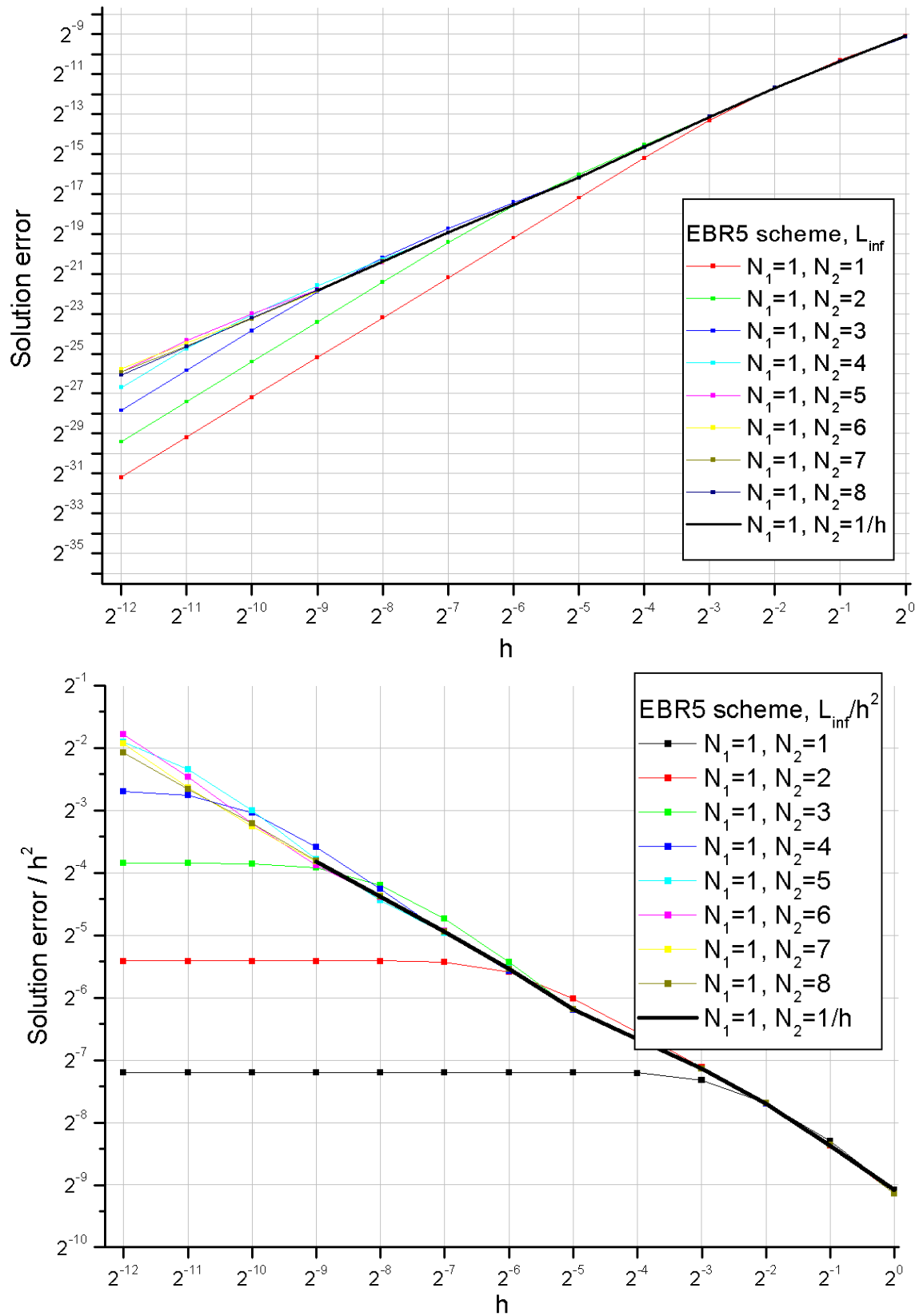


Рис. 23. Сходимость схемы EBR5  
на последовательностях сеток  $[2^{-m}, 1, n]$  и  $[2^{-m}, 1, 2^m]$  в норме  $L_{\infty}$

