



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 144 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Зенюк Д.А., Малинецкий Г.Г.,
Фаллер Д. С.

Влияние структуры
иерархии на коррупционное
поведение ее элементов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зенюк Д.А., Малинецкий Г.Г., Фаллер Д. С. Влияние структуры иерархии на коррупционное поведение ее элементов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 144. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2016-144](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-144)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-144>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук**

Д. А. Зенюк, Г. Г. Малинецкий, Д. С. Фаллер

**Влияние структуры иерархии на
коррупционное поведение ее элементов**

Москва — 2016

УДК 51-77

Зенюк Д. А., Малинецкий Г. Г., Фаллер Д. С.

Влияние структуры иерархии на коррупционное поведение ее элементов

В работе исследуются геометрические аспекты имитационной модели коррупционного поведения в иерархических системах. Описано влияние топологии связей между элементами на изменение характеристик этой системы со временем. С помощью численного анализа изучен процесс формирования сообществ коррупционеров в условиях различных антикоррупционных стратегий. Описаны различные сценарии эволюции этих сообществ, приведены некоторые их количественные характеристики.

Ключевые слова: коррупция, имитационное моделирование, теория графов, статистический анализ.

Dmitry Alexeyevich Zenyuk, Georgy Gennadiyevich Malinetsky, Dmitry Sergeyevich Faller

The impact of structural properties of hierarchy on corruptional behavior within it

Geometrical aspects of one simulation model of corruption in hierarchical systems are investigated. The impact of connections topology on the dynamics of main characteristics of the system is described. Formation of corruptional clusters under various external conditions was studied by means of numerical analysis. Different evolution scenarios of these clusters were described, and their quantitative characteristics were calculated.

Key words: corruption, simulation modeling, graph theory, statistical analysis.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 15-06-07926.

Оглавление

Введение	3
Имитационная модель и схема эксперимента.....	4
Результаты моделирования.....	8
Формирование сообществ.....	12
Заключение	22
Библиографический список	23

Введение

Институциональная коррупция является одним из наиболее очевидных дефектов любой политической системы. В то же время, несмотря на кажущуюся обыденность этого явления, на сегодняшний день (здесь уместно отметить, что первые полноценные исследования, посвященные коррупции, были опубликованы в 70-е гг.) для него нет даже общепринятого определения, которое позволило бы ответить на вопрос о том, какое поведение и при каких условиях можно считать коррупционным [1, 2]. Продолжается дискуссия об основных механизмах, управляющих коррупционным поведением, о причинах его возникновения и разнообразии форм, которые оно может принимать; даже вопрос о возможных последствиях коррупции не получил пока однозначного ответа [3, 4, 5].

Известно несколько подходов к математическому описанию коррупционного поведения. Наиболее распространенным является использование формализма теории игр и оптимального управления [6]. Модели этого класса основаны на предположении о том, что все акторы в анализируемой системе ведут себя рационально, т.е. стремятся максимизировать полезность с учетом заданных ограничений на возможный риск. В рамках этого подхода были получены многие результаты, в частности, связанные с существованием и единственностью положений равновесия, устойчивостью этих равновесных состояний по отношению к внешним возмущениям, построением оптимальных антикоррупционных стратегий. Еще один обширный класс моделей коррупционного поведения использует аппарат теории динамических систем [7, 8]. В этих моделях коррупция рассматривается как один из элементов механизма обратной связи, снижающих эффективность государственной власти; при этом коррупционному поведению соответствует либо одна из фазовых переменных системы, либо некоторый набор внешних параметров.

В [9] была предложена оригинальная имитационная модель коррупционного поведения, в основе которой лежит последовательное моделирование случайного блуждания на нагруженном графе, при этом характеристики графа меняются на каждой итерации в зависимости от реализации блуждания. Правила эволюции системы в целом похожи на позиционную игру с частичным арбитражем, в которой акторам противодействует принципал, не входящий в рассматриваемую иерархию и обладающий исключительным объемом властных полномочий, в частности, применять санкции к акторам. Если речь идет об институтах государственной власти, то под принципалом можно понимать некоего верховного правителя, имеющего своей целью искоренение коррупции.

Отметим, что использование динамических моделей на графах в рамках исследования различных социо-культурных и экономических процессов весьма популярно в последние десятилетия: см., например, [10, 11, 12] и цитированную

там литературу. При этом сама динамика на графе может пониматься в разных смыслах: это может быть некий эволюционный процесс, ассоциированный с величинами, приписанными вершинам или ребрам графа; или же это может быть эволюция самой структуры графа, связанная с добавлением или исключением новых вершин или ребер. Исследования по графам с изменяющейся топологией были начаты еще в 60-х гг., когда были опубликованы первые результаты Эрдеша и Реньи [13, 14], посвященные случайным графам; в 90-х гг. в работах Барабаши, Альберт, Уоттса и Строгатца [15, 16, 17] были предложены новые модели, лучше воспроизводящие наблюдаемые свойства реальных сетей (например, эффект «тесного мира» и феномен «шести рукопожатий») и считающиеся на сегодняшний день классическими. В рамках же первого подхода, который более близок к представленной в настоящей работе модели, наиболее подробно исследованы модели с дискретными состояниями. Например, обширная библиография посвящена моделям распространения эпидемий (см. например, [18, 19]), которые, с некоторыми обобщениями, активно используются и в социологии для моделирования феноменов коллективного поведения. Ряд аналитических результатов получен для стохастических моделей, динамика которых порождается случайными попарными взаимодействиями между вершинами графа [20, 21]. К указанной тематике тесно примыкает теория мультиагентных систем (см., например, [22, 23, 24]), исследующая коллективное поведение децентрализованных систем, состоящих из локально взаимодействующих и автономных (хотя бы частично) агентов. Существенной особенностью таких моделей является возможность самоорганизации в них, т.е. возникновения сложных упорядоченных режимов (которые не наблюдались в начальном состоянии системы) без вмешательства извне.

Имитационная модель и схема эксперимента

В данном разделе кратко будет описана исследуемая имитационная модель коррупционного поведения в иерархических структурах. Более подробное описание можно найти в [9].

Бюрократическая иерархия описывается в терминах ориентированного взвешенного графа. Вершины этого графа отождествляются с действующими субъектами иерархии — акторами (или их небольшими группами, выступающими как единый субъект). Наличие ребра e_{ij} , идущего из вершины v_i в вершину v_j , будет означать, что i -й актер, если он уже как-либо участвует в коррупционной сделке, может вовлечь в нее j -го актора. Структура связей в общем случае может быть неоднородной и несимметричной, что отражает возможную сильную дифференциацию акторов в реальных институтах власти. Каждый актер принадлежит некоторой страте, определяющей набор параметров, характеризующих его поведение. Страты можно интерпретировать как уровни властных полномочий: акторы в одной страте обладают примерно

одинаковым статусом по отношению друг к другу, но занимают привилегированное положение по сравнению с акторами нижележащих страт. Для определенности будем нумеровать страты сверху вниз, т.е. акторы в первой страте обладают наибольшей властью и авторитетом.

Основным параметром акторов иерархии в рассматриваемой модели является толерантность τ_i , выражающая вероятность, с которой данный элемент участвует в коррупционной сделке. В каждый момент времени t_k выбранный наудачу элемент иерархии с вероятностью τ_i инициирует коррупционную сделку, которой он распоряжается по своему усмотрению. Каждая сделка имеет цену, измеряемую некоторыми условными денежными единицами. В описываемой здесь простейшей модели цена сделки считается дискретной случайной величиной, распределение которой зависит от страты. Актор, инициировавший сделку, сразу присваивает себе одну денежную единицу от суммы этой сделки. После этого он принимает решение: будет ли сделана попытка присоединить к сделке другого актора или текущий актер заберет себе еще одну часть от оставшейся суммы. Вероятность того, что i -й актер выберет кооперативную стратегию (т.е. попытается привлечь кого-нибудь еще), равна

$$0.55 \Phi_0 \left(\frac{4 + s_i}{3} \right),$$

где s_i — номер страты, к которой принадлежит i -й элемент, Φ_0 — функция стандартного нормального распределения. Выбор именно такой зависимости означает, что акторы из высших страт с большей вероятностью оставляют бóльшую часть сделки себе; акторы низших страт, напротив, вынуждены искать партнеров внутри иерархии. Числовые коэффициенты подобраны таким образом, что акторы из первой страты выбирают кооперативную стратегию с вероятностью меньше 0.1. Разумеется, можно было выбрать и другие функциональные зависимости с подобными свойствами.

