



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 133 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С.,  
Ткачев С.С.

Исследование точности  
алгоритма активного  
магнитного демпфирования

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Ткачев С.С. Исследование точности алгоритма активного магнитного демпфирования // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 133. 19 с. doi:[10.20948/prepr-2016-133](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-133)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-133>

Ордена Ленина  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
имени **М.В. Келдыша**  
**Российской академии наук**

**М.Ю. Овчинников, Д.С. Ролдугин, С.С. Ткачев**

**Исследование точности алгоритма  
активного магнитного демпфирования**

**Москва — 2016**

**М.Ю. Овчинников, Д.С. Ролдугин, С.С. Ткачев**

Исследование точности алгоритма активного магнитного демпфирования

Рассматривается спутник, оснащенный магнитной системой ориентации, реализующей алгоритм демпфирования угловой скорости « $-\dot{B}$ ». Исследуется поведение спутника в конце переходных процессов. Показано, что спутник медленно вращается вокруг оси максимального момента инерции, найдена величина скорости вращения. Исследуется точность ориентации спутника в дипольной модели геомагнитного поля. Проводится численное моделирование.

**Ключевые слова:** магнитная система ориентации, демпфирование,  $\dot{B}$

**Mikhail Ovchinnikov, Dmitry Roldugin, Stepan Tkachev**

Study of the accuracy of active magnetic damping algorithm

Attitude motion of a satellite equipped with an active magnetic attitude control system is considered. Control system implements « $-\dot{B}$ » damping algorithm. Satellite behavior is analyzed in a steady-state motion. Slow spinning around the principal axis of maximum inertia is proven, angular velocity is found. Attitude accuracy in dipole geomagnetic field model is studied. Numerical analysis is carried out.

**Key words:** magnetic attitude control system, damping,  $\dot{B}$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 15-31-20058 и 16-01-00634.

## Содержание

Введение.....	3
1. Постановка задачи.....	3
2. Устойчивость вращения спутника.....	6
3. Точность стабилизации.....	9
3.1. Движение на приэкваториальной орбите .....	10
3.2. Движение на приполярной орбите .....	12
4. Численное моделирование .....	16
Заключение.....	17
Библиография.....	18
Приложение. ....	19

## Введение

Магнитная система ориентации используется практически на всех современных малых спутниках и многих крупных аппаратах. Основные задачи, которые решает магнитная система, – демпфирование начальной угловой скорости спутника и сброс кинетического момента, накопленного гироскопической системой стабилизации (маховиками или гиродинами). В работе рассматривается первая задача – демпфирование угловой скорости. Особенно остро проблема гашения скорости стоит на начальном этапе работы аппарата после отделения от носителя, когда стабилизация должна обеспечить зарядку аккумуляторов и/или связь с Землей.

Переходные процессы были рассмотрены авторами в [1–3]. Здесь исследуется работа алгоритма демпфирования в конце переходных процессов. Этот вопрос представляет интерес в силу особенности наиболее распространенного алгоритма активного магнитного демпфирования «-Bdot» [4,5]. Как можно заключить из названия, дипольный момент, реализуемый магнитной системой, противоположен производной вектора геомагнитной индукции. Получив информацию о повороте спутника по магнитному полю, система ориентации пытается повернуть его в обратную сторону, останавливая вращение. Однако изменение вектора геомагнитной индукции обусловлено не только вращением спутника, но и вращением самого вектора. Соответственно, следует ожидать, что спутник в результате применения этого алгоритма перейдет во вращение со скоростью, примерно равной удвоенной орбитальной. В работе показано, что это вращение происходит вокруг оси максимального момента инерции, и найдена величина скорости, исследуется точность ориентации спутника.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается движение спутника – твердого тела – вокруг центра масс по круговой околоземной орбите в магнитном поле. Спутник оснащен тремя взаимно перпендикулярными магнитными катушками в качестве исполнительных элементов. Текущая ориентация предполагается известной.

В работе используются четыре системы координат:

$O_a Y_1 Y_2 Y_3$  – инерциальная система, где  $O_a$  – центр масс Земли, ось  $O_a Y_3$  направлена по оси вращения Земли,  $O_a Y_1$  лежит в плоскости земного экватора и направлена в восходящий узел орбиты спутника,  $O_a Y_2$  дополняет систему до правой.

$O_a Z_1 Z_2 Z_3$  – инерциальная система, полученная из системы  $O_a Y_1 Y_2 Y_3$  поворотом на некоторый угол  $\Theta$  вокруг оси  $O_a Y_1$ . Величина этого угла будет далее определена с помощью осредненной модели.

$O_a S_1 S_2 S_3$  – система, связанная с положением орбиты спутника в инерциальном пространстве. Ось  $O_a S_3$  направлена по нормали к плоскости орбиты,  $O_a S_1$  направлена в восходящий узел орбиты,  $O_a S_2$  дополняет систему до правой. Переход между системами  $O_a Y_1 Y_2 Y_3$  и  $O_a S_1 S_2 S_3$  задается поворотом на угол  $i$  (наклонение орбиты) относительно оси  $O_a Y_1$ , а между  $O_a S_1 S_2 S_3$  и  $O_a Z_1 Z_2 Z_3$  – на угол  $\Theta - i$  относительно оси  $O_a S_1$ . Инерциальные системы координат отражены на рис. 1.