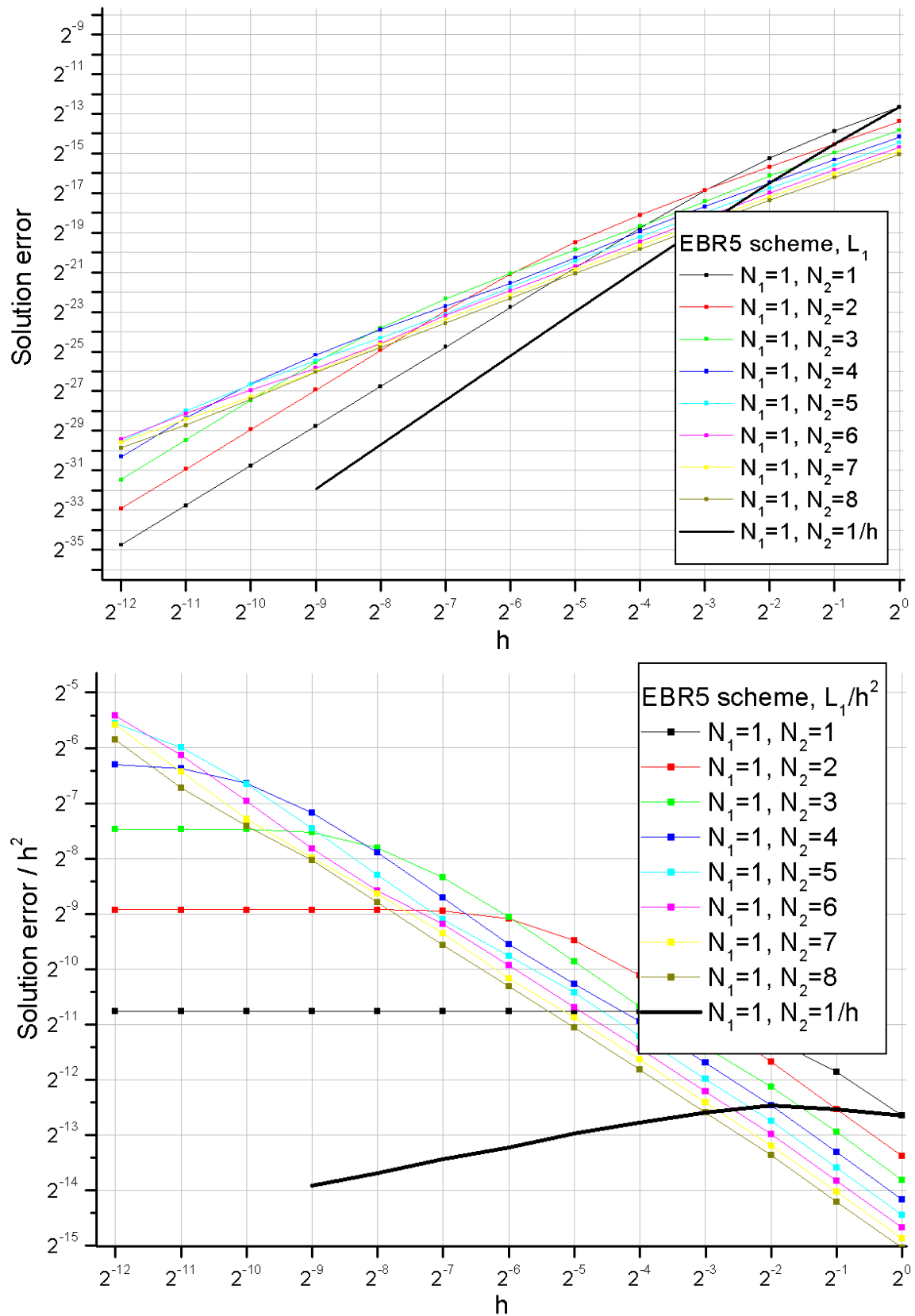


Рис. 24. Сходимость схемы EBR5  
на последовательностях сеток  $[2^{-m}, 1, n]$  и  $[2^{-m}, 1, 2^m]$  в норме  $L_1$