Выбор партнера, присоединяемого к сделке, осуществляется случайным образом на основе текущих значений толерантности и весовых коэффициентов ребер: вероятность того, что i -й актер заключит соглашение с j -м, равна

$$\tau_j w_{ij} \left(\sum_{k=1}^n \tau_k w_{ik} \right)^{-1}. \quad (1)$$

Здесь n — количество акторов в иерархии, w_{ij} — элементы матрицы смежности, которые равны весу соответствующего ребра (для несмежных вершин $w_{ij} = 0$). После этого j -й актер присваивает себе одну из оставшихся

денежных единиц и получает право распоряжаться дальнейшим продвижением сделки. Продвижение сделки продолжается в соответствии с этими правилами до тех пор, пока вся сумма не будет распределена, причем актер, однажды участвовавший в сделке, не может быть повторно присоединен к ней. Таким образом, распределение дохода от заключенной коррупционной сделки описывается как случайное блуждание без самопересечений на взвешенном графе. Весовые коэффициенты ребер, соединяющих участвовавших в сделке акторов, увеличиваются на единицу. Такой механизм «поощрения» приводит к укреплению связей между акторами, которые участвовали в одной сделке (поскольку в формуле (1) начинают доминировать слагаемые с наибольшими w_{ij}), и формированию в иерархии кластеров, так что акторы будут с большей вероятностью присоединять к сделке тех, кто находится в пределах того же кластера. Максимальная величина весовых коэффициентов может быть ограничена некоторым заранее выбранным числом.

После того как распределение ренты закончено, принципал может применить санкции. В настоящей работе предполагается, что принципал сам не подвержен коррупции и его единственной целью является снижение уровня коррумпированности в иерархии (он будет строго определен далее в тексте). Для этого он в каждый момент времени проводит рандомизированный аудит: наудачу выбирается несколько акторов; для каждого из них устанавливается объем коррупционного дохода A_i , и если он превосходит некоторое установленное пороговое значение T_i , то соответствующие акторы исключаются из системы и заменяются новыми. Структура связей между вершинами графа при этом не меняется. Эти новые акторы имеют случайное значение толерантности, а весовые коэффициенты всех ребер, инцидентных соответствующим вершинам графа, становятся равными единице. Величина T_i может быть, вообще говоря, отлична от нуля. Издержки принципала, связанные с проведением процедуры аудита, в рассматриваемой нами модели не учитываются.

Механизм санкций тесно связан с определением уровня коррумпированности в иерархии:

$$C(t_k) = \sum_{i: A_i > T_i} A_i \left(\sum_{i=1}^n A_i \right)^{-1}.$$

Сумма в числителе берется только по тем акторам, для которых текущее значение коррупционного дохода больше соответствующего порогового значения; если сумма в знаменателе обращается в ноль в данный момент времени, будем считать $C(t_k) = 0$. Уровень коррумпированности лежит в диапазоне между 0 и 1, причем его нулевое значение соответствует коррупции в пределах, которые принципал считает допустимыми. Другим интегральным

показателем коррумпированности является количество коррупционеров (т.е. тех акторов, для которых $A_i > T_i$), соотнесенное к общему количеству акторов в иерархии. Количество акторов, подвергаемых аудиту, может является функцией уровня коррумпированности, например:

$$b = \left\lfloor q \Phi_0 \left(\frac{C(t_k - L) - 0.5}{0.2} \right) \right\rfloor,$$

где $L > 0$ и $q \in \mathbb{Z}_+$ — числовые параметры. Такой выбор означает, что строгость санкций увеличивается вслед за увеличением уровня коррупции; при этом предполагается, что принципал может установить точное значение уровня коррумпированности лишь спустя L отсчетов по времени. При $t_k < L$ в этом выражении следует считать $C(t_k) = 0$. Значение q определяет максимальное количество акторов, подвергаемых аудиту. Другие возможные стратегии аудита описаны в [9].

Для вычислений, результаты которых приведены далее, рассматривалась иерархия с 50-ю акторами, разделенными на 6 страт. Параметры страт выбраны следующим образом (мотивация выбора именно таких значений приведена в [9]):

Таблица 1

Номер страты	1	2	3	4	5	6
Количество элементов в страте	1	2	5	10	12	20
Минимальная цена сделки	50	25	10	8	5	1
Максимальная цена сделки	50	35	15	10	10	6
Пороговое значение коррупционного дохода	0	25	10	8	5	1

Цена коррупционной сделки, предлагаемой элементу i -й страты, представляет собой реализацию случайной величины с равномерным дискретным распределением в соответствующем диапазоне.

Для построения графов с различной структурой связей была использована простая вспомогательная процедура: сначала на заданном множестве вершин строилась некоторая «разреженная» детерминированная топология, обеспечивающая связность всего графа; затем между парами вершинам, выбранными наудачу независимо друг от друга, добавлялись ребра, вплоть до достижения заданной плотности графа. Плотность графа — безразмерная величина, равная отношению количества ребер в нем к максимально возможному для данного количества вершин, без учета петель и кратных ребер [25]. Изменяя распределение вероятностей, управляющее выбором пар вершин, можно создавать матрицы смежности для графов с заранее заданными характерными особенностями (например, симметрией или, наоборот, сильным

преобладанием ребер определенного направления). Поскольку начальная конфигурация является связным графом, то, очевидно, и финальный граф будет связным. На рис. 1а представлены силуэты матриц (т.е. положение ненулевых элементов) смежности графов, использовавшихся в серии вычислительных экспериментов, описанных ниже. Далее в тексте эти структуры будут нумероваться в том же порядке, что и на рис. 1а. Для сравнения на рис. 1б показаны соответствующие графы.

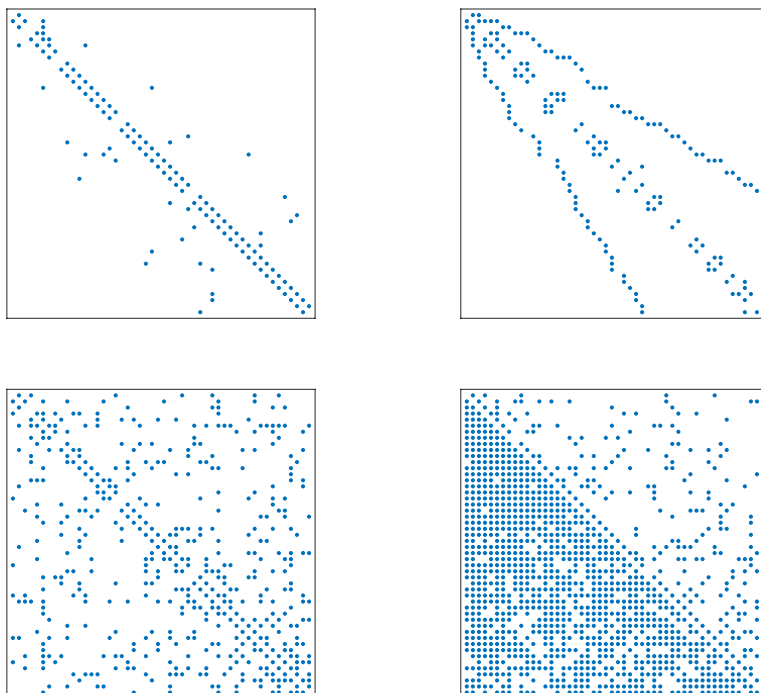


Рис. 1а. Силуэты матриц смежности иерархий, рассматриваемых в работе

Результаты моделирования

Результаты, приведенные в данном разделе, были получены при следующих параметрах модели: максимальное значение весовых коэффициентов ребер принято равным 10; максимальное количество акторов, подвергаемых аудиту, равно 3; все основные характеристики системы фиксировались после действия санкций и усреднялись по 100 независимым экспериментам; эволюция рассматривалась на протяжении 1000 отсчетов по времени. Как показали расчеты, интегральные параметры системы, такие как уровень коррумпированности или количество коррупционеров, сначала монотонно увеличиваются с ростом плотности графа, но по достижении определенного порогового значения плотности происходит своеобразное «насыщение» и рассматриваемые характеристики перестают значимо меняться.

Например, на рис. 2 показаны результаты для иерархий с несколькими различными матрицами смежности. Структура с нулевой матрицей смежности

имеет «минимальную» топологию: она состоит из изолированных акторов, которые не могут взаимодействовать; на приведенном рисунке видно, что в ней количество коррупционеров является наименьшим по сравнению с другими иерархиями.

