



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 48 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бойко А.В., Демьянко К.В.,
Кузьмин Д.А., Миерка О.,
Нечепуренко Ю.М., Ривкинд Л.П.

Численное моделирование
генерации и развития
вихрей Гёртлера

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Численное моделирование генерации и развития вихрей Гёртлера / А.В.Бойко [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 48. 37 с. doi:[10.20948/prepr-2016-48](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-48)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-48>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Российской академии наук

А. В. Бойко, К. В. Демьянко, Д. А. Кузьмин
О. Миерка, Ю. М. Нечепуренко, Л. П. Ривкинд

Численное моделирование
генерации и развития
вихрей Гёртлера

МОСКВА, 2016 г.

А. В. Бойко, К. В. Демьянко, Д. А. Кузьмин,
О. Миерка, Ю. М. Нечепуренко, Л. П. Ривкинд

Численное моделирование генерации и развития вихрей Гёртлера

Аннотация. На примере известного эксперимента по локальной генерации и развитию вихрей Гёртлера рассматриваются вопросы численного моделирования трубных экспериментов по исследованию устойчивости дозвуковых течений вязкой несжимаемой жидкости. Намечается и обосновывается план развития конечно-элементного пакета FEATFLOW для такого моделирования.

Ключевые слова: течения вязкой несжимаемой жидкости, вихри Гёртлера, параболизованные уравнения, прямое численное моделирование, локализованный источник возмущений, линеаризованные граничные условия

A. V. Boiko, K. V. Demyanko, D.A. Kuzmin,
O. Mierka, Yu. M. Nечepurenko, L. P. Rivkind

Numerical modeling of generation and propagation of Görtler vortices

Abstract. Using a recent experiment on a local generation and propagation of Görtler vortices different issues of numerical modeling of the wind tunnel experiments to study the stability of subsonic flows of viscous incompressible fluid are discussed. Further development of the finite element FEATFLOW package for such modeling is outlined and substantiated.

Key words: viscous incompressible fluid flows, Görtler vortices, parabolized equations, direct numerical simulation, localized source of disturbances, linearized boundary conditions

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

1. Введение

В настоящее время имеется острая необходимость в доступном и удобном программном обеспечении для трехмерного численного моделирования экспериментов, проводимых в малотурбулентных аэродинамических трубах по исследованию устойчивости дозвуковых ламинарных сдвиговых течений. Такое программное обеспечение позволило бы значительно точнее оценивать адекватность уже полученных экспериментальных данных и планировать новые эксперименты, а также облегчило бы разработку и верификацию различных упрощенных численных моделей, ориентированных на параметрические расчеты, восполнение экспериментальных данных и сопоставление наблюдаемых в эксперименте эффектов с теоретическими результатами.

Однако широко распространенные универсальные коммерческие пакеты, предназначенные для расчета нестационарных течений, такие как ANSYS CFX, нельзя использовать для этих целей непосредственно, поскольку они не приспособлены для достаточно точного воспроизведения эволюции малых (по амплитуде и масштабам) возмущений. Требуется существенное наращивание этих пакетов, что было бы возможно лишь в случае, если бы их коды были полностью открыты для пользователя.

В 2016 г. в рамках сотрудничества ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, ИТПМ им. С.А. Христиановича СО РАН и Факультета математики Дортмундского технического университета была начата разработка и реализация технологии трехмерного численного моделирования трубных экспериментов по устойчивости ламинарных сдвиговых течений на основе известного открытого пакета FEATFLOW (<http://www.featflow.de/en/index.html>). Для инициализации этих работ был выбран известный трубный эксперимент по возбуждению вихрей Гёртлера на слабовогнутой пластине малыми локализованными нестационарными контролируруемыми возмущениями обтекаемой поверхности [1, 2]. Ранее численное моделирование этого эксперимента было выполнено в помощь оригинальной упрощенной линейной модели, основанной на параболизированных уравнениях генерации и развития возмущений. Эта модель оказалась достаточно адекватной для анализа полученных в эксперименте коэффициентов восприимчивости пограничного слоя к локальным неоднородностям обтекаемой поверхности при генерации вихрей Гёртлера и позволила построить новую теорию восприимчивости, основанную на оптимальных возмущениях [3]. Однако эта модель не вполне точно воспроизводила продольную компоненту скорости возмущений при некоторых значениях параметров эксперимента. Причины, по которым это происходило, так и остались до конца не выясненными.

Во втором и третьем разделах данной работы кратко описаны упомянутые выше трубный эксперимент и упрощенная численная модель с акцентом на расхождение между экспериментальными данными и результатами моделирования. В четвертом разделе кратко описываются особенности пакета FEATFLOW и обсуждаются проблемы, возникшие при его использовании для трехмерного моделирования трубного эксперимента, и возможные пути их решения. Представленные в этом разделе предварительные результаты показывают, что пакет FEATFLOW вполне пригоден для моделирования эксперимента [1, 2] и других подобных трубных экспериментов, но его требуется дополнить некоторыми специальными средствами, которые будут перечислены в заключении.

Таким образом, в данной работе мы намечаем и обосновываем план создания новой ветви пакета FEATFLOW, предназначенной для трехмерного численного моделирования экспериментов, проводимых в малотурбулентных аэродинамических трубах по исследованию устойчивости дозвуковых ламинарных сдвиговых течений.

2. Эксперимент в аэродинамической трубе

Гёртлеровская неустойчивость возникает в пограничных слоях на вогнутых поверхностях под воздействием центробежных сил, вызванных кривизной поверхности, в широком диапазоне скоростей набегающего потока и чисел Маха [4]. Эта неустойчивость приводит к образованию продольных вихрей, которые могут вызвать рост возмущений в продольном направлении, значительно изменить тепло-массообмен и поверхностное трение и привести к более раннему ламинарно-турбулентному переходу, а также изменить другие параметры течения, существенные в различных приложениях. Таким образом, проблема возбуждения и распространения стационарных и нестационарных вихрей Гёртлера чрезвычайно важна для аэродинамических устройств и летательных аппаратов, равно как и для их компонент с вогнутыми аэродинамическими поверхностями, таких как воздухозаборники двигателей, лопасти турбомашин, закрылки, предкрылки и т.п.

Гёртлеровская неустойчивость исследуется в течение длительного времени экспериментально, теоретически и численно (см. обзоры в [5, 6, 7, 8]). Однако долгое время инкременты нарастания возмущений, полученные экспериментально, не соответствовали инкрементам нарастания, вычисленным на основе линейной теории устойчивости во всем изучаемом диапазоне поперечных волновых чисел и чисел Гёртлера [5, 9]. Одна из причин этого отличия была связана с нелинейными эффектами, поскольку вариации ам-

плитуды продольной скорости, вызванные исследуемыми вихрями, были достаточно большими (часто порядка 10% продольной компоненты скорости основного течения, как в [10]). Другая причина связана с так называемым транзиторным ростом возмущений, имеющим место в ближнем поле источника возмущений.

2.1. Экспериментальная модель

Первое достаточно точное экспериментальное исследование возбуждения стационарных и нестационарных вихрей Гёртлера продольными локализованными неоднородностями поверхности (шероховатостями и вибрациями) были выполнены лишь сравнительно недавно [1, 2]. Измерения проводились в малотурбулентной аэродинамической трубе Т-324 ИТПМ СО РАН при скорости набегающего потока $U_e = 9.18$ м/с, плотности среды $\rho = 1.214$ кг/м³ и динамической вязкости $\mu = 1.85 \cdot 10^{-5}$ Па·с. Степень турбулентности в рабочей части трубы не превышала 0.02% в частотном диапазоне выше 1 Гц.

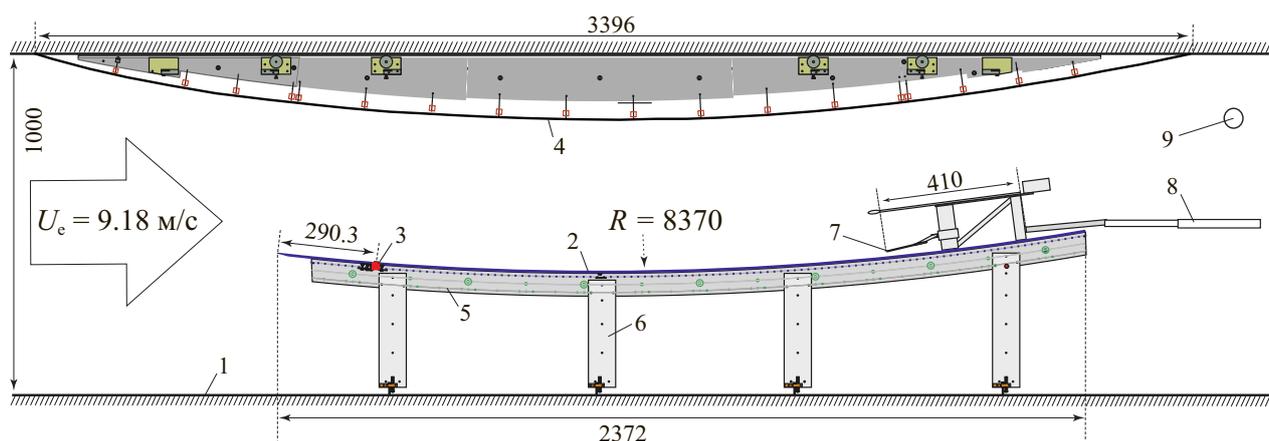


Рис. 1: Экспериментальная модель [2]: 1 — поверхность рабочей части аэродинамической трубы, 2 — вогнутая пластина, 3 — источник возмущений, 4 — ложная стенка, 5 — жесткий каркас из нервюр заданного радиуса закругления, 6 — несущие опоры, 7 — датчик термоанемометра, прикрепленный к координатнику, 8 — державка координатника, 9 — регулятор загромождения потока.

