



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 112 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Боровик Е.В., Краснов М.М.,
Рыков Ю.Г., Шалыга Д.К.**

Математическая модель и
численная методика расчёта
на основе ENO-схем
течений в каналах
переменного сечения с
горением

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Математическая модель и численная методика расчёта на основе ENO-схем течений в каналах переменного сечения с горением / Е.В.Боровик [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 112. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2016-112](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-112)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-112>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Е.В. Боровик, М.М. Краснов, Ю.Г. Рыков, Д.К. Шалыга

**Математическая модель и численная методика
расчёта на основе ENO-схем течений в каналах
переменного сечения с горением**

Москва — 2016

Боровик Е.В., Краснов М.М., Рыков Ю.Г., Шалыга Д.К.

Математическая модель и численная методика расчёта на основе ENO-схем течений в каналах переменного сечения с горением

В работе рассматривается модель решения одномерного течения газовой смеси в канале переменного сечения с горением. Строится вычислительная методика на основе ENO-схем высокого порядка. Особенностью алгоритма является использование решения задачи Римана для расширенной вследствие учёта горения системы уравнений газовой динамики, состоящей из шести уравнений. В целом работа имеет пропедевтический характер.

Ключевые слова: расширенная система уравнений Эйлера, задача Римана, горение, схемы ENO высокого порядка, канал переменного сечения

Ekaterina Vladimirovna Borovik, Mikhail Mikhailovich Krasnov, Yuri Germanovich Rykov, Dmitriy Konstantinovich Shalyga

The mathematical model and numerical approach based on ENO schemes for the flows in variable cross-section channels with combustion

In this paper it is considered the model of solution for gas mixture one-dimensional flow in the channel of variable cross-section with combustion. The use of the Riemann problem solution for the extended system of gasdynamic equations, consisting of six ones due account of the combustion, is the feature of the algorithm. The numerical method based on high order ENO schemes is built. In general, the paper has a propaedeutic nature.

Key words: extended system of Euler equations, Riemann problem, combustion, high-order ENO schemes, channel of variable cross-section

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

Введение

В настоящем препринте рассматривается модельная задача, предложенная А.М. Липановым [1], которая, с одной стороны, является одномерной задачей, а с другой, тем не менее, имеет практическое применение при расчёте полета устройств, использующих в качестве движителя ракетный двигатель твёрдого топлива (РДТТ), см., например, [2]. Топливом для модельного РДТТ, работу которого предполагается рассчитать, служит набор пороховых шашек. Публикация имеет пропедевтический характер, поэтому рассматривает только математическую структуру соответствующей системы уравнений без полного учёта сопутствующих физических процессов и точных значений физических констант. Полный учёт физики дела, а также обобщение численной методики на многомерный случай будут постепенно реализовываться в последующих публикациях.

Стоит отметить, что получающаяся система уравнений фактически представляет собой систему уравнений газовой динамики в канале переменного сечения, в которую добавлены процессы горения. Таким образом, эта модельная задача может служить хорошим «полигоном» для отработки разнообразных численных методик решения задач газовой динамики с горением. Такие задачи возникают во многих областях, начиная от разработок гиперзвуковых летательных аппаратов, ракет на твёрдом топливе и кончая химическими превращениями при синтезе веществ в потоках углеводородов.

Рассматриваемый в работе РДТТ имеет прочный корпус, к переднему днищу которого передними торцами прикреплены несколько шашек. Каждая шашка имеет внутренний канал цилиндрической формы, кроме того, имеются зазоры и между шашками, однако их форма уже не будет цилиндрической, а будет иметь более сложную геометрию. Для инженерных расчётов является допустимым аппроксимировать получающиеся характеристики РДТТ указанного типа при помощи «базового» расчёта течения газа с горением в канале и последующего усреднения по каналам разного типа (внутри шашки, между шашками, между шашкой и стенкой двигателя и т.п.). При этом необходимо учитывать тот факт, что стенки канала в «базовом» расчёте являются твёрдым топливом и, по мере роста температуры, начинают гореть. То есть «базовый» расчёт является расчётом в канале переменного сечения, геометрия которого изменяется со временем.

Таким образом, рассмотрим РДТТ (см. рис. 1), состоящий из прямоугольного корпуса, который заканчивается соплом Лавала. В сопле Лавала установлена специальная заглушка, которая разрушается только при достаточно высоком заданном давлении. В прямоугольной части корпуса размещён набор пороховых шашек, горение которых призвано обеспечить РДТТ необходимую тягу. Перед заглушкой установлен воспламенитель, задачей которого является поджиг пороховых шашек. При детонации воспламенителя (предусмотрена такая мощность, которая сохранит целостность заглушки) в объёме корпуса формируется ударная волна, которая распространяется вдоль каналов разного типа в системе шашек и за счёт повышения температуры «организует» поджиг пороховых зарядов. Далее давление в системе повышается, заглушка разрушается и вследствие начинающегося истечения газов из сопла Лавала создается соответствующая тяга.

