



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 109 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Сергеева Ю.Р., Тучин Д.А.

Алгоритм определения
параметров аналитической
модели движения
навигационных спутников

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сергеева Ю.Р., Тучин Д.А. Алгоритм определения параметров аналитической модели движения навигационных спутников // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 109. 16 с. doi:[10.20948/prepr-2016-109](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-109)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-109>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

Ю.Р. Сергеева, Д.А. Тучин

**Алгоритм определения
параметров аналитической модели
движения навигационных спутников**

Москва — 2016

Ю.Р. Сергеева, Д.А. Тучин

Алгоритм определения параметров аналитической модели движения навигационных спутников

Для описания модели движения навигационных спутников GPS используется аналитическая модель, включающая кеплеровы элементы орбиты и соответствующие поправки к ним. Приведены соотношения для расчета кинематических векторов положения и скорости навигационного спутника по параметрам аналитической модели, приведены частные производные кинематического вектора положения. Разработаны алгоритмы определения параметров аналитической модели по измерениям вектора положения навигационного спутника. На ftp-сервере представлены программы на языке Си.

Ключевые слова: GPS, модель движения, эфемериды, программа.

Y.R. Sergeeva, D.A. Tuchin

Algorithm for determining the analytical model parameters of the navigation satellites motion

Analytical model, that includes Keplerian elements and related corrections, is used for description of the navigation satellites motion. Correspondences for the position vectors calculation and velocity vectors calculation on base of the analytical model parameters are presented. Partial derivatives of the position vector are deduced. Algorithms for determining the analytical model parameters on base of measurements of the navigation satellite's position vector are presented. The C program is attached (ftp-server).

Key words: GPS, satellite motion, ephemeris, C program.

Оглавление

Введение.....	3
1. Аналитическая модель движения навигационного спутника	4
2. Расчет матрицы Якоби параметров аналитической модели по вектору положения.....	6
3. Первоначальное определение эфемериды навигационного спутника по вектору кинематических параметров.....	9
4. Определение параметров аналитической модели с использованием метода наименьших квадратов	10
5. Результаты численного моделирования	11
Выводы	14
Библиографический список.....	15

Введение

Глобальная спутниковая система GPS (Global Position System) «Navstar» (США) предназначена для высокоточного определения пространственно-временных координат и составляющих скорости пользователей.

Группировка навигационных космических аппаратов (НКА) состоит из 32 спутников. НКА распределены по шести орбитальным плоскостям, разнесенным по долготе на 60° . В каждой плоскости находится пять или шесть НКА, которые двигаются по круговым орбитам с наклоном 55° и с полуосью около 26.5 тыс. км. Период обращения НКА GPS составляет около 12 часов.

На Земле осуществляются высокоточные измерения параметров орбит НКА GPS и рассчитываются параметры их аналитической модели движения. Параметры модели закладываются в бортовой компьютер НКА GPS для последующей ретрансляции пользователям.

Для отработки аппаратуры приема навигационных сигналов разработчики используют имитационное оборудование, способное выдавать сигнал на высоких частотах. Программное обеспечение зарубежного имитатора «Spirent» и отечественного «Навис» предлагает пользователю самостоятельно рассчитывать и задавать параметры движения НКА GPS (рис. 1).