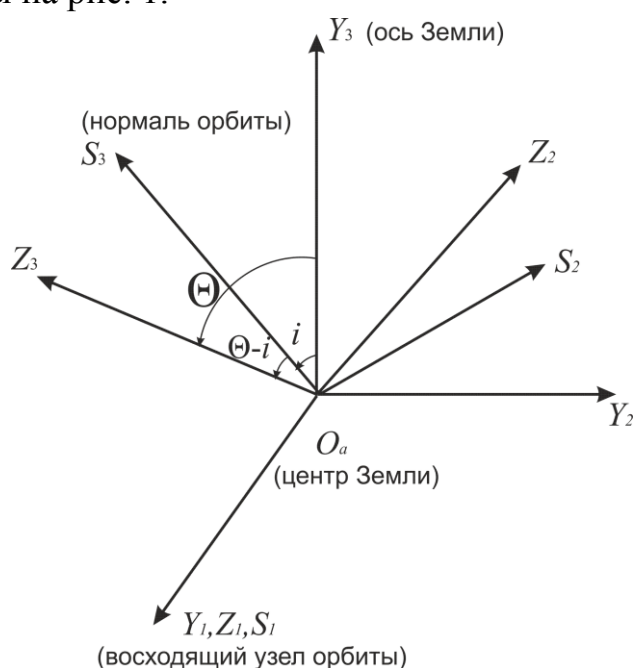


Рис. 1. Инерциальные системы координат

$O x_1 x_2 x_3$  – связанная система, ее оси совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

Ориентация спутника описывается с помощью углов  $\alpha, \beta, \gamma$  (последовательность поворотов 3-1-2) и компонент абсолютной  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  угловой скорости. Углы задают ориентацию относительно любой инерциальной системы координат, что будет в каждом случае оговариваться отдельно, такую систему будем называть опорной. При проведении численного моделирования вместо углов используется кватернион. Для выбранной последовательности поворотов матрица перехода от опорной системы к связанной имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Динамические уравнения движения спутника с тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$  в связанных осях представлены в виде

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{M}$  – управляющий магнитный момент.

Динамические уравнения дополняются кинематическими соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos \beta} (-\omega_1 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma), \\ \frac{d\beta}{dt} &= \omega_1 \cos \gamma + \omega_3 \sin \gamma, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_2 + \text{tg } \beta (\omega_1 \sin \gamma - \omega_3 \cos \gamma). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для представления геомагнитного поля [6] используются широко распространенная модель прямого диполя и осредненное поле. В первой модели геомагнитной поле представлено диполем. В системе  $O_a Y_1 Y_2 Y_3$  вектор направления диполя имеет вид  $\mathbf{k} = (0, 0, -1)$ . В системе  $O_a S_1 S_2 S_3$  вектор индукции имеет вид

$$\mathbf{B}_s = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -3/2 \sin 2u \sin i \\ -3 \sin^2 u \sin i + \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где  $u$  – аргумент широты;  $\mu_e = \mu_0 \mu_m / 4\pi$ ,  $\mu_m$  – величина диполя Земли (в настоящее время  $\mu_e = 7.7245 \cdot 10^6$  Тл·км<sup>3</sup>),  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  кг·м·А<sup>-2</sup>·с<sup>-2</sup> – магнитная постоянная.

Осредненная модель позволяет получить особенно компактное выражение для вектора индукции в инерциальном пространстве. Вектор индукции имеет постоянную длину и равномерно движется по поверхности кругового конуса. В системе  $O_a Z_1 Z_2 Z_3$  вектор индукции имеет простой вид

$$\mathbf{B}_z = B_0 \begin{pmatrix} -\sin \Theta \sin 2u \\ \sin \Theta \cos 2u \\ \cos \Theta \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

где  $B_0 = (1 + \sqrt{1 + 3\sin^2 i}) \mu_e / 2r^3$ , угол полураствора конуса вычисляется из соотношения

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{3 \sin 2i}{2(1 - 3 \sin^2 i + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i})}.$$

Управление спутником осуществляется с помощью алгоритма «-Bdot». Дипольный момент, создаваемый магнитными катушками, задается выражением

$$\mathbf{m} = -k \frac{d\mathbf{B}_x}{dt}.$$

## 2. Устойчивость вращения спутника

Рассмотрим процесс демпфирования угловой скорости спутника в инерциальном пространстве, в качестве опорной будем использовать систему  $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ , геомагнитное поле представим с помощью осредненной модели. Управляющий дипольный момент спутника задается выражением

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = k\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\mathbf{B}_z - k\mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}_z}{dt}. \quad (2.1)$$

Традиционно при исследовании алгоритма демпфирования предполагается, что спутник вращается с высокой скоростью, значительно превосходящей орбитальную,  $\boldsymbol{\omega} \gg \boldsymbol{\omega}_0$ . В этом случае в (2.1) можно пренебречь  $\mathbf{m}_2$ . Такое предположение верно, если интерес представляет время переходных процессов, однако неприемлемо при исследовании точности стабилизации. В случае если в управлении (2.1) реализуется лишь  $\mathbf{m}_1$ , скорость демпфируется полностью. Если же принять во внимание  $\mathbf{m}_2$ , следует ожидать, что демпфирование возможно лишь до величины, примерно равной двойной орбитальной – примерной скорости вращения вектора геомагнитной индукции в инерциальном пространстве. Покажем, что это вращение происходит вокруг оси максимального момента инерции, найдем величину скорости и направление вращения.

Для решения первой проблемы используем осредненную модель геомагнитного поля. Точность аппроксимации поля в этом случае должна позволить выявить качественную характеристику движения – выделенное в теле спутника направление, вдоль которого происходит вращение. Предположим, что вращение происходит вдоль третьей оси спутника, и найдем

условия, при которых существует движение  $\beta = \gamma = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Принимая во внимание последние условия, для дипольного момента получаем

$$\mathbf{m} = k \sin \Theta \begin{pmatrix} -\omega_3 \cos(\alpha - 2u) + 2\omega_0 \cos(\alpha - 2u) \\ \omega_3 \sin(\alpha - 2u) - 2\omega_0 \sin(\alpha - 2u) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что  $\omega_3 = 2\omega_0$  и  $\alpha = 2u + \alpha_0$ , то есть спутник вращается с той же скоростью, что и вектор геомагнитной индукции. Положим  $\alpha_0 = 0$  и линеаризуем уравнения движения в окрестности  $\alpha = 2u$ ,  $\beta = \gamma = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 2\omega_0$ . Заметим, что матрица направляющих косинусов в этом случае имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos 2u - \alpha \sin 2u & \sin 2u + \alpha \cos 2u & -\gamma \\ -\sin 2u - \alpha \cos 2u & \cos 2u - \alpha \sin 2u & \beta \\ \gamma \cos 2u + \beta \sin 2u & \gamma \sin 2u - \beta \cos 2u & 1 \end{pmatrix},$$