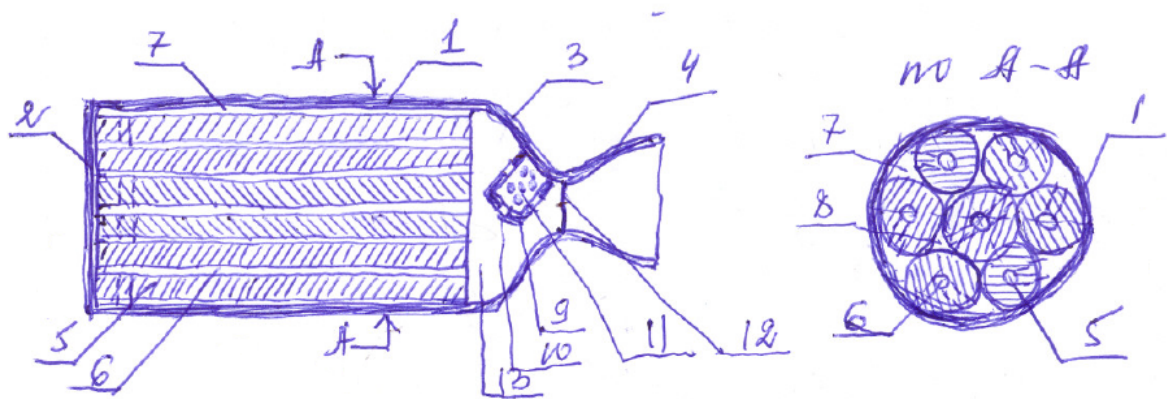


Рис. 1. Обозначение: 1 — обечайка корпуса двигателя, 2 — переднее днище двигателя, 3 — сопловое днище двигателя, переходящее в сопло, 4 — расширяющаяся часть сопла (конфузор), 5 — шашка твёрдотопливного заряда, 6 — канал шашки, 7 — зазор между наружной поверхностью шашки и внутренней поверхностью корпуса двигателя, 8 — зазор между шашками, 9 — корпус воспламенителя, 10 — отверстие в корпусе воспламенителя, 11 — заряд дымного ружейного пороха (ДРП), 12 — заглушка, 13 — предсопловой объём.

Целью настоящей работы является пропедевтическое описание математической модели и релевантной численной методики для расчёта процесса движения ударной волны в канале с горючими стенками, воспламенения и горения этих стенок и получение газодинамических характеристик по завершении процесса. Указанный набор характеристик играет основную роль для разработки инженерных методик оценки эффективности работы описанной разновидности РДТТ (см. [3], [4]).

1. Математическая постановка задачи

Основой математической модели рассматриваемой физической задачи является расширенная одномерная система уравнений Эйлера течения в канале переменного сечения:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U, x, t)}{\partial x} = G(U, x, t). \quad (1)$$

В уравнении (1) t обозначает время, а x — переменную по пространству вдоль РДТТ. При этом $x = 0$ соответствует зоне формирования ударной волны (границы шашки, ближайшей к воспламенителю), а $x = 1$ — торцу шашки, прикреплённому к торцу двигателя. Форма потока F и правая часть G определяют специфику задачи с горением.

Консервативные переменные U и компоненты $F(U, x, t)$ невязкой потоковой функции задаются в виде:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A\rho \\ A\rho u \\ AE \\ A\beta_1\rho \\ A\beta_2\rho \\ A\beta_3\rho \end{pmatrix}, \quad F(U, x, t) = \begin{pmatrix} A\rho u \\ \frac{(A\rho u)^2}{A\rho} + AP \\ \frac{A\rho u}{A\rho} (AE + AP) \\ A\beta_1\rho u \\ A\beta_2\rho u \\ A\beta_3\rho u \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где ρ — плотность газовой смеси;

u — скорость;

P — давление;

$E = \rho \left(\mathcal{E} + \frac{u^2}{2} \right)$ — полная энергия;

$\mathcal{E} = \frac{P + \rho_0 c_0^2}{\rho(\gamma - 1)} - \frac{c_0^2}{\gamma - 1}$ — внутренняя энергия;

γ — показатель адиабаты;

ρ_0, c_0 — некоторые постоянные, причём для идеального газа $c_0 = 0$;

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — концентрации продуктов горения;

A — площадь поперечного сечения канала шашки (при отсутствии горения постоянна).

При этом предполагается, что совокупность несущего газа и продуктов сгорания является смесью идеальных газов, а значит показатель адиабаты γ можно вычислить по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v}, \\ R &= \sum_{i=1}^3 \beta_i (R_i - R_0) + R_0, \\ c_v &= \sum_{i=1}^3 \beta_i (c_v^i - c_v^0) + c_v^0,\end{aligned}\tag{3}$$

где R — газовая постоянная смеси;

R_i , $i = \overline{0, 3}$ — газовые постоянные, принятые для компонент смеси;

c_p — удельная теплоёмкость при постоянном давлении для смеси;

c_v — удельная теплоёмкость при постоянном объёме для смеси;

c_v^i , $i = \overline{0, 3}$ — удельные теплоёмкости при постоянном объёме для компонент смеси.

В дальнейшем для упрощения формул будем использовать наблюдение, что γ представляет собой однородную по консервативным переменным u_1, u_4, u_5, u_6 функцию.

Поскольку площадь поперечного сечения канала шашки изменяется от момента начала горения с течением времени, то величина A есть функция переменных x и t . Она удовлетворяет сильно нелинейному уравнению типа Гамильтона-Якоби (см. [5]):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \tilde{u} P^\sigma \sqrt{4\pi A + \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2},\tag{4}$$

где константы \tilde{u} — скорость горения и $\sigma < 1$ определяются из физических соображений.