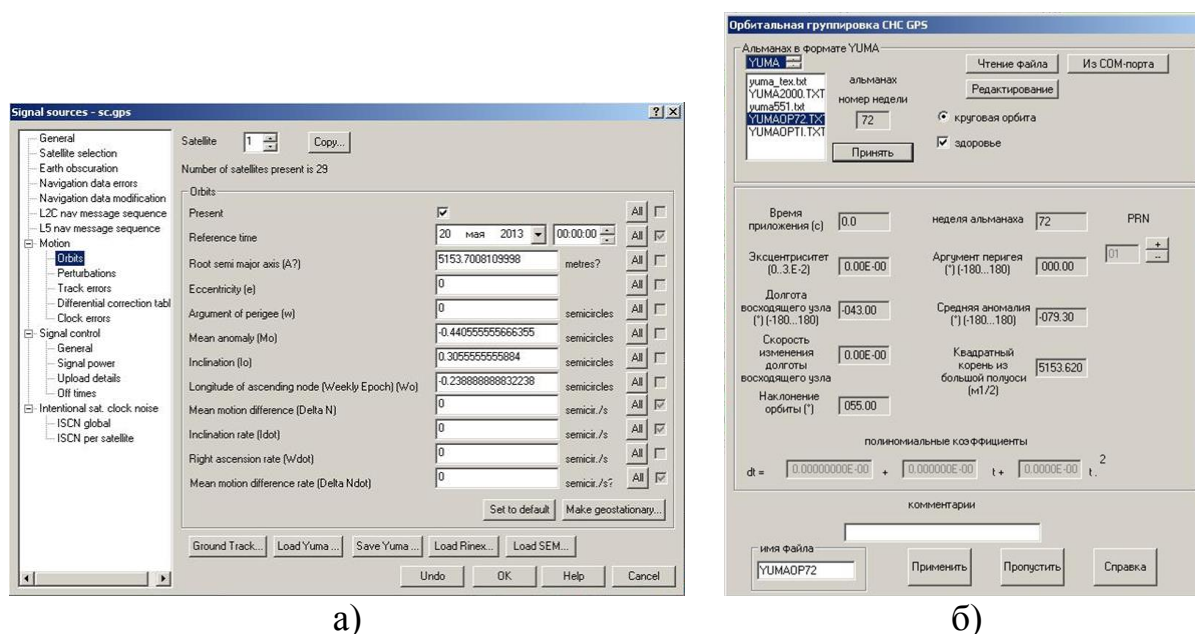


Рис. 1. Вид программы имитационного оборудования:
а) «Spirent», б) «Навис»

Создание методов и алгоритмов определения параметров модели движения НКА GPS является актуальной и требуемой прикладной задачей.

В препринте описана аналитическая модель движения НКА GPS [1], приведены формулы для расчета компонент вектора его скорости.

Приведены частные производные вектора положения по параметрам аналитической модели движения НКА. Сформирована матрица Якоби, необходимая для составления нормального уравнения при решении задачи уточнения параметров модели по выборке векторов положения методом наименьших квадратов (МНК).

Представлен алгоритм нахождения начального приближения искомых параметров модели для итерационного метода их определения.

Доступен исходный код программ на языке Си, реализующий задачу уточнения параметров модели движения НКА GPS. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

1. Аналитическая модель движения навигационного спутника

Для описания движения НКА GPS используют геоцентрическую вращающуюся систему координат WGS-84 [2]. Время в системе представляется номером недели и смещением от начала недели в секундах. Отсчет системного времени GPS ведется начиная с начала суток 5 января 1980 года по Гринвичу.

Аналитическая модель движения НКА GPS содержит следующие параметры:

- M_0 – средняя аномалия за данный период времени,
- Δn – поправка к среднему движению,
- e – эксцентриситет,
- \sqrt{a} – квадратный корень из большей полуоси,
- Ω_0 – долгота восходящего узла в орбитальной плоскости,
- i_0 – наклонение орбиты в заданный период времени,
- ω – аргумент перигея,
- $\dot{\Omega}$ – скорость прямого восхождения плоскости орбиты,
- \dot{i} – скорость изменения наклонения,
- C_{uc} – косинусоидальная гармоническая поправка к аргументу широты,
- C_{us} – синусоидальная гармоническая поправка к аргументу широты,
- C_{rc} – косинусоидальная гармоническая поправка к радиусу орбиты,
- C_{rs} – синусоидальная гармоническая поправка к радиусу орбиты,
- C_{ic} – косинусоидальная гармоническая поправка к наклонению,
- C_{is} – синусоидальная гармоническая поправка к наклонению,
- t_{oe} – время привязки эфемерид (эпоха).

Расчет компонент вектора положения $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ и скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ на момент времени t производится следующим образом.

Пусть $\mu = 3.986005 \cdot 10^4 \frac{\text{М}^3}{\text{с}^2}$ – универсальная гравитационная постоянная

Земли, $\dot{\Omega}_e = 7.2921151467 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ – угловая скорость вращения Земли,

тогда последовательно вычисляются:

$$n_0 = \sqrt{\mu} / (\sqrt{a})^3 \text{ – среднее движение;}$$

$\Delta t = t - t_{oe}$ – разница между текущим временем и временем эпохи t_{oe} , должно отсчитываться от начала или конца межнедельного перехода, т.е. Δt должно быть в диапазоне \pm неделя;

$$n = n_0 + \Delta n \text{ – уточненное среднее движение;}$$

$$M = M_0 + n \cdot \Delta t \text{ – средняя аномалия.}$$

Затем решается уравнение Кеплера [3] $M = E - e \sin E$ для эксцентрической аномалии E .

Одним из методов решения уравнения Кеплера является метод Ньютона, при котором рассматривается функция $f(E) = E - M - e \sin E$ и итерационным методом находится такое значение эксцентрической аномалии E , при котором $f(E) = 0$:

$$E_{k+1} = E_k - \frac{f(E_k)}{f'(E_k)}, \quad E_0 = M_0.$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока значение функции меньше наперед заданной константы (точности) $|f(E_{k+1})| < \varepsilon$. Отметим, что для вычисления эксцентрической аномалии с точностью до $2 \cdot 10^{-10}$ угловой секунды требуется три итерации.

