



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 20 за 2016 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Вашковьяк М.А.

Особенности вековой
эволюции орбит
гипотетических спутников
Урана

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Вашковьяк М.А. Особенности вековой эволюции орбит гипотетических спутников Урана // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 20. 30 с. doi:[10.20948/prepr-2016-20](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-20)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-20>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

М.А. Вашковьяк

**Особенности вековой эволюции орбит
гипотетических спутников Урана**

Москва — 2016

Вашковьяк М.А.

Особенности вековой эволюции орбит гипотетических спутников Урана

Рассмотрена задача о вековых возмущениях орбиты пробного спутника пренебрежимо малой массы, вызываемых совместным влиянием сжатия центральной планеты, притяжения ее наиболее массивных (или главных) спутников и Солнца. В отличие от предыдущих исследований данной задачи, аналитическое выражение полной осредненной возмущающей функции получено для произвольного наклона орбиты пробного спутника. Для решения эволюционной системы при произвольных значениях постоянных параметров и начальных элементов использован численный метод. Для спутниковой системы Урана на интервалах времени порядка десятков тысяч лет изучено поведение некоторого множества орбит в области примерно равного влияния рассматриваемых возмущающих факторов. Выявлена главная роль эффекта Лидова-Козаи для качественного объяснения отсутствия малых тел на почти круговых околоэкваториальных орбитах с большими полуосями, превосходящими примерно 1.8 млн км.

Ключевые слова: вековые возмущения, спутниковые орбиты, спутники Урана.

Mikhail Alexandrovich Vashkov'yak

Peculiarities of Secular Orbital Evolution of Hypothetical Uranus's Satellites

A problem is considered on secular perturbations of negligible mass probe satellite's orbit caused by joint influence of central planet's oblateness and attraction of its most massive (or main) satellites and the Sun. Unlike previous researches of this problem analytical expression of complete averaged perturbing function is got for the arbitrary inclination of probe satellite's orbit. A numerical method is used for solving of the evolutionary system with arbitrary values of constant parameters and initial elements. The behavior of a certain number of orbits is studied for the satellite system of Uranus on time intervals about tens of thousands years in area of approximately equal influence of the considered perturbing factors. The main role of Lidov-Kozai effect is revealed for qualitative explanation of absence of small bodies on almost circular near equatorial orbits with semi-major axes exceeding an approximately 1.8 million km.

Key words: secular perturbations, satellite orbits, Uranus's satellites.

1. Введение и постановка задачи

Настоящая работа является продолжением исследования задачи об эволюции орбиты пробного (в частности, гипотетического) спутника пренебрежимо малой массы под действием совместных гравитационных возмущений от сжатия центральной планеты, притяжения ее главных спутников и Солнца (Вашковьяк и др., 2015). Рассматриваемая задача возникает, в частности, при изучении особенности спутниковых систем всех планет-гигантов, связанной с существованием в околопланетном пространстве зон «избегания» малыми небесными телами. Фактически это зоны, разделяющие множества орбит регулярных и нерегулярных спутников. В этих зонах влияние указанных возмущений попарно или в совокупности примерно сравнимо по величине. Данная работа направлена на качественное объяснение причины такого «избегания» в спутниковой системе Урана. Эта причина связана с эффектом Лидова-Козаи (Лидов, 1961; Козаи, 1962), проявляющимся и в рассматриваемой более полной модели вековой эволюции орбит гипотетических (или фиктивных) спутников по сравнению с моделью двукратно осредненной задачи Хилла.

Основой исследования являются вековые уравнения первого приближения теории возмущений. Это дифференциальные уравнения для изменения элементов орбиты, в которых полная возмущающая функция R заменена ее вековой частью W . Она находится с помощью независимого осреднения R по средним планетоцентрическим долготам Солнца, главных спутников и исследуемого (пробного или гипотетического) спутника в предположении отсутствия взаимных орбитальных резонансов. Функция W зависит от пяти планетоцентрических элементов орбиты: постоянной большой полуоси a , эксцентриситета e , наклона i , аргумента перицентра ω и долготы восходящего узла Ω . Угловые элементы будем относить к плоскости планетного экватора и линии ее пересечения с плоскостью гелиоцентрической орбиты планеты (или планетоцентрической орбиты Солнца). Для дальнейшего изложения целесообразно повторить ряд формул и обозначений вышеуказанной работы, которую для краткости будем называть исходной.

Функция W состоит из трех слагаемых, отвечающих трем различным возмущающим факторам, а единственный первый интеграл эволюционной системы четвертого порядка имеет вид

$$W = W_0 + W_1 + W_2 = \text{const.} \quad (1)$$

Кроме уже введенных кеплеровских элементов спутниковой орбиты, используются следующие обозначения:

μ_0, μ_j, μ' – произведения гравитационной постоянной на массы, соответственно, планеты, её j -го главного спутника и Солнца;

a_0, a_j, a' – соответственно: средний экваториальный радиус планеты, большая полуось орбиты её j -го главного спутника и планетоцентрической орбиты Солнца;

c_{20} – коэффициент при второй зональной гармонике гравитационного поля планеты;

i_{orb}, ω_{orb} – соответственно: наклонение и аргумент перицентра орбиты пробного спутника, отнесенные к плоскости орбиты планеты.

В данной работе (как и в исходной) эволюционная задача рассматривается с учетом главных членов вековых частей возмущающих функций, а их явные выражения приводятся ниже с использованием обозначений

$$s = \sin i, \quad c = \cos i. \quad (2)$$

Функция

$$W_0 = \frac{3\mu_0 a_0^2 c_{20}}{4a^3} (1 - e^2)^{-3/2} (s^2 - 2/3) \quad (3)$$

описывает вековое влияние второй зональной гармонике гравитационного поля планеты.

Функция

$$W_1 = \frac{3\mu' a^2}{16a'^3} \left[2(e^2 - \sin^2 i_{orb}) + e^2 \sin^2 i_{orb} (5 \cos 2\omega_{orb} - 3) \right] =$$

$$= \frac{3\mu' a^2}{16a'^3} \left\{ \begin{aligned} & \left[2e^2 - (2 + 3e^2) \left[s^2 + \sin^2 I (2c^2 - 1 + s^2 \sin^2 \Omega) - s c \sin 2I \cos \Omega \right] + \right. \\ & \left. + 5e^2 \cos 2\omega \left[s^2 + \sin^2 I (2c^2 - 1 + (s^2 - 2) \sin^2 \Omega) - s c \sin 2I \cos \Omega \right] + \right. \\ & \left. + 5e^2 \sin 2\omega \left[-c \sin^2 I \sin 2\Omega + s \sin 2I \sin \Omega \right] \right\} \quad (4)$$

описывает влияние вековых солнечных возмущений в квадратичном приближении относительно a/a' или в приближении Хилла, а I – это наклонение плоскости экватора планеты к плоскости ее орбиты.

Функция W_2 описывает вековые возмущения от главных спутников планеты, которые в нашем рассмотрении предполагаются не взаимодействующими между собой. Эта функция определяется формулой

$$W_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(E)(1 - e \cos E) dE, \quad (5)$$

где E – эксцентрическая аномалия пробного спутника, а V в динамической интерпретации представляет собой силовую функцию системы конечного числа J гауссовых колец с массами, равными массам спутников. В упрощенной модели мы предполагаем, что орбиты всех главных спутников лежат в экваториальной плоскости планеты и имеют нулевые эксцентриситеты. При этом функция V может быть представлена гипергеометрическим рядом (Вашковьяк, 1976)

$$V = \sum_{j=1}^J \frac{\mu_j}{\sqrt{r^2 + a_j^2}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; \frac{4a_j^2(r^2 - z^2)}{(r^2 + a_j^2)^2}\right) = \sum_{j=1}^J \frac{\mu_j}{\sqrt{r^2 + a_j^2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left[\frac{4a_j^2(r^2 - z^2)}{(r^2 + a_j^2)^2} \right]^n, \quad (6)$$

где

$$r = a(1 - e \cos E), \quad z = as[(\cos E - e) \sin \omega + (1 - e^2)^{1/2} \cos \omega \sin E], \quad (7)$$

B_n – постоянные числовые коэффициенты, определяемые как общей, так и рекуррентной формулами

$$B_n = \frac{(4n)!}{2^{6n} (n!)^2 (2n)!}; \quad B_n = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{16n^2}\right) B_{n-1}, \quad n > 0, \quad B_0 = 1. \quad (8)$$

Можно показать, что функция W_2 зависит от e , s и ω лишь посредством комбинаций e^2 , s^2 и $e^2 s^2 \cos 2\omega$. Указанные свойства справедливы для любых значений эксцентриситета и наклона орбиты пробного спутника, а выражение для функции W_2 в общем виде может быть представлено следующей формулой:

$$W_2 = \sum_{j=1}^J M_j \sum_{\kappa} P_{\kappa}^{(j)}(\alpha_j) Q_{\kappa}^{(j)}(e^2, s^2, e^2 s^2 \cos 2\omega), \quad (9)$$

где $M_j = \frac{\mu_j}{\sqrt{a^2 + a_j^2}}$, $P_{\kappa}^{(j)}, Q_{\kappa}^{(j)}$ суть некоторые рациональные функции своих аргументов.