вектор геомагнитной индукции в связанной системе

$$\mathbf{B}_x = B_0 \begin{pmatrix} \alpha \sin \Theta - \gamma \cos \Theta \\ \sin \Theta + \beta \cos \Theta \\ -\beta \sin \Theta + \cos \Theta \end{pmatrix},$$

компоненты управляющего дипольного момента

$$\mathbf{m}_1 = kB_0 \begin{pmatrix} \omega_2 \cos \Theta - \omega_3 \sin \Theta - 2\omega_0 \sin \Theta - 2\omega_0 \cos \Theta \beta \\ 2\omega_0 \sin \Theta \alpha - 2\omega_0 \cos \Theta \gamma - \omega_1 \cos \Theta \\ \omega_1 \sin \Theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_2 = 2\omega_0 kB_0 \sin \Theta \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

После этого можно выписать безразмерные линеаризованные уравнения движения,

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= 2\lambda_A \omega_2 - \theta_A \varepsilon (\omega_1 + 2\gamma), \\ \dot{\omega}_2 &= 2\lambda_B \omega_1 + \theta_B \varepsilon (-\omega_2 \cos^2 \Theta + \omega_3 \sin \Theta \cos \Theta + 2 \cos^2 \Theta \beta), \\ \dot{\omega}_3 &= \varepsilon (\omega_2 \cos \Theta \sin \Theta - \omega_3 \sin^2 \Theta - 2 \sin \Theta \cos \Theta \beta), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\dot{\alpha} = \omega_3, \quad \dot{\beta} = \omega_1 + 2\gamma, \quad \dot{\gamma} = \omega_2 - 2\beta.$$

Здесь использованы дифференцирование по аргументу широты, отнесенные к орбитальной компоненты угловой скорости,  $\varepsilon = kB_0^2 / C\omega_0$ ,  $\theta_A = C/A$ ,  $\theta_B = C/B$ ,  $\lambda_A = (B - C)/A$ ,  $\lambda_B = (C - A)/B$ . Уравнение для  $\alpha$  отделилось, его далее рассматривать не будем.

Запишем характеристическое уравнение для (2.2),



$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^5 C_j \lambda^j = 0, \quad (2.3)$$

где коэффициенты уравнения задаются выражениями

$$C_5 = 1,$$

$$C_4 = \theta_B \varepsilon \cos^2 \Theta + \varepsilon \sin^2 \Theta + \theta_A \varepsilon,$$

$$C_3 = \theta_A \theta_B \varepsilon^2 \cos^2 \Theta + \theta_A \varepsilon^2 \sin^2 \Theta - 4\lambda_A \lambda_B + 4,$$

$$C_2 = 4\theta_A \varepsilon \lambda_B - 4\lambda_A \lambda_B \varepsilon \sin^2 \Theta + 4\varepsilon \sin^2 \Theta - 4\lambda_A \theta_B \varepsilon \cos^2 \Theta,$$

$$C_1 = 4\theta_A \lambda_B \varepsilon^2 \sin^2 \Theta - 16\lambda_A \lambda_B,$$

$$C_0 = -16\lambda_A \lambda_B \varepsilon \sin^2 \Theta.$$

Для удовлетворения необходимых условий устойчивости определим, когда все  $C_j > 0$ . Для  $C_4$  и  $C_5$  это условие верно.  $C_0 > 0$  если  $\lambda_A \lambda_B < 0$ , то есть  $C$  является максимальным или минимальным моментом инерции. В этом случае оставшиеся  $C_j$  также положительны. Дальнейшее исследование характеристического уравнения (2.3), например, с помощью критерия Рауса-Гурвица, затрудняется громоздким видом коэффициентов  $C_j$ . Заметим, что уравнения (2.2) имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{A}_1 \mathbf{x},$$

где  $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \beta, \gamma)$ , параметр  $\varepsilon$  можно считать малым, что зачастую верно для магнитной системы управления. Характеристические показатели также представим в виде  $\lambda_j = \mu_j + \varepsilon \eta_j$ . Характеристические показатели нулевого приближения (при  $\varepsilon = 0$ ) можно легко найти,

$$\mu_{1,2} = \pm 2\sqrt{-\lambda_A \lambda_B} i,$$

$$\mu_3 = 0,$$

$$\mu_{4,5} = \pm 2i.$$

Здесь  $i$  – мнимая единица. Использовалось необходимое условие устойчивости  $\lambda_A \lambda_B < 0$ . Коэффициенты характеристического уравнения также представим в виде

$$C_j = A_j + \varepsilon B_j,$$

где

$$\begin{aligned}
A_5 &= 1, & B_5 &= 0, \\
A_4 &= 0, & B_4 &= \theta_B \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta + \theta_A, \\
A_3 &= -4\lambda_A \lambda_B + 4, & B_3 &= 0, \\
A_2 &= 0, & B_2 &= 4\theta_A \lambda_B - 4\lambda_A \lambda_B \sin^2 \Theta + 4\sin^2 \Theta - 4\lambda_A \theta_B \cos^2 \Theta, \\
A_1 &= -16\lambda_A \lambda_B, & B_1 &= 0, \\
A_0 &= 0, & B_0 &= -16\lambda_A \lambda_B \sin^2 \Theta.
\end{aligned}$$

Членами порядка  $O(\varepsilon^2)$  в коэффициентах пренебрегаем.