Далее вычисляются:

$$v = \arctan \left(\frac{\sin v}{\cos v} \right) = \arctan \left(\frac{(\sqrt{1-e^2} \sin E) / (1-e \cos E)}{(\cos E - e) / (1-e \cos E)} \right) \quad \text{– истинная}$$

аномалия;

$$\varphi = v + \omega \text{ – аргумент широты;}$$

$$\Delta u = C_{us} \sin 2\varphi + C_{uc} \cos 2\varphi \text{ – поправка к аргументу широты;}$$

$$\Delta r = C_{rs} \sin 2\varphi + C_{rc} \cos 2\varphi \text{ – поправка к радиус-вектору в плоскости орбиты;}$$

$$\Delta i = C_{is} \sin 2\varphi + C_{ic} \cos 2\varphi \text{ – поправка к наклонению;}$$

$$u = \varphi + \Delta u \text{ – скорректированный аргумент широты;}$$

$$r = (\sqrt{a})^2 (1 - e \cos E) + \Delta r \text{ – скорректированный радиус орбиты;}$$

$$i = i_0 + \dot{i} \cdot \Delta t + \Delta i \text{ – скорректированное наклонение;}$$

$\Omega = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e) \cdot \Delta t - \dot{\Omega}_e \cdot t_{oe}$ – долгота восходящего узла в инерциальной системе координат, оси которой совпадают с подвижной системой WGS-84 на рассматриваемый момент времени.

Вектор положения НКА в плоскости орбиты описывается соотношениями:

$$\tilde{x} = r \cos u, \quad \tilde{y} = r \sin u.$$

Компоненты вектора положения НКА во вращающейся гринвичской системе координат WGS-84 удовлетворяют следующим соотношениям:

$$x = \tilde{x} \cos \Omega - \tilde{y} \cos i \cdot \sin \Omega,$$

$$y = \tilde{x} \sin \Omega + \tilde{y} \cos i \cdot \cos \Omega,$$

$$z = \tilde{y} \sin i.$$

Для расчета компонент вектора скорости необходимо вычислить следующие производные:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos E}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{dE}{dt} \sin E \frac{(1 + e \cos v)^2}{(e^2 - 1) \sin v},$$

$$\frac{d\Delta u}{dt} = 2 \frac{dv}{dt} (C_{us} \cos 2\varphi - C_{uc} \sin 2\varphi), \quad \frac{d\Delta r}{dt} = 2 \frac{dv}{dt} (C_{rs} \cos 2\varphi - C_{rc} \sin 2\varphi),$$

$$\frac{d\Delta i}{dt} = 2 \frac{dv}{dt} (C_{is} \cos 2\varphi - C_{ic} \sin 2\varphi), \quad \frac{du}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\Delta u}{dt},$$

$$\frac{dr}{dt} = (\sqrt{a})^2 e \sin E \frac{dE}{dt} + \frac{d\Delta r}{dt}, \quad \frac{di}{dt} = i + \frac{d\Delta i}{dt}, \quad \frac{di}{dt} = \dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e.$$

Вектор скорости в плоскости орбиты описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos u - r \sin u \frac{du}{dt}, \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin u + r \cos u \frac{du}{dt}.$$

В итоге получаем соотношения для вычисления вектора скорости:

$$v_x = \frac{d\tilde{x}}{dt} \cos \Omega - \frac{d\Omega}{dt} y - \sin \Omega \frac{d\tilde{y}}{dt} \cos i + \sin \Omega \tilde{y} \sin i \frac{di}{dy},$$

$$v_y = \frac{d\tilde{x}}{dt} \sin \Omega + \frac{d\Omega}{dt} x + \cos \Omega \frac{d\tilde{y}}{dt} \cos i - \cos \Omega \tilde{y} \sin i \frac{di}{dy},$$

$$v_z = \frac{d\tilde{y}}{dt} \sin i + \tilde{y} \cos i \frac{di}{dt}.$$

2. Расчет матрицы Якоби параметров аналитической модели по вектору положения

Обозначим вектор неизвестных параметров аналитической модели движения НКА GPS как

$$\mathbf{q} = \left(\sqrt{a}, \Delta n, M_0, e, \omega, i_0, \dot{i}, \Omega_0, \dot{\Omega}, C_{us}, C_{uc}, C_{rs}, C_{rc}, C_{is}, C_{ic} \right)^T. \quad (1)$$

Приведем соотношения для расчета частных производных компонент вектора положения по \mathbf{q} . Эти производные необходимы при решении задачи уточнения данных эфемерид по известному вектору положения. Вычисляем вспомогательные производные.