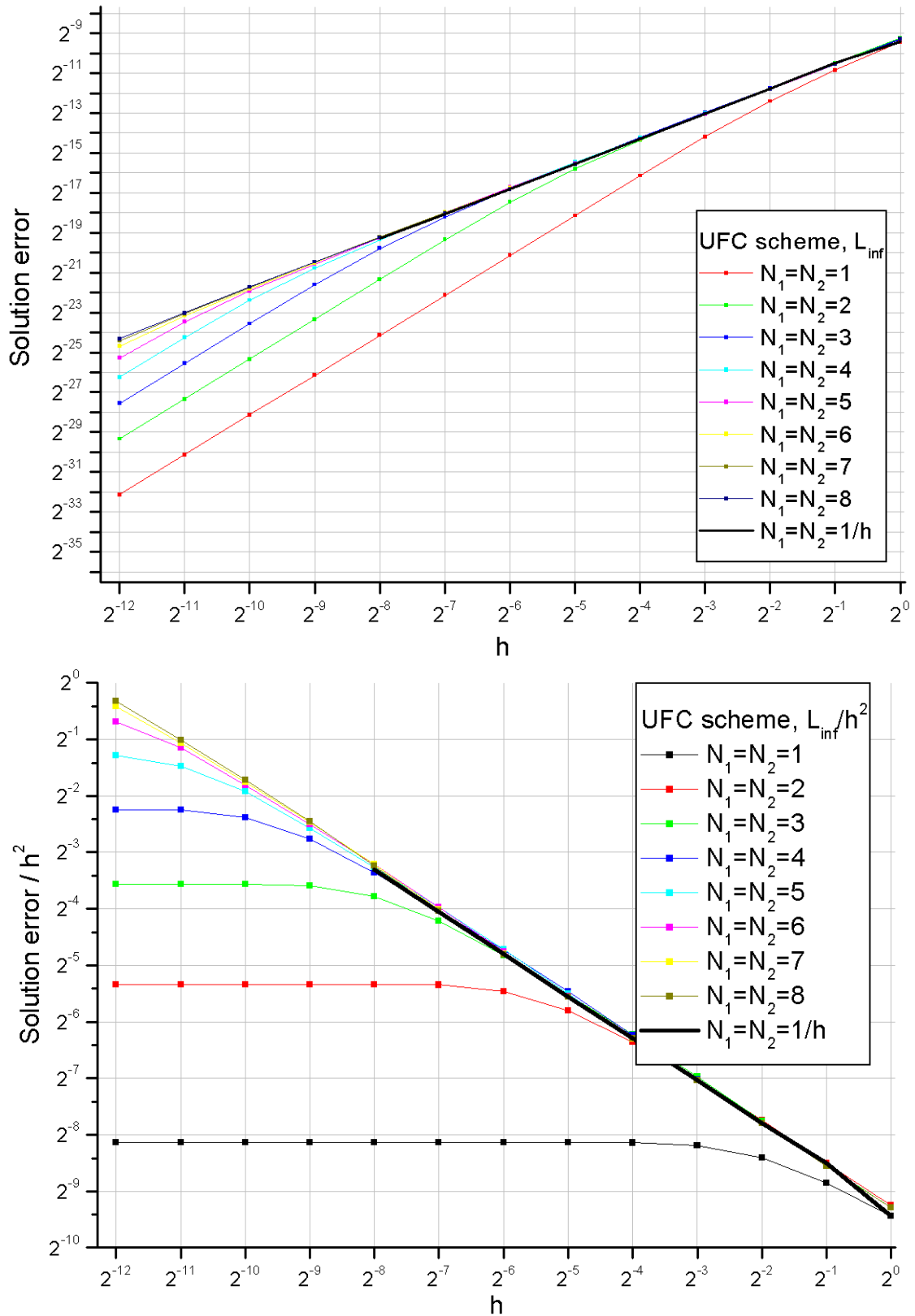


Рис. 25. Сходимость схемы UFC на последовательностях сеток  $[2^{-m}, n, n]$  и  $[2^{-m}, 2^m, 2^m]$  в норме  $L_{\infty}$