В исходной работе было использовано упрощение, позволившее для умеренных значений эксцентриситета и синуса наклона ограничиться в выражении (9) частичной суммой ряда по степеням этих малых параметров. Целью настоящего исследования является предварительное нахождение аналитического выражения функции W_2 для орбит с умеренными значениями эксцентриситета, но произвольными значениями наклона и (с использованием этого выражения) получение эволюционных характеристик некоторых классов спутниковых орбит. Кроме того, если традиционные разложения полной возмущающей функции и, в частности, ее вековой части W_2 представляются рядами по степеням отношений больших полуосей a / a_j или a_j / a , в зависимости от значений a и a_j , то в данной работе используются ряды по квадрату «единого» параметра

$$\eta_j = \frac{2aa_j}{a^2 + a_j^2}, \quad (10)$$

остающегося меньшим единицы для любого соотношения между большими полуосями a и a_j . Этот параметр был введен при получении единого аналитического выражения вековой части возмущающей функции в уже упомянутой работе (Вашковьяк, 1976). В этой работе нужное выражение было получено для произвольного i , однако лишь с точностью до e^2 включительно. Выполняемый здесь (как и в исходной работе) учет слагаемых порядка e^4 существенно расширяет область применимости получаемых результатов. Даже для немалых значений эксцентриситета $e = 0.5$ и $e = 0.7$ неучтенные в вековой части возмущающей функции слагаемые $\sim e^6$ оказываются величинами порядка 0.01 и 0.1 соответственно, что позволяет описать главные качественные особенности эволюции и получить приближенные (с точностью порядка 10%) количественные оценки ее параметров. Следует отметить еще, что с увеличением постоянного значения a относительно a_j вклад отброшенных слагаемых будет только уменьшаться.

2. Выражение вековой части полной возмущающей функции для орбит произвольного наклона

Для нахождения аналитического выражения функции W_2 вначале необходимо, подставив выражения (7) в формулу (6), получить функцию V . Далее выполняется интегрирование в формуле (5) и для умеренных значений эксцентриситета учитывается лишь конечное число членов разложения функции W_2 в ряд по степеням e .

Проведение необходимых стандартных, но достаточно громоздких преобразований приводит к следующему общему выражению

$$W_2 = \sum_{j=1}^J M_j \sum_{p=0}^2 \sum_{q=0}^p \left[C_{p,q}^{(j)}(\alpha_j, s^2) e^{2p} \cos 2q\omega + O(e^6) \right], \quad (11)$$

где $\alpha_j = \frac{a^2}{a_j^2 + a^2}$, а функции $C_{p,q}^{(j)}(\alpha_j, s^2)$ для различных пар индексов p, q представляются формулой

$$C_{p,q}^{(j)}(\alpha_j, s^2) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \eta_j^{2n} S_{p,q}^{(j)}(n, \alpha_j, s^2). \quad (12)$$

Для $n = 0$

$$S_{1,0}^{(j)}(0, \alpha_j, 0) = \frac{3}{4} \alpha_j (\alpha_j - 1), \quad S_{2,0}^{(j)}(0, \alpha_j, 0) = \frac{15}{64} \alpha_j^2 (\alpha_j - 1) (7\alpha_j - 3), \quad (13)$$

причем все остальные функции $S_{p,q}^{(j)}(0, \alpha_j, 0) = 0$.

Для $n \geq 1$ указанные функции определяются формулами

$$S_{p,q}^{(j)}(n, \alpha_j, s^2) = \sum_{l=1}^5 \sum_{k=1}^3 A_{k,l}^{(p,q)}(n, \alpha_j, s^2) D_{n,k,l}(s^2), \quad (14)$$

$$D_{n,k,l}(s^2) = b_{n,l} \sum_{m=0}^{n-l+1} (-1)^m d_{n,k,l}^{(m)} s^{2m}, \quad b_{n,l} = (-1)^{l-1} (-n)_{l-1} = \frac{n!}{(n-l+1)!},$$

где числовые коэффициенты $d_{n,k,l}^{(m)}$ определяются формулой

$$d_{n,l,k}^{(m)} = \frac{(n-l+1)!}{(n-l+1-m)!} \frac{(k-1/2)_m}{(k)_m m!},$$

а общее выражение $(\lambda)_\mu = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-\mu+1)$ – это символ Похгаммера.

Для различных значений m $d_{n,l,k}^{(m)}$ определяются рекуррентной формулой

$$d_{n,k,l}^{(m)} = d_{n,k,l}^{(m-1)} \left(\frac{n-l+2}{m} - 1 \right) \left[1 - \frac{1}{2(k+m-1)} \right], \quad d_{n,k,l}^{(0)} = 1. \quad (15)$$

В формулах (14) функции $A_{k,l}^{(p,q)}(n, \alpha_j, s^2)$ суть полиномы относительно s^2 с коэффициентами, зависящими от n и α_j ,

$$A_{k,l}^{(p,q)}(n, \alpha_j, s^2) = \sum_{r=0}^4 A_{k,l}^{(p,q,r)}(n, \alpha_j) s^{2r}, \quad (16)$$

а формулы для вычисления коэффициентов $A_{k,l}^{(p,q,r)}(n, \alpha_j)$ вынесены в Приложение (табл. 1 – 5), чтобы не загромождать ими основной текст.

Как уже было отмечено во введении, в аналитических исследованиях обычно используются разложения возмущающей функции по степеням отношений больших полуосей. Одно из компактных выражений полной возмущающей функции для случая произвольного наклона предложено в работе (Лях, 1959). Оно представляет собой тригонометрический ряд, расположенный по кратным средним аномалий и долгот возмущаемого и возмущающего тел. Коэффициенты ряда зависят от больших полуосей, эксцентриситетов и наклонов их орбит. Если ограничиться вековой частью, соответствующей специальным значениям индексов, то полученное выражение будет наиболее близким по своей структуре к приведенной формуле (11).

Поскольку в формуле (11) не учитываются слагаемые порядка малости e^6 и выше, неизбежно возникает необходимость оценки пригодности полученного выражения функции W_2 для немалых значений эксцентриситета. Такая оценка для конкретных значений параметров μ_j , a_j (см. раздел о спутниковой системе Урана) проведена путем сравнительных вычислений этой функции двумя способами – предлагаемым аналитическим (W_a) и с помощью численного нахождения квадратуры (5) методом Гаусса (W_c). Результаты этих вычислений представлены на рис. 1, на котором показаны зависимости W_a (сплошные линии) и W_c (штриховые линии) от наклона для $e = 0.4$ и различных значений большой полуоси – числа от 1.5 до 3 (в млн км) нанесены рядом с соответствующими кривыми.