Частные производные эксцентрической аномалии E по \sqrt{a} , Δn , e и M_0 записываются в виде:

$$\frac{\partial E}{\partial \sqrt{a}} = -3\sqrt{\mu} \cdot \Delta t \frac{1}{(\sqrt{a})^4 (1 - e \cos E)}, \quad \frac{\partial E}{\partial \Delta n} = \frac{\Delta t}{1 - e \cos E}, \quad \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E},$$

$$\frac{\partial E}{\partial M_0} = \frac{1}{1 - e \cos E}.$$

Частные производные истинной аномалии v по \sqrt{a} , Δn , e и M_0 записываются в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial \sqrt{a}} = \frac{\partial E}{\partial \sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E}, \quad \frac{\partial v}{\partial \Delta n} = \frac{\partial E}{\partial \Delta n} \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E}, \quad \frac{\partial v}{\partial M_0} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} + \sqrt{1 - e^2} \frac{1}{1 - e \cos E} \right).$$

Частные производные поправки к аргументу широты Δu по \sqrt{a} , Δn , e , M_0 и ω записываются в виде:

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial (\sqrt{a}, \Delta n, M_0, e)} = 2 \frac{\partial v}{\partial (\sqrt{a}, \Delta n, M_0, e)} (C_{us} \cos 2\varphi - C_{uc} \sin 2\varphi),$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial \omega} = 2(C_{us} \cos 2\varphi - C_{uc} \sin 2\varphi).$$

Частные производные поправки к радиусу орбиты Δr по \sqrt{a} , Δn , e , M_0 и ω записываются в виде:

$$\frac{\partial \Delta r}{\partial (\sqrt{a}, \Delta n, M_0, e)} = 2 \frac{\partial v}{\partial (\sqrt{a}, \Delta n, M_0, e)} (C_{rs} \cos 2\varphi - C_{rc} \sin 2\varphi),$$

$$\frac{\partial \Delta r}{\partial \omega} = 2(C_{rs} \cos 2\varphi - C_{rc} \sin 2\varphi).$$

Частные производные поправки к наклонению орбиты Δi по \sqrt{a} , Δn , e , M_0 и ω записываются в виде:

$$\frac{\partial \Delta i}{\partial (\sqrt{a}, \Delta n, M_0, e)} = 2 \frac{\partial v}{\partial (\sqrt{a}, \Delta n, M_0, e)} (C_{is} \cos 2\varphi - C_{ic} \sin 2\varphi),$$

$$\frac{\partial \Delta i}{\partial \omega} = 2(C_{is} \cos 2\varphi - C_{ic} \sin 2\varphi).$$

Частные производные поправки к аргументу широты u по \sqrt{a} , Δn , e , M_0 и ω записываются в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial(\sqrt{a}, \Delta n, M_0, e)} = \frac{\partial v}{\partial(\sqrt{a}, \Delta n, M_0, e)} + \frac{\partial \Delta u}{\partial(\sqrt{a}, \Delta n, M_0, e)}, \quad \frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \omega} + 1.$$

Частные производные радиуса орбиты r по \sqrt{a} , Δn , e , M_0 и ω записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \sqrt{a}} &= 2\sqrt{a}(1 - e \cos E) + (\sqrt{a})^2 e \sin E \frac{\partial E}{\partial \sqrt{a}} + \frac{\partial \Delta r}{\partial \sqrt{a}}, \\ \frac{\partial r}{\partial \Delta n} &= (\sqrt{a})^2 e \sin E \frac{\partial E}{\partial \Delta n} + \frac{\partial \Delta r}{\partial \Delta n}, \quad \frac{\partial r}{\partial M_0} = (\sqrt{a})^2 e \sin E \frac{\partial E}{\partial M_0} + \frac{\partial \Delta r}{\partial M_0}, \\ \frac{\partial r}{\partial e} &= -(\sqrt{a})^2 \left(\cos E - e \sin E \frac{\partial E}{\partial e} \right) + \frac{\partial \Delta r}{\partial e}, \quad \frac{\partial r}{\partial \omega} = \frac{\partial \Delta r}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{\mathbf{q}} = (\sqrt{a}, \Delta n, M_0, e, \omega)^T$, тогда частные производные компонент вектора положения в плоскости орбиты \tilde{x} и \tilde{y} по $\tilde{\mathbf{q}}$ записываются в виде:

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \frac{\partial r}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \cos u - r \frac{\partial u}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \sin u, \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \frac{\partial r}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \sin u + r \frac{\partial u}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \cos u.$$