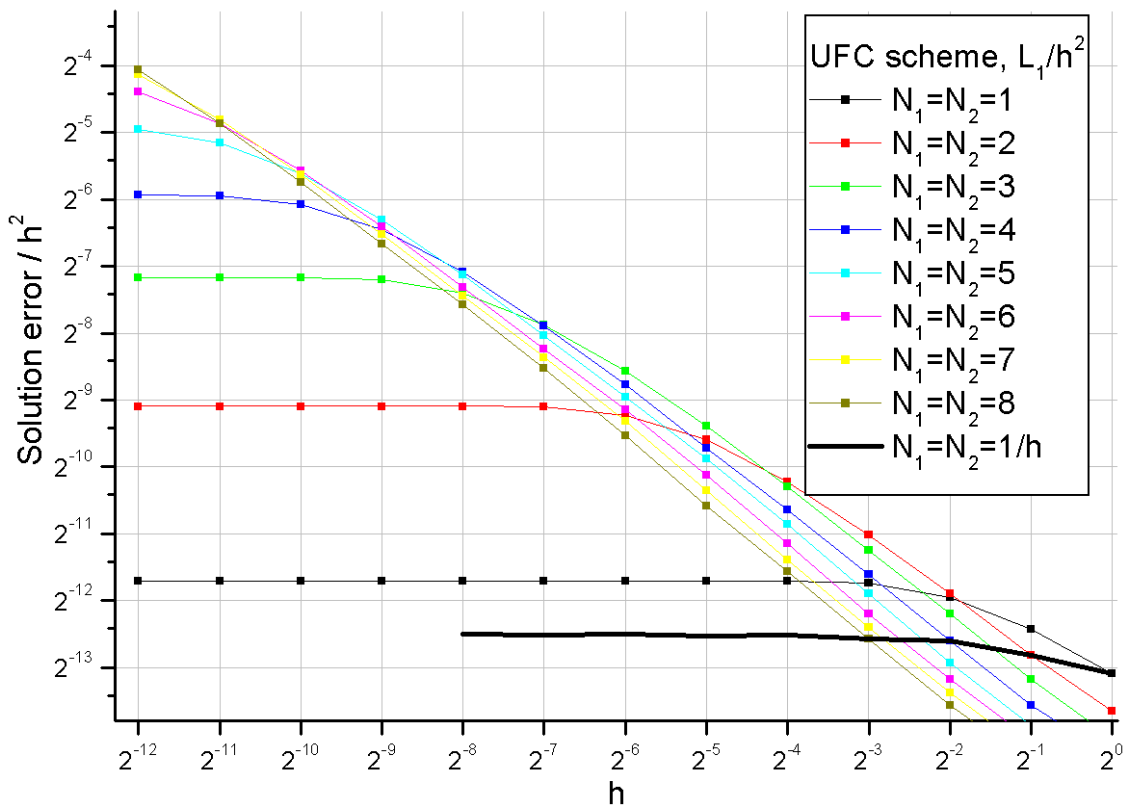
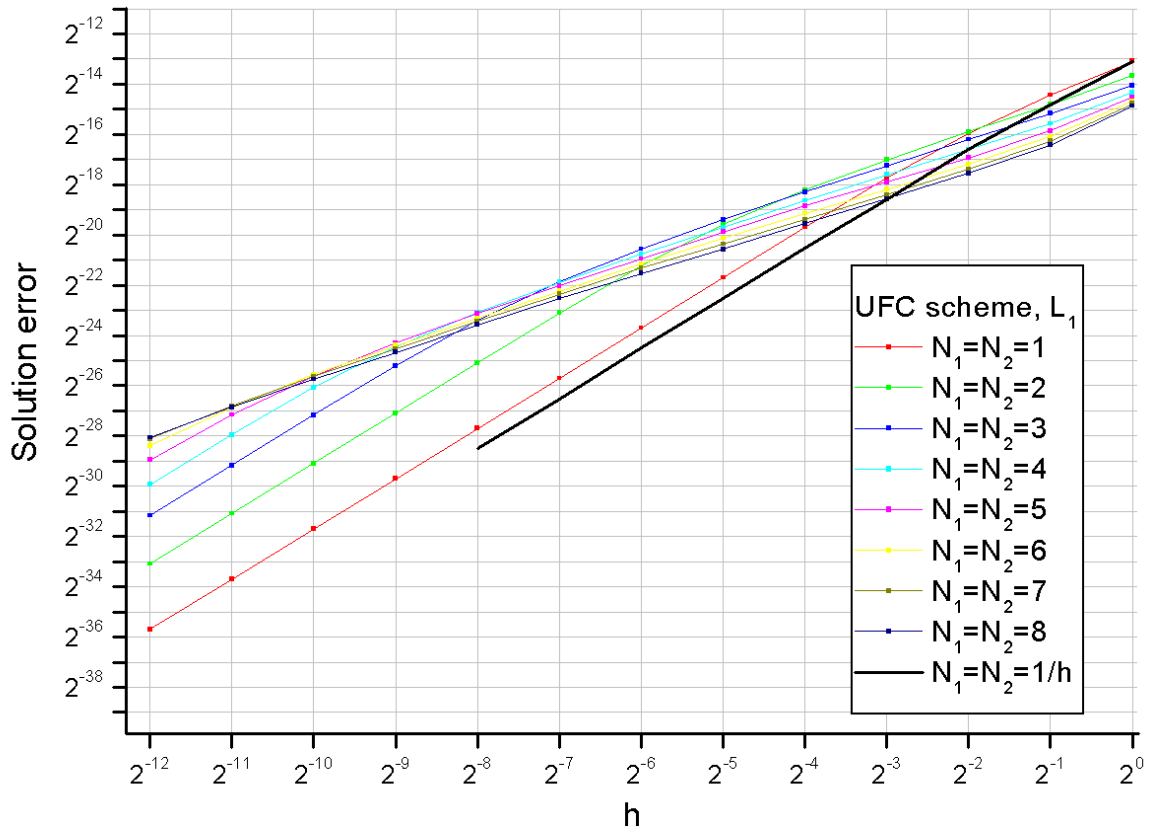