На рис. 1 показана экспериментальная модель, размещенная в рабочей части аэродинамической трубы (1). Исследуемый пограничный слой создавался на вогнутой пластине (2) длины 2372 мм, ширины 996 мм и толщины 8 мм с постоянным радиусом кривизны $R = 8370$ мм, имевшей вставку (3) длины 14 мм и ширины 157 мм для установки источника возмущений. Вставка располагалась на расстоянии 290.3 мм от передней кромки в центральной части пластины. Фиксированную кривизну обеспечивал жесткий каркас из набора дюралюминиевых дугообразных нервюр (5), к которому жестко кре-

пилась пластина. Передняя кромка пластины представляла собой комбинацию сектора круга диаметра 6 мм с рабочей стороны и гладко сопряженного с ним прямолинейного участка длины 20 мм с нерабочей стороны пластины. Требуемый продольный градиент давления над рабочей поверхностью пластины в области измерений достигался регулированием установленной над пластиной адаптивной ложной стенки (4). Ложная стенка и пластина были расположены относительно стенок трубы таким образом, что обеспечивалось безотрывное течение потока вблизи передней кромки рабочей поверхности пластины. Дополнительный контроль положения точки растекания обеспечивался регулированием загромождения потока над рабочей поверхностью с помощью поперечной перекладины позади пластины (9). В совокупности это позволило имитировать течение над искривленной поверхностью, размещенной в однородном свободном потоке под нулевым углом атаки.

Область измерений находилась в диапазоне продольной криволинейной (вдоль поверхности пластины) координаты $x = 290 \div 1200$ мм. Мгновенные величины продольной компоненты вектора скорости потока измерялись термоанемометрическим датчиком (7). Он был установлен на трехкомпонентном координатнике (8), позволявшем позиционировать датчик в любой точке области измерений с точностью 5 мкм по нормали к стенке и 200 мкм в продольном и поперечном направлениях.

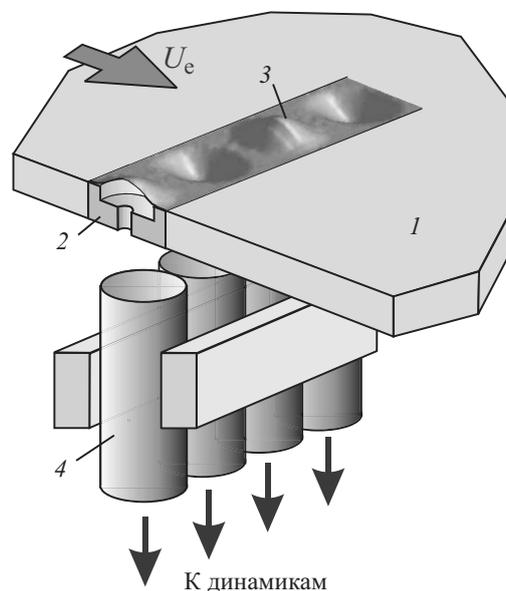


Рис. 2: Источник возмущений [2]: 1 — вогнутая пластина, 2 — вставка, 3 — эластичные мембраны, 4 — пневмотрассы.

2.2. Источник возмущений

Для введения в пограничный слой трехмерных контролируемых возмущений использовался источник, схематично изображенный на рис. 2, установленный вместо вставки вровень с поверхностью пластины с точностью порядка 1 мкм. Источник представлял собой ряд одинаковых эластичных круглых мембран (3), сделанных из латексной пленки толщины $80 \div 100$ мкм и расположенных с фиксированным шагом вдоль размаха модели. Мембраны возбуждались с помощью блока из 8 заглушенных динамиков, который располагался вне рабочей части аэродинамической трубы. Динамики, соединенные с полостями под мембранами гибкими пневмотрассами (4), создавали пульсации давления, приводящие мембраны в колебательное движение в нормальном плоскости мембран направлении с амплитудами до несколько десятков микрон. Подаваемый на каждый динамик синусоидальный сигнал с задаваемыми частотой, амплитудой и фазой генерировался одним из восьми каналов электронной части источника, снабженной специальным аналого-цифровым преобразователем, совмещенным с усилителем мощности.

Источник создавал локальные неоднородности поверхности с заданными параметрами — поперечным периодом, частотой и амплитудой колебаний. Эластичные мембраны были приклеены к несущей поверхности источника по технологии, которая обеспечивала равномерное, одинаковое для всего набора небольшое натяжение мембран и изоляцию подмембранных камер друг от друга, что создавало однородный набор осцилляторов вдоль по размаху модели. Отклонение диаметров мембран друг от друга не превышало 90 мкм, а разброс амплитуд колебаний поверхности — 5%. Периодический характер формы неоднородностей по размаху (в виде стоячей волны) был выбран специально, чтобы обеспечить наиболее эффективную генерацию периодических по размаху возмущений пограничного слоя. Специальные тесты не зафиксировали выгиба или прогиба мембран в условиях работы аэродинамической трубы в используемом режиме из-за разницы статического давления в потоке и давления под мембранами в пневмотрассах. Вместе с тем из-за особенностей процесса отвердевания клея поверхность мембран в нейтральном положении была заглублена в среднем примерно на 15 мкм ниже поверхности пластины, что приводило к появлению небольшой периодической по z стационарной поперечной неровности.

Варьирование диаметра и шага мембран позволяло изменять поперечную длину волны неоднородностей поверхности и, как результат, поперечную длину волны генерируемых возмущений. В описываемой работе использовались источники с диаметром мембран 3.62 ± 0.04 и 5.44 ± 0.05 мм при

Таблица 1: Величины h_{\max} при колебаниях мембран (мкм)

λ_z , мм	$f = 2$	5	8	11	14 Гц
8		30.0 ± 2.0	36.0 ± 2.2	45.0 ± 2.0	48.1 ± 3.7
12	27.6 ± 0.3	30.9 ± 0.6	37.8 ± 0.5	47.2 ± 1.0	51.7 ± 2.3

шаге между центрами мембран 4 и 6 мм соответственно. Во время экспериментов соседние мембраны колебались в противофазе, в результате чего источник создавал периодические по размаху неоднородности поверхности пластины с поперечными периодами $\lambda_z = 8$ и 12 мм соответственно. Эксперименты были проведены с частотами колебаний в диапазоне $f = 2 \div 14$ Гц. Соответствующие таким неоднородностям волны неустойчивости пограничного слоя (вихри Гёртлера) были близки к наиболее быстрорастущим вниз по потоку (см., например, [11]).

Величины измеренных максимальных отклонений мембран h_{\max} от нейтрального положения в процессе гармонических по времени колебаний представлены в Таблице 1. Измерения были выполнены с помощью бесконтактного оптического измерителя смещений с точностью 0.1 мкм. Было показано, что отклонения точек каждой мембраны от нейтрального положения (в цилиндрической системе координат связанной с центром мембраны) с высокой точностью можно описать формулой

$$h(r) = h_{\max} \sum_{n=0}^3 c_n \left(\frac{2r}{d} \right)^{2n}, \quad |r| \leq d/2, \quad (1)$$

где

$$\sum_{n=0}^3 c_n = \sum_{n=1}^3 n c_n = 0,$$

r — расстояние от центра мембраны, а $c_2 = 1.9375$, -0.3101 и $c_3 = -0.4591$, 0.6534 для мембран, отвечающих $\lambda_z = 8$ и 12 мм соответственно.

Для разработки численной модели описанного выше источника мы будем предполагать, что количество мембран в направлении z бесконечно и они колеблются гармонически по времени с круговой частотой $\omega = 2\pi f$ в вертикальном относительно плоскости мембран направлении y с амплитудами, определенными в (1), причем соседние мембраны колеблются в противофазе. Выполнив при каждом x разложение такого источника в ряд Фурье по z , мы выделим при каждом x гармонику с главным волновым числом $\beta = 2\pi/\lambda_z$ и будем предполагать далее, что источник представляет собой полосу, точки которой колеблются в вертикальном направлении по закону

$$y = H_{\beta\omega}(x) \cos(\beta z - \omega t) \quad (2)$$

с фиксированными ω и β , где $H_{\beta\omega}(x)$ — неотрицательная функция, зависящая от x .

2.3. Характеристики пограничного слоя

Измерения, описанные в работе [2], показали, что в области измерений характеристики основного потока над пластиной практически не зависят от поперечной координаты, то есть пограничный слой можно считать двумерным. Более того, благодаря тщательному подбору формы и расположения ложной стенки и других элементов экспериментальной модели, описанных в разделе 2.1, удалось создать пограничный слой с продольным градиентом давления, внутри него близким к нулю, что соответствует свободному обтеканию вогнутой пластины, расположенной под нулевым углом атаки к однородному потоку.

Измеренные по нормали к стенке профили продольной компоненты скорости основного течения и соответствующие интегральные характеристики показывают, что в области измерений реализовывался пограничный слой близкий к Блазиусовскому. Соответствующие зависимости толщины вытеснения δ^* , толщины потери импульса δ^{**} и формпараметра δ^*/δ^{**} от продольной координаты x показаны на рис. 3 точками. Как видно из этого рисунка, они хорошо соответствуют расчетным данным для пограничного слоя Блазиуса, если считать, что такой пограничный слой формируется вниз по потоку от значения продольной координаты $x = x_v$ мм. Эта величина была получена методом наименьших квадратов путем минимизации разницы между характеристиками экспериментального пограничного слоя и пограничного слоя Блазиуса.

2.4. Возбуждаемые контролируемые возмущения

Предварительные исследования [11] показали, что продольная компонента скорости генерируемых источником контролируемых возмущений имеет максимум на расстоянии от поверхности, соответствующем значению безразмерной продольной компоненты скорости основного течения $U/U_e = 0.6 \pm 0.01$. Поэтому описываемые ниже измерения амплитуд и фаз возмущений выполнялись на этом расстоянии от поверхности.