Характеристическое уравнение принимает вид

$$P(\mu + \varepsilon\eta) = \sum_{j=0}^5 (A_j + \varepsilon B_j) (\mu + \varepsilon\eta)^j = 0.$$

Учитывая, что  $\mu_j$  удовлетворяют (2.3), для первого приближения характеристических чисел получаем

$$\eta_j = -\frac{\sum_{k=0}^5 \mu_j^k B_k}{\sum_{k=0}^4 (k+1) \mu_j^k A_{k+1}}.$$

Принимая во внимание выражения для коэффициентов и характеристических чисел нулевого приближения, получаем первое приближение

$$\eta_{1,2} = -\frac{\theta_A \lambda_B (1 + \lambda_A) + \theta_B \cos^2 \Theta \lambda_A (\lambda_B - 1)}{2(\lambda_A \lambda_B + 1)},$$

$$\eta_3 = -\sin^2 \Theta,$$

$$\eta_{4,5} = -\frac{\theta_A (1 - \lambda_B) + \theta_B \cos^2 \Theta (\lambda_A + 1)}{2(\lambda_A \lambda_B + 1)}.$$

В силу свойств тензора инерции  $|\lambda_A| < 1$ , поэтому  $\eta_{4,5} < 0$ . Однако  $\eta_{1,2} < 0$ , только если  $\lambda_B > 0$ ,  $\lambda_A < 0$ . Таким образом, асимптотически устойчиво лишь вращение с удвоенной орбитальной скоростью вокруг оси максимального момента инерции.

### 3. Точность стабилизации

Осредненное поле позволяет определить качественный режим движения спутника – направление и примерную скорость вращения. Используем более точную модель прямого диполя. Ее основное отличие – неравномерное

вращение вектора геомагнитной индукции. Это позволит уточнить направление и скорость вращения спутника вокруг оси максимального момента инерции. Чтобы уточнить ее ориентацию, используем метод Пуанкаре поиска периодических решений [7].

### 3.1. Движение на приэкваториальной орбите

Рассмотрим движение спутника на приэкваториальной орбите. В качестве опорной системы используем  $O_a S_1 S_2 S_3$ , в качестве малого параметра – наклонение  $i$ . Ограничиваясь вторым приближением, вектор индукции можно записать в виде

$$\mathbf{B}_s = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -3/2 \sin 2u \\ 1 - 3 \sin^2 u \\ 0 \end{pmatrix} i + \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} i^2.$$

Уравнения движения представим в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + i \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) + i^2 \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma)$ . Тогда периодическое решение уравнения (3.1) можно искать в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + i \mathbf{x}_1 + i^2 \mathbf{x}_2, \quad (3.2)$$

причем  $\mathbf{x}_0$  – решение (3.1) при  $i = 0$  (периодическое порождающее решение).

Проведя рассуждения, аналогичные использованным при анализе движения в осредненном поле, можно показать, что решение  $\mathbf{x}_0 = (\Omega u, 0, 0, 0, 0, \Omega)$  является асимптотически устойчивым для порождающей системы при любом  $\Omega$ , а значит, это – единственное периодическое решение порождающей системы. Подставляя разложение (3.2) в (3.1) и группируя члены при одинаковых степенях  $i$ , получаем

$$i^0 \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0),$$

$$i^1 \quad \dot{\mathbf{x}}_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_0),$$

$$i^2 \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_1^T \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}_1 + \left. \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x}_0).$$

Уравнения для определения первого приближения разбиваются на две подсистемы:

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{F}\mathbf{z}_1 + \varepsilon \begin{pmatrix} \theta_A [3/2(\Omega-2)\sin(\Omega-2)u - 1/2\sin\Omega u] \\ \theta_B [3/2(\Omega-2)\cos(\Omega-2)u - 1/2\cos\Omega u] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\dot{\omega}_3^{(1)} = 0, \quad \dot{\alpha}^{(1)} = \omega_3^{(1)},$$

где  $\mathbf{z}_1 = (\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)})$ ,  $\varepsilon = k(\mu_e/r^3)^2 / C\omega_0$  – новый параметр.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -\varepsilon\theta_A & \Omega\lambda_A & 0 & -\varepsilon\Omega\theta_A \\ \Omega\lambda_B & -\varepsilon\theta_B & \varepsilon\Omega\theta_B & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 1 & -\Omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Первое приближение не позволяет определить конкретное значение величины  $\Omega$ . Для этого необходимо записать уравнения второго приближения

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{F}\mathbf{z}_2 + \mathbf{G}(u)\mathbf{z}_1,$$

$$\dot{\omega}_3^{(2)} = 3\varepsilon(\Omega-1)\cos 2u - 5\Omega + 9, \quad \dot{\alpha}^{(2)} = \omega_3^{(2)},$$

где  $\mathbf{G}(u)$  – периодическая матрица. Из всех уравнений для второго приближения интерес представляет только уравнение для  $\omega_3^{(2)}$ . Из него определяется условие существования периодического решения  $\Omega = 1.8$ . Скорость закрутки несколько меньше удвоенной орбитальной – результата, полученного в осредненной модели.

Возмущение положения равновесия определяется системой (3.3). Так как положение равновесия невозмущенной системы асимптотически устойчиво, общее решение однородной системы в (3.3) стремится к нулю. Определяющим является частное решение неоднородной системы, которое представимо в виде

$$\mathbf{z}_p = \mathbf{a}_\Omega \cos \Omega u + \mathbf{b}_\Omega \sin \Omega u + \mathbf{a}_{\Omega-2} \cos(\Omega-2)u + \mathbf{b}_{\Omega-2} \sin(\Omega-2)u. \quad (3.4)$$

Векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  определяются из систем, полученных подстановкой (3.4) в (3.3),

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_\Omega \\ \mathbf{b}_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \mathbf{E}_{4 \times 4} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F} & -\Omega \mathbf{E}_{4 \times 4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_\Omega \\ \mathbf{p}_\Omega \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{\Omega-2} \\ \mathbf{b}_{\Omega-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Omega-2) \mathbf{E}_{4 \times 4} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F} & -(\Omega-2) \mathbf{E}_{4 \times 4} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{\Omega-2} \\ \mathbf{p}_{\Omega-2} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{q}_\Omega = (0, -1/2\theta_B\varepsilon, 0, 0), \quad \mathbf{p}_\Omega = (-1/2\theta_B\varepsilon, 0, 0, 0),$$

$$\mathbf{q}_{\Omega-2} = -3(\Omega - 2)\mathbf{q}_{\Omega}, \quad \mathbf{p}_{\Omega-2} = -3(\Omega - 2)\mathbf{p}_{\Omega}.$$