Частные производные компоненты вектора положения x по вектору \mathbf{q} записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \cos \Omega - \sin \Omega \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \cos i - \tilde{y} \sin i \frac{\partial \Delta i}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \right), \\ \frac{\partial x}{\partial i_0} &= \tilde{y} \sin i \sin \Omega, \quad \frac{\partial x}{\partial \dot{i}} = \tilde{y} \sin i \sin \Omega \Delta t, \quad \frac{\partial x}{\partial \Omega_0} = -y, \quad \frac{\partial x}{\partial \dot{\Omega}} = -y \Delta t, \\ \frac{\partial x}{\partial C_{us}} &= -\sin 2\varphi (\tilde{y} \cos \Omega + \tilde{x} \cos i \sin \Omega), \\ \frac{\partial x}{\partial C_{uc}} &= -\cos 2\varphi (\tilde{y} \cos \Omega + \tilde{x} \cos i \sin \Omega), \\ \frac{\partial x}{\partial C_{rs}} &= \sin 2\varphi \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial x}{\partial C_{rc}} = \cos 2\varphi \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial x}{\partial C_{is}} = y' \sin \Omega \sin i \sin 2\varphi, \\ \frac{\partial x}{\partial C_{ic}} &= \tilde{y} \sin \Omega \sin i \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Частные производные компоненты вектора положения y по вектору \mathbf{q} записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \sin \Omega + \cos \Omega \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \cos i - \tilde{y} \sin i \frac{\partial \Delta i}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \right), \\ \frac{\partial y}{\partial i_0} &= -\tilde{y} \sin i \cos \Omega, \quad \frac{\partial y}{\partial \dot{i}} = -\tilde{y} \sin i \cos \Omega \Delta t, \quad \frac{\partial y}{\partial \Omega_0} = x, \quad \frac{\partial y}{\partial \dot{\Omega}} = x \Delta t, \\ \frac{\partial y}{\partial C_{us}} &= -\sin 2\varphi (\tilde{y} \sin \Omega - \tilde{x} \cos i \cos \Omega), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial C_{uc}} = -\cos 2\varphi (\tilde{y} \sin \Omega - \tilde{x} \cos i \cos \Omega),$$

$$\frac{\partial y}{\partial C_{rs}} = \sin 2\varphi \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial y}{\partial C_{rc}} = \cos 2\varphi \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial y}{\partial C_{is}} = -\tilde{y} \cos \Omega \sin i \sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial C_{ic}} = -\tilde{y} \cos \Omega \sin i \cos 2\varphi.$$

Частные производные компоненты вектора положения z по вектору \mathbf{q} записываются в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \sin i + \tilde{y} \cos i \frac{\partial \Delta i}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}, \quad \frac{\partial z}{\partial i_0} = \tilde{y} \cos i, \quad \frac{\partial z}{\partial \dot{i}} = \tilde{y} \cos i \Delta t, \quad \frac{\partial z}{\partial \Omega_0} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \dot{\Omega}} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial C_{us}} = \tilde{y} \sin 2\varphi \sin i, \quad \frac{\partial z}{\partial C_{uc}} = \tilde{x} \cos 2\varphi \sin i, \quad \frac{\partial z}{\partial C_{rs}} = \sin 2\varphi \frac{z}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial C_{rc}} = \cos 2\varphi \frac{z}{r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial C_{is}} = \tilde{y} \cos i \sin 2\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial C_{ic}} = \tilde{y} \cos i \cos 2\varphi.$$

3. Первоначальное определение эфемериды навигационного спутника по вектору кинематических параметров

Пусть имеются радиус-вектор $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ и вектор скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ НКА в момент времени t_{oe} во вращающейся гринвичской системе координат WGS-84. Рассчитывается радиус-вектор $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})^T$ и вектор скорости $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_x, \tilde{v}_y, \tilde{v}_z)^T$ в инерциальной системе координат с использованием соотношения:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\Omega}_e & 0 \\ \dot{\Omega}_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{r}.$$

Найдем неизвестные шесть параметров модели движения GPS: $M_0, e, \sqrt{a}, \Omega_0, i_0, \omega$. Эти шесть параметров и нулевые значения девяти поправок $\Delta n, \dot{\Omega}, \dot{i}, C_{uc}, C_{us}, C_{rc}, C_{rs}, C_{ic}, C_{is}$ являются неплохим начальным приближением для задачи их численного определения.

Найдем единичный вектор нормали $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)^T$, направленный вдоль векторного интеграла площадей:

$$\mathbf{c} = \frac{\tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{v}}}{C},$$

где $C = |\tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{v}}|$ – модуль векторного интеграла площадей.

Рассчитывается фокальный параметр $p = \frac{C^2}{\mu}$ и интеграл энергии

$$h = |\tilde{\mathbf{v}}|^2 - \frac{2\mu}{|\tilde{\mathbf{r}}|}.$$

Эксцентриситет орбиты равен $e = \sqrt{1 + hC^2/\mu^2}$.

Квадратный корень из полуоси орбиты определяется соотношением $(\sqrt{a})^2 = p/1 - e^2$.