W_a, W_c

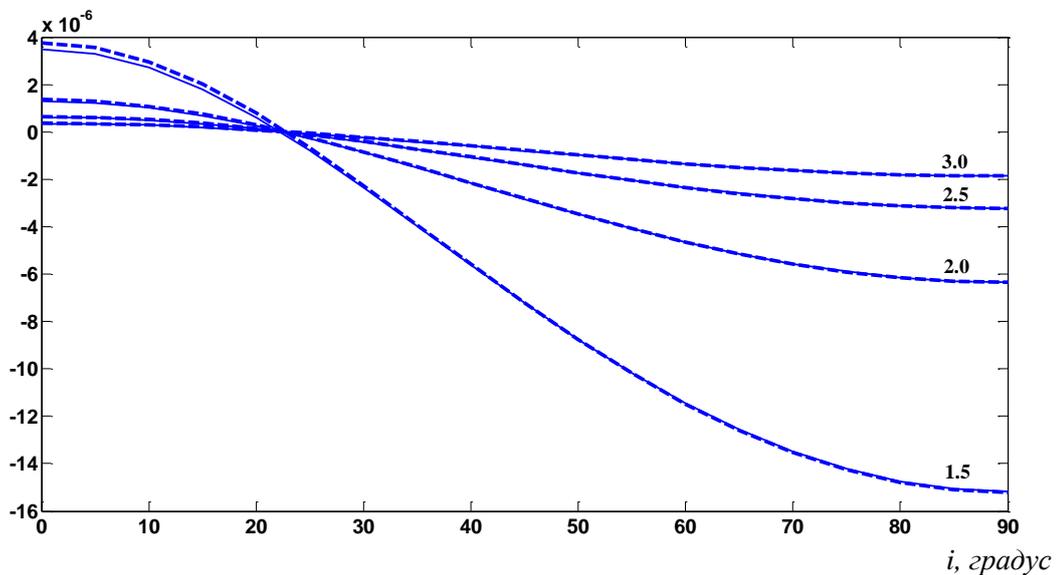


Рис. 1. Зависимости от наклона функций W_a (сплошные линии) и W_c (штриховые линии) для $e = 0.4$ и $a = 1.5 \div 3$ млн км

Можно ожидать, что для исследования эволюционной задачи представленная погрешность вычисления функции W будет достаточно приемлемой, а качественные особенности эволюции спутниковой орбиты будут адекватны и при $e > 0.4$, если учесть, как это было отмечено ранее, что эта погрешность уменьшается с увеличением большой полуоси a .

3. Эволюционная система уравнений в элементах

Для упрощения дальнейшего описания используются постоянные параметры, некоторые из которых были введены в исходной работе

$$\alpha_0 = -\frac{3}{16} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 c_{20}, \quad \beta = \frac{3}{16} \frac{\mu'}{\mu_0} \left(\frac{a}{a'} \right)^3, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{\alpha_0}{\beta}, \quad \gamma_1(s^2) = N \sum_{j=1}^J M_j C_{0,0}^{(j)}(\alpha_j, s^2), \quad \gamma_2(s^2) = N \sum_{j=1}^J M_j C_{1,0}^{(j)}(\alpha_j, s^2), \\ \gamma_3(s^2) &= N \sum_{j=1}^J M_j C_{1,1}^{(j)}(\alpha_j, s^2), \quad \gamma_4(s^2) = N \sum_{j=1}^J M_j C_{2,0}^{(j)}(\alpha_j, s^2), \\ \gamma_5(s^2) &= N \sum_{j=1}^J M_j C_{2,1}^{(j)}(\alpha_j, s^2), \quad \gamma_6(s^2) = N \sum_{j=1}^J M_j C_{2,2}^{(j)}(\alpha_j, s^2), \end{aligned} \quad (18)$$

нормирующий множитель N и новая независимая переменная τ

$$N = \frac{1}{\beta v^2 a^2} = \frac{a}{\beta \mu_0}, \quad \tau = \beta v (t - t_0), \quad (19)$$

где $v = \sqrt{\mu_0 / a^3}$ – среднее движение пробного спутника, t_0 и t – начальный и текущий момент времени соответственно. Эти параметры, а также полную нормированную осредненную возмущающую функцию

$$W_N = NW = \text{const} \quad (20)$$

мы и будем использовать в дальнейшем. Заметим, что функции $\gamma_{1,2,\dots,6}(s^2)$ зависят, кроме s^2 , от постоянных параметров a и a_j .

Замечание: Можно показать, что $\gamma_3(s^2)$ и $\gamma_5(s^2)$ имеют порядок s^2 и выше, а $\gamma_6(s^2)$ – порядок s^4 и выше. Это замечание поясняющее, поскольку в приведенной далее формуле (25) содержатся отношения $\gamma_{3,5,6}(s^2)/s$, которые при $s \rightarrow 0$ являются конечными величинами и имеют порядок малости s или s^3 .

После выполненных предварительных преобразований по нахождению функции W_2 полная нормированная осредненная возмущающая функция для орбит произвольного наклона принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
W_N = & 2e^2 - (2 + 3e^2) \left[s^2 + \sin^2 I (2c^2 - 1 + s^2 \sin^2 \Omega) - sc \sin 2I \cos \Omega \right] + \\
& + 5e^2 \cos 2\omega \left[s^2 + \sin^2 I (2c^2 - 1 + (s^2 - 2) \sin^2 \Omega) - sc \sin 2I \cos \Omega \right] + \\
& + 5e^2 \sin 2\omega \left[-c \sin^2 I \sin 2\Omega + s \sin 2I \sin \Omega \right] + 4\gamma_0 (1 - e^2)^{-3/2} (2/3 - s^2) + \gamma_1(s^2) + \\
& + e^2 \left[\gamma_2(s^2) + \gamma_3(s^2) \cos 2\omega \right] + e^4 \left[\gamma_4(s^2) + \gamma_5(s^2) \cos 2\omega + \gamma_6(s^2) \cos 4\omega \right] = \text{const.}
\end{aligned} \tag{21}$$

Напомним, что в данном выражении слагаемые, не учитываемые в W_2 , имеют порядок малости e^6 и выше.

Эволюционная система уравнений в форме Лагранжа получается после нахождения частных производных функции W_N по элементам e , i , ω , Ω . При вычислении производных по наклонению функций $\gamma_{1,2,\dots,6}(s^2)$ удобно ввести операторное обозначение

$$\hat{D} = \partial / \partial (s^2), \tag{22}$$

так что $\partial / \partial i = \sin 2i \hat{D}$, а вычисление производных от функций $C_{p,q}^{(j)}(\alpha_j, s^2)$ производить по формулам

$$\hat{D}C_{0,0}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \eta_j^{2n} \hat{D}D_{n,1,l}(s^2),$$

$$\hat{D}C_{p,q}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \eta_j^{2n} \sum_{l=1}^5 \sum_{k=1}^3 \left[A_{k,l}^{(p,q)}(n, \alpha_j, s^2) \hat{D}D_{n,k,l}(s^2) + D_{n,k,l}(s^2) \hat{D}A_{k,l}^{(p,q)}(n, \alpha_j, s^2) \right],$$

$$\hat{D}D_{n,k,l}(s^2) = b_{n,l} \sum_{m=1}^{n-l+1} (-1)^m m d_{n,k,l}^{(m)} s^{2(m-1)}; \quad (23)$$

$$\hat{D}A_{k,l}^{(p,q)}(n, \alpha_j, s^2) = \sum_{r=1}^4 r A_{k,l}^{(p,q,r)}(n, \alpha_j) s^{2(r-1)}.$$

В результате выполненных преобразований эволюционная система четырех уравнений для произвольного наклона внешне становится похожей на систему, приведенную в исходной работе. В отличие от той системы, в которой все коэффициенты $\gamma_{1,2,\dots,5}$, зависящие от α_j , постоянны для фиксированных значений больших полуосей a и a_j , в полученной системе (24)–(27) присутствуют зависимости $\gamma_{1,2,\dots,6}$ не только от α_j , но и от s^2 .