После вычислений  $\mathbf{a}_{\Omega}$  и  $\mathbf{b}_{\Omega}$  записываются в виде

$$\mathbf{a}_{\Omega} = (0, 0, 0, -1/2), \quad \mathbf{b}_{\Omega} = (0, 0, 0.5, 0).$$

Для определения  $\mathbf{q}_{\Omega-2}$  и  $\mathbf{p}_{\Omega-2}$  можно воспользоваться формулой Фробениуса обращения блочной матрицы [8]

$$\begin{pmatrix} \kappa \mathbf{E}_{4 \times 4} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F} & -\kappa \mathbf{E}_{4 \times 4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa} \left( \mathbf{E}_{4 \times 4} - (\mathbf{E}_{4 \times 4} + \kappa^2 \mathbf{F}^{-2})^{-1} \right) & -(\mathbf{E}_{4 \times 4} + \kappa^2 \mathbf{F}^{-2})^{-1} \mathbf{F}^{-1} \\ -\mathbf{F}^{-1} (\mathbf{E}_{4 \times 4} + \kappa^2 \mathbf{F}^{-2})^{-1} & -\kappa \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{E}_{4 \times 4} + \kappa^2 \mathbf{F}^{-2})^{-1} \mathbf{F}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Так как  $\kappa = \Omega - 2 \ll 1$ , (3.5) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \kappa \mathbf{E}_{4 \times 4} & -\mathbf{F} \\ -\mathbf{F} & -\kappa \mathbf{E}_{4 \times 4} \end{pmatrix}^{-1} \approx \begin{pmatrix} \kappa^2 \mathbf{F}^{-2} & -\mathbf{F}^{-1} \\ -\mathbf{F}^{-1} & -\kappa \mathbf{F}^{-2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \sin \Omega u \\ -1/2 \cos \Omega u \end{pmatrix} - 3(\kappa^3 \mathbf{F}^{-2} \mathbf{q}_{\Omega} - \kappa \mathbf{F}^{-1} \mathbf{p}_{\Omega}) \cos \kappa u + 3(\kappa \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}_{\Omega} + \kappa^2 \mathbf{F}^{-2} \mathbf{p}_{\Omega}) \sin \kappa u.$$

Видно, что в силу малости  $\kappa$  решение для  $\beta^{(1)}$  и  $\gamma^{(1)}$  определяется в основном  $\mathbf{a}_{\Omega}$  и  $\mathbf{b}_{\Omega}$ , а именно

$$\beta^{(1)} \approx 1/2 \sin \Omega u, \quad \gamma^{(1)} \approx -1/2 \cos \Omega u.$$

Отклонение  $\Delta \gamma_{33}$  оси вращения от нормали к плоскости приэкваториальной орбиты задается выражением

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_{33} &= \text{acos} \left[ \cos(1/2 i \sin 1.8u) \cos(-1/2 i \cos 1.8u) \right] = \\ &= 2 \text{asin} \sqrt{\frac{1 - \cos(1/2 i \sin 9/5u) \cos(-1/2 i \cos 9/5u)}{2}} \approx \\ &\approx 2 \text{asin} 1/4 i \approx 1/2 i. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, ось максимального момента инерции отклоняется от нормали к плоскости орбиты на угол, примерно вдвое меньший наклона орбиты.

### 3.2. Движение на приполярной орбите

Спутники, оснащенные магнитной системой ориентации, редко выводятся на приэкваториальные орбиты. Намного больший интерес представляет

движение по орбитам с высоким наклонением, практически значимым и естественным для использования магнитной системы. Рассмотрим движение на приполярной орбите и используем в качестве малого параметра  $\delta = \pi/2 - i$ .

Тогда

$$\mathbf{B}_s = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -3/2 \sin 2u \\ 1 - 3 \sin^2 u \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta + \frac{\mu_e}{2r^3} \begin{pmatrix} -3/2 \sin 2u \\ 1 - 3 \sin^2 u \\ 0 \end{pmatrix} \delta^2 + \dots$$

При поиске порождающего решения уравнения разделяются. Система, описывающая колебания вне плоскости орбиты, снова имеет устойчивое тривиальное решение  $\beta = \gamma = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Вращение вокруг оси максимального момента инерции, однако, происходит с переменной скоростью. Уравнение, задающее скорость вращения, имеет вид

$$\dot{\omega}_3 + f_1(u) \omega_3 = f_2(u), \quad (3.7)$$

где

$$f_1(u) = \varepsilon (1 + 3 \sin^2 u),$$

$$f_2(u) = 3\varepsilon (1 + \sin^2 u).$$

Для (3.7) можно записать общий вид решения (предполагая  $u(0) = 0$ ),

$$\omega_3 = e^{-F(u)} \left( \omega_3(0) + \int_0^u f_2(x) e^{F(x)} dx \right), \quad (3.8)$$

где

$$F(u) = \int_0^u f_1(x) dx = \varepsilon \left( \frac{5}{2} u - \frac{3}{4} \sin 2u \right). \quad (3.9)$$

Чтобы вычислить интеграл в (3.8), представим его в виде

$$\begin{aligned} g(u) &= \int_0^u f_2(x) e^{F(x)} dx = \varepsilon \int_0^u 2e^{\varepsilon \left( \frac{5}{2} x - \frac{3}{4} \sin 2x \right)} dx + \varepsilon \int_0^u (1 + 3 \sin^2 x) e^{\varepsilon \left( \frac{5}{2} x - \frac{3}{4} \sin 2x \right)} dx = \\ &= e^{\varepsilon \left( \frac{5}{2} u - \frac{3}{4} \sin 2u \right)} + 2\varepsilon \int_0^u e^{\frac{5}{2} \varepsilon x} e^{-\frac{3}{4} \varepsilon \sin 2x} dx. \end{aligned}$$