Найденные величины продольной компоненты скорости возмущений подвергались осреднению по ансамблю реализаций, синхронизированных с опорным сигналом источника возмущений. Число взятых для осреднения периодов возбуждаемых гармонических возмущений варьировалось от 20 до 210, в зависимости от режима измерений. Частота дискретизации выби-

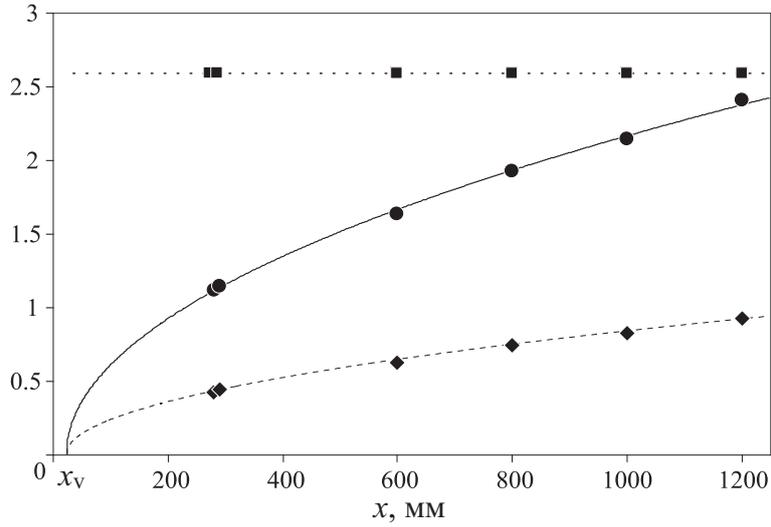


Рис. 3: Сравнение интегральных характеристик пограничного слоя. Экспериментальные данные [2]: δ^* , мм (●); δ^{**} , мм (◆); δ^*/δ^{**} (■); соответствующие расчетные данные для пограничного слоя Блазиуса (—), (---), (···) соответственно; положение эффективного начала пограничного слоя Блазиуса $x_v = 21.6$ мм.

ралась с тем расчетом, чтобы обеспечить достаточно большое, всегда целое число точек на период генерируемого сигнала. В результате полученные сигналы были синхронизированы по времени и содержали как амплитудную, так и фазовую информацию. Затем эти сигналы подвергались преобразованию Фурье по времени с тем, чтобы получить амплитуды и фазы возмущений на частоте возбуждения f . Продольная компонента скорости потока измерялась в течение $10 \div 15$ секунд в каждой точке пространства.

Эксперименты проводились при колебаниях мембран с частотами $f = 2, 5, 8, 11$ и 14 Гц. Длина волны возбужденных вихрей Гёртлера в поперечном направлении составляла 8 или 12 мм. На рис. 4 показано типичное поведение амплитуд и фаз продольной компоненты скорости возмущений по координате z в пограничном слое вдали от источника (в конце исследуемого интервала по x). Показанные зависимости характерны для стоячей волны, что свидетельствует о наличии двух вихрей Гёртлера с одинаковой частотой f , одинаковыми амплитудами и поперечными волновыми числами $\pm\beta$, определяемыми шагом мембран, а также небольшой примеси других возмущений с кратными поперечными волновыми числами, генерируемых источником. Анализ возмущений с частотой $2f$, проведенный с целью проверки линейности источника и эволюции возмущений, показал отсутствие значимых отклонений от линейности.

Преобразование Фурье по z продольной компоненты скорости возмущений позволило выделить амплитуды и фазы возмущений с поперечными волновыми числами $\pm\beta$, соответствующими модельному источнику, описан-

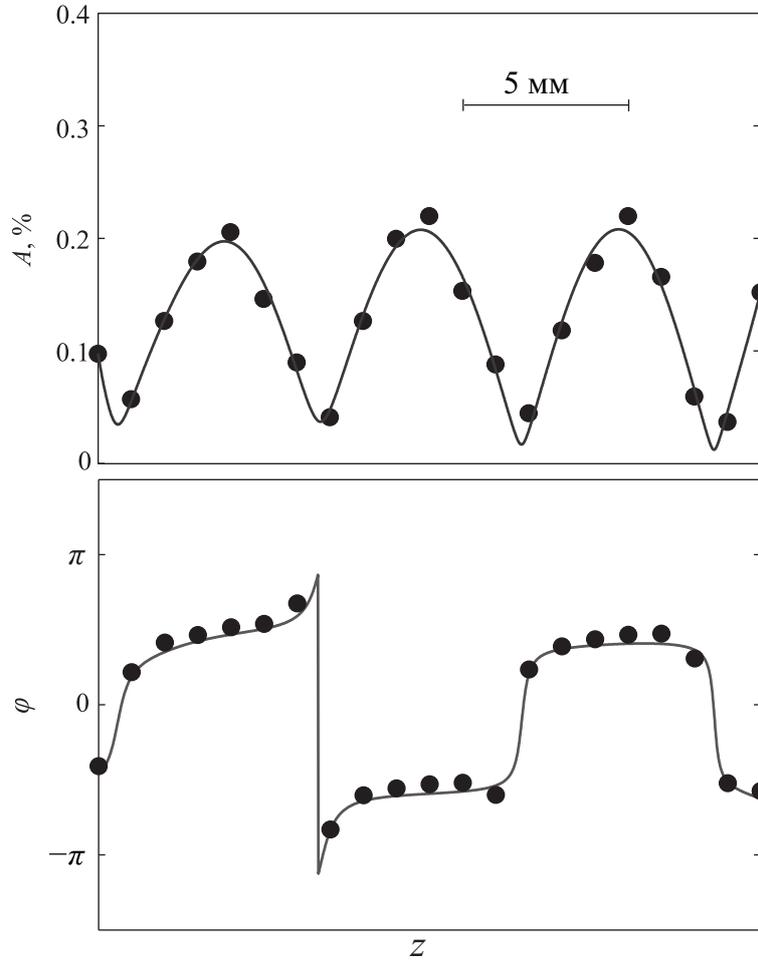


Рис. 4: Поведение амплитуд (*сверху*) и фаз (*снизу*) возмущений по координате z для $\lambda_z = 12$ мм и $f = 8$ Гц при $x = 1200$ мм): экспериментальные данные (\bullet) и их аппроксимация полиномами 10-й степени ($-$) [2].

ному в разделе 2.2. Эти данные мы будем использовать в следующем разделе для сравнения с расчетными.

Типичные профили выделенных таким образом амплитуд и фаз, взятые по нормали к стенке в месте расположения одного из амплитудных максимумов по z на рис. 4, показаны символами на рис. 5 для той же продольной координаты $x = 1200$ мм. Для сравнения линиями показаны результаты расчетов, выполненные для условий эксперимента с использованием двух вариантов линеаризованных уравнений эволюции вихрей Гёртлера [11]. Видно, что экспериментальные и расчетные профили амплитуд и фаз хорошо согласуются друг с другом.

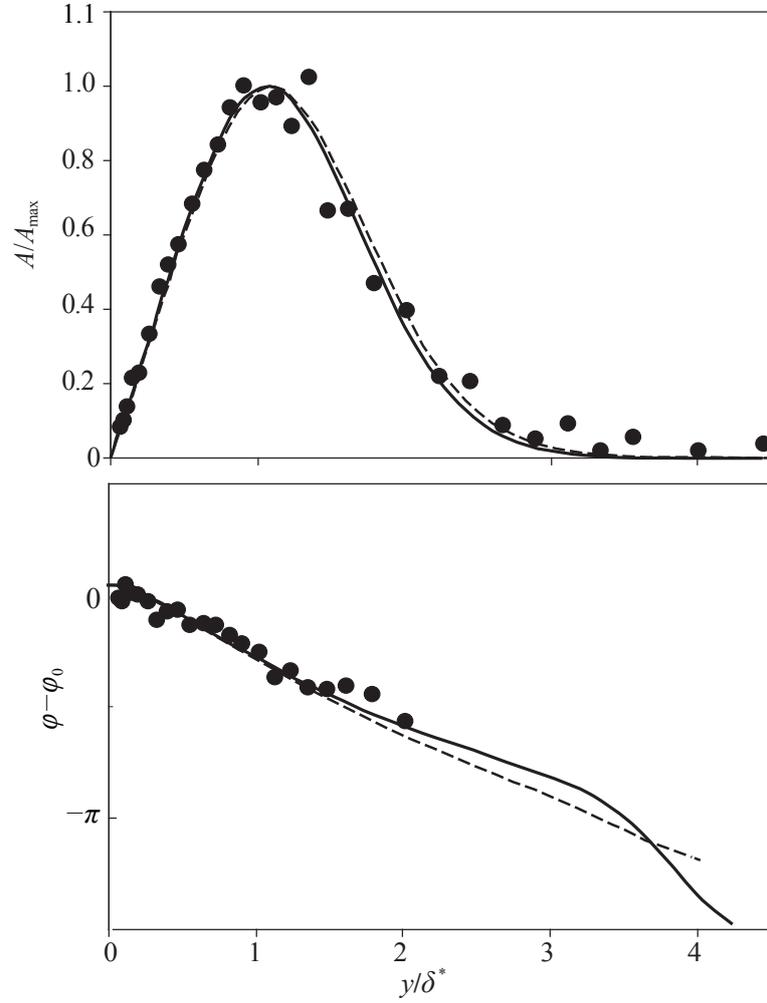


Рис. 5: Профили амплитуды (*сверху*) и фазы (*снизу*), полученные в эксперименте [2] (\bullet) для $\lambda_z = 12$ мм $f = 8$ Hz при $x = 1200$ мм в сравнении с результатами расчетов по линейной теории устойчивости с учетом (—) и пренебрегая (---) членами, содержащими нормальную компоненту скорости V основного течения и производные продольной компоненты скорости U по x (см. детали в [11]).

3. Моделирование на основе параболизированных уравнений

В данном разделе мы опишем упрощенную модель, основанную на параболизированных уравнениях. Как уже было сказано во введении, эта модель оказалась достаточно адекватной для анализа полученных в эксперименте коэффициентов восприимчивости пограничного слоя к локальным неоднородностям обтекаемой поверхности при генерации вихрей Гёртлера и позволила построить в работе [3] новую теорию восприимчивости, основанную на оптимальных возмущениях. Однако эта модель не вполне точно воспроизводила продольную компоненту скорости возмущений при некоторых значениях параметров эксперимента. Причины, по которым это происходило, так и остались до конца не выясненными.