$$\frac{de}{d\tau} = 10e\sqrt{1-e^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5} \left[5s^2 + \gamma_3(s^2) + e^2\gamma_5(s^2) + 4e^2\gamma_6(s^2)\cos 2\omega \right] \sin 2\omega - \\ - \sin 2I (\sin \Omega \cos 2\omega + c \cos \Omega \sin 2\omega) s + \\ + \sin^2 I \left[c \sin 2\Omega \cos 2\omega + (1 - 2s^2 + (s^2 - 2)\sin^2 \Omega) \sin 2\omega \right] \end{array} \right\}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-e^2} \frac{di}{d\tau} = & -2e^2 c \left\{ 5s + \frac{1}{s} \left[\gamma_3(s^2) + e^2\gamma_5(s^2) + 4e^2\gamma_6(s^2)\cos 2\omega \right] \right\} \sin 2\omega + \\ & + \sin 2I \left[c(2 + 3e^2 + 5e^2\cos 2\omega) \sin \Omega + 5e^2(1 - 2s^2) \cos \Omega \sin 2\omega \right] + \\ & + \sin^2 I \left[s(2 + 3e^2 + 5e^2\cos 2\omega) \sin 2\Omega + 5e^2 s c (3 + \cos 2\Omega) \sin 2\omega \right], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-e^2} \frac{d\omega}{d\tau} = & 4\gamma_0(1-e^2)^{-3/2}(4-5s^2) + 8 + 2e^2 - 10s^2 + 10(s^2 - e^2)\cos 2\omega + \\
& + 2(1-e^2)\left[\gamma_2(s^2) + \gamma_3(s^2)\cos 2\omega + 2e^2\left\langle\gamma_4(s^2) + \gamma_5(s^2)\cos 2\omega + \gamma_6(s^2)\cos 4\omega\right\rangle\right] - \\
& - 2c^2\left\{\begin{aligned} & \hat{D}\gamma_1(s^2) + e^2\left[\hat{D}\gamma_2(s^2) + \hat{D}\gamma_3(s^2)\cos 2\omega\right] + \\ & + e^4\left[\hat{D}\gamma_4(s^2) + \hat{D}\gamma_5(s^2)\cos 2\omega + \hat{D}\gamma_6(s^2)\cos 4\omega\right] \end{aligned}\right\} + \\
& + \sin^2 I \left[\begin{aligned} & 3(5s^2 - 4 - e^2) + (5s^2 - 2 - 3e^2)\cos 2\Omega + \\ & + 5\left\langle 3e^2 - 3s^2 - (s^2 - 2 + e^2)\cos 2\Omega \right\rangle \cos 2\omega + \\ & + 5(e^2 - 2)c\sin 2\Omega \sin 2\omega \end{aligned} \right] + \\
& + \sin 2I \left[\begin{aligned} & \left\langle 20scs\sin^2\omega + (5e^2\cos 2\omega - 3e^2 - 2)\frac{c}{s} \right\rangle \cos \Omega + \\ & + 5(2s^2 - e^2 - e^2s^2)\frac{\sin \Omega}{s} \sin 2\omega \end{aligned} \right], \tag{26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-e^2} \frac{d\Omega}{d\tau} = & 2c\left[-4\gamma_0(1-e^2)^{-3/2} + 5e^2\cos 2\omega - 3e^2 - 2\right] + \\
& + 2c\left\{\begin{aligned} & \hat{D}\gamma_1(s^2) + e^2\left[\hat{D}\gamma_2(s^2) + \hat{D}\gamma_3(s^2)\cos 2\omega\right] + \\ & + e^4\left[\hat{D}\gamma_4(s^2) + \hat{D}\gamma_5(s^2)\cos 2\omega + \hat{D}\gamma_6(s^2)\cos 4\omega\right] \end{aligned}\right\} + \\
& + \sin^2 I \left[2c(\sin^2 \Omega - 2)(5e^2\cos 2\omega - 3e^2 - 2) + 5e^2\sin 2\Omega \sin 2\omega \right] + \\
& + \sin 2I \left[(2 + 3e^2 - 5e^2\cos 2\omega)\frac{1-2s^2}{s}\cos \Omega + 5e^2\frac{c}{s}\sin \Omega \sin 2\omega \right]. \tag{27}
\end{aligned}$$

Уравнения (24)–(27) содержат постоянные, характеризующие размеры и форму планеты, ее гелиоцентрическую орбиту, а также параметры спутниковой системы. Кроме изменяющихся со временем элементов орбиты пробного спутника бесконечно малой массы, в их правые части входит постоянная большая полуось этой орбиты. В данной работе для произвольных значений постоянных параметров используется численный метод решения эволюционной системы (24)–(27) с контролем выполнения условия (21), т.е. условия сохранения со временем (в силу этой системы) функции W_N , являющейся в общем случае ее единственным первым интегралом. При этом данная система имеет те же самые интегрируемые случаи, которые выявлены в работе (Лидов, Ярская, 1974) и (Вашковьяк и др., 2015), однако их рассмотрение становится более сложным.

4. Спутниковая система Урана

Далее так же, как и в исходной работе, будет рассмотрена спутниковая система Урана со своими конкретными физическими параметрами. Как было уже отмечено во введении, наибольший интерес представляет изучение той области околопланетного пространства, в которой влияние на спутник трех рассматриваемых возмущений попарно или в совокупности сравнимо по величине. Соответствующие ураноцентрические расстояния заключены в диапазоне между радиусами орбит Оберона (U IV) – наиболее далекого из главных спутников ($a_5 \approx 0.6$ млн км) и Франциско (U XXII) – наиболее близкого из нерегулярных спутников ($a_6 \approx 4.2$ млн км). Используемая нумерация нижних индексов j соответствует возрастанию больших полуосей a_j орбит главных спутников Урана.

Реальных спутников Урана на почти круговых и почти экваториальных орбитах с большими полуосями, принадлежащими указанной области значений, не наблюдается. Качественным объяснением такого отсутствия, несомненно, служит эффект Лидова-Козаи, в силу которого из-за солнечных возмущений экваториальной спутниковой орбиты, почти ортогональной орбите Урана, эксцентриситет орбиты гипотетического спутника в своем резком возрастании за конечное время достигает критического значения

$$e^* = 1 - a_0/a \quad (28)$$

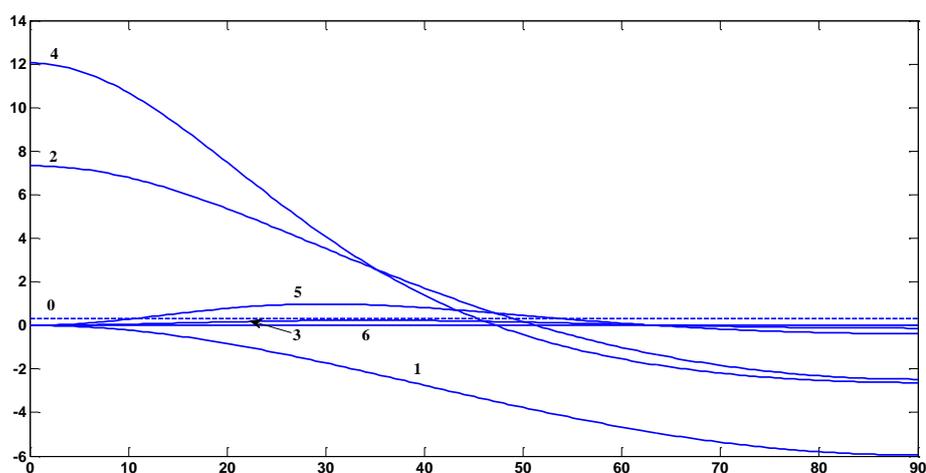
при любых начальных значениях элементов ω_0, Ω_0 с неизбежностью падения спутника на поверхность Урана. Этот эффект был выявлен в двукратно осредненной задаче трех тел для двух ее вариантов: спутникового (Лидов, 1961) и астероидного (Козаи, 1962). Вместе с тем было установлено (Лидов, 1963), что для реально существующих почти круговых околоэкваториальных орбит главных спутников Урана его сжатие способно нейтрализовать данный эффект и свести орбитальную эволюцию к колебаниям эксцентриситета с малой амплитудой. Позднее в работе (Киношита, Накаи, 1991) была исследована вековая эволюция изначально почти круговых околоэкваториальных орбит ряда фиктивных спутников Урана в областях с преобладающим влиянием либо его сжатия, либо солнечных возмущений, а также и в промежуточной области. Особенности спутниковой системы Урана посвящена также работа (Вашковьяк, 2001).

В настоящей работе исследуется проявление эффекта Лидова-Козаи на эволюцию орбит гипотетических спутников Урана в области $a_5 < a < a_6$ с помощью численного интегрирования эволюционной системы (24)–(27). При этом, в отличие от двух вышеупомянутых работ, дополнительно к возмущениям от Солнца и сжатия Урана учитывается противодействующее этому эффекту влияние вековых возмущений от его главных спутников.