Рис. 26. Сходимость схемы UFC на последовательностях сеток  $[2^{-m}, n, n]$  и  $[2^{-m}, 2^m, 2^m]$  в норме  $L_1$

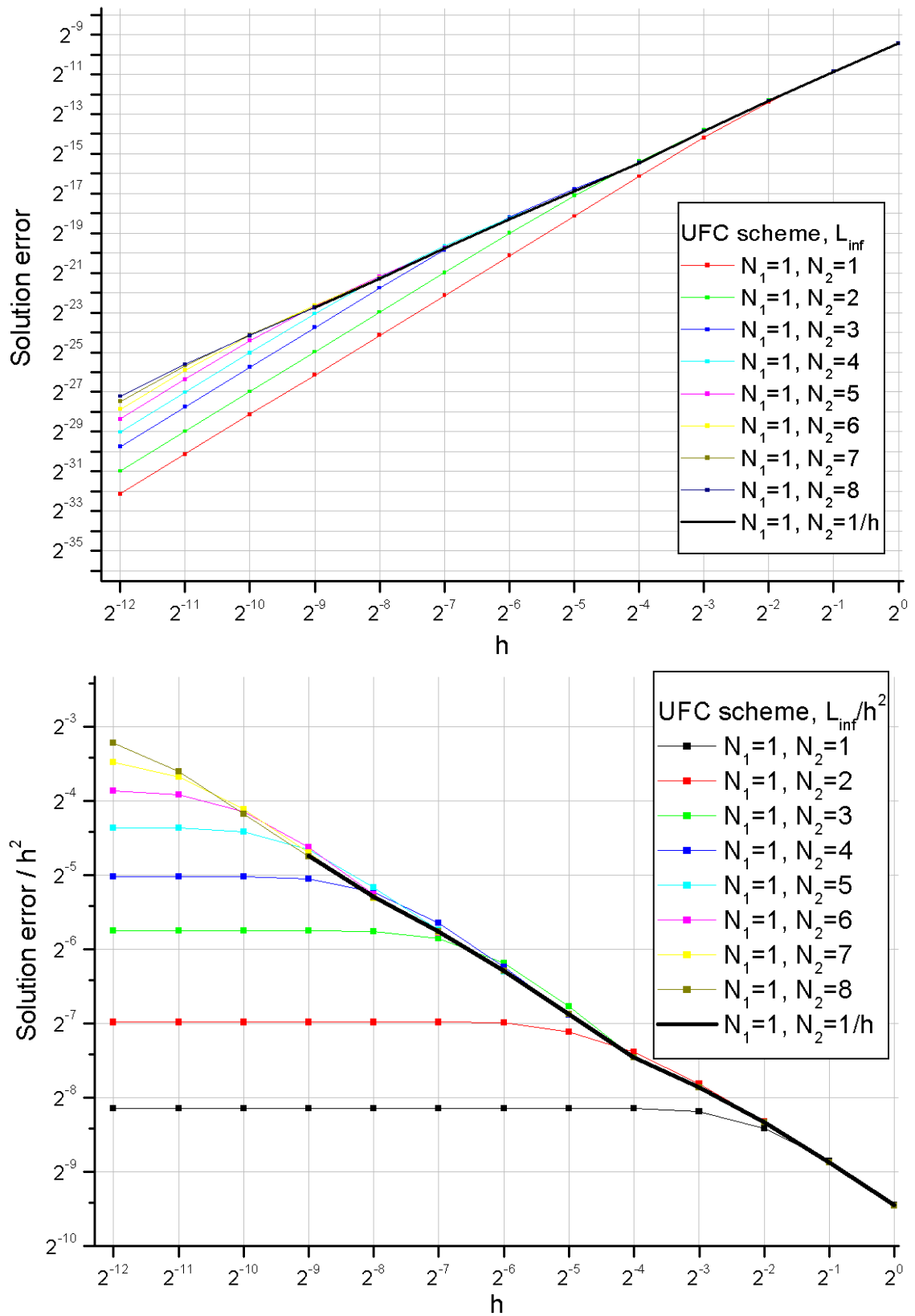


Рис. 27. Сходимость схемы UFC на последовательностях сеток  $[2^{-m}, 1, n]$  и  $[2^{-m}, 1, 2^m]$  в норме  $L_{\infty}$