Наклонение орбиты i_0 и долготу восходящего узла Ω_0 можно вычислить с помощью формул

$$i_0 = \arccos c_z, \quad \sin \Omega_0 = \frac{c_x}{\sin i_0}, \quad \cos \Omega_0 = -\frac{c_y}{\sin i_0}.$$

Вычислим истинную аномалию v_0 , используя соотношения:

$$\sin v = \frac{v_r}{e} \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \quad \cos v = \frac{1}{e} \left(v_n \sqrt{\frac{p}{\mu}} - 1 \right), \quad \text{где } v_r = \left(\tilde{\mathbf{v}}, \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{|\tilde{\mathbf{r}}|} \right), \quad v_n = \left| \tilde{\mathbf{v}} - v_r \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{|\tilde{\mathbf{r}}|} \right|.$$

Эксцентрисическая аномалия рассчитывается из соотношения

$$E = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{v}{2} \right).$$

Средняя аномалия рассчитывается по формуле Кеплера

$$M_0 = E - e \sin E.$$

Аргумент широты u определяется из следующих соотношений:

$$\cos u = \left(\mathbf{r}_\Omega, \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{|\tilde{\mathbf{r}}|} \right), \quad \sin u = \left| \mathbf{r}_\Omega \times \frac{\tilde{\mathbf{r}}}{|\tilde{\mathbf{r}}|} \right| \text{sign } \tilde{z}, \quad (0 \leq u \leq 2\pi),$$

где $\mathbf{r}_\Omega = (\cos \Omega_0, \sin \Omega_0, 0)$ – единичный вектор, направленный из притягивающего центра в восходящий узел.

Аргумент перигея рассчитывается из соотношения $\omega = u - v$.

4. Определение параметров аналитической модели с использованием метода наименьших квадратов

Для расчета неизвестных параметров \mathbf{q} (1) аналитической модели движения НКА используется итерационный МНК [4]. Входными данными для уточнения \mathbf{q} является матрица (вектор) $\Psi_{\text{изм}}$ размерности $3n \times 1$, составленная из компонент n измеренных векторов положения:

$$\Psi_{\text{изм}} = \left(x_{\text{изм}}^1 \quad y_{\text{изм}}^1 \quad z_{\text{изм}}^1 \quad \cdots \quad x_{\text{изм}}^n \quad y_{\text{изм}}^n \quad z_{\text{изм}}^n \right)^T.$$

На нулевом шаге итераций определяется вектор \mathbf{q}_0 с использованием алгоритма первоначального определения (п.3).

На k -ом шаге итераций определяется матрица $\Delta\Psi^k = \Psi_{\text{расч}}^k - \Psi_{\text{изм}}$, с использованием расчетных значений $\Psi_{\text{расч}}$ по параметрам \mathbf{q}_{k-1} .

Рассчитывается матрица Якоби $\frac{\partial\Psi_{\text{расч}}^k}{\partial\mathbf{q}_{k-1}}$ размерности $15 \times 3n$ по формулам, приведенным в п. 2.

Составляется нормальное уравнение МНК и определяется вектор \mathbf{q}_k :

$$\left(\frac{\partial\Psi_{\text{расч}}^k}{\partial\mathbf{q}_{k-1}} \right) \cdot \left(\frac{\partial\Psi_{\text{расч}}^k}{\partial\mathbf{q}_{k-1}} \right)^T \cdot \mathbf{q}_k = - \left(\frac{\partial\Psi_{\text{расч}}^k}{\partial\mathbf{q}_{k-1}} \right) (\Delta\Psi^k)^T.$$

Итерации производятся до тех пор, пока функционал

$$\Phi = \left\| \Delta\Psi^k \right\| - \left\| \Delta\Psi^{k-1} \right\| < \varepsilon, \quad (2)$$

где ε – наперед заданная величина.

5. Результаты численного моделирования

Для проведения вычислительных экспериментов использованы эфемеридные данные, содержащие параметры движения НКА GPS № 1. Эфемериды (табл. 1) представляются в формате RINEX [5] на сайте Информационно-аналитического центра ГЛОНАСС [6].

Таблица 1

Эфемеридные данные НКА GPS № 1

Файл:

<ftp://ftp.glonass-iac.ru/MCC/BRDC/2013/BRDC3230.13n>

```
// 1 13 11 18 23 59 44.0 9.535718709230D-05 3.183231456205D-12 0.000000000000D+00
// 1.000000000000D+01 2.375000000000D+00 4.999851199727D-09 4.732565967854D-01
// 1.043081283569D-07 2.529692952521D-03 4.636123776436D-06 5.153677080154D+03
// 1.727840000000D+05 2.980232238770D-08 1.687554936180D+00 1.676380634308D-08
// 9.599762955288D-01 2.909062500000D+02 4.318286410191D-01-8.242843740902D-09
// 6.107397226840D-11 1.000000000000D+00 1.767000000000D+03 0.000000000000D+00
// 2.000000000000D+00 0.000000000000D+00 7.916241884232D-09 1.000000000000D+01
// 1.655100000000D+05 4.000000000000D+00
```

Используя аналитическую модель движения НКА GPS (п. 1), мы получили вектора положения и скорости на интервале времени два часа с шагом 4 минуты. Полученные вектора положения и скорости представлены в табл. 2. По векторам положения построена трасса полета навигационного спутника (рис. 2).