3.1. Теоретическая модель

Контролируемые возмущения, возбуждаемые в пограничном слое в трубном эксперименте, имели очень малые амплитуды — десятые и даже сотые доли процента скорости среднего течения. Поэтому их генерация и распространение вниз по потоку описываются с хорошей точностью линеаризованными уравнениями.

Рассмотрим слабо вогнутую пластину, бесконечную в поперечном направлении и расположенную под нулевым углом атаки в однородном потоке вязкой несжимаемой жидкости с вектором скорости длины U_e , перпендикулярным передней кромке пластины. Будем предполагать, что радиус $R > 0$ кривизны пластины постоянный и значительно превосходит толщину δ пограничного слоя, формируемого на пластине под воздействием вязкости. Примем следующие обозначения: $x \geq 0$ — продольная координата (длина дуги поверхности, отсчитываемая от передней кромки), $y \geq 0$ — нормальная координата (расстояние от поверхности по нормали), z — поперечная координата (вдоль передней кромки пластины), перпендикулярная плоскости (x, y) , t — время. Течение, которое образуется над пластиной в отсутствие возмущений мы будем называть *основным*. Компонента скорости основного течения в поперечном направлении равна нулю. Компоненты скорости U и V в направлениях x и y соответственно и давление P не зависят от z и t .

Пусть источник возмущений — осциллирующая непроницаемая мембрана длины l в направлении x , бесконечная в направлении z и расположенная вниз по потоку от передней кромки между $x_0 - l$ и x_0 , где $x_0 \gg l$. Обозначим компоненты скорости и давление возмущенного потока через $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ и $p(x, y, z, t)$ соответственно. Используя

нормировки, принятые в теории пограничного слоя, мы нормируем время на x_0/U_e ; x и l на x_0 ; y, z, R и δ на $x_0/\sqrt{\text{Re}}$; u на U_e ; v и w на $U_e/\sqrt{\text{Re}}$; p на $\rho U_e^2/\text{Re}$, где $\text{Re} = x_0 U_e/\nu$ означает число Рейнольдса, ρ — плотность среды и ν — коэффициент кинематической вязкости. За безразмеренными таким образом переменными мы сохраним старые обозначения.

В рассматриваемом случае, когда $R \gg \delta$, основное течение, сформированное над пластиной, начиная с некоторого расстояния от передней кромки с хорошей точностью удовлетворяет уравнениям Блазиуса [6, 12, 13]:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

с граничными условиями прилипания на обтекаемой поверхности и условиями свободного потока на бесконечности:

$$U(x, 0) = V(x, 0) = 0, \quad U(x, \infty) = 1, \quad (4)$$

где, в соответствии с указанными выше нормировками, $U(x, y)$ и $V(x, y)$ — безразмеренные продольная и нормальная компоненты скорости.

Система линейных уравнений, описывающая развитие малых трехмерных возмущений в этом двумерном пограничном слое, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} u' + V \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} v' &= \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} u' + V \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} v' + 2\text{Gö}^2 U u' + \frac{\partial p'}{\partial y} &= \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} + V \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial p'}{\partial z} &= \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $u' = u - U$, $v' = v - V$, $w' = w$, $p' = p - P$ и $\text{Gö}^2 = \sqrt{\text{Re}/R}$ — число Гёртлера. Эта система выведена из полных уравнений вязкой несжимаемой жидкости, записанных во введённых выше криволинейных координатах, с учетом малости кривизны и с использованием линеаризации относительно основного течения и параболизации посредством отбрасывания вязких членов и производной давления в продольном направлении, которые являются относительно малыми в случае достаточно больших чисел Рейнольдса [14, 11].

Будем предполагать течение выше по потоку от мембраны невозмущенным, а возмущения — удовлетворяющими условиям прилипания на поверхности пластины за источником и исчезающими на бесконечности (при

$y \rightarrow \infty$). Граничные условия, моделирующие колебания мембраны (то есть при $1 - l \leq x \leq 1$), требуют специального рассмотрения. Пусть при осцилляции точки мембраны испытывают смещения $\xi(x, z, t)$, $\eta(x, z, t)$ и $\zeta(x, z, t)$ относительно ее нейтрального положения вдоль направлений x , y и z соответственно. Тогда динамические условия прилипания имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial t} &= u(x + \xi, \eta, z + \zeta, t), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= v(x + \xi, \eta, z + \zeta, t), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= w(x + \xi, \eta, z + \zeta, t).\end{aligned}$$

Предполагая смещения и скорости точек мембраны в направлениях x и z пренебрежимо малыми, разложим компоненты скорости потока в ряды Тейлора в окрестности точки $(x, 0, z)$, полагая $\xi = \zeta = \partial \xi / \partial t = \partial \zeta / \partial t = 0$ и отбрасывая нелинейные по η члены. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}0 &= u(x, 0, z, t) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z, t)\eta, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= v(x, 0, z, t) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, 0, z, t)\eta, \\ 0 &= w(x, 0, z, t) + \frac{\partial w}{\partial y}(x, 0, z, t)\eta.\end{aligned}$$

Учитывая, что при $y = 0$ компоненты скорости основного течения удовлетворяют равенствам $U = V = 0$ и $\partial V / \partial y = -\partial U / \partial x = 0$ и отбрасывая члены второго порядка малости, мы окончательно получим следующие линейризованные граничные условия для компонент скорости возмущений:

$$u'(x, 0, z, t) = -\frac{\partial U}{\partial y}(x, 0)\eta, \quad v'(x, 0, z, t) = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad w'(x, 0, z, t) = 0,$$

$$1 - l \leq x \leq 1.$$

Обоснование таких граничных условий восходит к работе [15], поэтому их иногда называют условиями Бенджамина. Их широко используют, в частности, при изучении различных неустойчивостей сдвиговых течений вблизи податливых покрытий [17, 18, 19] и других неоднородностей поверхности как в случае параллельных, так и в случае непараллельных течений [20, 21].

В соответствии с предыдущим разделом мы будем предполагать далее, что осцилляции мембраны являются гармоническими по z и t , то есть

$$\eta(x, z, t) = \text{Real} H_{\beta\omega}(x) e^{i(\beta z - \omega t)},$$

где $\beta \neq 0$ и $\omega \geq 0$ — вещественные волновое число и круговая частота соответственно, а $H_{\beta\omega}(x)$ — скалярная неотрицательная функция, которая тождественно равна нулю при $x \leq 1 - l$ и $x \geq 1$. В этом случае решение системы (5) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} u'(x, y, z, t) \\ v'(x, y, z, t) \\ w'(x, y, z, t) \\ p'(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \text{real} \begin{pmatrix} \bar{u}(x, y) \\ \bar{v}(x, y) \\ \bar{w}(x, y) \\ \bar{p}(x, y) \end{pmatrix} e^{i(\beta z - \omega t)},$$

а система (5) сводится к системе уравнений для комплексных амплитуд возмущений, которую, используя уравнение неразрывности основного течения и возмущений, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + i\beta \bar{w} &= 0, \\ \frac{\partial(U\bar{v} + V\bar{u})}{\partial x} + 2\frac{\partial V\bar{v}}{\partial y} + i\beta V\bar{w} + 2G\ddot{\omega}^2 U\bar{u} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - \beta^2 \bar{v} + i\omega \bar{v}, \\ \frac{\partial U\bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial V\bar{w}}{\partial y} + i\beta \bar{p} &= \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} - \beta^2 \bar{w} + i\omega \bar{w}, \\ V\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \bar{u} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{v} - U\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - i\beta U\bar{w} &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \beta^2 \bar{u} + i\omega \bar{u}. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что в (6) вид уравнения продольного движения (последнее уравнение) отличается от традиционного, например, от уравнения (3) в [11]. Его можно получить исключив производные по x из уравнения продольного движения, используя уравнения неразрывности для основного течения и возмущений.

Начальные условия для системы (6) и граничные условия при $y = \infty$ имеют вид

$$\bar{u}(1 - l, y) = \bar{v}(1 - l, y) = \bar{w}(1 - l, y) = \bar{p}(1 - l, y) = 0 \quad (7)$$

и

$$\bar{u}(x, \infty) = \bar{v}(x, \infty) = \bar{w}(x, \infty) = 0, \quad x \geq 1 - l \quad (8)$$

соответственно, а граничные условия при $y = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, 0) &= -\frac{\partial U}{\partial y}(x, 0)H_{\beta\omega}(x), \\ \bar{v}(x, 0) &= -i\omega H_{\beta\omega}(x), \\ \bar{w}(x, 0) &= 0, \quad 1 - l \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{v}(x, 0) = \bar{w}(x, 0) = 0, \quad x > 1.$$

Следует подчеркнуть, что использование модели (6) – (9) обосновано при достаточно больших числах Рейнольдса: $Re \gg 1/H_{\max}$, где

$$H_{\max} = \max H_{\beta\omega}(x),$$

малых по отношению к толщине пограничного слоя амплитудах осцилляции мембраны: $H_{\max} \ll \delta$, и толщине пограничного слоя, существенно меньшей характерной продольной длины волны генерируемого вихря [15]. Все эти условия в рассматриваемом случае выполнены.

3.2. Численная модель

Для дискретизации по пространственной переменной y системы (6) с начальными условиями (7) и граничными условиями (8) и (9) мы будем использовать метод коллокаций. Выберем достаточно большое $y_{\max} \gg \delta$ и заменим граничные условия (8) для амплитуд компонент скорости возмущений на

$$\bar{u}(x, y_{\max}) = \bar{v}(x, y_{\max}) = \bar{w}(x, y_{\max}) = 0, \quad x > 1 - l.$$

Адекватность выбора y_{\max} будем анализировать апостериори, проверяя независимость (с требуемой точностью) полученных результатов от увеличения y_{\max} .