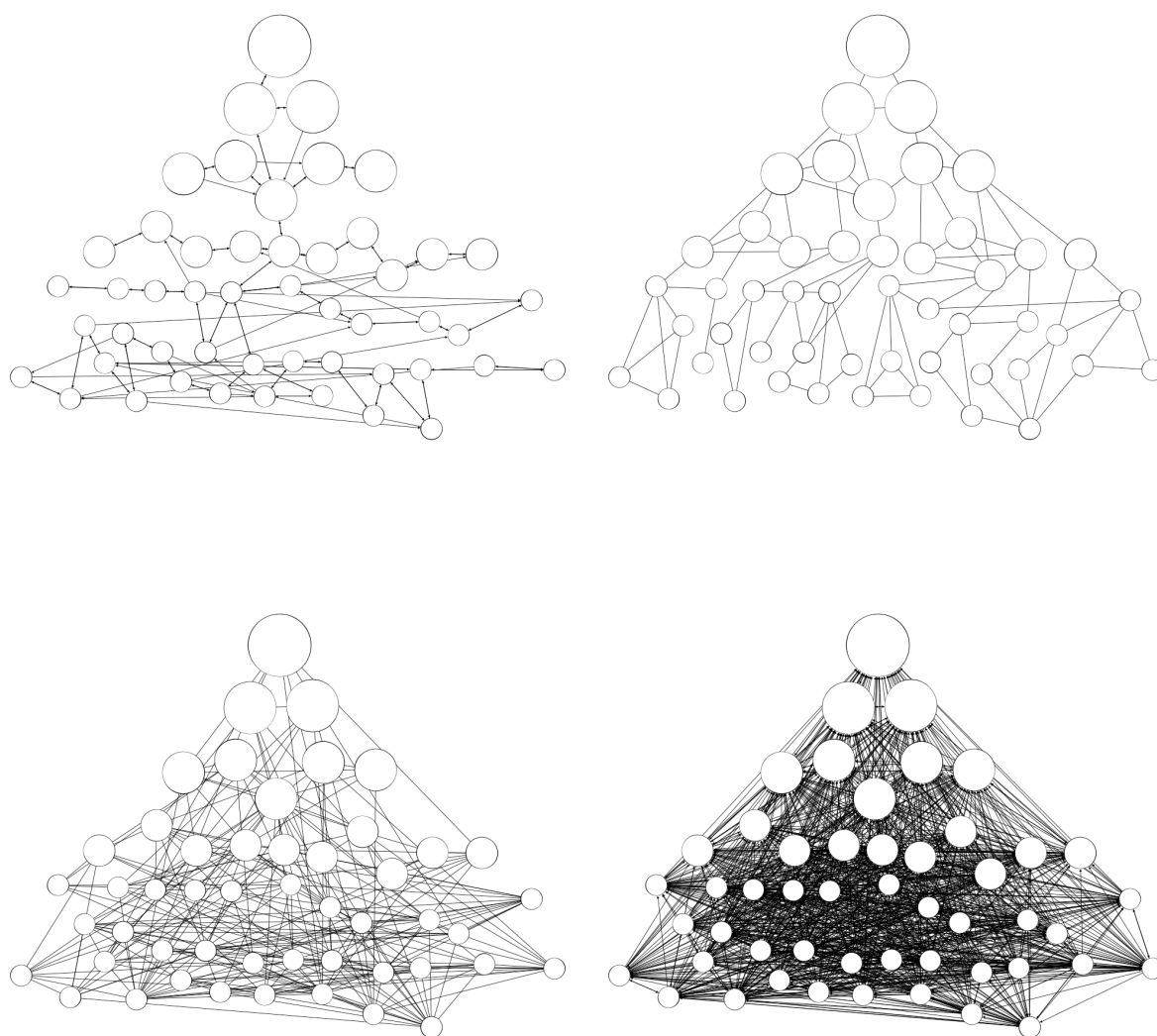


Рис. 16. Графы связей в иерархиях, рассматриваемых в работах

Добавление ребер в граф иерархии при низких значениях его плотности меняет динамику уровня коррупции. Доля коррупционеров начинает увеличиваться, поскольку акторы с низкой толерантностью, которые с большой вероятностью отклонили бы предложение инициировать сделку, все же получают возможность участвовать в продвижении сделок, заключенных другими акторами, а значит, и сами могут стать коррупционерами. Этот эффект «вынужденного соучастия», с одной стороны, обусловлен принятыми в модели

правилами продвижения сделки: вся инициатива здесь принадлежит тому актору, который в текущий момент распоряжается всей суммой; если он принял решение вовлечь в сделку кого-либо из своего окружения, то последний не может отказаться. Отчасти это является упрощением реального механизма кооперации внутри бюрократической иерархии. Но, с другой стороны, такой сценарий может наблюдаться в реальных системах в том случае, если сделка продвигается «сверху вниз»: акторы из верхних страт, обладая большим авторитетом и влиянием, могут вынудить подчиненных им акторов принять участие в коррупционном преступлении вопреки возможному нежеланию последних. Здесь также следует отметить, что в юридической литературе, посвященной уголовному праву, вопрос квалификации соучастия в преступлении признается одним из наиболее трудных и неоднозначных [26].

По мере увеличения количества связей между акторами этот эффект становится все менее заметным, и динамика уровня коррупции определяется в основном распределением значений толерантности и параметрами санкций принципала, которые в этом эксперименте фиксированы. Например, для рассматриваемой структуры с 50 акторами количество коррупционеров в 3-й иерархии с плотностью графа 0.2 почти не отличается от аналогичной характеристики для иерархии с «максимальной» топологией, когда каждый актор связан с каждым другим.

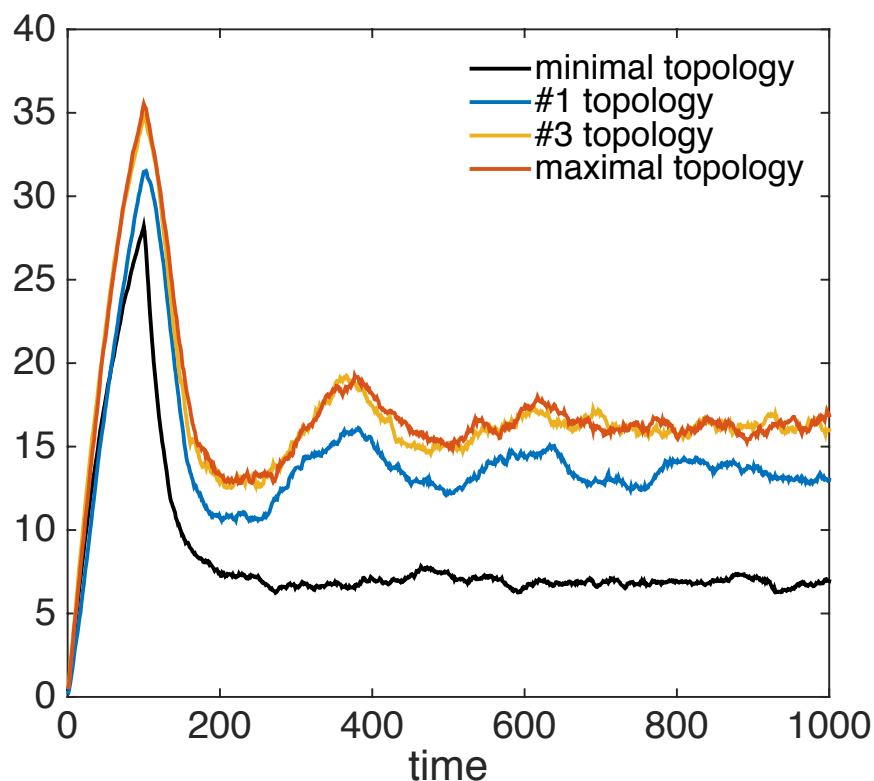


Рис. 2. Количество коррупционеров в различных иерархиях с 50 акторами

Динамика параметров каждой страты в отдельности, например, совокупного коррупционного дохода или среднего времени пребывания в системе, напротив, существенно меняется при изменении геометрии связей внутри иерархии. Так, на рис. 3 видно, что в 3-й иерархии наибольшие коррупционные доходы сосредоточены в трех нижних стратах, при этом они примерно равны между собой; в то же время в 4-й иерархии наибольший доход принадлежит 4-й страте, и по этому показателю она заметно превосходит все остальные (например, доход 6-й страты здесь почти вдвое меньше).