Рис. 2. Трасса полета НКА GPS

Таблица 2

Вектора положений и скорости

Время, с	x , м	y , м	z , м	v_x , м/с	v_y , м/с	v_z , м/с
0	-13295121.9	15262969.8	17104404.3	-0.420	-2190.854	1961.488
240	-13298342.4	14730208.6	17564514.6	-26.753	-2248.324	1872.373
480	-13308118.7	14184018.3	18002959.4	-55.029	-2302.743	1780.961
720	-13324901.2	13625145.2	18419201.1	-85.114	-2353.996	1687.366
960	-13349107.1	13054362.3	18812729.7	-116.868	-2401.973	1591.705
1200	-13381119.7	12472467.9	19183063.6	-150.145	-2446.577	1494.097
1440	-13421286.4	11880282.9	19529750.1	-184.795	-2487.714	1394.664
1680	-13469918.6	11278649.3	19852366.0	-220.663	-2525.302	1293.529
1920	-13527289.8	10668427.9	20150518.1	-257.593	-2559.267	1190.819
2160	-13593635.2	10050496.3	20423843.5	-295.422	-2589.544	1086.662
2400	-13669151.0	9425746.3	20672010.3	-333.985	-2616.078	981.186
2640	-13753993.3	8795082.3	20894717.9	-373.116	-2638.821	874.523
2880	-13848278.3	8159418.4	21091697.1	-412.645	-2657.738	766.806
3120	-13952081.2	7519676.5	21262711.0	-452.403	-2672.800	658.167
3360	-14065436.2	6876784.1	21407554.6	-492.217	-2683.991	548.743
3600	-14188336.3	6231671.5	21526055.4	-531.917	-2691.301	438.667
3840	-14320733.2	5585269.9	21618073.4	-571.329	-2694.733	328.076
4080	-14462537.5	4938509.0	21683501.7	-610.283	-2694.298	217.108
4320	-14613618.8	4292314.6	21722265.9	-648.609	-2690.017	105.898
4560	-14773806.0	3647606.3	21734324.7	-686.137	-2681.919	-5.415
4800	-14942887.4	3005295.3	21719669.6	-722.701	-2670.046	-116.694
5040	-15120611.9	2366282.3	21678325.2	-758.135	-2654.446	-227.803
5280	-15306689.2	1731454.8	21610348.8	-792.280	-2635.177	-338.604
5520	-15500790.5	1101685.4	21515830.6	-824.977	-2612.307	-448.962
5760	-15702549.7	477829.4	21394893.2	-856.070	-2585.912	-558.741
6000	-15911564.1	-139277.0	21247691.9	-885.412	-2556.076	-667.806
6240	-16127395.6	-748819.1	21074413.9	-912.856	-2522.892	-776.024
6480	-16349571.9	-1350005.5	20875278.6	-938.262	-2486.462	-883.262
6720	-16577587.6	-1942069.9	20650536.9	-961.496	-2446.894	-989.389
6960	-16810906.0	-2524272.9	20400471.1	-982.430	-2404.305	-1094.276

С использованием алгоритма п. 3 построено начальное приближение (табл. 3) параметров аналитической модели по кинематическому вектору положения и скорости во вращающейся системе координат на момент времени $t_{oe} = 0$:

Таблица 3

Вектор начального приближения

	Значение	Размерность	Наименование
e	0.00251233461786436	–	эксцентриситет
\sqrt{a}	5153.64820077003	м ^{1/2}	квадр. корень из полуоси
M_0	0.467302042897912	рад	средняя аномалия
ω	0.437814499965841	рад	аргумент перигея
i_0	0.959993951538914	рад	наклонение
Ω_0	1.68758249879023	рад	долгота восходящего узла

Для начального приближения значения $\Delta n, \dot{\Omega}, \dot{i}, C_{uc}, C_{us}, C_{rc}, C_{rs}, C_{ic}, C_{is}$ принимаются равными нулю.