Выполним в уравнениях (6) следующую замену переменных:

$$y = y(s) = y_{\max} \frac{1 + s}{2 + (1 - s)\sigma}, \quad -1 \leq s \leq 1,$$

где $\sigma > 0$ – скалярный параметр, и заменим \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} и \bar{p} интерполяционными многочленами, выбирая в качестве узлов интерполяции по s для давления корни многочлена Чебышева второго рода $U_N(s)$ степени N , то есть

$$s_j = \cos \frac{\pi j}{N + 1}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (10)$$

а для интерполяции компонент скорости те же точки и $s_0 = 1$ и $s_{N+1} = -1$. Требуя выполнения полученных уравнений в точках (10) и используя для вычисления значений производных элементарных интерполяционных многочленов в этих точках методы, описанные в [22], мы получим систему обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений следующего вида:

$$v(1 - l) = 0, \quad \frac{d}{dx} D(x)v = J(x)v + Gp + H(x)f_v(x),$$

$$F(x)v + H(x)f_p(x) = 0, \quad (11)$$

со скалярной функцией $H(x) = H_{\beta\omega}(x)$, такой, что

$$H(1-l) = H(x) \equiv 0, \quad x \geq 1, \quad (12)$$

где $v(x) \in \mathbf{C}^{n_v}$ и $p(x) \in \mathbf{C}^{n_p}$ — векторы значений компонент скорости и давления соответственно во внутренних узлах сетки, $J(x) \in \mathbf{C}^{n_v \times n_v}$ и $F(x) \in \mathbf{C}^{n_p \times n_v}$ — матрицы, а $f_v(x) \in \mathbf{C}^{n_v}$, $f_p(x) \in \mathbf{C}^{n_p}$ — векторы, слабо зависящие от x , $n_v = 3N$, $n_p = N$, и $G \in \mathbf{C}^{n_v \times n_p}$ — матрица, не зависящая от x . Учитывая, что $l \ll 1$, мы будем считать далее основное течение постоянным при $1-l \leq x \leq 1$ и полагать

$$D(x) \equiv D(1), \quad J(x) \equiv J(1), \quad F(x) \equiv F(1), \quad f(x) \equiv f(1), \quad 1-l \leq x \leq 1.$$

Матрицы $D(x)$, $J(x)$ и $F(x)$ включают компоненты скорости U и V основного течения и их производные по y в узлах $y(s_j)$. Для их вычисления мы вычисляли $U(x, y(s_j))$ и $V(x, y(s_j))$ при $x = 1$, а затем использовали эти величины в качестве начальных значений для вычисления U и V в тех же узлах по y при $x > 1$, применяя метод запаздывающих коэффициентов и схему Кранка-Николсон [23].

Для вычисления $U(1, y(s_j))$ и $V(1, y(s_j))$ нужно решить систему (3), (4). Ее решение можно представить в автомоделном виде [13]:

$$U = \frac{dg}{dr}, \quad V = \frac{1}{2\sqrt{x}}(rU - g),$$

где g — функция одного переменного $r = y/\sqrt{x}$, удовлетворяющая уравнению

$$2\frac{d^3g}{dr^3} + g\frac{d^2g}{dr^2} = 0$$

с граничными условиями

$$g(0) = \frac{dg}{dr}(0) = 0, \quad \frac{dg}{dr}(\infty) = 1.$$

Для вычисления g в узлах $r_j = y(s_j)$ мы использовали метод, детально описанный в [24, 25].

Применяя алгебраическую редукцию, предложенную в [26, 27], к дифференциально-алгебраической системе (11) с матрицами и правой частью, гладко зависящими от x , можно показать, что выполнение условий

$$\det D(x) \neq 0, \quad \det F(x)D(x)^{-1}G \neq 0$$

гарантирует существование и единственность решения и делает возможным исключение p .

Учитывая все сказанное выше, мы будем моделировать генерацию возмущения путем решения задачи Коши

$$v(1-l) = 0, \quad \frac{d}{dx}D(1)v = J(1)v + Gp + H(x)f_v(1),$$

$$F(1)v + H(x)f_p(1) = 0, \quad 1-l < x \leq 1, \quad (13)$$

а развитие возмущения $v^0 = v(1)$, сгенерированного (13), — путем решения однородной задачи Коши

$$v(1) = v^0, \quad \frac{d}{dx}D(x)v = J(x)v + Gp,$$

$$F(x)v = 0, \quad x > 1.$$

Для аппроксимации этих задач Коши по x мы будем использовать BDF2 метод [28] с фиксированным шагом.

3.3. Сравнение с экспериментом

Результаты вычислений и трубного эксперимента сравниваются друг с другом на рис. 6 и 7 при двух различных значениях поперечной длины волны λ_z и различных значениях частоты f . На этих рисунках представлены продольная компонента скорости возмущения на расстоянии от пластины, соответствующем $U/U_e = 0.6$, полученная в эксперименте (символы), и расчетная (сплошная линия). Как можно видеть, рост возмущений вдали от источника моделируется адекватно. Различие между расчетной и экспериментальной амплитудами возмущений объясняется, вероятнее всего, не полной адекватностью теоретической модели источника и/или некоторой неточностью экспериментальных результатов, полученных после их обработки, описанной во втором разделе.

Отметим, что имеющее место занижение значений расчетных амплитуд возмущений при низких частотах хорошо согласуется с результатами работы [29], где использование линейной модели источника приводило к аналогичному расхождению с результатами прямого численного моделирования. Кроме того, граничные условия (9) являются при нулевой частоте очень чувствительными к особенностям пограничного слоя вблизи обтекаемой поверхности, который в трубном эксперименте может отличаться от идеального пограничного слоя Блазиуса. С ростом частоты второе граничное условие в (9), чьи коэффициенты контролируются в эксперименте с высокой точностью, становится доминирующим в механизме восприимчивости, что ослабляет вклад члена $\partial U/\partial y$ при $y = 0$. В рассматриваемом случае наблюдаемое стремление расчетных данных к экспериментальным

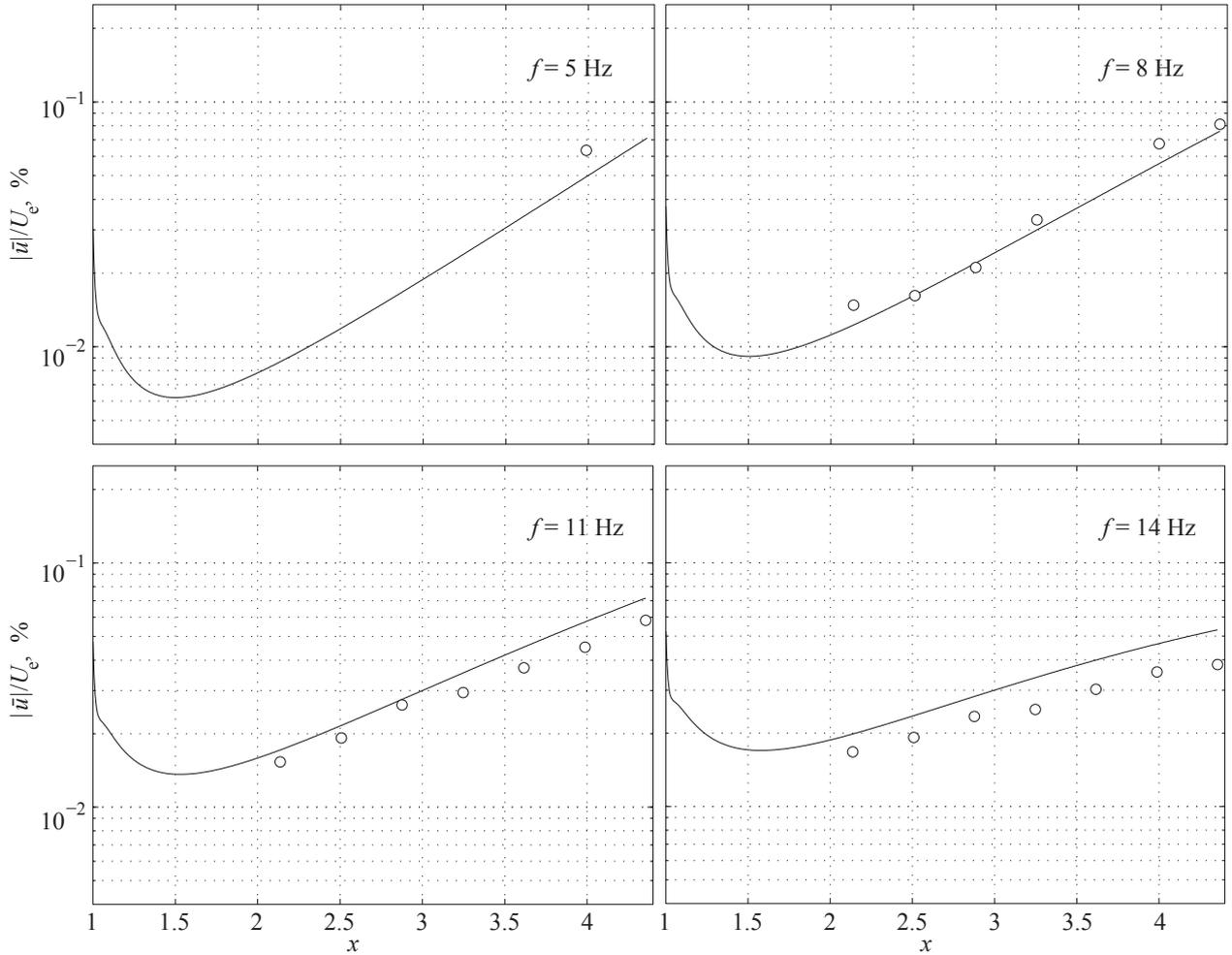


Рис. 6: Расчетная (—) и экспериментальная (○) амплитуды продольной компоненты скорости возмущения пограничного слоя на расстоянии от пластины, соответствующем $U/U_e = 0.6$, для $\lambda_z = 8$ мм.