Запишем систему уравнений (1) в недивергентной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + F'_U(U, x, t) \frac{\partial U}{\partial x} = G(U, x, t) - F'_x(U, x, t),\tag{5}$$

где векторы правой части имеют вид:

$$G(U, x, t) = \begin{pmatrix} \rho_T \frac{\partial A}{\partial t} \delta_C \\ \delta_C P \frac{\partial A}{\partial x} + (1 - \delta_C) 2\tau_{TP} \sqrt{\frac{\pi}{A}} \\ \rho_T H_T \frac{\partial A}{\partial t} \delta_C + (1 - \delta_C) 2\alpha_{ДВ} (T - T_S) \sqrt{\frac{\pi}{A}} \\ \rho_T \frac{\partial A}{\partial t} \delta_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$F'_x(U, x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_0 c_0^2 \frac{\partial A}{\partial x} \\ \rho_0 c_0^2 u \frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

при этом δ_C — индикатор горения (см. [5]),

$$\delta_C = \begin{cases} 0, & \text{горения нет,} \\ 1, & \text{горение началось;} \end{cases}$$

ρ_T — плотность топлива;

τ_{TP} — коэффициент касательного напряжения трения, который определяется как (см. [6]):

$$\tau_{TP} = \frac{\rho u^2}{2} \cdot \frac{\lambda_{TP}}{4}, \quad \lambda_{TP} = 0.0032 + \frac{0.221}{\text{Re}^{0.237}}, \quad \text{Re} = \frac{\rho u}{\nu} d_{\text{ЭФ}};$$

λ_{TP} — коэффициент трения;

Re — число Рейнольдса;

ν — кинематическая вязкость;

$d_{\text{ЭФ}} = 2R$ — эффективный (внутренний) диаметр шашки;

$\alpha_{ДВ}$ — коэффициент теплоотдачи;

T — температура газа;

T_S — температура поверхности канала, которая растёт с течением времени;

$H_T = c_p T_p$ — тепловыделение при горении.

Система уравнений (1), записанная в виде (5), является нестрогой гиперболической системой, то есть матрица $F'_U(U, x, t)$ имеет кратные собственные числа, но в то же время система из её собственных векторов является полной.

Собственные числа матрицы $F'_U(U, x, t)$:

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = u, \quad \lambda_6 = u + c, \quad (7)$$

где скорость звука $c = \sqrt{\frac{\gamma P + \rho_0 c_0^2}{\rho}}$.

Отметим, что в системе (5), которая содержит как уравнения Эйлера, так и уравнения, описывающие процесс горения, скорость звука выражается точно так же, как и в газовой динамике. Этот факт есть следствие однородности функции γ (см. (3)).

Приведём выражения для левых l_i и правых r_i собственных векторов, $i = \overline{1, 6}$:

$$\begin{aligned} l_1 &= \left(\varepsilon \gamma'_0 + \frac{u^2}{2}(\gamma - 1) + uc + c_0^2; -(\gamma - 1)u - c; \gamma - 1; \varepsilon \gamma'_1; \varepsilon \gamma'_2; \varepsilon \gamma'_3 \right), \\ r_1 &= \left(1; u - c; \frac{u^2}{2} - uc + \frac{c^2 - c_0^2}{\gamma - 1}; \beta_1; \beta_2; \beta_3 \right), \\ l_2 &= \left(\frac{u^2}{2} - \frac{c^2 - c_0^2}{\gamma - 1}; -u; 1; 0; 0; 0 \right), \quad r_2 = \left(1; u; \frac{u^2}{2} - \frac{\varepsilon \gamma'_0 + c_0^2}{\gamma - 1}; 0; 0; 0 \right), \\ l_3 &= (-\beta_1; 0; 0; 1; 0; 0), \quad r_3 = \left(-\varepsilon \gamma'_1; -\varepsilon u \gamma'_1; 0; \varepsilon \gamma'_0 + c_0^2 - \frac{u^2}{2}(\gamma - 1); 0; 0 \right), \\ l_4 &= (-\beta_2; 0; 0; 0; 1; 0), \quad r_4 = \left(-\varepsilon \gamma'_2; -\varepsilon u \gamma'_2; 0; 0; \varepsilon \gamma'_0 + c_0^2 - \frac{u^2}{2}(\gamma - 1); 0 \right), \\ l_5 &= (-\beta_3; 0; 0; 0; 0; 1), \quad r_5 = \left(-\varepsilon \gamma'_3; -\varepsilon u \gamma'_3; 0; 0; 0; \varepsilon \gamma'_0 + c_0^2 - \frac{u^2}{2}(\gamma - 1) \right), \\ l_6 &= \left(\varepsilon \gamma'_0 + \frac{u^2}{2}(\gamma - 1) - uc + c_0^2; -(\gamma - 1)u + c; \gamma - 1; \varepsilon \gamma'_1; \varepsilon \gamma'_2; \varepsilon \gamma'_3 \right), \\ r_6 &= \left(1; u + c; \frac{u^2}{2} + uc + \frac{c^2 - c_0^2}{\gamma - 1}; \beta_1; \beta_2; \beta_3 \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\varepsilon = A \left(E - \frac{\rho u^2}{2} \right)$;

$$\gamma'_0 \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial u_1}, \quad \gamma'_{i-3} \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial u_i}, \quad i = 4, 5, 6.$$

Введём матрицу L , строки которой суть вектора l_i , и матрицу R , столбцы которой суть вектора r_i . Обозначим через L^{-1} матрицу, обратную к L . Для системы уравнений Эйлера в отсутствие горения при соответствующей нормировке собственных векторов верно равенство $L^{-1} = R$. Наличие процессов горения влечёт за собой потерю строгой гиперболичности системы, и это равенство нарушается.