Тогда

$$\omega_3 = e^{-F(u)} \left( \omega_3(0) + e^{F(u)} + 2\varepsilon \int_0^u e^{\frac{5}{2} \varepsilon x} e^{-\frac{3}{4} \varepsilon \sin 2x} dx \right).$$

Принимая во внимание  $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ , можем ограничить величину угловой скорости выражениями

$$e^{-\varepsilon\left(\frac{5}{2}u-\frac{3}{4}\sin 2u\right)}\omega_3(0)+1+\frac{4}{5}e^{-\frac{3}{4}\varepsilon}e^{\frac{3}{4}\varepsilon\sin 2u}\leq\omega_3\leq e^{-\varepsilon\left(\frac{5}{2}u-\frac{3}{4}\sin 2u\right)}\omega_3(0)+1+\frac{4}{5}e^{\frac{3}{4}\varepsilon}e^{\frac{3}{4}\varepsilon\sin 2u}. \quad (3.10)$$

Приближенное значение скорости, удовлетворяющее этим ограничениям, можно найти, заметив, что с ростом аргумента широты второе слагаемое в (3.9) играет все меньшую роль. Рассматривая задачу на достаточном интервале времени, можно считать, что

$$\begin{aligned} g(u) &= \int_0^u f_2(x)e^{F(x)}dx \approx 3\varepsilon \int_0^u (1+\sin^2 x)e^{5/2\varepsilon x}dx = \\ &= 6\varepsilon \left[ \frac{e^{5/2\varepsilon u} \sin u}{25\varepsilon^2 + 16} (5\varepsilon \sin u - 4 \cos u) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{8}{125\varepsilon^2 + 80} + \frac{1}{5} \right) (e^{5/2\varepsilon u} - 1) \right], \end{aligned}$$

что совместно с (3.9) и (3.8) дает выражение для угловой скорости вращения спутника вокруг оси максимального момента инерции:

$$\omega_3 \approx e^{-\varepsilon\left(\frac{5}{2}u-\frac{3}{4}\sin 2u\right)} \left( \omega_3(0) + 6\varepsilon \left[ \frac{e^{5/2\varepsilon u} \sin u}{25\varepsilon^2 + 16} (5\varepsilon \sin u - 4 \cos u) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{8}{125\varepsilon^2 + 80} + \frac{1}{5} \right) (e^{5/2\varepsilon u} - 1) \right] \right). \quad (3.11)$$

Значение угла  $\alpha$  в порождающем решении можно найти, интегрируя (3.11).

Система уравнений первого приближения имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}(u)\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(u),$$

где

$$F_{ij} = F_{ij}(\omega_3, \varphi(2u - \alpha), \varphi(4u - 2\alpha), \varphi(2u - 2\alpha), \varphi(2\alpha), \varphi(2u)),$$

$\varphi$  – тригонометрические функции (синус, косинус), входящие в выражения для компонент  $\mathbf{F}$  линейно (полное выражение  $\mathbf{F}$  приведено в приложении). Вообще говоря, эта система не может быть решена. Чтобы найти приближенное решение уравнений первого приближения, обратимся еще раз к методу поиска периодических решений. В качестве малого параметра будем использовать  $\varepsilon$ , то есть характеристику величины управляющего момента. Тогда решение исходного уравнения будет представлено в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \delta(\mathbf{y}_0 + \varepsilon\mathbf{y}_1),$$

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0, \omega_3(u), \alpha(u), 0, 0), \text{ а матрица } \mathbf{F} \text{ – в виде } \mathbf{F}(u) = \mathbf{F}_0 + \varepsilon\mathbf{F}_1(u).$$

Порождающее решение  $\mathbf{y}_0$  и первое приближение  $\mathbf{y}_1$  находятся из уравнений

$$\dot{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{F}_0\mathbf{z}_0, \quad (3.12)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{F}_0\mathbf{z}_1 + \mathbf{F}_1(u)\mathbf{z}_0 + \mathbf{g}_1(u) \quad (3.13)$$

и

$$\dot{\omega}_3^{(0)} = 0, \quad \dot{\alpha}^{(0)} = \omega_3^{(0)},$$

$$\dot{\omega}_3^{(1)} = (3/2 \cos 2u - 5/2)\omega_3^{(0)}, \quad \dot{\alpha}^{(1)} = 0,$$

где  $\mathbf{z}_1 = (\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)})$ . Отделившиеся пары уравнений дают  $\omega_3^{(0)} = 0$ ,  $\omega_3^{(1)}, \alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}$  – некоторые постоянные.

При определении матриц и векторов, входящих в (3.12)-(3.13), необходимо принять во внимание выражение для  $\omega_3(u)$ . Используем (3.11) и разложим его до первой степени малого параметра  $\varepsilon$  в предположении большого интервала времени,

$$\omega_3 = 9/5 + 3/5 \varepsilon \sin 2u. \quad (3.14)$$

Тогда

$$\mathbf{F}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 9/5 \lambda_A & 0 & 0 \\ 9/5 \lambda_B & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & -9/5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1(u) = \begin{pmatrix} \theta_A (3/10 \sin 0.2u - 9/10 \sin 1.8u) \\ \theta_B (-3/10 \cos 0.2u - 9/10 \cos 1.8u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу  $\mathbf{F}_1(u)$  представим в виде  $\mathbf{F}_1(u) = \mathbf{G}_1(u) + \mathbf{G}_2(u)$ ,

$$\mathbf{G}_1(u) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \theta_A - \frac{1}{8} \theta_A \cos 3.6u & \frac{1}{8} \theta_A \sin 3.6u & -\frac{9}{40} \theta_A \sin 3.6u & -\frac{9}{4} \theta_A - \frac{9}{40} \theta_A \cos 3.6u \\ \frac{1}{8} \theta_B \sin 3.6u & -\frac{5}{4} \theta_B + \frac{1}{8} \theta_B \sin 3.6u & \frac{9}{4} \theta_B - \frac{9}{40} \theta_B \cos 3.6u & \frac{9}{40} \theta_B \sin 3.6u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

компоненты  $G_{2ij} = G_{2ij}(\varphi(0.2u), \varphi(0.4u), \varphi(1.6u), \varphi(2u))$  (полностью матрица  $\mathbf{F}_1(u)$  приведена в приложении).