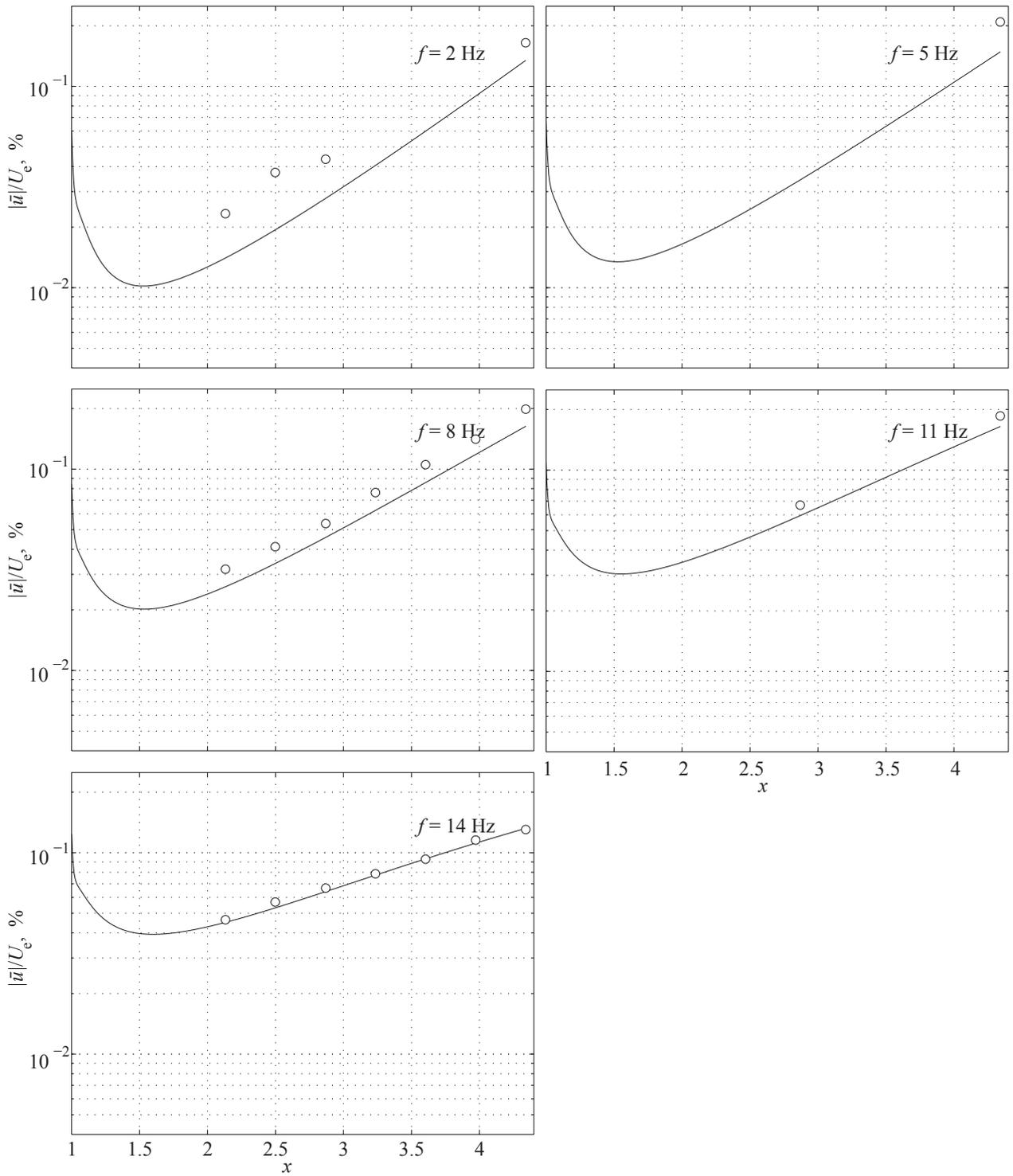


Рис. 7: Расчетная (—) и экспериментальная (○) амплитуды продольной компоненты скорости возмущения пограничного слоя на расстоянии от пластины, соответствующем $U/U_e = 0.6$, для $\lambda_z = 12 \text{ мм}$.

Таблица 2: Параметры вычислений при $\lambda_z = 8$ мм

f , Hz	5	8	11	14
H_{\max}	0.0421	0.0507	0.0632	0.0677
Gö	3.6278	3.6332	3.6288	3.6308
β	0.5217	0.5202	0.5214	0.5209
ω	0.9257	1.4812	2.0366	2.5921
$\text{Re} \times 10^{-5}$	1.6583	1.6682	1.6601	1.6638
l	0.0135	0.0135	0.0135	0.0135

Таблица 3: Параметры вычислений при $\lambda_z = 12$ мм

f , Hz	2	5	8	11	14
H_{\max}	0.0426	0.0478	0.0584	0.0730	0.0800
Gö	3.6427	3.6430	3.6430	3.6429	3.6428
β	0.3472	0.3472	0.3472	0.3472	0.3472
ω	0.3715	0.9288	1.4861	2.0433	2.6006
$\text{Re} \times 10^{-5}$	1.6747	1.6752	1.6752	1.6751	1.6749
l	0.0200	0.0200	0.0200	0.0200	0.0200

при высоких частотах (для больших поперечных длин волн, рис. 7) подтверждает эту гипотезу и свидетельствует также о том, что линейная модель источника возмущений является более адекватной в нестационарных случаях, по крайней мере при $\lambda_z = 12$ мм.

Отметим, что описанные вычисления выполнялись со следующими значениями параметров пространственной дискретизации по y : $y_{\max} = 30$, $\sigma = 11$, $N = 50$. Число узлов сетки по x в области источника выбиралось равным 2000, а от $x = 1$ до $x = x_{\max} - 500$, где $x_{\max} = 4.3561$ для $\lambda_z = 8$ и $x_{\max} = 4.3419$ для $\lambda_z = 12$. Уменьшение шагов сеток и увеличение y_{\max} не приводило к заметному изменению результатов. Остальные параметры вычислений приведены в Таблицах 2 и 3.

4. Прямое численное моделирование

4.1. Пакет FEATFLOW

Пакет программ FEATFLOW предназначен для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием высокопроизводительных кластеров. Для получения результатов, описанных в следующем разделе, использовалась версия пакета, предназначенная для решения в декартовых

координатах (x, y, z) трехмерных уравнений вязкой несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0,\end{aligned}\tag{14}$$

в ограниченной области Ω , где $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ — вектор скорости течения и его компоненты в направлениях x , y и z соответственно, p — нормализованное давление (давление, деленное на плотность), ν — коэффициент кинематической вязкости. В качестве начального условия используется условие вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

где $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$, а $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ — некоторая заданная векторная функция.

На границе $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ расчетной области Ω задаются условия вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,\tag{15}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2,\tag{16}$$

$$-p\mathbf{n} + \nu(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{g}_3, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3,\tag{17}$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе Γ , Γ_i ($i = 1, 2, 3$) — некоторые непересекающиеся подмножества границы Γ , а \mathbf{g}_i — заданные на них функции.

Пространственная аппроксимация системы (14) выполняется на гексаэдральной сетке с помощью метода конечных элементов. Для аппроксимации скорости используются непрерывные квадратичные элементы, а для давления — разрывные линейные [30, 31]. В результате получается дифференциально-алгебраическая система вида

$$\begin{aligned}M \frac{d\mathbf{u}}{dt} + N(\mathbf{u})\mathbf{u} - L\mathbf{u} + Bp &= 0, \\ B^T \mathbf{u} &= 0,\end{aligned}\tag{18}$$

где \mathbf{u} и p — зависящие от времени дискретные аналоги вектора скорости и нормализованного давления, M — матрица масс, $N(\mathbf{u})$ — дискретный аналог оператора $\mathbf{u} \cdot \nabla$ в (14), представляющий собой матрицу, зависящую от \mathbf{u} , а L , B и $-B^T$ — постоянные матрицы, являющиеся дискретными аналогами умноженного на ν оператора Лапласа, градиента и дивергенции соответственно.

Для дискретизации по времени системы (18) в FEATFLOW можно использовать одношаговые методы (one-step- θ -scheme), такие как неявный метод Эйлера либо схема Кранка-Николсон, а также метод дробных шагов (fractional-step- θ -scheme) [30, 31]. Например, использование неявного метода

Эйлера приводит на каждом шаге к следующей системе нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} M \frac{\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}}{\tau} + N(\mathbf{u}^k) \mathbf{u}^k - L \mathbf{u}^k + B \mathbf{p}^k &= 0, \\ B^T \mathbf{u}^k &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

относительно \mathbf{u}^k и \mathbf{p}^k , где τ — шаг по времени. Вводя обозначение

$$A(\mathbf{u}) = M + \tau (N(\mathbf{u}) - L), \quad (20)$$

систему (19) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}^k) \mathbf{u}^k + \tau B \mathbf{p}^k &= M \mathbf{u}^{k-1}, \\ B^T \mathbf{u}^k &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Для решения системы (21) в FEATFLOW используется проекционный алгоритм, подробно описанный, например, в работах [30, 31, 32]. Ниже схематично даны его основные этапы:

- задать некоторое $\tilde{\mathbf{p}}$, например, положить $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^{k-1}$;
- решить относительно $\tilde{\mathbf{u}}$, например, с помощью метода Ньютона, нелинейную систему

$$A(\tilde{\mathbf{u}}) \tilde{\mathbf{u}} + \tau B \tilde{\mathbf{p}} = M \mathbf{u}^{k-1}; \quad (22)$$

- для найденного $\tilde{\mathbf{u}}$ решить относительно $\mathbf{p}^k - \tilde{\mathbf{p}}$ систему

$$\tau B^T M_L^{-1} B (\mathbf{p}^k - \tilde{\mathbf{p}}) = B^T \tilde{\mathbf{u}} \quad (23)$$

с матрицей $M_L \approx A(\tilde{\mathbf{u}})$;

- положить

$$\mathbf{u}^k := \tilde{\mathbf{u}} - \tau M_L^{-1} B (\mathbf{p}^k - \tilde{\mathbf{p}}).$$

При необходимости эти вычисления можно повторить, задавая $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^k$.