Для решения совокупной системы (1) и (4) используется метод расщепления. А именно, используя значение давления P с предыдущего шага, решаем уравнения (4), а далее при помощи соответствующего ENO-алгоритма переходим к решению системы (1), см. раздел 3.

Заметим, что так как нелинейное уравнение (4) не имеет сильных особенностей, то для него справедливо характеристическое представление:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -\frac{\tilde{u}P^\sigma A_x}{\sqrt{4\pi A + A_x^2}}, \\ \dot{A} = \tilde{u}P^\sigma \frac{4\pi A}{\sqrt{4\pi A + A_x^2}}, \\ \dot{A}_x = \tilde{u}P_x^\sigma \sqrt{4\pi A + A_x^2} + \frac{2\pi A_x \tilde{u}P^\sigma}{\sqrt{4\pi A + A_x^2}}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Система (9) решается методами Рунге-Кутты высокого порядка, что позволяет гармонично включить её в общую методологию решения системы (1) (см. раздел 3). При использовании иных численных методов необходимо контролировать желаемый порядок точности выбранной численной схемы.

2. О модификации решения задачи Римана

В данном разделе мы покажем, что решение задачи Римана для системы (5) в предположении, что правые части обращаются в ноль, может быть построено на основе решения задачи Римана для обычной газовой динамики. Для газовой динамики в фазовом пространстве определены три семейства простых волн, из которых строится решение задачи Римана, рис.2.

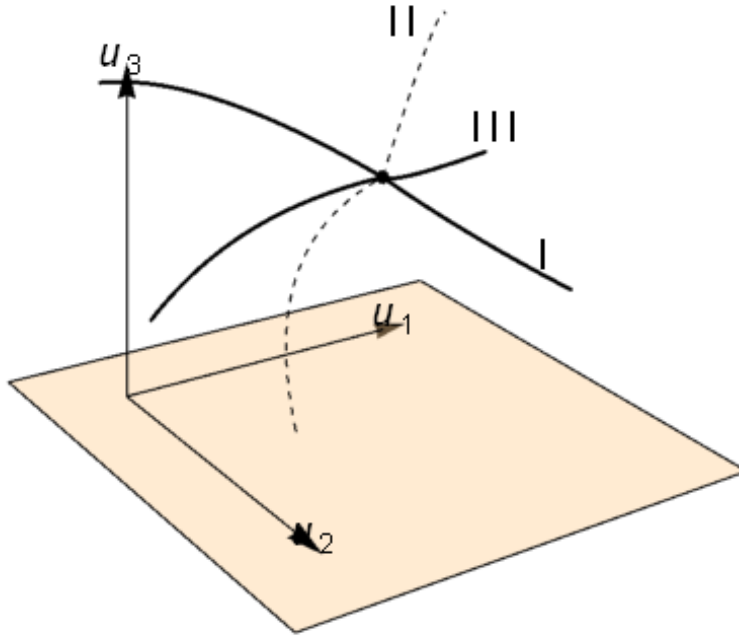


Рис. 2. Семейства простых волн решения задачи Римана для обычной газовой динамики: I и III — ударные волны и волны разрежения, II — контактный разрыв

Для получения численного решения системы (1), записанной в форме (5), требуется выписать решение задачи Римана для системы (5) в предположении, что правые части тождественно равны нулю. Сначала изучим поведение соответствующих волн разрежения и ударных волн (см. [7], [8]).

2.1. Волны разрежения

В консервативных переменных (2) скорость звука s имеет такое же выражение, как и в случае уравнений Эйлера, за одним исключением. Величина γ теперь не является постоянной, а вычисляется по формуле:

$$\gamma = 1 + \frac{R_0 u_1 + (R_1 - R_0) u_4 + (R_2 - R_0) u_5 + (R_3 - R_0) u_6}{c_v^0 u_1 + (c_v^1 - c_v^0) u_4 + (c_v^2 - c_v^0) u_5 + (c_v^3 - c_v^0) u_6}. \quad (10)$$

Волны разрежения порождаются только векторами r_1 и r_6 , поскольку остальные векторы относятся к собственным значениям $\lambda = u$, для которых соответствующие им простые волны являются контактными разрывами. Выражения для первых трёх компонент векторов r_1 и r_6 совпадают с компонентами соответствующих им векторов для обычных уравнений газовой динамики. Покажем, что вдоль решений системы уравнений в

фазовой плоскости для волн разрежения, соответствующих системе (5), величина γ остаётся постоянной. В этих системах уравнений ($\dot{U} \parallel r_1$ или $\dot{U} \parallel r_6$) выполняются соотношения:

$$\frac{du_i}{du_1} = \frac{u_i}{u_1}, \quad i = 4, 5, 6, \quad (11)$$

решением которых являются зависимости $u_i = C_i u_1$, где C_i — некоторые постоянные. Тогда из свойства однородности (10) и получаем требуемое утверждение. Таким образом, форма проекции на подпространство (u_1, u_2, u_3) кривых в фазовом пространстве, соответствующих волнам разрежения, совпадает с формой кривых для обычной газовой динамики, но со своим значением γ , которое зависит от начальной точки траектории волн разрежения на фазовой плоскости.