Решение порождающего уравнения (3.12) имеет вид

$$\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} A \cos \lambda u + B \sin \lambda u \\ -A \mu \sin \lambda u + B \mu \cos \lambda u \\ D \cos 1.8u + E \sin 1.8u + B \chi_2 \cos \lambda u + A \chi_4 \sin \lambda u \\ -D \sin 1.8u + E \cos 1.8u + A \chi_3 \cos \lambda u + B \chi_1 \sin \lambda u \end{pmatrix},$$

где  $\lambda = 1.8 \sqrt{-\lambda_A \lambda_B}$ ,  $\mu = \sqrt{-\lambda_B / \lambda_A}$ ,  $\chi_i = \chi_i(\lambda, \mu)$ ,  $A, B, D, E$  – постоянные. Найдем их из условия существования периодического решения уравнения (3.13). Для этого необходимо и достаточно, чтобы вынуждающая сила  $\mathbf{F}_1(u) \mathbf{z}_0 + \mathbf{g}_1(u)$  не имела частот  $\lambda$  и 1.8 (собственные частоты  $\mathbf{F}_0$ ). Поскольку  $\mathbf{F}_1(u)$  и  $\mathbf{g}_1(u)$  содержат лишь рациональные частоты, сразу получаем  $A = B = 0$ . Постоянные  $D, E$  находятся из условия отсутствия в



$\mathbf{G}_1(u)\mathbf{z}_0 + \mathbf{g}_1(u)$  частот 1.8 (матрицу  $\mathbf{G}_2(u)$  можно не принимать во внимание), откуда  $E = 0$ ,  $D = 4/9$ .

Таким образом, ограничиваясь лишь порождающим решением в системе первого приближения, можем записать решение исходных уравнений  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,

$$\beta = 4/9(\pi/2 - i)\cos 1.8u, \gamma = -4/9(\pi/2 - i)\sin 1.8u,$$

$\omega_3$  задается одним из выражений (3.10), (3.11), (3.14),  $\alpha$  получается интегрированием  $\omega_3$ . Отклонение оси максимального момента инерции от нормали к плоскости орбиты задается выражением

$$\Delta\gamma_{33} = a\cos\left[\cos\left(4/9(\pi/2 - i)\cos 1.8u\right)\cos\left(-4/9(\pi/2 - i)\sin 1.8u\right)\right].$$

Аналогично (3.6) разложение в ряд дает  $\Delta\gamma_{33} \approx 4/9(\pi/2 - i)$ . Отклонение на приполярной орбите несколько меньше такового на приэкваториальной орбите.

## 4. Численное моделирование

Проведем численное моделирование движения спутника с параметрами

- тензор инерции  $\mathbf{J} = (1.4, 1.6, 2.0)$  кг·м<sup>2</sup>;
- наклонение орбиты 75°, высота 750 км;
- начальное положение: углы ориентации 50°, компоненты скорости  $1.1\omega_0$ ;
- усиление в управлении  $5 \cdot 10^5$  Н·м·с/Гл<sup>2</sup>·кг·м (соответствует  $\varepsilon \approx 0.11$ ).

Моделирование проводилось методом Рунге-Кутты 4 порядка с постоянным шагом 1 с. На рис. 2 представлен результат моделирования при использовании модели прямого диполя, на рис. 3 – при использовании наклонного диполя.

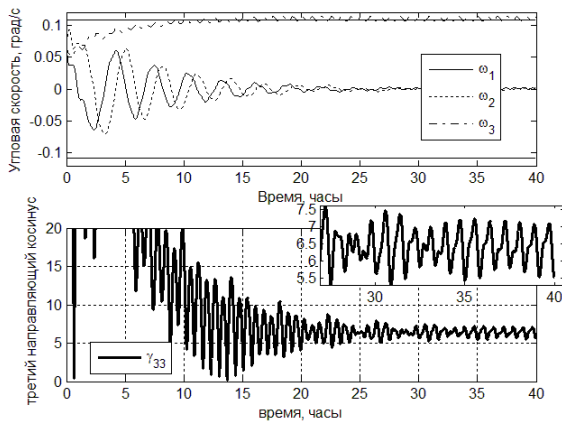


Рис. 2. Приполярная орбита

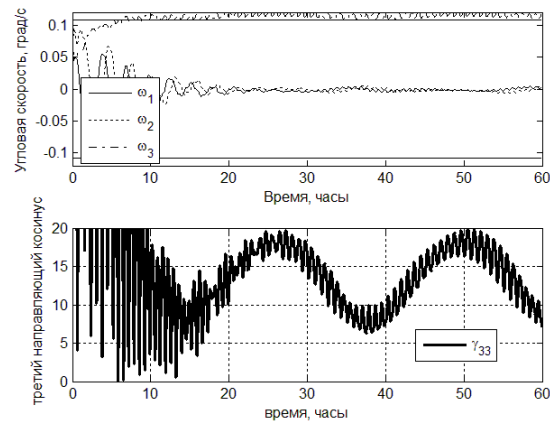


Рис. 3. Модель наклонного диполя

Рис. 2 находится в хорошем соответствии с аналитическим результатом – точность ориентации оси максимального момента инерции составляет примерно  $5.5-7^\circ$ , тогда как приближенный аналитический результат дает  $6.5^\circ$ . Для модели наклонного диполя точность ориентации ухудшается примерно втрое. Горизонтальная линия на верхних рисунках соответствует значению скорости  $1.8\omega_0$ . Аналогичный результат можно получить для приэкваториальной орбиты. На рис. 4 и рис. 5 показан результат моделирования для орбиты наклонением  $60^\circ$ , при этом использовалась модель прямого диполя, во втором случае принимался во внимание гравитационный момент.