Выбор e_0 , i_0 , ω_0 , Ω_0 обусловлен стремлением проследить за эволюцией изначально почти круговых и околоэкваториальных орбит гипотетических спутников, подобных орбитам главных спутников. В работе (Киношита, Накаи, 1991) приведены зависимости от времени эксцентриситета и наклона ряда почти круговых околоэкваториальных орбит фиктивных спутников Урана с различными значениями большой полуоси. Отметим, что соответствующее решение эволюционной системы (24)-(27) при $\mu_{1,2,\dots,5} = 0$ хорошо согласуется с этими зависимостями. В дальнейшем в качестве исходных элементов, аналогично указанной работе, приняты следующие значения: $e_0 = 0.001$, $i_0 = 0^\circ.01$ и без ущерба для общности $\omega_0 = \Omega_0 = 0$.

С целью экономии вычислительного времени при выбранных постоянных параметрах a_j , μ_j ($1 \leq j \leq 5$) для каждого рассматриваемого постоянного значения большой полуоси a , большего a_5 , проводится предварительное табулирование функций $\gamma_{1,2,\dots,6}(s^2)$ в диапазоне изменения наклона i от 0 до 90° с достаточно мелким шагом таблиц (0.5°). В процессе решения эволюционной системы значения этих функций, соответствующие текущим значениям наклона, изменяющегося в силу эволюции орбиты, находятся интерполированием. На рис. 2 в качестве примера показаны зависимости коэффициентов $\gamma_{1,2,\dots,6}$ от наклона для $a = 1.5$ млн км. Штриховая прямая линия на этом рисунке отвечает коэффициенту $\gamma_0 = 0.3$. Цифры рядом с кривыми отвечают нижним индексам коэффициентов $0 \div 6$, причем наибольшим по абсолютной величине среди них оказывается коэффициент γ_4 (для $i = 0$) и γ_1 (для $i = 90^\circ$).

$\gamma_{0,1,2,\dots,6}$



i , градус

Рис. 2. Зависимости коэффициентов $\gamma_{0,1,2,\dots,6}$ от наклона для $a = 1.5$ млн км

Для значений $a > 1.5$ млн км качественный характер показанных зависимостей сохраняется, однако сужаются диапазоны изменения $\gamma_{1,2,\dots,6}$ и уменьшается величина γ_0 . В частности, для $a = 2$ млн км ($-1.4 < \gamma_{1,2,\dots,6} < 2.3$), $\gamma_0 = 0.07$, а для $a = 3$ млн км ($-0.18 < \gamma_{1,2,\dots,6} < 0.25$), $\gamma_0 = 0.01$.

Приведенные числовые данные и рис. 2 позволяют оценить величину возмущений от сжатия Урана и от его главных спутников по отношению к солнечным возмущениям для различных наклонений спутниковой орбиты. Дополнительные вычисления, проведенные для различных значений a , показывают, что по порядку величин примерное равенство возмущений от Солнца и от сжатия Урана имеет место в диапазоне $r_1 \approx 1.18 \div 1.35$ млн км, когда $\gamma_0 = 1 \div 0.5$. При этом характерный параметр возмущений от главных спутников

$$\gamma = \max_i (|\gamma_1|, \gamma_4) = \gamma_4 (s = 0) \quad (29)$$

оказывается существенно большим единицы так же, как на рис. 2. Таким образом, изначально почти круговые спутниковые орбиты с большими полуосями из диапазона $a_5 < a < r_1$ гипотетически могли бы существовать в околоэкваториальной области пространства, поскольку влияние солнечных возмущений примерно уравнивается влиянием сжатия Урана, а его главные спутники с орбитами, лежащими примерно в плоскости его экватора, не могут вызвать катастрофического увеличения эксцентриситета орбиты гипотетического спутника.

Начиная с расстояний порядка r_1 влияние Солнца начинает возрастать, а соответствующее равенство (по порядку величин) возмущений от Солнца и главных спутников имеет место при $r_2 \approx 2.32$ млн км, когда γ имеет порядок единицы. С дальнейшим ростом ураноцентрического расстояния влияние Солнца начинает превалировать над остальными факторами, а γ становится заметно меньшим единицы. В особенности его влияние на эволюцию орбит проявляется в увеличении амплитуды колебаний эксцентриситета и наклона к плоскости орбиты Урана. При этом уже при некотором граничном значении $a = a^*$ возрастание эксцентриситета может привести к понижению перицентра орбиты гипотетического спутника до радиусов орбит главных спутников Урана и даже до его собственного радиуса.

Эволюция орбиты может приводить не только к уменьшению расстояния перицентра до радиусов орбит главных спутников, но и к пересечению с этими орбитами. Условие такого пересечения выражается равенствами

$$f_{1,2} [a_j, a, e(t), \omega(t)] = a [1 - e^2(t)] - a_j [1 \pm e(t) \cos \omega(t)] = 0, \quad (30)$$

где элементы орбиты изменяются со временем в силу уравнений (24)–(27). В условиях пересечения орбит при отсутствии орбитальных резонансов существенно повышается вероятность соударения спутников (или их тесных сближений). И в этой связи для определения критического эксцентриситета e^* в

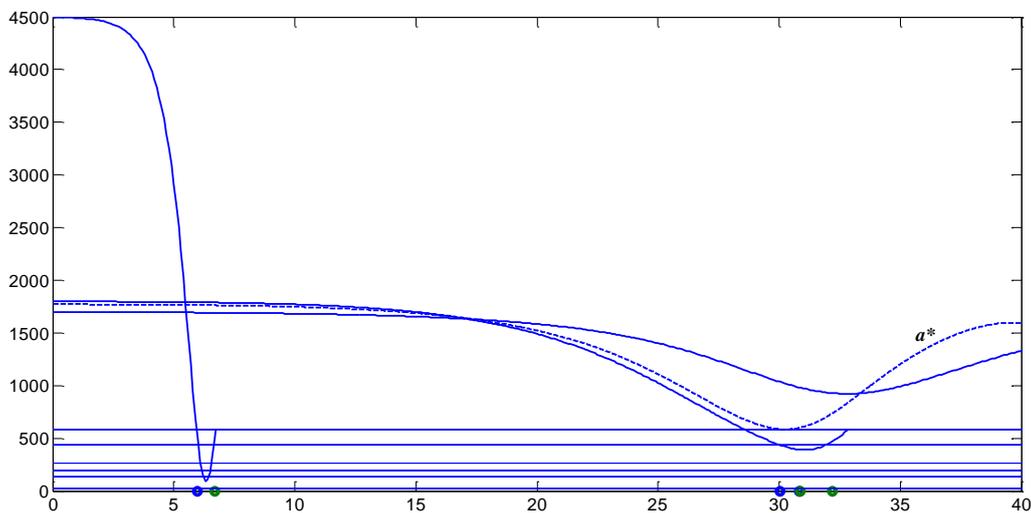
формуле (28), вместо радиуса Урана a_0 естественно ввести его «эффективный радиус», равный a_5 – радиусу орбиты Оберона, который тем самым становится первым из главных спутников, принимавших на себя возможные удары гипотетически существовавших малых тел. Косвенным свидетельством возможности и последствий таких соударений служит заметная массивность Оберона, как и Титании (U III), по сравнению с остальными главными и внутренними спутниками.

На рис. 3 в качестве иллюстрации показаны зависимости расстояния перицентра спутниковой орбиты $q = a(1 - e)$ от времени для различных постоянных значений ее большой полуоси, в силу малости e_0 , примерно определяемых начальными значениями $q(t = 0)$. Штриховая линия, практически касающаяся прямой $q = a_5$, соответствует значению $a = a^* \approx 1.773$ млн км. Моменты пересечения с орбитой Оберона $[t^{(-)}(a_5), t^{(+)}(a_5)]$ на рис. 3 и на последующем рис. 4 отмечены кружками. Пары этих моментов достаточно близки к моментам, соответствующим первому по времени «входу» перицентра внутрь системы главных спутников и последующему «выходу» из нее. При этом

$$[q(t) = a_5, dq/dt < 0 - \text{«ВХОД»}], \quad t \approx t^{(-)}(a_5), \quad (31)$$

$$[q(t) = a_5, dq/dt > 0 - \text{«ВЫХОД»}], \quad t \approx t^{(+)}(a_5) > t^{(-)}(a_5). \quad (32)$$