Объяснить столь сильную зависимость между топологией связей и характеристиками отдельных страт можно следующим образом: выбор партнера при продвижении сделки обусловлен, в первую очередь, значениями толерантности смежных акторов; при увеличении количества ребер, инцидентных данной вершине, увеличивается число возможных траекторий продвижения сделки, а вероятности их реализации изменяются с учетом значений толерантности вершин, что, в свою очередь, изменяет и наблюдаемые характеристики.

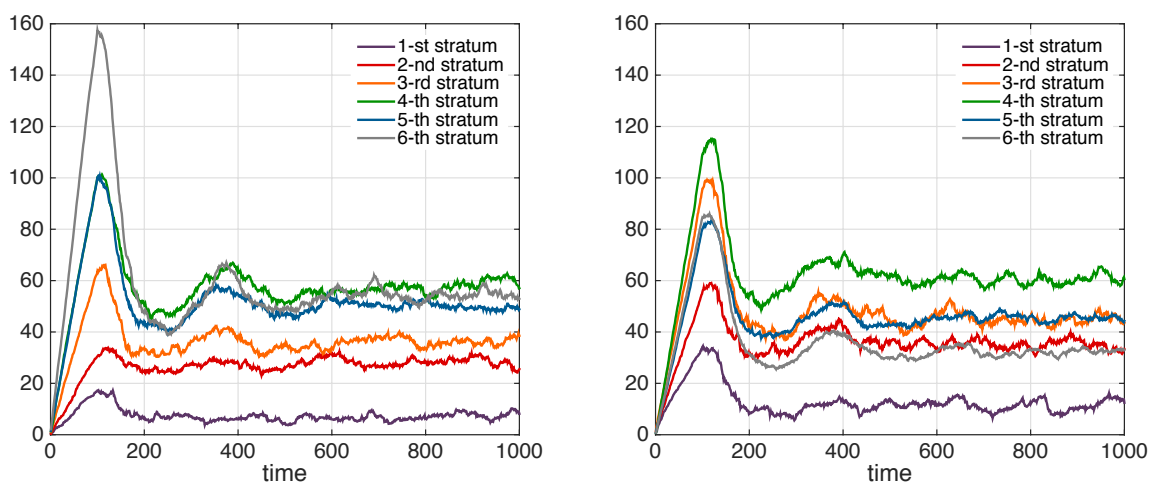


Рис. 3. Распределение коррупционных доходов между стратами для 3-й (слева) и 4-й (справа) иерархий

Для иерархий, граф которых имел высокую плотность, удалось установить, что порядок следования страт по совокупному коррупционному доходу достаточно сильно коррелирует с количеством ребер, идущих от всех остальных вершин в вершины этой страты. Например, для 4-й иерархии эти величины равны соответственно 42-90-187-251-209-87, что в точности описывает порядок следования кривых на рис. 3. Тем не менее, эта зависимость иногда нарушается, т.е. нельзя утверждать, что распределение доходов по стратам определяется лишь этим параметром (что вполне ожидаемо, поскольку суммарный коррупционный доход не может не зависеть от населенности страты и максимального и минимального размеров сделки, предлагаемой акторам в этой страте). Подчеркнем, что здесь речь идет именно о совокупном

доходе страты. Если рассматривать средний удельный доход, то здесь обычно страты располагаются в их естественном порядке: удельный доход представителей высших страт всегда больше, чем у представителей низших, поскольку количество акторов в стратах монотонно растет при движении от вершины иерархии вниз.

Вполне закономерным является вопрос о том, в какой мере на получаемые результаты влияет общее количество акторов в иерархии. Основной проблемой здесь является выбор корректного метода масштабирования исходных данных модели. Вместе с пропорциональным изменением количества акторов в каждой страте необходимо также соразмерно изменить количество ребер, минимальную и максимальную цены сделки, а также пороговые величины коррупционного дохода. Более того, при масштабировании иерархии должна измениться и интерпретация времени: каждый временной отсчет соответствует моделированию одной сделки; но в иерархии с 50 акторами за 1000 итераций каждый из них получит возможность инициировать сделку несколько раз, а в системе с 1000 акторами за 1000 итераций (с учетом случайного характера предложения сделок) некоторые акторы могут не поучаствовать ни в одной сделке.

Проведенные расчеты показали, что простой линейный скейлинг параметров модели не обеспечивает подобия результатов (в первую очередь, интегрального уровня коррумпированности и распределения доходов по стратам). Так, например, при десятикратном увеличении числа акторов до 500 при сохранении плотности графа и выбранной стратегии санкций установившийся интегральный уровень коррупции снизился с 0.7 до 0.4. Это объясняется тем, что некоторые внутренние параметры модели зависят от исходных данных существенно нелинейно: например, средняя длина траектории блуждания, соответствующего сделке, зависит не только от диапазона цен самой сделки, но также и от вероятности кооперации между акторами из разных страт, которая вообще никак не меняется при масштабировании (поскольку при этом не допускается изменение количества самих страт).

Формирование сообществ

Под сообществами в рамках рассматриваемой модели будем понимать совокупности акторов, попарные связи между которыми обладают высокими весовыми коэффициентами по сравнению со всеми остальными. Формально, таким сообществам будут соответствовать компоненты связности (см., например, [25, 27]) модифицированного графа иерархии, из которого исключены все ребра, обладающие весами ниже заданного порогового значения $w_0 > 1$. Такой подход, в рамках которого сегрегацию сообществ обеспечивают именно ребра с наименьшими весовыми коэффициентами, известен достаточно давно [12, 28]. Отношение связности будем рассматривать в слабом смысле, т.е.

для связности двух вершин v_i и v_j достаточно существования хотя бы одного пути из v_i в v_j или из v_j в v_i . Сильная связность требует существования одновременно обоих этих путей; однако, поскольку графы иерархических систем могут быть асимметричными и иметь небольшую плотность, использование сильной связности для поиска компонент связности может привести к тому, что в системе вообще не будет обнаружено ни одного сообщества, что представляется нереалистичным в контексте рассматриваемой задачи. Для поиска собственно компонент связности в данной работе использовался хорошо известный алгоритм Тарьяна [29], представляющий собой разновидность поиска в глубину. Кластерами считались лишь нетривиальные компоненты, содержащие больше одной вершины.

Следует подчеркнуть, что картина кластеризации в коррумпированной иерархии существенно зависит от того, каким образом происходит поощрение задействованных в коррупционных сделках связей. В качестве иллюстрации рассмотрим систему, в которой не действуют санкции и механизм ротации, так что акторы никогда не покидают ее; кроме того, будем считать для удобства, что в ней нет акторов с нулевым значением толерантности. Если проводить расчеты, считая, что максимальный весовой коэффициент ребер ограничен сверху, то по прошествии достаточного времени в такой системе всегда будет достигаться тривиальная кластеризация, когда сообщество будет тождественно совпадать со всей иерархией. Причины этого понятны: рано или поздно каждая возможная связь будет задействована достаточное число раз, и все весовые коэффициенты станут равны максимальному значению.

Для того чтобы наблюдать более богатый набор сценариев эволюции сообществ, можно сделать весовые коэффициенты неограниченными, а пороговое значение w_0 выбирать адаптивно, с учетом значений всех весов в данный момент времени. В этом случае качественная динамика кластеризации будет следующей. В начальные моменты времени, когда весовые коэффициенты в большинстве равны 1, выбор партнеров для продвижения сделки, в соответствии с выражением (1), будет определяться значениями толерантности. Т.е. в течение первых итераций будут задействованы те каналы, которые связывают акторов с наибольшими возможными значениями толерантности. По мере эволюции системы связи между такими акторами и дальше будут укрепляться; в то же время случайные связи, объединяющие, например, акторов с высокой и низкой толерантностью (которые могут появиться в разреженных графах в силу отмеченного выше вынужденного соучастия), будут ослабевать, поскольку вероятность их повторного использования уменьшается. По достижении определенного момента времени весовые коэффициенты становятся доминирующими множителями в выражении (1), т.е. выбор партнеров для продвижения сделки будет в основном определяться силой попарных связей, а не индивидуальными значениями толерантности. Поэтому ребра с наибольшими весовыми коэффициентами

станут своеобразными аттракторами системы: именно по ним с наибольшей вероятностью пройдет траектория случайного блуждания, описывающая распределение ренты в системе, что делает их еще более вероятными в будущем.