2.2. Ударные волны

Описание ударных волн для системы (5) следует из соотношений Ренкина-Гюгонио:

$$s(U - U^-) = F(U, x, t) - F(U^-, x, t), \quad (12)$$

где s — скорость распространения разрыва. Более подробно, справедливы формулы:

$$s \begin{pmatrix} u_1 - u_1^- \\ u_2 - u_2^- \\ u_3 - u_3^- \\ u_4 - u_4^- \\ u_5 - u_5^- \\ u_6 - u_6^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_2}{u_1} + (\gamma - 1) \left(u_3 - \frac{u_2^2}{2u_1} \right) + c_0^2(u_1 - A\rho_0) - \{\dots\}^- \\ \frac{u_2}{u_1} \left[u_3 + (\gamma - 1) \left(u_3 - \frac{u_2^2}{2u_1} \right) + c_0^2(u_1 - A\rho_0) \right] - \{\dots\}^- \\ \frac{u_2}{u_1} - u_4^- \frac{u_2^-}{u_1^-} \\ \frac{u_2}{u_1} - u_5^- \frac{u_2^-}{u_1^-} \\ \frac{u_2}{u_1} - u_6^- \frac{u_2^-}{u_1^-} \end{pmatrix} \quad (13)$$

где через $\{\dots\}^-$ обозначено соответствующее текущей строчке выражение, но взятое при значении консервативных переменных $U = U^-$. Напомним, что в соотношениях (13) γ является однородной функцией переменных u_1, u_4, u_5, u_6 .

Учитывая первое уравнение из системы (13), последние три уравнения этой системы могут быть записаны в следующей форме:

$$\left(\frac{u_2}{u_1} - \frac{u_2^-}{u_1^-} \right) \cdot (u_i u_1^- - u_1 u_i^-) = 0, \quad i = 4, 5, 6. \quad (14)$$

Исходя из этого, можно сразу выделить два крупных класса решений системы (13), а именно:

1. решения, при которых $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2^-}{u_1^-}$;
2. решения, при которых $\frac{u_i}{u_1} = \frac{u_i^-}{u_1^-}$, $i = 4, 5, 6$.

Вспоминая выражения для консервативных переменных (2), заключаем, что решения первого класса — это такие разрывные решения, на которых непрерывна функция скорости u , то есть это контактные разрывы. При этом на значения переменных u_4 , u_5 , u_6 не накладывается никаких дополнительных ограничений, и форма контактного разрыва определяется из первых трёх уравнений (13), то есть совпадает с кривой контактного разрыва в фазовом пространстве для обыкновенной газовой динамики. Единственное отличие состоит в том, что конкретная величина γ справа и слева от контактного разрыва теперь определяется через консервативные переменные u_1 , u_4 , u_5 , u_6 или через концентрации β_1 , β_2 , β_3 .

Для решений второго класса величина γ сохраняется при переходе через разрыв, см. формулу (10). Поэтому первые три уравнения системы (13) определяют решения в виде ударных волн, соответствующих семействам с максимальным и минимальным собственными числами. Эти траектории в фазовом пространстве будут идентичны траекториям, полученным для обычной газовой динамики (принимая во внимание непрерывность функции A , см. (9)) для конкретного значения γ , которое определяется значениями U^- .

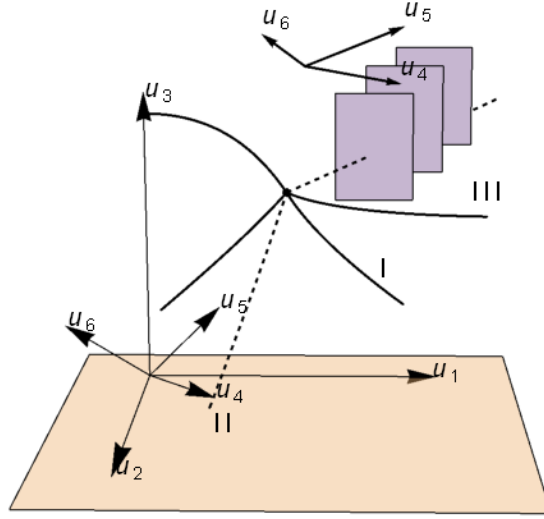


Рис. 3. Семейства простых волн решения задачи Римана для расширенной газовой динамики: I и III — ударные волны и волны разрежения, II плюс \mathbb{R}^3 — контактные разрывы

Остаётся проверить условия устойчивости (см. [7], [9]). Поскольку рассматриваемая система уравнений не является строго гиперболической, то для разрывных решений должны выполняться несколько более слабые условия устойчивости, чем для строго гиперболических систем [9]. А именно, для разрывов семейств, соответствующих конкретному собственному числу, должны выполняться неравенства:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 = u - c & \begin{cases} s \leq \lambda_1^- \leq \lambda_2^- \leq \dots \leq \lambda_6^- \\ \lambda_1^+ \leq s \leq \lambda_2^+ \leq \dots \leq \lambda_6^+ \end{cases} \\
 \lambda_2 = u & \begin{cases} \lambda_1^- \leq s \leq \lambda_2^- \leq \dots \leq \lambda_6^- \\ \lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ \leq s \leq \lambda_3^+ \leq \dots \leq \lambda_6^+ \end{cases} \\
 \lambda_3 = u & \begin{cases} \lambda_1^- \leq \lambda_2^- \leq s \leq \lambda_3^- \leq \dots \leq \lambda_6^- \\ \lambda_1^+ \leq \lambda_2^+ \leq \lambda_3^+ \leq s \leq \lambda_4^+ \leq \dots \leq \lambda_6^+ \end{cases} \\
 \lambda_4 = u & \begin{cases} \lambda_1^- \leq \dots \leq \lambda_3^- \leq s \leq \lambda_4^- \leq \dots \leq \lambda_6^- \\ \lambda_1^+ \leq \dots \leq \lambda_4^+ \leq s \leq \lambda_5^+ \leq \lambda_6^+ \end{cases} \\
 \lambda_5 = u & \begin{cases} \lambda_1^- \leq \dots \leq \lambda_4^- \leq s \leq \lambda_5^- \leq \lambda_6^- \\ \lambda_1^+ \leq \dots \leq \lambda_5^+ \leq s \leq \lambda_6^+ \end{cases} \\
 \lambda_6 = u + c & \begin{cases} \lambda_1^- \leq \dots \leq \lambda_5^- \leq s \leq \lambda_6^- \\ \lambda_1^+ \leq \dots \leq \lambda_6^+ \leq s \end{cases}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Непосредственной подстановкой можно легко убедиться, что все условия устойчивости выполнены.