q , тыс. км



t ,
тыс. лет

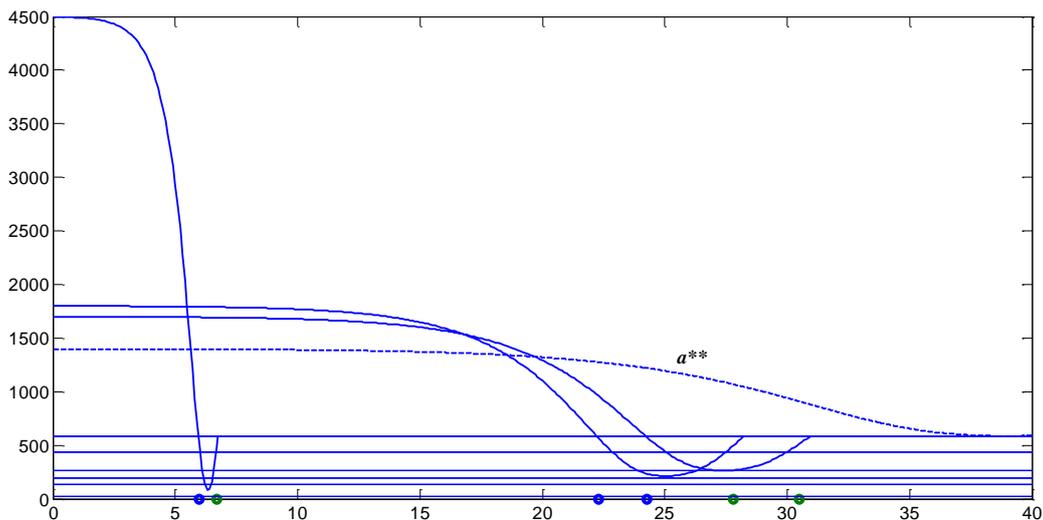
Рис. 3. Зависимости расстояния перицентра от времени для различных значений большой полуоси и всех учитываемых возмущений

Выполненное численное интегрирование эволюционной системы оканчивалось либо при достижении заданного конечного времени (как правило, 40 тыс. лет), либо при «выходе», т.е., при выполнении вышеприведенного условия (32). Пять

визуально различимых горизонтальных прямых соответствуют радиусам орбит пяти главных спутников Урана, а шестая, практически сливающаяся с осью абсцисс, соответствует его собственному радиусу. Для далекой орбиты с $a = 4.5$ млн км понижение перицентра до радиусов орбит всех главных спутников, в силу преобладающих солнечных возмущений, происходит достаточно быстро (примерно за 6 тыс. лет). Для существенно более близкой орбиты с $a = 1.8$ млн км перицентр орбиты с течением времени понижается медленнее, но затем на протяжении примерно четырех тысяч лет q остается меньшим радиуса орбиты Оберона, а на протяжении примерно одной тысячи лет – и орбиты Титании. При этом времена «регулярной эволюции» орбит гипотетических спутников до их пересечения с орбитами главных спутников по космогоническим меркам достаточно малы и не превышают $30 \div 35$ тысяч лет. Для $a = a^* \approx 1.77$ млн км штриховая кривая $q(t)$ касается прямой $q = a_5$. Но уже для $a \approx 1.7$ млн км расстояние перицентра орбиты гипотетического спутника остается большим a_5 на существенно более длительном интервале времени. Расчеты для $t \leq 1$ млн. лет показывают, что $q(t) \leq 900$ тыс. км, $e(t) \leq 0.47$, $i(t) \leq 15^\circ$.

Рис. 4 приведен для визуальной оценки влияния главных спутников на изменение расстояния перицентра орбит гипотетических спутников Урана. На этом рисунке зависимости $q(t)$ показаны для тех же значений большой полуоси, что и на рис. 3. Для $a \approx 4.5$ млн км зависимости $q(t)$ на обоих рисунках практически не различаются из-за пренебрежимо малого влияния главных спутников.

q , тыс. км



t ,
тыс. лет

Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но при $\mu_{1,2,\dots,5} = 0$

Для $a \approx 1.8$ млн км «погружение» перицентра в орбитальную систему главных спутников происходит существенно глубже, так что орбита гипотетического спутника пересекает, кроме орбиты Оберона, также орбиты Титании и Умбриэля (U II). Наиболее заметное качественное различие в зависимостях $q(t)$ проявляется для $a \approx 1.7$ млн км и для близкого ему граничного значения $a = a^*$. На рис. 4 штриховая кривая $q(t)$ касается прямой $q = a_5$ для $a = a^{**} \approx 1.400$ млн км $< a^*$.

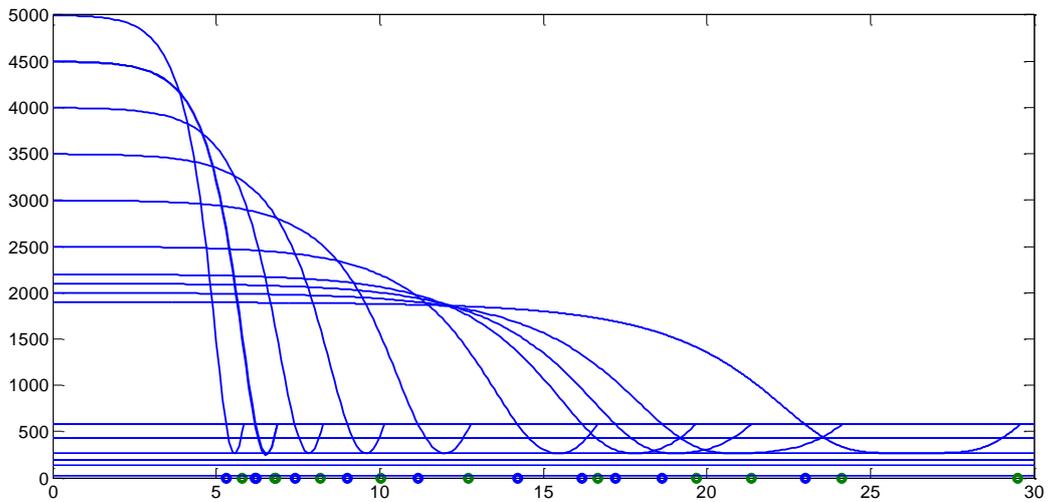
Указанные наглядные различия свидетельствуют о заметном влиянии притяжения главных спутников Урана на эволюцию орбит его гипотетических спутников. Это притяжение приводит также к увеличению (примерно 1.77 млн км, вместо 1.4 млн км.) размеров области околопланетного пространства, в которой гипотетические спутники Урана на изначально почти круговых и околоэкваториальных орбитах могли бы существовать без их пересечения с орбитами его главных спутников (и без соударения с ними).

Эволюционная система уравнений (24)–(27), полученная для произвольного наклона i , позволяет (в отличие от рассмотренных ранее интегрируемых случаев задачи) изучать поведение спутниковых орбит, сильно наклоненных к экваториальной плоскости Урана, вплоть до ортогональной ориентации. Последующие вычисления свидетельствуют о том, что для таких орбит действуют те же закономерности эволюции, что и для изначально околоэкваториальных. С помощью численного интегрирования получено семейство зависимостей $q(t)$ для принятых ранее начальных элементов спутниковой орбиты e_0, ω_0 , значений большой полуоси из интервала (1.9 ÷ 5.0) млн км, но различных долгот восходящего узла и немалых начальных наклонов.

В табл. 6 Приложения вместе с различными значениями a, i_0 приведены характеристики пересечения эволюционирующих спутниковых орбит с орбитами Умбриэля, Титании и Оберона для $\Omega_0 = 0$. Это характерные параметры эволюции $t^{(-)}(a_5), t^{(+)}(a_5)$ и q_{min} , примерно равное радиусу орбиты Умбриэля $a_3 = 266$ тыс. км, но немного меньшее этой величины. Начальный элемент i_0 для каждого значения a итерационно подобран таким образом, чтобы орбита гипотетического спутника в процессе эволюции пересекала орбиты Оберона и Титании (этих двух наибольших из главных спутников Урана) и, почти касаясь, пересекала орбиту Умбриэля. Соответствующие зависимости $q(t)$ показаны на рис. 5.