Основная трудность второго подхода заключается в определении подходящего значения w_0 . В настоящей работе использовалось значение

$$w_0 = \min\{W_{0.8}, 10\}, \quad (2)$$

где $W_{0.8}$ — квантиль уровня 0.8 для множества всех весовых коэффициентов. Выбор этого квантиля в качестве порогового значения позволяет учитывать лишь пятую, наиболее значимую, часть всех ребер, адаптивно подстраиваясь под наблюдаемый диапазон значений весовых коэффициентов; кроме того, квантили, как известно, устойчивы к единичным выбросам, поэтому значение не будет меняться слишком резко при исключении (например, в результате санкций) ребра с максимальным весом. Минимальное ограничение на величину порога необходимо для того, чтобы предотвратить появление сообществ в системах, где все весовые коэффициенты относительно малы по сравнению с единицей (это может произойти, например, в результате действия санкций).

Рассмотрим в качестве примера эволюцию сообществ, наблюдавшуюся в 2-й иерархии при отсутствии санкций. Весовые коэффициенты были неограниченны, пороговое значение определялось в соответствии с (2); остальные параметры такие же, как в табл. 1. Эта система демонстрирует все основные шаблоны, возникающие при описании сообществ в эволюционирующих сетях [12, 30]: рождение и гибель кластеров, присоединение акторов к кластерам, слияние и распад кластеров. Так, первые сообщества, состоящие всего из двух элементов, начинают появляться после 150 итераций. Рождение кластеров продолжается и дальше, а уже появившиеся сообщества укрепляются, присоединяя к себе новые элементы. После 300 итераций в системе уже 8 сообществ, хотя в половине из них всего по два актора. Примерно через 500 итераций происходит слияние нескольких сообществ в одно крупное, содержащее более трети всех акторов в иерархии и охватывающие все страты, кроме первой. Эта коалиция, однако, оказалась недолговечной: еще через 200 итераций она распалась почти на те же самые фрагменты, из которых была образована. После 2500 итераций сообщества частично стабилизируются: к этому моменту спонтанные связи уже оказываются заметно меньше, чем устойчивые связи внутри кластеров, и в системе остаются всего несколько сообществ. Хотя эти сообщества постоянно изменяются, присоединяя или теряя нескольких акторов, в дальнейшем картина кластеризации качественно уже не меняется.

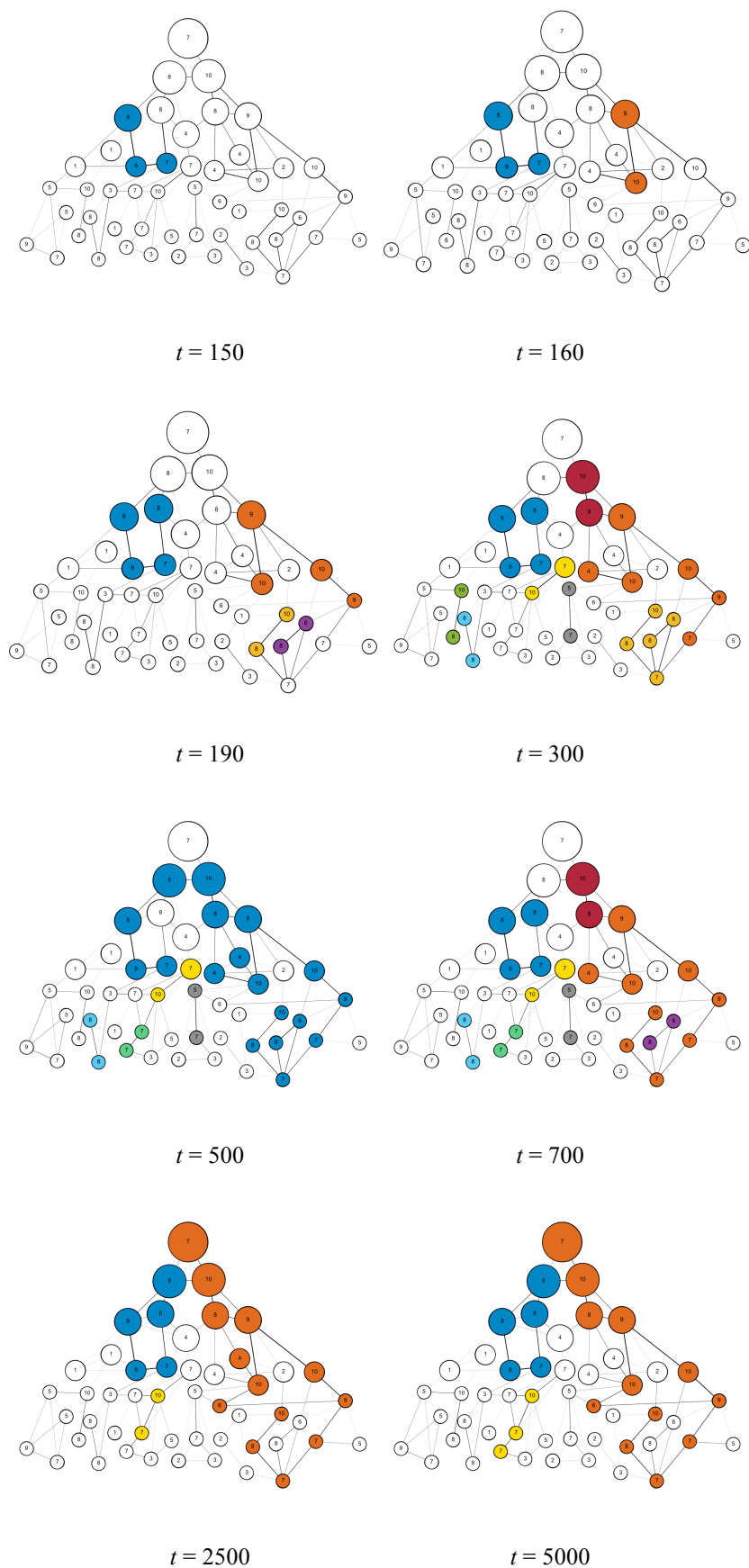


Рис. 6. Эволюция сообществ в одном случайном эксперименте для 2-й иерархии

Хорошо видно, что кластеры, появившиеся раньше (синий и красный на рисунке), после переходного режима оказались наиболее заселенными. Более точные данные содержатся на рис. 7, где показана связь между временем жизни кластера и максимальным количеством акторов, состоявших в нем. Оказалось, что самые крупные кластеры являются и самыми долговечными; такое поведение характерно и для других реальных сетей [30, 31].

Важным параметром является распределение сообществ по их размеру. На рис. 7 приведены данные, полученные на основе агрегирования 200 независимых экспериментов (показаны минимум, максимум, а также квартили и медиана размеров наблюдавшихся кластеров). Видно, что три четверти всех сообществ имеют относительно небольшой размер — не более пяти акторов; в то же время всегда наблюдалось одно крупное сообщество, содержащее в себе порядка 20 акторов. Такое поведение, в целом, соответствует результатам исследований кластеризации в различных сетях [12, 30], согласно которому распределение сообществ по размеру является степенным: хотя вероятность наблюдения кластеров убывает с ростом их размера, но не настолько быстро, чтобы сделать появление относительно крупных кластеров почти невозможным.