Методом наименьших квадратов (п. 4) проведена обработка измерительной информации (табл. 4). Для $\varepsilon = 10^{-5}$ потребовалось три итерации. На первом шаге итерации функционал оценки (2) $\Phi \sim 10^8$. В табл. 4 приведены невязки векторов положения и скорости, полученные на первом шаге итерации с использованием начального приближения. На третьем шаге итерации невязки составляют менее 1 мм по положению и 1 мм/с по скорости. Значение функционала оценки составляет величину порядка 10^{-7} .

Таблица 4

Невязки по векторам положения и скорости

t_{oe}	x	y	z	v_x	v_y	v_z
0.0	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000
240.0	0.856	-0.941	0.949	0.007	-0.008	0.008
480.0	3.496	-3.889	3.672	0.015	-0.017	0.015
720.0	8.023	-9.018	7.977	0.023	-0.026	0.021
960.0	14.528	-16.486	13.660	0.031	-0.036	0.026
1200.0	23.093	-26.430	20.508	0.040	-0.047	0.031
1440.0	33.793	-38.967	28.306	0.049	-0.058	0.034
1680.0	46.690	-54.193	36.834	0.058	-0.069	0.037
1920.0	61.840	-72.183	45.870	0.068	-0.081	0.038
2160.0	79.290	-92.990	55.197	0.078	-0.093	0.039
2400.0	99.078	-116.647	64.600	0.087	-0.105	0.039
2640.0	121.237	-143.165	73.872	0.097	-0.116	0.038
2880.0	145.791	-172.534	82.812	0.107	-0.128	0.036
3120.0	172.756	-204.726	91.234	0.117	-0.140	0.034
3360.0	202.144	-239.694	98.960	0.128	-0.151	0.031

3600.0	233.959	-277.371	105.830	0.138	-0.163	0.027
3840.0	268.199	-317.676	111.699	0.148	-0.173	0.022
4080.0	304.858	-360.513	116.437	0.158	-0.184	0.017
4320.0	343.922	-405.772	119.936	0.168	-0.193	0.012
4560.0	385.373	-453.330	122.104	0.178	-0.203	0.006
4800.0	429.186	-503.055	122.871	0.187	-0.212	0.000
5040.0	475.331	-554.806	122.186	0.197	-0.220	-0.006
5280.0	523.772	-608.436	120.020	0.207	-0.227	-0.012
5520.0	574.468	-663.793	116.363	0.216	-0.234	-0.018
5760.0	627.369	-720.720	111.227	0.225	-0.240	-0.024
6000.0	682.421	-779.060	104.643	0.234	-0.246	-0.030
6240.0	739.563	-838.654	96.660	0.242	-0.251	-0.036
6480.0	798.727	-899.347	87.347	0.251	-0.255	-0.041
6720.0	859.836	-960.983	76.789	0.259	-0.259	-0.046
6960.0	922.808	-1023.414	65.087	0.266	-0.262	-0.051

Результаты вычислительного эксперимента показывают высокую эффективность предложенных алгоритмов и методов уточнения параметров движения навигационных спутников по кинематическим векторам положений.

Исходный код программ размещен на ftp-сервере ftp://ftp.kiam1.rssi.ru/pub/gps/src/tuchin_sergeeva_preprint.c.

Выводы

1. Работа содержит описание аналитической модели движения навигационного спутника. Модель движения, описанная в интерфейсном документе, содержит только формулы для расчета вектора положения. В п. 1 приведены соотношения для расчета вектора скорости навигационного спутника.
2. Приведены формулы расчета матрицы Якоби вектора положения по пятнадцати параметрам аналитической модели.
3. Приведен алгоритм МНК для уточнения параметров аналитической модели по набору измеренных векторов положения.
4. В работе приведен алгоритм поиска начального приближения неизвестных параметров модели.
5. Разработан программный комплекс на языке Си и приведены результаты численного моделирования на основании реальных эфемеридных данных, представленных в сети Интернет.

Библиографический список

1. Интерфейсный контрольный документ GPS Draft IS-GPS-800. 19 april 2006. URL: <ftp://ftp.kiam1.rssi.ru/pub/gps/lib/icd/icd800.pdf>
2. WGS-84. Department of defense World Geodetic System 1984. Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems. 3 January 2000 URL: <http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/wgs84fin.pdf>
3. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1990.
4. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1986.
5. RINEX. The Receiver Independent Exchange Format. Version 3.01 22 June 2009. URL: <ftp://ftp.kiam1.rssi.ru/pub/gps/lib/formats/rinex301.pdf>.
6. Информационно-аналитический центр ГЛОНАСС, г. Королев. URL: <http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/wgs84fin.pdf>

Юлия Ришатовна Сергеева
Студентка 6-го курса
механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: s.juli.r@mail.ru



Денис Андреевич Тучин
к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник
ИПМ им. М.В.Келдыша РАН
e-mail: den@kiam1.rssi.ru
http: www.kiam1.rssi.ru/~den