Если τ достаточно мало, то из (20) следует, что $A(\tilde{\mathbf{u}}) \approx M$. В этом случае в качестве M_L в FEATFLOW используется диагональная матрица с i -м диагональным элементом равным сумме элементов i -й строки матрицы M . Можно показать, что найденное таким образом \mathbf{u}^k удовлетворяет дискретному уравнению неразрывности $B^T \mathbf{u}^k = 0$.

Описанная проекционная схема предназначена [33] для решения нелинейных проблем вида (21). При достаточно малом τ , то есть при доминировании матрицы масс в операторе (20), и хорошем начальном приближении

для нахождения решения проблемы (21) на новом временном слое обычно достаточно нескольких (в расчетах, результаты которых приведены в следующем разделе, — одной) итераций этой схемы [31, 32]. В нестационарных задачах хорошим начальным приближением обычно является решение с предыдущего шага по времени. Вариант алгоритма, эффективного в случае больших временных шагов, обсуждается в работе [31].

Для решения систем линейных уравнений, возникающих при использовании описанной проекционной схемы, в пакете FEATFLOW применяется многосеточный метод, где для сглаживания используются алгоритмы на основе либо метода Гауса-Зейделя, либо неполного LU-разложения (при расчетах, описанных в следующем разделе, применялся метод последовательной верхней релаксации). Для решения систем на грубой сетке в случае уравнения (22) использовался метод последовательной верхней релаксации, а в случае уравнения (23) применялась процедура пакета программ UMFPACK [34], основанная на несимметричном мультифронтальном методе [35, 36].

4.2. Моделирование основного течения

В данном разделе обсуждаются результаты выполненных с помощью пакета FEATFLOW расчетов ламинарного обтекания вогнутой пластины с радиусом кривизны $R = 8370$ мм, помещенной под нулевым углом атаки в поток вязкой несжимаемой жидкости с вектором скорости $\mathbf{U}_e = (U_e, 0, 0)^T$, где $U_e = 9.18$ м/с, плотностью $\rho = 1.214$ кг/м³ и различными значениями коэффициента динамической вязкости μ . При этом коэффициент кинематической вязкости $\nu = \mu/\rho$.

Было реализовано два различных подхода к выбору расчетной области: с буферными зонами и без буферных зон. На рис. 8 в декартовых координатах (x, y, z) , где x — продольное, y — вертикальное и z — поперечное направления соответственно, изображена расчетная область с буферными зонами. Часть её нижней границы, совпадающая с выделенной темно-серым цветом пластиной, обозначена через Γ_{wall} . В продольном направлении x пластина расположена между двумя буферными зонами. В качестве граничного условия на левом торце Γ_{in} расчетной области задавалась скорость \mathbf{U}_e , на правом торце Γ_{out} задавалось условие (17) с $\mathbf{g}_3 = 0$ свободного истечения, на пластине Γ_{wall} — условие прилипания (15) с $\mathbf{g}_1 = 0$, а на всей остальной границе расчетной области задавалось условие непротекания, то есть (16) с $\mathbf{g}_2 = 0$.

Основной проблемой, с которой пришлось столкнуться при расчетах, было возникновение нарастающих с течением времени возмущений пограничного слоя в районах передней и задней кромок пластины (выделены

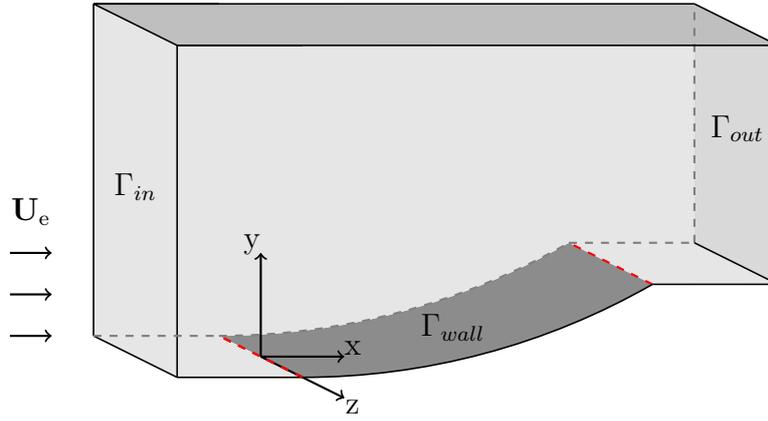


Рис. 8: Расчетная область с двумя буферными зонами.

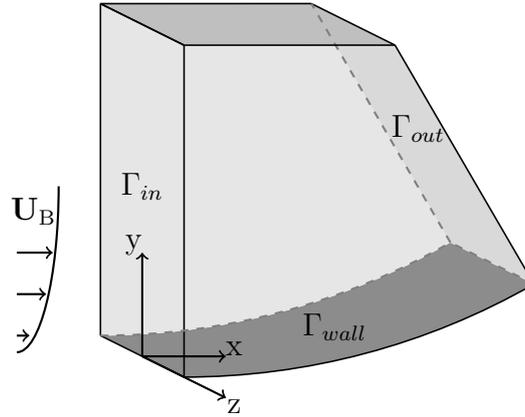


Рис. 9: Расчетная область без буферных зон.

красным пунктиром). Из-за этого приходилось дополнительно мельчить в вертикальном и в продольном направлениях сетку вблизи этих кромок, в том числе и в буферных зонах. Например, при $\mu = 10^{-4}$ Па·с, даже использование у кромок сеток с ячейками размера порядка 75 мкм в продольном и вертикальном направлениях не позволило избавиться от паразитных пульсаций скорости.

Расчетная область без буферных зон изображена на рис. 9. На левом торце Γ_{in} этой расчетной области вместо вектора \mathbf{U}_e скорости с постоянной продольной компонентой задавался вектор $\mathbf{U}_B = (U_B, 0, 0)^T$, где U_B — продольная компонента скорости пограничного слоя Блазиуса над плоской пластиной, вычисленная на расстоянии l_B от передней кромки, причем выше пограничного слоя $\mathbf{U}_B = \mathbf{U}_e$. Кроме того, в этой расчетной области правый торец Γ_{out} образует с пластиной Γ_{wall} прямой угол. Численные эксперименты показали, что отказ от использования буферных зон, выбор нового граничного условия на поверхности Γ_{in} и "поворот" правого торца Γ_{out} расчетной области дали возможность значительно ослабить паразитные пульсации скорости.

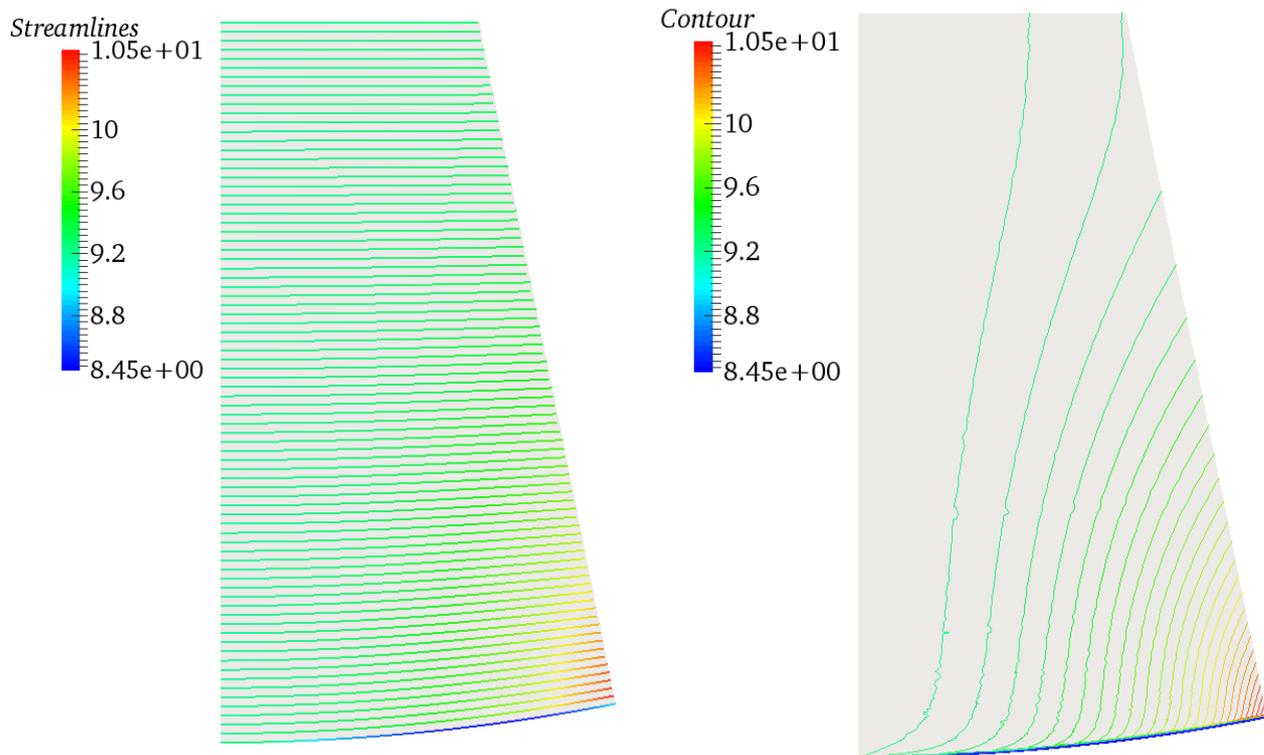


Рис. 10: Слева — линии тока, справа — линии уровня.