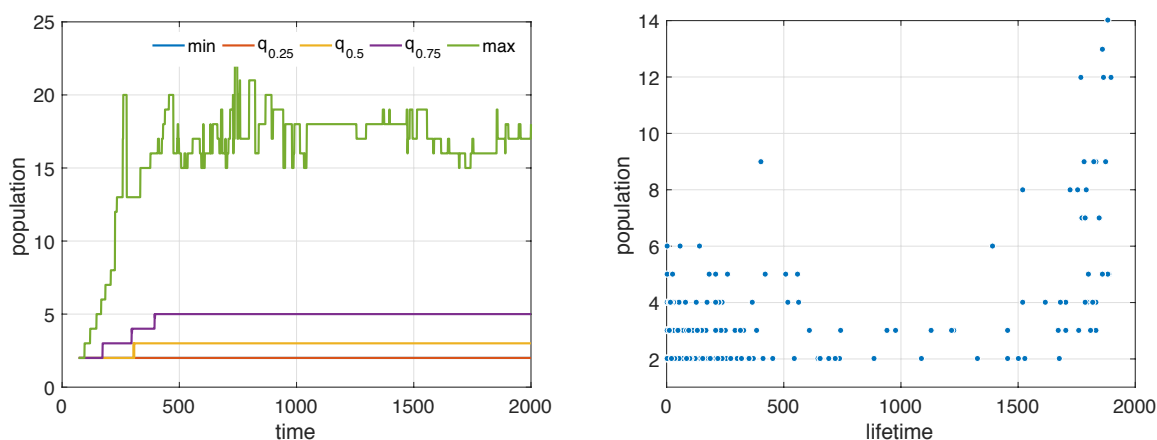


Рис. 7. Распределение сообществ по размеру (слева) и диаграмма рассеяния для времен существования кластеров (справа); 2-я иерархия без санкций и ротации

Заметим, что сценарий эволюции сообществ существенно зависит от топологии связей в иерархии. Например, если повторить описанный выше эксперимент с 4-й иерархией, то результаты будут совсем другими. Первое сообщество появляется здесь заметно позже, после 300 итераций. Затем возникают еще несколько кластеров, постепенно присоединяющих к себе новых акторов. Через 700 итераций происходит слияние наиболее заселенного сообщества с другим, более мелким — событие такого рода наблюдалось и в предыдущем эксперименте. Здесь, однако, новый «суперкластер» оказался гораздо более устойчивым: за следующие 60 итераций он поглотил еще один кластер, после чего в системе их осталось всего два, после чего произошло

окончательное слияние всех сообществ. Затем к появившемуся гигантскому кластеру лишь присоединялись новые акторы; новые же сообщества уже не образовывались.

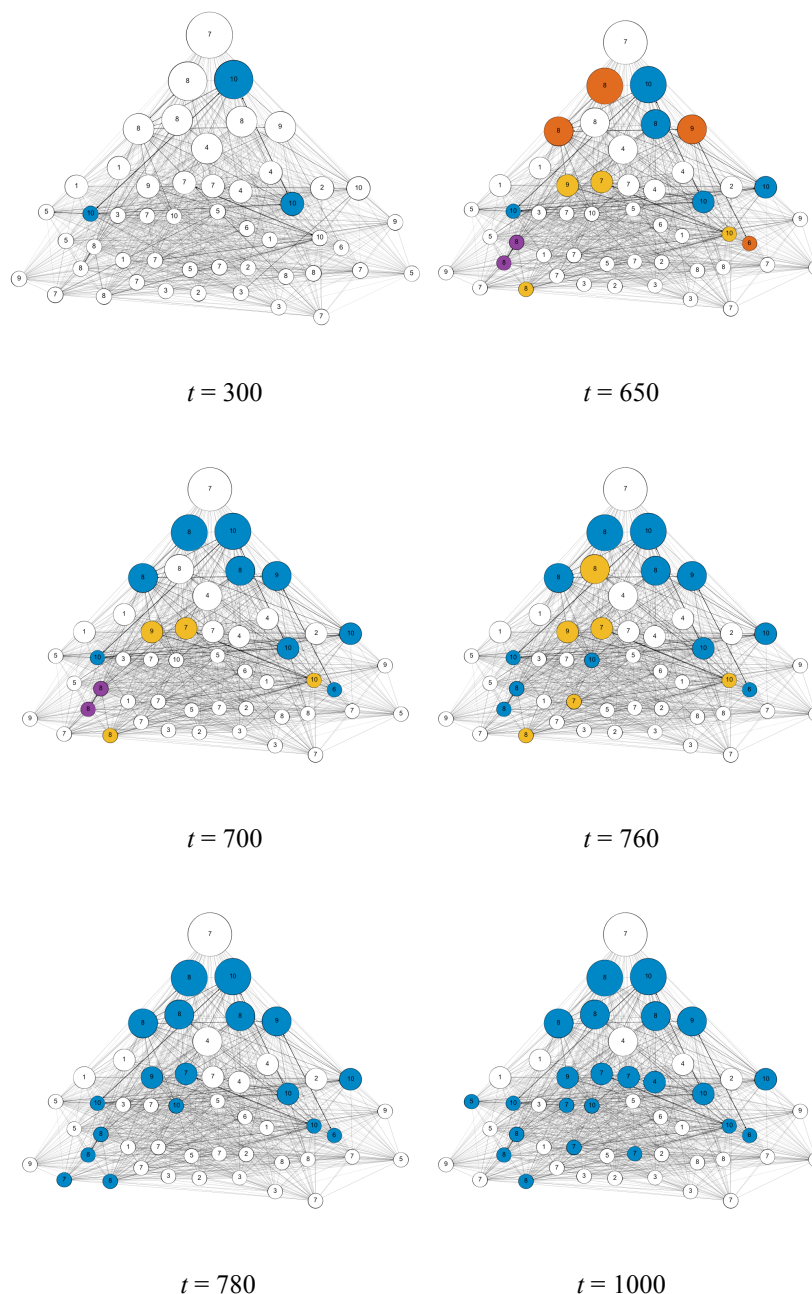


Рис. 8. Эволюция сообществ в одном эксперименте для 4-й иерархии

Такой «агломеративный сценарий», при котором несколько разрозненных кластеров со временем объединяются в одно сообщество, захватывающее большую часть иерархии, оказался типичным для систем с плотными графами связей. На рис. 9 показан нормированный размер (т.е. отношение его размера к общему числу вершин в графе) максимального наблюдавшегося кластера в

зависимости от плотности графа; каждая точка этого графика получена усреднением по 20 независимым экспериментам с разными графами, соответствующими одному и тому же значению плотности.

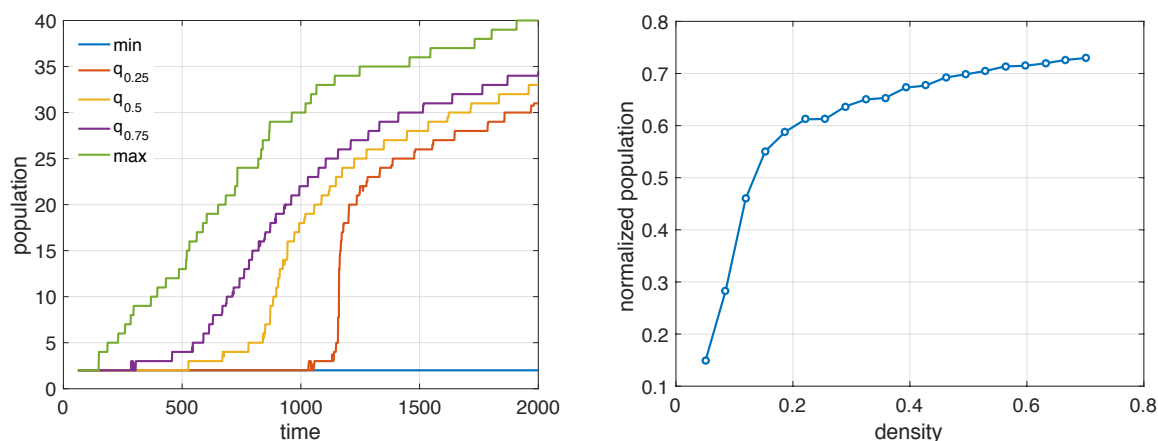


Рис. 9. Распределение кластеров по размеру в 4-й иерархии без санкций и ротации (слева); нормированный размер максимального кластера в зависимости от плотности графа связей (справа)

Во всех экспериментах оказалось, что кластеры внутри весьма однородны, в них нет четко выраженных ядра и периферии. Количественно охарактеризовать «глобальную значимость» вершин в графе можно с помощью одного из т.н. центральных индексов. В настоящей работе был выбран индекс близости (*closeness centrality*) [32], который определяется как величина, обратная к сумме длин кратчайших путей от данной вершины до всех достижимых из нее. Под длиной здесь понималась величина, обратная весовому коэффициенту ребра, так что вершина с наибольшим индексом близости в рассматриваемой модели является наиболее часто задействованной в коррупционных сделках. Расчеты показали, что внутри кластеров разброс (в качестве меры разброса рассматривалось отношение среднеквадратичного отклонения к среднему) значений индексов близости в большинстве случаев не превосходил 10%; максимально наблюдавшийся разброс составил 18%.