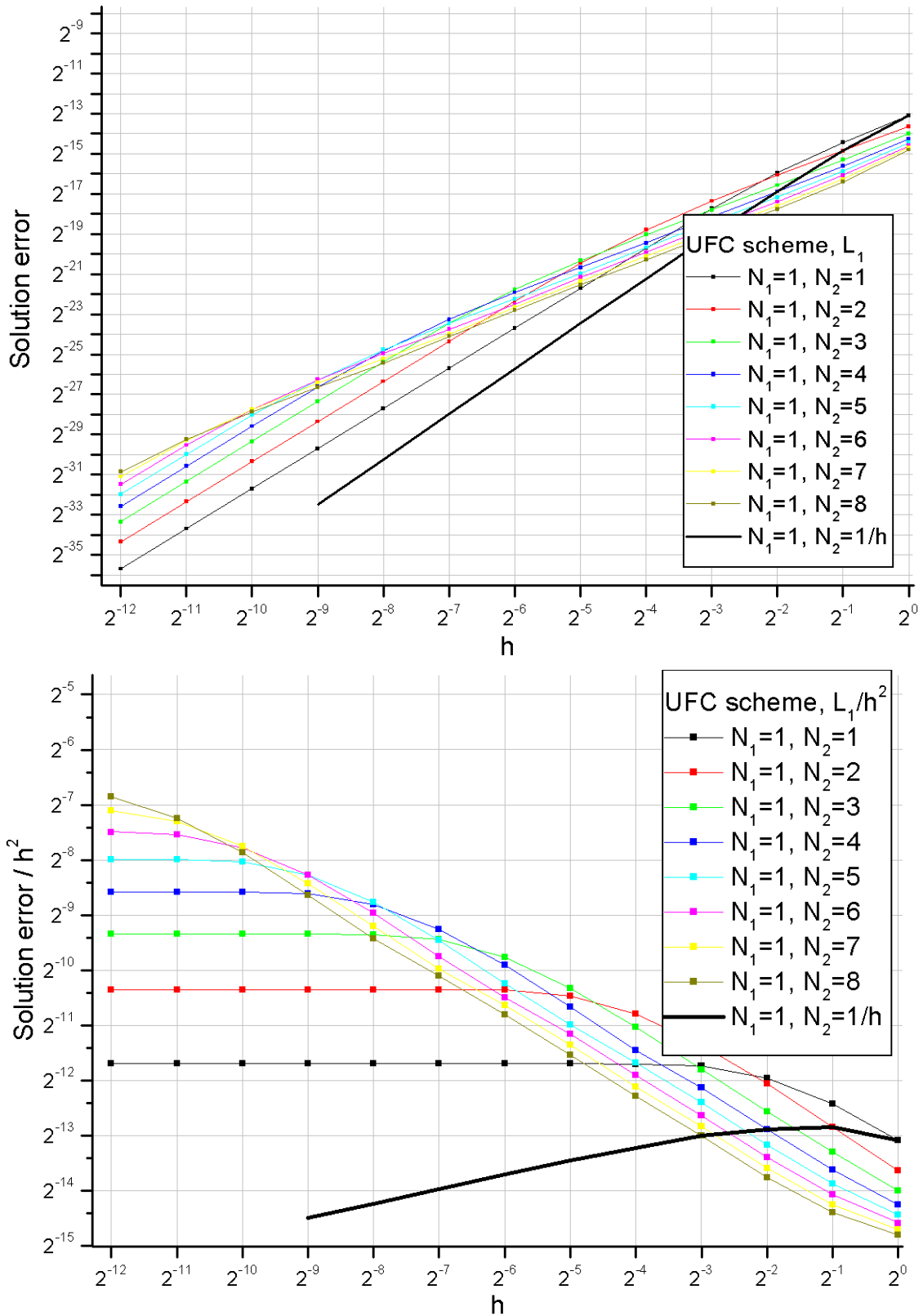


Рис. 28. Сходимость схемы UFC на последовательностях сеток  $[2^{-m}, 1, n]$  и  $[2^{-m}, 1, 2^m]$  в норме  $L_1$

Чтобы убедиться, что тип сшивки сеток принципиально не меняет поведение ошибки, проведём расчёт на сетках второго типа по схеме EBR3. Соответствующие результаты расчёта на сетках второго типа приведены на рис. 29. По горизонтали в логарифмическом масштабе отложен шаг сетки (длина её горизонтальных рёбер), по вертикали, тоже в логарифмическом масштабе, — численная ошибка на момент времени  $t = 1$ . Разные маркеры соответствуют разным числам  $N = 2, 4, 6$  (что соответствует 5, 9 и 13 слоям правильных треугольников). Каждый маркер на графике соответствует одному расчёту. Через маркеры проведены линии, формулы которых указаны на рисунке.