Таким образом, решение задачи Римана для системы (5) в предположении, что правые части тождественно равны нулю, может быть получено путём соответствующей модификации решения задачи Римана для системы уравнений обычной газовой динамики (см. [8]).

3. Вычислительный алгоритм по методике ENO

3.1. Сетки и разделённые разности

Описанные ниже алгоритм основан на работе [10].

Расчёт будем вести на некотором отрезке $[a, b]$, на котором определим две неравномерные сетки:

$$X : x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M, \quad (16)$$

$$X_h : a = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{M-1/2} < x_{M+1/2} = b \quad (17)$$

с шагами $h_m = x_{m+1} - x_m$;
 где $x_m = \frac{x_{m-1/2} + x_{m+1/2}}{2}$, $m = \overline{1, M}$,
 $h = \max_{1 \leq m \leq M} h_m$.

Определим множество

$$\mathfrak{I}_m = [x_{m-1/2}, x_{m+1/2}], \quad m = \overline{1, M}. \quad (18)$$

Пусть k обозначает порядок аппроксимации конструируемой разностной схемы. Будем считать, что в центрах x_m ячеек \mathfrak{I}_m заданы средние по ячейкам U_m значения неизвестных функций U . Определим «разделённые разности» порядка $l \geq 1$ для произвольной сеточной функции $\{\varphi_m\}$, определённой как средние по \mathfrak{I}_m для величины φ , при помощи индуктивного соотношения

$$D_\varphi^1 [x_{m-1/2}, x_{m+1/2}] \equiv \varphi_m;$$

$$\begin{aligned} D_\varphi^l [x_{m-1/2}, \dots, x_{m+l-1/2}] &\equiv \\ &\equiv \frac{D_\varphi^{l-1} [x_{m+1/2}, \dots, x_{m+l-1/2}] - D_\varphi^{l-1} [x_{m-1/2}, \dots, x_{m+l-3/2}]}{x_{m+l-1/2} - x_{m-1/2}} \end{aligned} \quad (19)$$

или в эквивалентных обозначениях

$$D_\varphi^1[\mathfrak{J}_m] \equiv \varphi_m; \quad (20)$$

$$D_\varphi^l[\mathfrak{J}_m, \dots, \mathfrak{J}_{m+l-1}] \equiv \frac{D_\varphi^{l-1}[\mathfrak{J}_m, \dots, \mathfrak{J}_{m+l-1}] - D_\varphi^{l-1}[\mathfrak{J}_m, \dots, \mathfrak{J}_{m+l-2}]}{x_{m+l-1/2} - x_{m-1/2}}.$$

Введённые неравномерные сетки X и X_h дополняются фиктивными ячейками слева и справа, что даёт расширенные сетки при $k > 1$:

$$X^+ : x_{2-k} < \dots < x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M < \dots < x_{M+k-1} \quad \text{и}$$

$$X_h^+ : x_{3/2-k} < \dots < a = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{M-1/2} < x_{M+1/2} =$$

$$= b < \dots < x_{M+k-1/2}.$$

При расширении сетки влево (и вправо) добавляются точки с шагом

$$h_{m-k} = h_m = x_{m+1/2} - x_{m-1/2},$$

где $h_{M+k} = h_M$ соответственно, $k > 1$, $1 \leq m \leq M$.

Для вычисления значений в центрах ячеек расширенной сетки X^+ воспользуемся полиномиальной экстраполяцией (полином Лагранжа). При оценке погрешности экстраполяции можно применять правило Рунге.

Полином строится по формуле:

$$L_k(x) = \sum_{i=1}^M y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

причём значения функций в добавленных точках суть значение в них данного полинома. Заметим, что количество точек интерполяции напрямую зависит от требуемой точности вычислений.

3.2. Начальные и граничные значения

Неизвестные функции содержатся в матрице U_m порядка $6 \times M + 2(k-1)$ (с учётом сетки X^+), так что: $U_m^1 = (A\rho)_m$, $U_m^2 = (A\rho u)_m$, $U_m^3 = (AE)$, $U_m^4 = (A\beta_1\rho)_m$, $U_m^5 = (A\beta_2\rho)_m$, $U_m^6 = (A\beta_3\rho)_m$.

Начальные функции $U_{t=0}$ задаются значениями в точках неравномерной сетки X . Задание продолжений на расширенные сетки X^+ , X_h^+ требует аккуратности в применении, в зависимости от особенностей задачи.

Граничные значения $U_{x=a,b}$ определяются для всех t значениями в точках $x_{1/2}, x_{M+1/2}$.