В табл. 7 Приложения те же характеристики приведены для изначально полярных орбит ($i_0 = 90^\circ$), начальный элемент Ω_0 итерационно подобран из аналогичных соображений, а соответствующие зависимости $q(t)$ показаны на рис. 6.

q , ТЫС. КМ

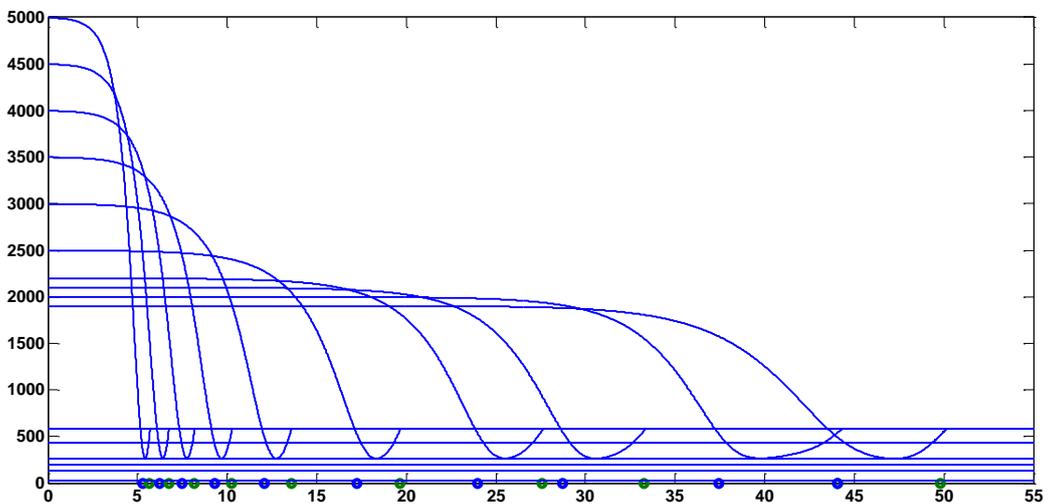


t ,

тыс. лет

Рис. 5. Зависимости расстояния перицентра от времени для различных значений большой полуоси и соответствующих начальных наклонений ($\Omega_0=0$)

q , ТЫС. КМ



t ,

тыс. лет

Рис. 6. Зависимости расстояния перицентра от времени для различных значений большой полуоси и соответствующих начальных долгот восходящих узлов ($i_0=90^\circ$)

Комментируя рис. 5, 6 и табл. 6, 7, можно отметить, что, так же, как и в случае $i_0 = 0^\circ.01$, времена «регулярной эволюции» орбит гипотетических спутников до пересечения их изначально наклоненных орбит с орбитами двух наиболее массивных главных спутников космогонически малы и составляют десятки тысяч лет. Промежутки времени между моментами «входа» $t^{(-)}(a_5)$ и «выхода» $t^{(+)}(a_5)$ имеют длительность порядка сотен и тысяч лет, что много больше орбитального периода Оберона (примерно 13.5 суток) и, конечно, Титании (8.7 суток). Поэтому за время $\Delta t = t^{(+)}(a_5) - t^{(-)}(a_5)$ гипотетический спутник должен либо столкнуться с двумя этими главными спутниками, пополнив их массы, либо его орбита претерпит (из-за вероятных тесных сближений с ними) сильные возмущения вместе с кардинальными изменениями всех своих элементов, в том числе и большой полуоси. В обоих этих случаях рассмотренный здесь диапазон больших полуосей окажется свободным от спутниковых орбит.

Этот качественный вывод основывается на результатах численного интегрирования эволюционной системы для того интервала больших полуосей, в котором отсутствуют реальные спутниковые орбиты системы Урана. Достаточно представительный набор начальных условий по ориентации исходных почти круговых орбит принадлежит возможному диапазону: от околоэкваториальных до полярных.

5. Заключительные замечания

В настоящей работе для исследования задачи об эволюции спутниковой орбиты произвольного наклона при совместном влиянии нецентральности гравитационного поля планеты и притяжения Солнца предложена новая форма представления вековой части возмущающей функции, дополнительно учитывающей притяжение массивных спутников планеты. Для спутниковой системы Урана и произвольных элементов изначально почти круговой орбиты пробного спутника при решении полученных эволюционных уравнений использован численный метод с контролем постоянства во времени суммарной вековой части возмущающей функции (от трех указанных факторов).

Основное внимание в работе уделено выявлению роли эффекта Лидова–Козаи для качественного объяснения отсутствия малых тел в околопланетном пространстве на почти круговых орбитах за пределами орбит массивных спутников Урана. Для спутниковой системы этой планеты на интервалах времени порядка десятков тысяч лет изучено поведение некоторого достаточно представительного множества подобных орбит в области примерно равного влияния трех рассматриваемых возмущающих факторов. Полученные количественные оценки приводят к выводу о том, что в околопланетном пространстве Урана гипотетически могли бы существовать почти круговые околоэкваториальные спутниковые орбиты без угрозы значительного возрастания эксцентриситета в процессе эволюции и пересечения с орбитами главных спутников. Такие орбиты могли бы иметь большие полуоси почти до 1.8 млн км, что превышает значение 1.4 млн км, полученное для модели, не учитывающей влияния главных спутников. В эволюции орбит с большими полуосями, превосходящими примерно 1.8 млн км проявляется эффект (механизм) Лидова–Козаи. Достижение орбитой критического эксцентриситета для «эффективного» радиуса Урана приводит к ее пересечению с орбитой Оберона (и других главных спутников). В этих условиях резко возрастает вероятность тесного сближения или соударения гипотетического спутника с реальными (массивными) спутниками Урана.

6. Приложение

В данном приложении приводятся формулы (табл. 1 – 5), необходимые для вычисления отличных от нуля коэффициентов $A_{k,l}^{(p,q,r)}(n, \alpha_j)$ с использованием предварительных обозначений

$$V_1 = (4n+1)\alpha_j, \quad V_2 = (4n+3)\alpha_j, \quad V_3 = (4n+5)\alpha_j, \quad V_4 = (4n+7)\alpha_j,$$

а также числовые характеристики эволюционирующих орбит гипотетических спутников Урана (табл. 6, 7).

Табл. 1 ($p = 1, q = 0$)

k	l	r	$A_{k,l}^{(1,0,r)}(n, \alpha_j)$
1	1	0	$V_1(V_2 - 3)/4$
1	2	0	$3/2 - V_1$
1	2	1	$- 1/2$
2	2	1	$(2V_1 - 1)/4$
1	3	0	1
2	3	1	- 1
2	3	2	$1/2$

Табл. 2 ($p = 1, q = 1$)

k	l	r	$A_{k,l}^{(1,1,r)}(n, \alpha_j)$
1	1	0	$V_1(V_2 - 3)/4$
2	1	0	$- V_1(V_2 - 3)/4$
1	2	0	$3/2 - V_1$
1	2	1	$1/2$
2	2	0	$V_1 - 3/2$
2	2	1	$(3/2 - V_1)/2$
1	3	0	1
2	3	0	- 1
2	3	1	1
2	3	2	$- 1/2$

Табл. 3 ($p = 2, q = 0$)

k	l	r	$A_{k,l}^{(2,0,r)}(n, \alpha_j)$
1	1	0	$V_1 V_2 [V_3(V_4 - 10) + 15]/64$
1	2	0	$V_1 [15(V_2 - 1) - 2V_2 V_3]/16$
1	2	1	$[2V_1(5 - V_2) - 5]/32$
2	2	1	$[V_1(2V_2 V_3 - 13V_2 + 5) + 5]/32$
1	3	0	$[15 + 6V_1(V_2 - 5)]/16$
1	3	1	$(2V_1 - 5)/8$
1	3	2	$3/16$
2	3	1	$V_1(13 - 3V_2)/8 - 5/16$
2	3	2	$V_1(V_2 - 11)/16 + 11/32$
3	3	2	$3V_1(V_2 - 1)/32 - 9/64$
1	4	0	$(5 - 2V_1)/4$
1	4	1	$- 1/4$
2	4	1	$(6V_1 - 13)/8$
2	4	2	$(11 - 2V_1)/8$
2	4	3	$- 3/8$
3	4	2	$3(1 - 2V_1)/16$
3	4	3	$3(2V_1 - 1)/32$
1	5	0	$1/4$
2	5	1	$- 1/2$
2	5	2	$1/4$
3	5	2	$3/8$
3	5	3	$- 3/8$
3	5	4	$3/32$