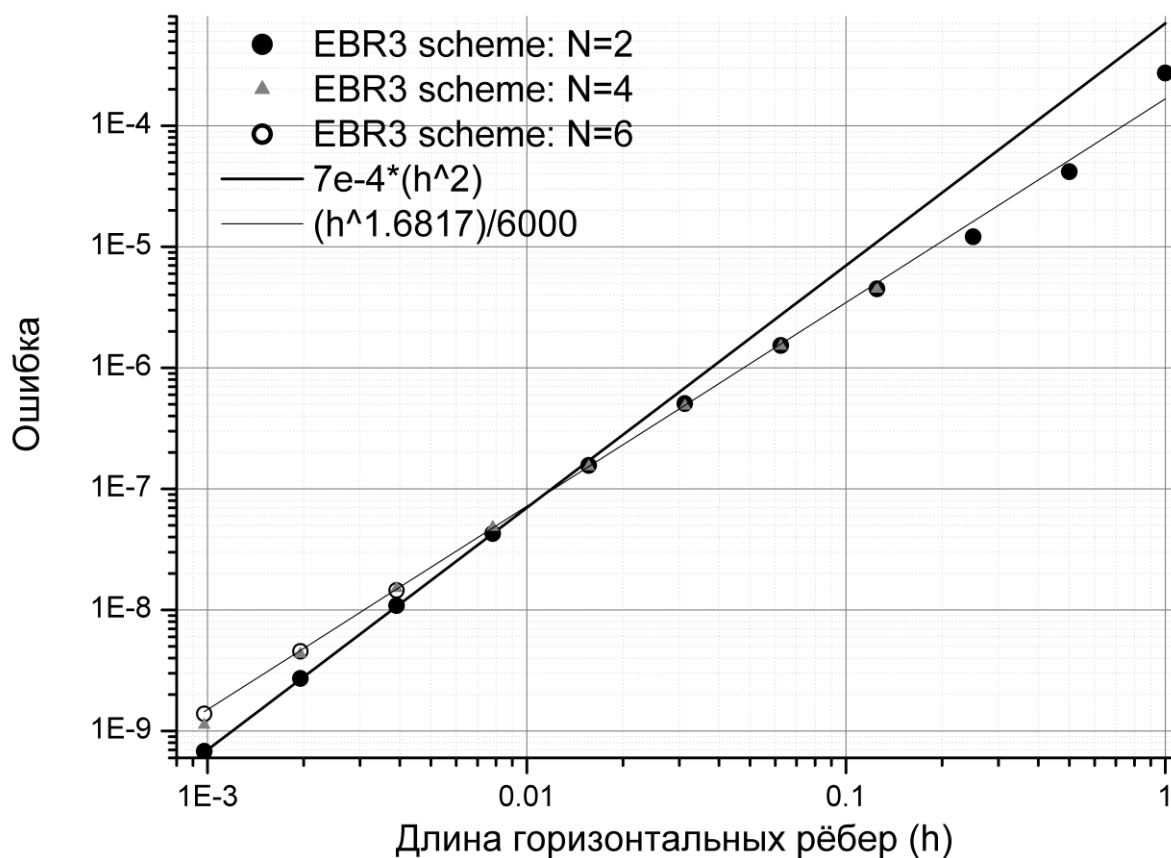


Рис. 29. Поведение ошибки при измельчении сетки на последовательностях сеток II типа,  $f_1 = 0.8, f_2 = 1, f_3 = 1.8$

Из представленных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Порядок точности схемы на последовательности сеток рассмотренного вида зависит от стратегии измельчения схем.
2. Эффект падения порядка ниже двух проявляется одинаковым образом для всех рассмотренных схем.
3. Тип сшивки не имеет значения.