Естественно поставить вопрос о том, как характеристики акторов связаны с вероятностью их нахождения в кластере. На рис. 10 представлены результаты расчета для 2-й иерархии без ротации и санкций: показано усредненная по всем моментам времени для 200 независимых экспериментов (топология связей оставалась неизменной) доля вершин с заданными степенью и значением толерантности, состоящих в нетривиальных кластерах. Как следует из рисунка, чаще всего в кластерах можно встретить акторов, обладающих высокой толерантностью и большим количеством связей, что вполне соответствует эмпирическим представлениям о механизмах коррупционного поведения. Для вершины с максимальной степенью 6 время жизни внутри кластера оказалось весьма мало, поскольку в рассматриваемом графе есть всего одна такая

вершина, причем она принадлежит к третьей страте, представители которой выбирают кооперативную стратегию продвижения коррупционных сделок с вероятностью 0.2.

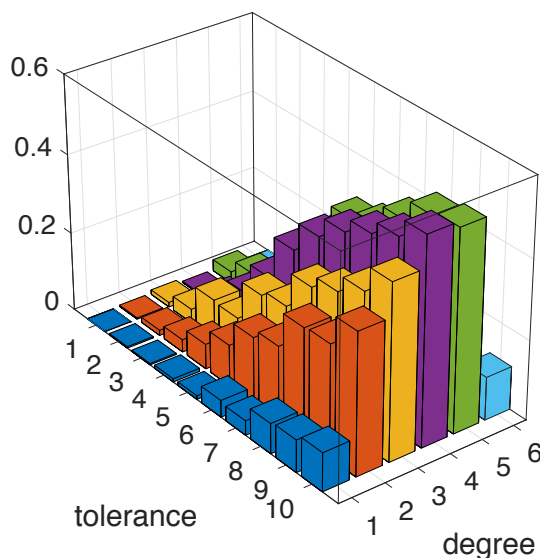


Рис. 10. Нормированная частота нахождения актора в кластере в зависимости от его толерантности и степени соответствующей вершины; 2-я иерархия

С точки зрения противодействия коррупции образование устойчивых сообществ, особенно если они имеют своих представителей во всех стратах иерархии, является нежелательным. Поэтому закономерен вопрос об устойчивости коррумпированных сообществ к выбранной санкционной стратегии. Для удобства ограничимся здесь рассмотрением простейшей антикоррупционной стратегии, когда принципал на каждой m -й итерации наудачу выбирает из всей иерархии q акторов и подвергает их аудиту. Если $m = 1$, процедура аудита выполняется на каждой итерации. Введение параметра m обусловлено тем фактом, что аудит акторов всегда сопряжен с некоторыми издержками. И хотя в рассматриваемой модели они никак не учтены, все же для принципала наибольший интерес представляет определение такой стратегии, которая приводит к желаемому (например, в смысле интегрального уровня коррумпированности) результату при наименьших сопутствующих издержках.

На рис. 11 представлены данные по размерам наблюдавшихся в 2-й иерархии сообществ при различных q и m , полученные, как и выше, агрегированием по 200 независимым экспериментам. Как и следовало ожидать, максимальный размер сообщества уменьшается по мере увеличения строгости аудита. Интересно отметить, что сообщества оказались очень чувствительны к санкциям: в случае, если аудит проводился на каждой итерации, то достаточно всего лишь проверки одного актора для того, чтобы почти полностью исключить образование сколько-нибудь значительных сообществ

(максимальный размер кластера не превосходил 3). Аналогичный результат справедлив и для 4-й иерархии; хотя для нее сценарий эволюции сообществ качественно иной, они в целом так же чувствительны. Это обусловлено особенностями самого механизма санкций: актер, уличенный в коррупции, удаляется из иерархии, и *все* его связи, вне зависимости от их силы, разрываются, получая наименьший весовой коэффициент, равный 1.

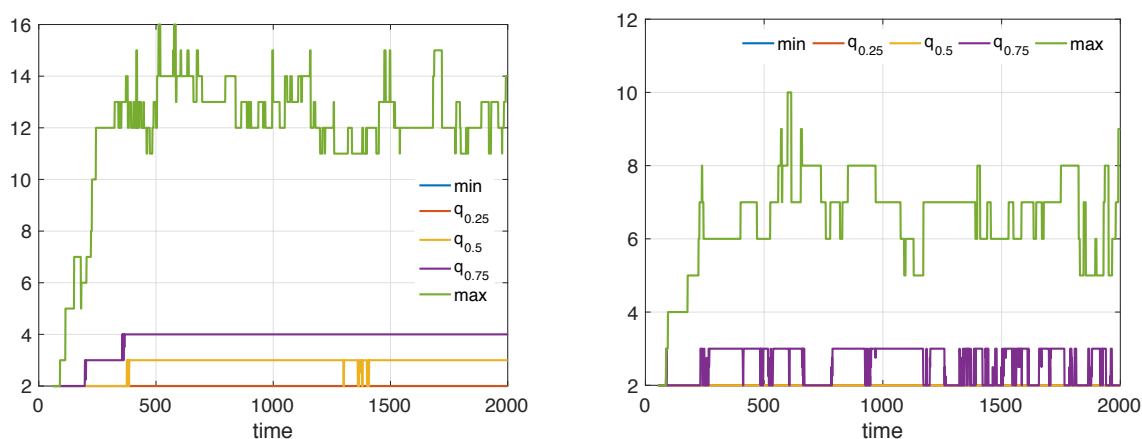


Рис. 11. Чувствительность сообществ к санкциям: $q = 1$, $m = 20$ (слева), $m = 5$ (справа); 2-я иерархия, без ротации

Можно было бы предположить, что под действием санкций внутри кластеров становятся более заметными ядро и периферия, поскольку в условиях «внешних шоков» некоторые акторы захотели бы добровольно отказаться от части своего коррупционного дохода, перенаправляя сделки к наиболее надежным и значимым акторам в надежде получить от них взамен некоторые гарантии защиты. Тем не менее, расчеты не подтвердили этих соображений: под действием санкций разброс индексов близости внутри кластеров почти не увеличился.

Эксперименты с иерархиями, содержащими большее число акторов, не выявили новых сценариев эволюции сообществ, т.е. иерархиях с разреженными графами наблюдалась конкуренция нескольких небольших кластеров, а в системах с более плотными графами связей появлялся доминирующий кластер, постепенно захватывающий большую часть иерархии.

В заключении этого раздела рассмотрим одну простую модель коррупционного поведения, допускающую точное решение для вероятности появления «суперкластера», захватывающего большую часть иерархии. Иерархия состоит из K акторов, причем каждый из них имеет в точности два соседних; соответствующий граф связей называется циклом. Пусть все акторы в иерархии имеют одну и ту же толерантность T , а размер сделок фиксирован и равен D . Сделка по-прежнему предлагается наудачу выбранному актору, который принимает ее с вероятностью $\gamma = T / T_{\max}$. Если сделка принята, то этот

актор выбирает наудачу «направление» дальнейшего продвижения сделки среди двух возможных. Но поскольку сделка не может вернуться к актору, который однажды уже поучаствовал в ней, то случайное блуждание вырождается в такой модели в простой выбор из двух вариантов. Существенным упрощением является то, что вероятность выбора здесь не зависит ни от толерантности, ни от весовых коэффициентов ребер, и равна $1/2$. Ребра, соединяющие акторов, поучаствовавших в сделке, увеличиваются на единицу. Никакие другие механизмы (санкции, ротация, возможность некооперативного поведения акторов) в этой модели не учитываются. Коррупционное поведение в этой модели формально соответствует покрытию окружности наудачу выбранными дугами фиксированной длины — это является радикальным упрощением тех эволюционных правил, которые были описаны во втором разделе настоящей работы. Вероятность того, что определенное ребро на данной итерации увеличит весовой коэффициент на 1, равна

$$p = \frac{D-1}{K} \frac{T}{T_{\max}}.$$

Действительно, каждый актор принимает предложение сделки с вероятностью γ ; нужное направление выбирается с вероятностью $1/2$, а всего в системе существует $2(D-1)$ акторов, которые, продвигая сделку, задействуют рассматриваемое ребро. Тогда на n -й итерации случайный вес любого ребра может быть представлен в виде

$$\varepsilon^{(n)} = 1 + \xi_1 + \dots + \xi_n,$$

где ξ_i — независимые в совокупности случайные величины, которые принимают значение 1 с вероятностью p , и значение 0 в противном случае. Тогда $\varepsilon^{(n)}$ будет иметь биномиальное распределение с параметрами n и p . С точки зрения кластеризации иерархии интерес представляют лишь ребра с наиболее высокими весовыми коэффициентами. Пусть P_n — вероятность того, что $\varepsilon^{(n)}$ не меньше $3n/4$ (следует учитывать, что $\varepsilon^{(n)}$ принимает целочисленные значения в диапазоне от 1 до $n+1$). Она является суммой биномиальных вероятностей, но поскольку n может неограниченно возрастать, для вычисления P_n можно использовать нормальное приближение (см., например, [33]). Кластером в этой модели является последовательность акторов, соединенных ребрами с весовыми коэффициентами не меньше $3n/4$. Тогда вероятность того, что в иерархии возникнет «суперкластер», содержащий хотя бы половину всех акторов (для удобства мы будем считать, что K всегда является четным), равна

$$S = KQ_n^2 P_n^{K/2} + KQ_n^2 P_n^{K/2+1} + \dots + KQ_n^2 P_n^{K-2} + KQ_n P_n^{K-1} + P_n^K = P_n^{K/2} \left[KQ_n + P_n^{K/2} \right]$$