Табл. 4 ($p = 2, q = 1$)

k	l	r	$A_{k,l}^{(2,1,r)}(n, \alpha_j)$
1	1	0	$V_1 V_2 [V_3 (V_4 - 10) + 15] / 48$
2	1	1	$- V_1 V_2 [V_3 (V_4 - 10) + 15] / 48$
1	2	0	$V_1 [5(V_2 - 1) / 4 - V_2 V_3 / 6]$
2	2	0	$- V_1 [5(V_2 - 1) / 4 - V_2 V_3 / 6]$
2	2	1	$V_1 (V_2 - 3) / 4$
3	2	1	$V_1 [3(3V_2 + 1) - 2V_2 V_3] / 32$
1	3	0	$V_1 (V_2 - 5) / 2 + 5 / 4$
1	3	2	$- 1 / 4$
2	3	0	$V_1 (5 - V_2) / 2 - 5 / 4$
2	3	1	$- V_1 + 3 / 2$
2	3	2	$(V_1 - 1) / 2$
3	3	1	$3[2V_1 (V_2 - 3) - 1] / 16$
3	3	2	$3[1 - 2V_1 (V_2 - 3)] / 32$
1	4	0	$(5 - 2V_1) / 3$
2	4	0	$(2V_1 - 5) / 3$
2	4	1	1
2	4	2	- 1
2	4	3	1/2
3	4	1	$3(3 - 2V_1) / 8$
3	4	2	$- 3(3 - 2V_1) / 8$
3	4	3	$(1 - V_1) / 4$
1	5	0	1/3
2	5	0	- 1/3
3	5	1	1/2
3	5	2	- 3/4
3	5	3	1/2
3	5	4	- 1/8

Табл. 5 ($p = 2, q = 2$)

k	l	r	$A_{k,l}^{(2,2,r)}(n, \alpha_j)$
1	1	0	$V_1 V_2 [V_3 (V_4 - 10) + 15] / 192$
2	1	0	$- V_1 V_2 [V_3 (V_4 - 10) + 15] / 48$
3	1	0	$V_1 V_2 [V_3 (V_4 - 10) + 15] / 64$
1	2	0	$V_1 [5(V_2 - 1) / 16 - V_2 V_3 / 24]$
1	2	1	$[5 + 2V_1 (V_2 - 5)] / 32$
2	2	0	$V_1 [V_2 V_3 / 6 - 5(V_2 - 1) / 4]$
2	2	1	$V_1 [-2V_2 V_3 + 13V_2 - 5] / 32 - 5 / 32$
3	2	0	$V_1 [15(V_2 - 1) - 2V_2 V_3] / 16$
3	2	1	$V_1 [2V_2 V_3 - 15(V_2 - 1)] / 32$
1	3	0	$[5 + V_1 (V_2 - 5)] / 16$
1	3	1	$(5 - 2V_1) / 8$
1	3	2	$1 / 16$
2	3	0	$V_1 (5 - V_2) / 2 - 5 / 4$
2	3	1	$V_1 (3V_2 - 13) / 8 + 5 / 16$
2	3	2	$V_1 (3 - V_2) / 16 + 5 / 32$
3	3	0	$3V_1 (V_2 - 5) / 8 + 15 / 16$
3	3	1	$- 3V_1 (V_2 - 5) / 8 - 15 / 16$
3	3	2	$3V_1 (V_2 - 5) / 32 + 15 / 64$
1	4	0	$5 / 12 - V_1 / 6$
1	4	1	$1 / 4$
2	4	0	$(2V_1 - 5) / 3$
2	4	1	$(13 - 6V_1) / 8$
2	4	2	$(2V_1 - 3) / 8$
2	4	3	$- 1 / 8$
3	4	0	$(5 - 2V_1) / 4$
3	4	1	$3(2V_1 - 5) / 8$
3	4	2	$3(5 - 2V_1) / 16$
3	4	3	$(2V_1 - 5) / 32$

Продолжение табл. 5

k	l	r	$A_{k,l}^{(2,2,r)}(n, \alpha_j)$
1	5	0	1/12
2	5	0	- 1/3
2	5	1	1/2
2	5	2	- 1/4
3	5	0	1/4
3	5	1	- 1/2
3	5	2	3/8
3	5	3	- 1/8
3	5	4	1/32

Таблица 6.

Характеристики пересечения эволюционирующих спутниковых орбит с орбитами Умбриэля, Титании и Оберона для $\Omega_0 = 0$

a , тыс. км.	i_0 , град.	$t^{(-)}(a_5)$, тыс. лет	q_{min} , тыс. км.	$t^{(+)}(a_5)$, тыс. лет
1900	39.5	23.0	265	29.5
2000	19.0	18.6	262	24.1
2100	10.8	17.2	265	21.4
2200	7.1	16.2	264	19.7
2500	18.3	14.2	263	16.7
3000	20.6	11.2	264	12.7
3500	22.1	9.0	264	10.0
4000	22.3	7.4	264	8.2
4500	22.0	6.2	266	6.8
5000	21.5	5.3	261	5.8

Таблица 7.

Характеристики пересечения эволюционирующих спутниковых орбит
с орбитами Умбриэля, Титании и Оберона для $i_0 = 90^\circ$

a , тыс. км.	Ω_0 , град.	$t^{(-)}(a_5)$, тыс. лет	q_{min} , тыс. км.	$t^{(+)}(a_5)$, тыс. лет
1900	17.1	44.1	262	49.8
2000	18.2	37.4	266	44.1
2100	31.3	28.8	262	33.2
2200	39.0	24.0	265	27.6
2500	52.6	17.2	262	19.6
3000	63.5	12.1	262	13.6
3500	68.9	9.3	262	10.3
4000	71.8	7.5	264	8.2
4500	73.6	6.2	264	6.7
5000	74.9	5.3	262	5.7

Библиографический список

- Вашковьяк, 1976* *Vashkovjak M.A.* On the Stability of the Circular ‘Asteroid’ Orbits in an N-Planetary System // *Celestial Mechanics*. 1976. V. 13. №. 3. P. 313-324.
- Вашковьяк, 2001* *Вашковьяк М.А.* Некоторые небесно-механические особенности системы спутников Урана // *Письма в Астрон. журн.* 2001. Т. 27. № 7. С. 543-548.
- Вашковьяк, 2015* *Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В.* Об эволюции спутниковых орбит под действием сжатия планеты, притяжения её массивных спутников и Солнца // *Астрон. вестник*. 2015. Т. 49. № 4. С. 283-289. (*Vashkov’yak M.A., Vashkov’yak S.N., Emel’yanov N.V.* On the Evolution of Satellite Orbits under the Action of the Planet’s Oblateness and Attraction by Its Massive Satellites and the Sun // *Solar System Research*. 2015. V. 49. № 4. P. 247-262).
- Лидов, 1961* *Лидов М.Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // *Искусственные спутники Земли*. 1961. Вып. 8. С. 5-45 (*Lidov M.L.* The Evolution of Orbits of Artificial Satellites of Planets under the Action of Gravitational Perturbations of External Bodies. // *Planet. Space Sci.* 1962. Vol. 9. P. 719-759).
- Лидов, 1963* *Lidov M.L.* On the approximated analysis of the orbit evolution of artificial satellites // *In Dynamics of Satellites* (M. Roy Ed.). P. 168-179. Springer-Verlag. Berlin. Göttingen. Heldelberg 1963. Symposium Paris. May 28-30. 1962.
- Лидов, 1974* *Лидов М.Л., Ярская М.В.* Интегрируемые случаи в задаче об эволюции орбиты спутника при совместном влиянии внешнего тела и нецентральности поля планеты // *Космические исследования*. 1974. Т. 12. № 2. С.155-170.
- Лях, 1959* *Лях Р.А.* Некоторые изменения в методике разложения пертурбационной функции // *Бюлл. Ин-та теор. астрон.* 1959. Т. VII. № 6. С. 422-433.
- Киношита, 1991* *Kinoshita H, Nakai H.* Secular perturbations of fictitious satellites of Uranus // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.* 1991. V. 52. P. 293 – 303.
- Козаи, 1962* *Kozai Y.* Secular Perturbations of Asteroids with High Inclination and Eccentricity. // *Astron. J.* 1962. V. 67. P. 591 - 598.

Оглавление

1. Введение и постановка задачи	3
2. Выражение полной осредненной возмущающей функции для орбит произвольного наклона.....	7
3. Эволюционная система уравнений в элементах	10
4. Спутниковая система Урана.....	14
5. Заключительные замечания.....	22
6. Приложение	23
Библиографический список.....	29