Отметим, что полученный результат согласуется с контрпримером Петерсона [13]. Петерсон привёл пример постановки для стационарного

уравнения переноса, в которой для простейшей конечно-объёмной схемы (которая обычно называется схемой 1-го порядка) порядок равен  $1/2$ , если размер блока увеличивается при  $h \rightarrow 0$ , и порядок равен 1, если измельчение блочное.

В [14] было показано, что при сколь угодно малом изменении направления скорости переноса в уравнении (1) порядок сходимости в примере Петерсона становится равным 1. Мы не исключаем, что этот эффект может иметь место и в рассматриваемой задаче.

## Заключение

В настоящей работе были рассмотрены четыре рёберно-ориентированные схемы на неструктурированной сетке: линейная схема T. Barth, EBR3, EBR5 и UFC. Использовались только медианные контрольные объёмы. Все рассмотренные схемы обладают точностью на линейной функции, то есть первым порядком аппроксимации в максимальной норме, что гарантирует первый порядок сходимости при соблюдении условия устойчивости. Во многих работах было замечено, что консервативные схемы, имеющие  $k$ -й порядок аппроксимации на неструктурированных сетках и как минимум  $k+1$ -й на равномерных, обладают свойством сверхсходимости (*supraconvergence*), то есть на практике часто показывают  $k+1$ -й же порядок точности и на неструктурированных сетках. Однако в [6] и [7] было замечено, что экспериментальный порядок точности на практике может опускаться ниже двух, оставаясь при этом существенно выше единицы.

В настоящей работе этот эффект подробно проанализирован на нескольких искусственных примерах последовательностей сеток. Показано, что эффект сверхсходимости зависит от сетки, от стратегии её измельчения и от нормы, в которой измеряется величина ошибки. Если измельчение сетки проводить посредством масштабирования неструктурированных сеточных блоков и регулярного заполнения уменьшёнными блоками всей расчётной области, то порядок точности равен двум. При однородном измельчении порядок остаётся равным двум в норме  $L_1$ , тогда как в максимальной норме он опускается ниже.

Объяснение такого поведения ошибки мы планируем дать в следующей работе.

## Литература

1. I. Abalakin, P. Bakhvalov, T. Kozubskaya. *Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes* // International Journal for Numerical Methods in Fluids. Vol. 81, no. 6 (2016), 331–356.
2. T. J. Barth. *A 3-D upwind Euler solver for unstructured meshes* // AIAA Paper No. 91-1548. 1991.



3. В. П. Колган. *Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчёта разрывных течений газовой динамики* // Учёные записки ЦАГИ. 1972. Т. 3(6). С. 68–77.

4. B. van Leer. *Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method* // Journal of Computational Physics. 1979. Vol. 32. P. 101–136.

5. П. А. Бахвалов, Т. К. Козубская. *О построении рёберно-ориентированных схем, обеспечивающих точность на линейной функции, для решения уравнений Эйлера на неструктурированных сетках* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017 (принята к печати)

6. B. Pincock, A. Katz. *High-order flux correction for viscous flows on arbitrary unstructured grids* // J. Sci. Comput. 61 (2) (2014) 454–476.

7. A. Katz, V. Sankaran. *An efficient correction method to obtain a formally third-order accurate flow solver for node-centered unstructured grids* // J. Sci. Comput. 51 (2) (2012) 375–393.

8. D. Bouche, J.-M. Ghidaglia, F. Pascal. *Error estimate and the geometric corrector for the upwind finite volume method applied to the linear advection equation* // SIAM J. Numer. Anal. 43 (2005) 578–603.

9. П. А. Бахвалов, Т. К. Козубская. *Модификация схемы Flux Corrector для повышения точности решения нестационарных задач* // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015, № 69. 24 с.

10. B. Stoufflet, J. Periaux, F. Fezoui, A. Dervieux. *Numerical simulation of 3-D hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite element* // AIAA paper 87-0560.

11. A. Dervieux, C. Debiez. *Mixed element volume MUSCL methods with weak viscosity for steady and unsteady flow calculation* // Computers and Fluids, 29: 89-118, 1999.

12. B. Despres. *Lax theorem and finite volume schemes* // Mathematics of computation. Vol. 73, no. 247, 1203–1234, 2004.

13. T. E. Peterson. *A note on the convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation* // SIAM J. Numer. Anal. Vol. 28, no. 1, pp. 133–140, 1991.

14. D. Bouche, J.-M. Ghidaglia, F. Pascal. *Theoretical analysis of the upwind finite-volume scheme on the counter-example of Peterson* // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 44 (2010) 1279–1293.