Таким образом, на предыдущем шаге по времени t имеем значения $U_m(t)$, $1 \leq m \leq M$. Шаг τ задаётся по h в соответствии с алгоритмом решения системы обыкновенных уравнений (25), см. ниже. При обычной процедуре построения схемы выполняется условие:

$$\tau \leq \varepsilon \cdot \frac{h}{\max_X |\lambda_l|}, \quad l = \overline{1, 6},$$

где ε — число Куранта.

3.3. Шаг по времени: $t \rightarrow t + \tau$

Вычислим значения U в точках сетки X_h , т.е. $U_{m+1/2} = \frac{U_m + U_{m+1}}{2}$. Далее вычислим матрицу $L_{m+1/2} = L(U_{m+1/2})$, $1 \leq m \leq M - 1$; $U_{1/2}$, $U_{M+1/2}$ — граничные условия.

3.3.1. Вычисление разделённых разностей

Для каждого $1 \leq l \leq k$ вычисляем массив $D_U^l(\mathfrak{I}_m, \dots, \mathfrak{I}_{m+l-1})$, $2 - l \leq m \leq M$ размера $6 \times (M + l - 1)$, причём каждый элемент представляет собой «разделённую разность» порядка l .

В точках $x_{m+1/2}$, $1 \leq m \leq M - 1$ вычисляем набор преобразованных «разделённых разностей»:

$$D_\Phi^l(\mathfrak{I}_j, \dots, \mathfrak{I}_{j+l-1}) = L_{m+1/2} \cdot D_U^l(\mathfrak{I}_j, \dots, \mathfrak{I}_{j+l-1}), \quad m - l + 1 \leq j \leq m.$$

Также рассчитаем новые сеточные величины:

$$\Phi_j = L_{m+1/2} \cdot U_j, \quad m - k + 1 \leq j \leq m + k - 1.$$

3.3.2. Построение шаблона для ячейки \mathfrak{I}_m

Для каждой компоненты Φ^l , $l = \overline{1, 6}$ вектора Φ выберем необходимый шаблон для ячейки \mathfrak{I}_m . Шаблон должен состоять из k ячеек (включая саму \mathfrak{I}_m). Построение происходит индуктивным образом по следующему алгоритму. Пусть на j -м шаге имеется шаблон, состоящий из $j \geq 1$ ячеек:

$$\{\mathfrak{I}_{m-r_j}, \dots, \mathfrak{I}_{m+s_j}\}, \quad r_j + s_j = j - 1, \quad r_j, s_j \geq 0.$$

В качестве следующего шага можно выбрать либо шаблон

$$\{\mathfrak{I}_{m-r_j-1}, \dots, \mathfrak{I}_{m+s_j}\}, \quad (21)$$

полученный добавлением к уже имеющемуся соседней левой ячейки, либо шаблон

$$\{\mathfrak{I}_{m-r_j}, \dots, \mathfrak{I}_{m+s_j+1}\}, \quad (22)$$

полученный добавлением к уже имеющемуся соседней правой ячейки. Для выбора нужного шаблона рассчитываем разделённые разности

$$D^- \equiv D_{\Phi}^{j+1}(\mathfrak{I}_{m-r_{j-1}}, \dots, \mathfrak{I}_{m+s_j}), \quad D^+ \equiv D_{\Phi}^{j+1}(\mathfrak{I}_{m-r_j}, \dots, \mathfrak{I}_{m+s_{j+1}})$$

и далее выбираем шаблон (21) при $|D^-| < |D^+|$, и шаблон (22) в ином случае. Построение завершается при $j = k$.

Таким образом, для каждой компоненты Φ^l , $l = \overline{1, 6}$ мы построили свой шаблон

$$\{\mathfrak{I}_{m-r_{\Phi^l}}, \dots, \mathfrak{I}_{m+s_{\Phi^l}}\}, \quad r_{\Phi^l} + s_{\Phi^l} + 1 = k, \quad l = \overline{1, 6}. \quad (23)$$

3.3.3. Реконструкция величин $\Phi_{m \mp 1/2}^{\pm}$

Далее рассчитаем значения на границах ячеек $1 \leq m \leq M - 1$:

$$\begin{aligned} \Phi_{m+1/2}^- &= \sum_{j=0}^{k-1} c_{r_{\Phi}, j} \Phi_{m-r_{\Phi}+j}, \\ \Phi_{m-1/2}^+ &= \sum_{j=0}^{k-1} c_{r_{\Phi}-1, j} \Phi_{m-r_{\Phi}+j}, \end{aligned} \quad (24)$$

где коэффициенты в случае неравномерной сетки вычисляются по формуле:

$$c_{\Phi j} = \left(\frac{\sum_{s=j+1}^k \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq s}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq s, r}}^k (x_{i+1/2} - x_{i-\Phi+q-1/2})}{\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq s}}^k (x_{i-\Phi+s-1/2} - x_{i-\Phi+r-1/2})} \right) \Delta x_{i-\Phi+j},$$

а в случае равномерной сетки — по формуле:

$$c_{\Phi j} = \sum_{s=j+1}^k \frac{\sum_{\substack{r=0 \\ r \neq s}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq s, r}}^k (\Phi - q + 1)}{\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq s}}^k (s - r)}.$$

Вычисленные коэффициенты для случая равномерной сетки содержатся в таблице 2.1, стр. 10 (см. [10]).

3.3.4. Возврат к исходным переменным

Затем вычисляем значения $U_{m+1/2}^\pm = L_{m+1/2}^{-1} \Phi_{m+1/2}^\pm$. Далее по величинам $U_{m+1/2}^\pm$ при помощи соответствующей задачи решения задачи Римана (см. конец раздела 2) вычисляем величины потоков $\hat{F}_{m+1/2}$.