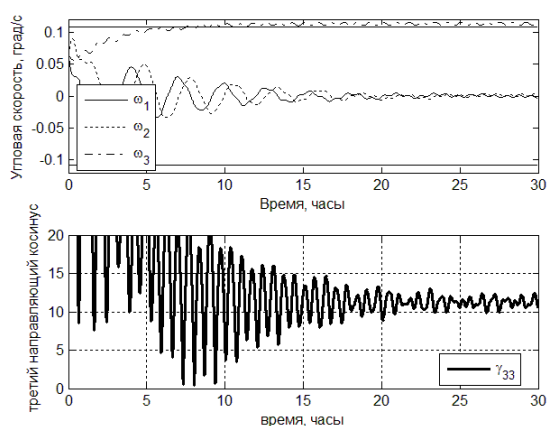


Рис. 4. Движение на орбите наклонением  $60^\circ$

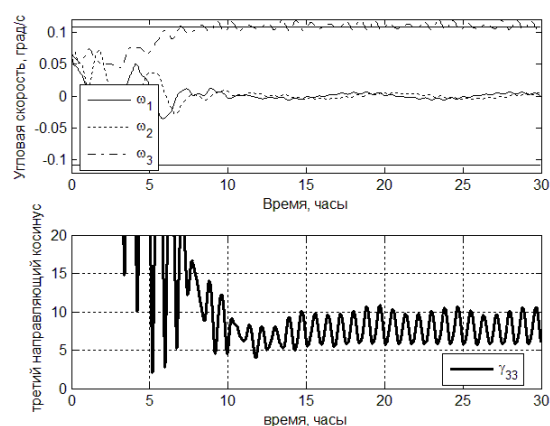


Рис. 5. Наклонение  $60^\circ$ , действие гравитационного момента

Для орбит с произвольным наклонением, далеким от  $0$  или  $90^\circ$ , точность ориентации оси максимального момента инерции оказывается около  $10-12^\circ$ . При этом действие гравитационного момента, в данном случае восстанавливающего и лишь незначительно уступающего магнитному по величине, улучшает точность ориентации оси максимального момента инерции.

## Заключение

В работе рассмотрено движение спутника под управлением алгоритма демпфирования «-Vdot». Для установившегося движения, когда угловая скорость вращения аппарата сопоставима с орбитальной, показано, что аппарат вращается вокруг оси максимального момента инерции. Доказана устойчивость такого вращения при движении в осредненном магнитном поле. Найдена скорость вращения и выражения для точности ориентации оси максимального момента инерции при движении в дипольном магнитном поле.

## Библиография

1. Овчинников М.Ю. и др. Исследование быстрогодействия алгоритма активного магнитного демпфирования // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 16. 30 с.
2. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С. Движение спутника с двойным вращением в магнитном и гравитационном полях // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 22. 23 с.
3. Овчинников М.Ю. и др. Исследование быстрогодействия алгоритма активного магнитного демпфирования // Космические исследования. 2012. Т. 50, № 2. с. 176–183.
4. Stickler A.C. A Magnetic Control System for Attitude Acquisition // Ithaco, Inc., Rep. N 90345. 1972.
5. Stickler A.C., Alfriend K.T. Elementary Magnetic Attitude Control System // J. Spacecr. Rockets. 1976. V. 13, № 5. pp. 282–287.
6. Пичужкина А.В., Ролдугин Д.С. Использование моделей геомагнитного поля в задачах ориентации искусственных спутников Земли // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 87. 30 с.
7. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 496 с.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория Матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.

## Приложение. Некоторые соотношения

$$\mathbf{F}(u) = \begin{pmatrix} -\varepsilon\theta_A \left( \frac{5}{4} + f_1 \right) & \lambda_A \omega_3 + \varepsilon\theta_A f_2 & 0 & 0 & -\varepsilon\theta_A \omega_3 f_2 & -\varepsilon\theta_A f_3 \\ \lambda_B \omega_3 + \varepsilon\theta_B f_2 & -\varepsilon\theta_B \left( \frac{5}{4} - f_1 \right) & 0 & 0 & \varepsilon\theta_B f_3 & \varepsilon\theta_B \omega_3 f_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon \left( \frac{3}{2} \cos 2u - \frac{5}{2} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \frac{9}{8} \cos 2(\alpha - 2u) + \frac{1}{8} \cos 2\alpha - \frac{3}{4} \cos 2(\alpha - u) - \frac{3}{4} \cos 2u,$$

$$f_2 = -\frac{3}{4} \sin 2(\alpha - u) + \frac{9}{8} \sin 2(\alpha - 2u) + \frac{1}{8} \sin 2\alpha,$$

$$f_3 = \frac{3}{4} \omega_3 \cos 2u - \frac{3}{2} \cos 2u - \frac{5}{4} \omega_3 - \frac{3}{4} \omega_3 \cos 2(\alpha - u) + \\ + \frac{9}{8} \omega_3 \cos 2(\alpha - 2u) + \frac{1}{8} \omega_3 \cos 2\alpha + \frac{9}{2}.$$

---


$$\mathbf{F}_1(u) = \begin{pmatrix} -\theta_A \left( \frac{5}{4} + g_1 \right) & \frac{3}{5} \lambda_A \sin 2u + \theta_A g_2 & -\frac{9}{5} \theta_A g_2 & -\theta_A g_3 \\ \frac{3}{5} \lambda_B \sin 2u + \theta_B g_2 & -\theta_B \left( \frac{5}{4} - g_1 \right) & \theta_B g_3 & \frac{9}{5} \theta_B g_2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \sin 2u \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} \sin 2u & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \frac{9}{8} \cos 0.4u + \frac{1}{8} \cos 3.6u - \frac{3}{4} \cos 1.6u - \frac{3}{4} \cos 2u,$$

$$g_2 = -\frac{3}{4} \sin 1.6u - \frac{9}{8} \sin 0.4u + \frac{1}{8} \sin 3.6u,$$

$$g_3 = \frac{9}{4} - \frac{3}{20} \cos 2u - \frac{27}{20} \cos 1.6u + \frac{81}{40} \omega_3 \cos 0.4u + \frac{9}{40} \cos 3.6u.$$