где $Q_n = 1 - P_n$. Оказалось, что при $\gamma < 0.8$ появление «суперкластера» является почти невозможным событием при любых допустимых D . В противном случае, при $\gamma \geq 0.8$, всегда можно указать D , такое что с ростом n вероятность S стремится к 1. Т.е. в этой модели возможны лишь два режима: либо появление «суперкластера» фактически невозможно, либо, наоборот, его появление происходит почти наверняка с течением времени.

Хотя эта простейшая модель и допускает аналитическое решение, она слишком нереалистично описывает динамику коррупционного поведения в иерархии (например, не учитывает стратификацию и предполагает выбор соучастников наудачу). Именно по этой причине возникает необходимость использования имитационного моделирования с гораздо более сложными правилами, подобно тому, как описано в этой работе.

Заключение

Исследование модели показало, что интегральные характеристики системы зависят от топологии связей лишь при малой плотности соответствующих графов; по мере увеличения количества ребер происходит насыщение, после достижения которого добавление новых ребер и их конкретное расположение перестают оказывать сколько-нибудь значимое влияние на эти параметры. Для структур с достаточно плотными графами иерархий ведущими факторами, определяющими динамику интегральных характеристик, являются параметры страт, распределение значений толерантности и параметры антикоррупционной стратегии принципала. В то же время индивидуальные характеристики страт (например, распределение совокупного дохода) существенно зависят от топологии связей. Отсюда, в частности, следует, что манипуляции со структурой связей в иерархии лишь в весьма ограниченных пределах могут помочь в борьбе с коррупцией.

Было показано, что в модели возможны два основных сценария эволюции кластеров. В первом сценарии, характерном для разреженных графов, возникают несколько небольших кластеров, конкурирующих друг с другом; и хотя на некоторое время один из этих кластеров может подчинить себе другие, такие коалиции оказываются весьма непродолжительными, и ни одно из сообществ не может распространить свое влияние на всю систему. Согласно второму сценарию, напротив, по прошествии некоторого времени в системе возникает лидирующий кластер, который постепенно присоединяет к себе остальные сообщества небольшого размера. В системе без санкций это приводит к появлению т.н. «мертвой зоны», полностью парализующей работу всей системы. Кроме того, оказалось, что этот гигантский кластер обычно имеет своих представителей во всех стратах иерархии, формируя своеобразную «теневую вертикаль власти».

Проведенные расчеты указывают, что кластеры весьма однородны, и нельзя с достаточными основаниями утверждать о наличии четко выделенного

ядра и периферии. Эта однородность сохраняется и под действием санкций. Фактически, это означает, что внутри сообществ не возникает дополнительных механизмов самоорганизации, приводящих к появлению локальных координаторов коррупционных сделок.

Остается открытым вопрос о корректном масштабировании модели и отыскании ее параметров подобия. Оказалось, что линейное масштабирование иерархии еще не гарантирует совпадения в наблюдаемом поведении, поскольку некоторые механизмы в рассматриваемой модели зависят от количества элементов существенно нелинейно.

Библиографический список

1. Friedrich C. J. Corruption concepts in historical perspectives // *Political corruption: Concepts and contexts*, ed. by A. J. Heidenheimer. New Brunswick: Transactions Publishers. 2007. p. 15-23.
2. Gardiner J. Defining corruption // *Political corruption: Concepts and contexts*, ed. by A. J. Heidenheimer. New Brunswick: Transactions Publishers. 2007. p. 25-40.
3. Aidt T. S. Economic analysis of corruption: A survey // *The Economic Journal*. Vol. 113. No. 491. p. F632—F652
4. Pellegrini L., Gerlagh R. Causes of corruption: a survey of cross-country analyses and extended results // *Economics of Governance*. 2008. Vol. 3. No. 9. p. 245-263.
5. Leff N. H. Economic development through bureaucratic corruption // *Political corruption: Concepts and contexts*, ed. by A. J. Heidenheimer. New Brunswick: Transactions Publishers. 2007. p. 307-321.
6. Выборнов Р. А. Модели и методы управления организационными системами с коррупционным поведением участников // М.: ИПУ РАН. 2006. 110 с.
7. Михайлов А. П. Моделирование системы “Власть-Общество”. М.: Наука, Физматлит. 2006. 145 с.
8. Rinaldi S., Feichtinger G., Wirl F. Corruption dynamics in democratic societies // *Complexity*. 1998. Vol. 3. No. 5. p. 53-64.
9. Зенюк Д. А., Малинецкий Г. Г., Фаллер Д. С. Социальная модель коррупции в иерархических системах // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2013. № 87. 27 с.
10. Newman M. E. J. *Networks: An introduction*. Oxford: Oxford University Press. 2010. 720 p.
11. Barrat A., Barthelemy M., Vespignani A. *Dynamical processes on complex networks*. Cambridge: Cambridge University Press. 2008. 347 p.
12. Barabasi A.-L. *Network science*. Cambridge: Cambridge University Press. 2016. p. 474.

13. Erdos P., Renyi A. On random graphs I // *Publicationes Mathematicae*. 1959. Vol. 6. p. 290-297.
14. Erdos P., Renyi A. On the evolution of random graphs. // *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 1960. Vol. 5. p. 17-61.
15. Reka A., Barabasi A.-L. Statistical mechanics of complex networks // *Reviews of Modern Physics*. 2002. Vol. 74. p. 47-97.
16. Barabasi A.-L., Albert R. Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. Vol. 286. No. 5439. p. 509-512.
17. Watts D. J., Strogatz S. H. Collective dynamics of small-world networks // *Nature*. 1998. Vol. 393. No. 6684. p. 440-442.
18. Capasso V. The mathematical structure of epidemic systems. Berlin: Springer Verlag. 1993. 283 p.
19. Vynnycky E., White R. G. An introduction to infectious disease modelling. Oxford: Oxford University Press. 2010. 368 p.
20. Castellano C., Fortunato S., Loreto V. Statistical physics of social dynamics // *Reviews of modern physics*. 2009. Vol. 81. No. 2. p. 591.
21. Drossel B. Random boolean networks // *Reviews of nonlinear dynamics and complexity*, ed. by H. G. Schuster. New York: John Wiley & Sons. 2008. p. 69-110.
22. Ferber J. Multi-agent systems: An introduction to artificial intelligence. Harlow: Addison-Wesley. 1999. 528 p.
23. Shoham Y., Leyton-Brown K. Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations. Cambridge: Cambridge University Press. 2009. 504 p.
24. Bonabeau E., Dorigo M., Theraulaz G. Swarm intelligence: From natural to artificial systems. Oxford: Oxford University Press. 1999. 320 p.
25. Diestel R. Graph Theory. Berlin: Springer. 2010. 410 p.
26. Российское уголовное право. Общая часть / Под ред. В. С. Комиссарова. СПб.: Питер. 2005. 560 с.
27. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир. 1973. 300 с.
28. Granovetter M. S. The strength of weak ties // *American journal of sociology*. 1973. p. 1360-1380.
29. Even S. Graph algorithms. Cambridge: Cambridge University Press. 2012. 189 p.
30. Palla G., Barabasi A.-L., Vicsek T. Quantifying social group evolution // *Nature*. 2007. Vol. 446. No. 7136. p. 664-667.
31. Fortunato S. Community detection in graphs // *Physics reports*. 2010. Vol. 486. No. 3. p. 75-174.
32. Borgatti S. P. Centrality and network flow // *Social networks*. 2005. Vol. 27. No. 1. p. 55-71.
33. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: ЛИБРОКОМ. 2009. 656 с.