Следующим шагом строим дивергентное замыкание, то есть решаем систему уравнений

$$\frac{dU_m(t)}{dt} = -\frac{1}{h_m} \left(\hat{F}_{m+1/2} - \hat{F}_{m-1/2} \right) + G(U) - F_x \quad (25)$$

методом k -го порядка (например, методом Рунге-Кутты). Таким образом получаем значения $U_m(t + \tau)$ на новом временном слое.

3.3.5. Методы Рунге-Кутты

s -стадийный метод Рунге-Кутты k -го порядка точности (где n — это порядок системы) имеет вид:

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n + \tau K_n, \quad K_n = \sum_{i=1}^s \sigma_i k_n^{(i)}, \\ k_n^{(1)} &= \vec{f}(t_n, U_n), \\ k_n^{(2)} &= \vec{f}\left(t_n + a_2\tau, U_n + \tau b_{21}k_n^{(1)}\right), \\ k_n^{(3)} &= \vec{f}\left(t_n + a_3\tau, U_n + \tau \left(b_{31}k_n^{(1)} + b_{32}k_n^{(2)}\right)\right), \\ &\vdots \\ k_n^{(s)} &= \vec{f}\left(t_n + a_s\tau, U_n + \tau \sum_{j=1}^{s-1} b_{sj}k_n^{(j)}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Коэффициенты s , σ_i , a_i , b_{ij} выбираются из соображений аппроксимации и точности. $\vec{f}(\cdot)$ — вектор правой части исходной системы.

Наиболее часто используется четырёхэтапный метод Рунге-Кутты четвёртого порядка точности:

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n + \tau K_n, \quad K_n = \frac{1}{6} \left(k_n^{(1)} + 2k_n^{(2)} + 2k_n^{(3)} + k_n^{(4)} \right), \\ k_n^{(1)} &= \vec{f}(t_n, U_n), \quad k_n^{(2)} = \vec{f}\left(t_n + \frac{\tau}{2}, U_n + \frac{\tau}{2}k_n^{(1)}\right), \\ k_n^{(3)} &= \vec{f}\left(t_n + \frac{\tau}{2}, U_n + \frac{\tau}{2}k_n^{(2)}\right), \quad k_n^{(4)} = \vec{f}\left(t_n + \tau, U_n + \tau k_n^{(3)}\right). \end{aligned}$$

Одним из вариантов модификации метода Рунге-Кутты является метод Гилла, при помощи которого можно реализовать более оптимальный расход памяти:

$$\begin{aligned}
 y &:= y_0; & K &:= \tau f(y); & y &:= y + 0.5K; & q &:= K; \\
 K &:= \tau f(y); & y &:= y + (1 - \sqrt{0.5})(K - q); \\
 q &:= (2 - \sqrt{2})K + (-2 + 3\sqrt{0.5})q; \\
 K &:= \tau f(y); & y &:= y + (1 + \sqrt{0.5})(K - q); \\
 q &:= (2 + \sqrt{2})K + (-2 - 3\sqrt{0.5})q; \\
 K &:= \tau f(y); & y &:= y + \frac{K}{6} - \frac{q}{3}.
 \end{aligned}$$

На этом выполнение шага по времени завершается.

Авторы благодарят А.М. Липанова за ознакомление авторов с тематикой и постановку задачи, а также выражают признательность А.И. Аптекареву, В.Т. Жукову, О.Б. Феодоритовой и Н.Д. Новиковой за полезные обсуждения в процессе работы над этой задачей.

Библиографический список

1. А.М. Липанов, Физико-химическая и математическая модели горения смесевых твёрдых топлив. Ижевск: ИПМ УрО РАН. — 2007.
2. Д.И. Абугов, В.М. Бобылев, Теория и расчёт ракетных двигателей твёрдого топлива. М.: Машиностроение. — 1987. — 272с.
3. Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, В.Б. Либрович, Г.М. Махвиладзе, Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука. — 1980. — 132с.
4. М.Е. Дейч, Техническая газодинамика. М.: Госэнергоиздат. — 1961. — 670с.
5. Р.Е. Соркин, Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твёрдом топливе. Внутренняя баллистика. М.: Наука. — 1983. — 288с.
6. Теория ракетных двигателей /В.Е. Алемасов [и др.] М.: Машиностроение. — 1980. — 533с.
7. Численное решение многомерных задач газовой динамики /под ред. С.К. Годунова, М.: Наука. — 1976. — 400с.

8. *А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов*, Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит. — 2001. — 608с.
9. *J. Smoller*, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations /A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, 258, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1983.
10. *C.-W. Shu*, Essentially Non-oscillatory and Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws /ICASE Report №97-65, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, NASA Langley Research Center, Hampton, VA. — 1997. — 78p.

Оглавление

Введение	2
1. Математическая постановка задачи	5
2. О модификации решения задачи Римана	9
2.1. Волны разрежения	10
2.2. Ударные волны	11
3. Вычислительный алгоритм по методике ENO	14
3.1. Сетки и разделённые разности	14
3.2. Начальные и граничные значения	15
3.3. Шаг по времени: $t \rightarrow t + \tau$	16
3.3.1. Вычисление разделённых разностей	16
3.3.2. Построение шаблона для ячейки \mathcal{J}_m	16
3.3.3. Реконструкция величин $\Phi_{m \mp 1/2}^\pm$	17
3.3.4. Возврат к исходным переменным	18
3.3.5. Методы Рунге-Кутты	18
Библиографический список	19