Ниже приведены результаты расчета обтекания пластины длиной около 1650 мм, шириной 25 мм в области высотой 3000 мм, при $\mu = 5 \times 10^{-5}$ Па·с и $l_B = 100$ мм. Расчеты были выполнены на сетке, размер ячеек которой в пограничном слое составлял примерно $1.6\text{мм} \times 75\text{мкм} \times 3\text{мм}$ в продольном, вертикальном и поперечном направлениях соответственно. На рис.10 приведены линии тока (слева) и линии уровня (справа) течения над пластиной. Видно, что линии тока сначала повторяют форму обтекаемой поверхности, но уже на расстоянии около 2000 мм они становятся почти горизонтальными. Вид линий тока и линий уровня свидетельствует об ускорении жидкости в расчетной области.

Для анализа вычисленного пограничного слоя в расчетной области вводились криволинейные координаты x , y , z , связанные с вогнутой пластиной и описанные во втором разделе. При этом предполагалось, что пограничный слой Блазиуса, с которым сравниваются полученные с помощью FEATFLOW результаты, формируется от точки с продольной координатой $x = 0$, что соответствует точке $x = x_v$ в трубном эксперименте.

В продольном x (вдоль поверхности пластины) и поперечном z (вдоль передней кромки) направлениях строились равномерные сетки с числом узлов 500 и 5 соответственно, а в вертикальном y направлении (по нормали к поверхности) строилась неравномерная сетка, описанная в разделе 3.2, с числом внутренних узлов $N = 120$ и параметрами $\sigma = 8$ и $y_{\max} \approx 180$ мм.

Затем на полученную таким образом сетку с числом узлов $500 \times 122 \times 5$ интерполировались поля скорости и давления и рассчитывались компоненты вектора скорости U , V и W в направлениях x , y и z соответственно.

На рис. 11 приведены зависимости профиля U продольной компоненты скорости (вдоль поверхности пластины) от автомодельной переменной

$$r = y \sqrt{\frac{\max(U(x, y, z))}{2\nu x}}.$$

Сверху показаны зависимости U от r , вычисленные для различных расстояний x от передней кромки при $z = 0$. Видно, что при $x \leq 900$ мм профиль U с высокой точностью является автомодельным. Снизу сравниваются профили U при $x \approx 700$ мм и $-12.5 \leq z \leq 12.5$ (мм). Видно, что продольная компонента скорости постоянна в поперечном направлении. Поэтому далее обсуждаются результаты, полученные при $z = 0$.

На рис. 12 показаны зависимости от x квадратов толщин вытеснения δ^* и потери импульса δ^{**} , рассчитанных по формулам

$$\delta^*(x) = \int_0^{y_m(x)} \left(1 - \frac{U(x, y, 0)}{U_m(x)}\right) dy,$$

$$\delta^{**}(x) = \int_0^{y_m(x)} \frac{U(x, y, 0)}{U_m(x)} \left(1 - \frac{U(x, y, 0)}{U_m(x)}\right) dy,$$

где $y_m(x)$ — минимальное значение y при котором величина $U(x, y, 0)$ достигает своего максимума

$$U_m(x) = \max_y U(x, y, 0),$$

а также квадраты соответствующих чисел Рейнольдса. Черным цветом показаны зависимости, отвечающие пограничному слою Блазиуса над плоской пластиной, а зеленым и красным цветами — зависимости, отвечающие пограничному слою над вогнутой пластиной при различных значениях параметра l_B . Видно, что при $x \leq 750$ мм зависимости для течения над вогнутой пластиной слабо отличаются от линейных, как это и должно быть в случае пограничного слоя, близкого к автомодельному.

На рис. 13 слева приведена зависимость отношения толщин вытеснения и потери импульса (так называемый формпараметр пограничного слоя) от x , а справа приведена зависимость от x обезразмеренного пристенного

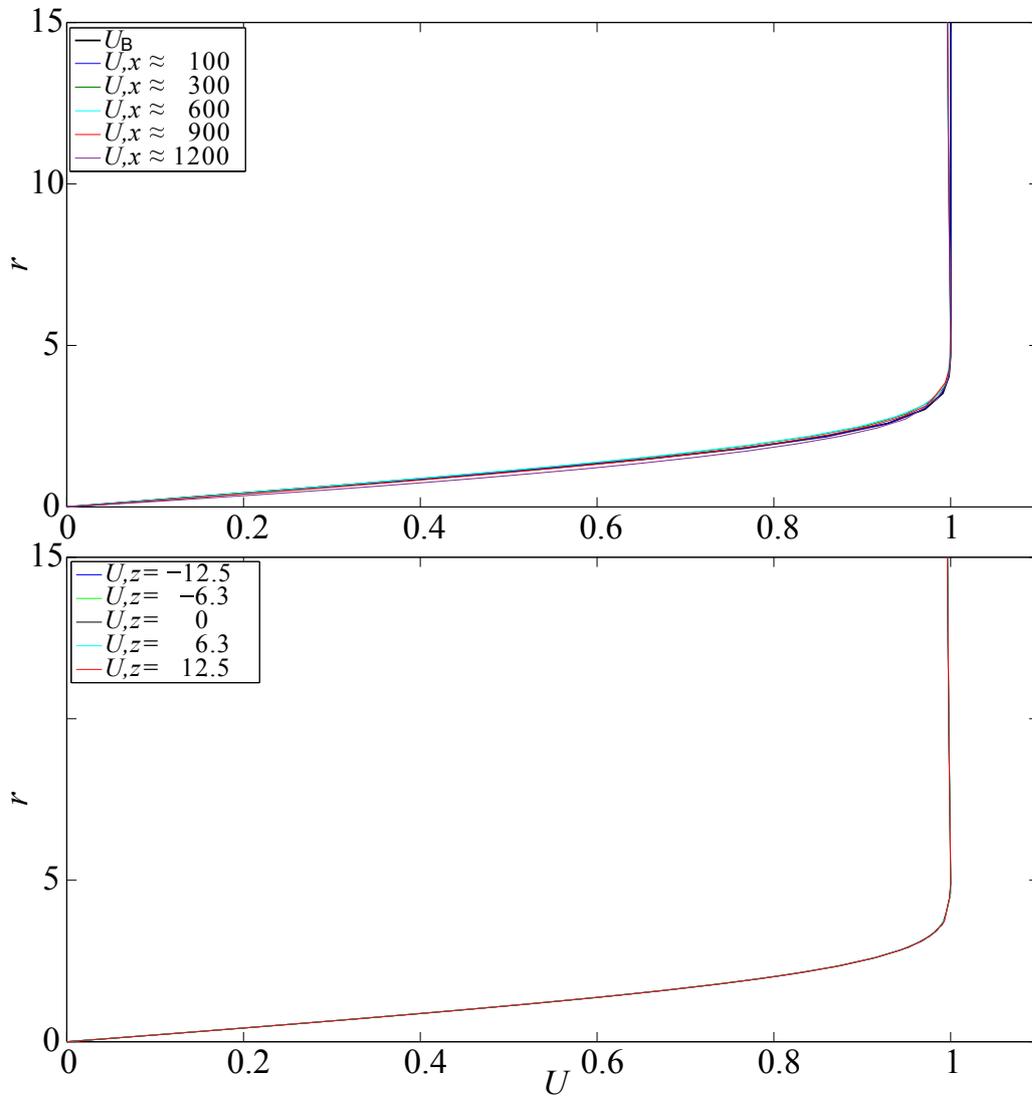


Рис. 11: Сверху — зависимости профиля U продольной компоненты скорости (вдоль поверхности пластины) от автомодельной переменной r при $z = 0$ и различных значениях x , мм. Снизу — зависимости профиля U продольной компоненты скорости (вдоль поверхности пластины) от автомодельной переменной r при $x \approx 700$ мм и различных значениях z , мм.

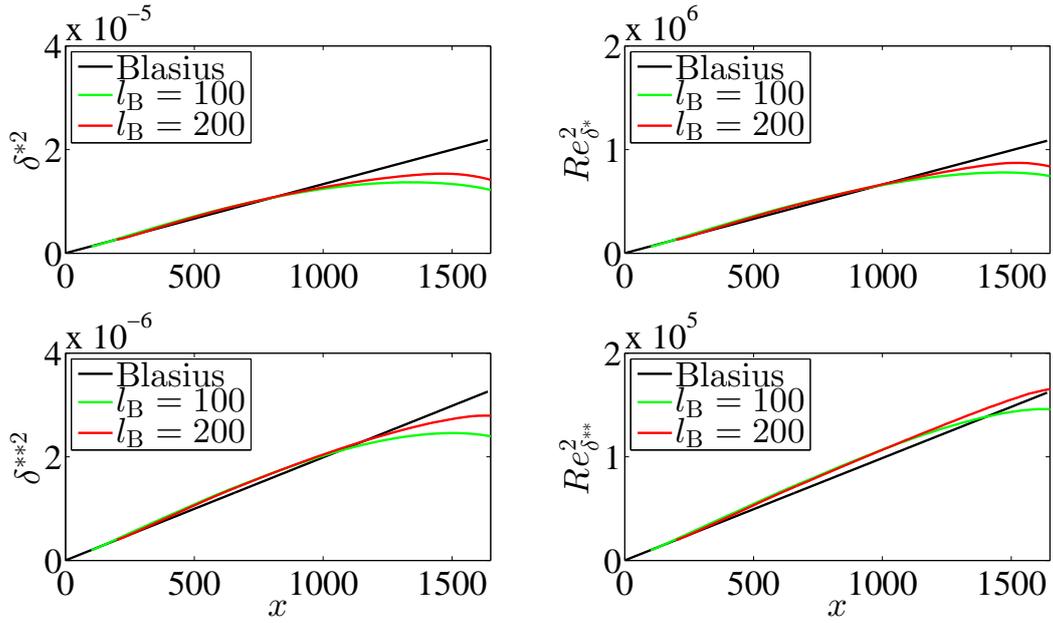


Рис. 12: Слева — зависимости от x квадратов толщин вытеснения δ^* и потери импульса δ^{**} . Справа — вычисленные на основе δ^* и δ^{**} зависимости от x квадратов чисел Рейнольдса Re_{δ^*} и $Re_{\delta^{**}}$ соответственно.

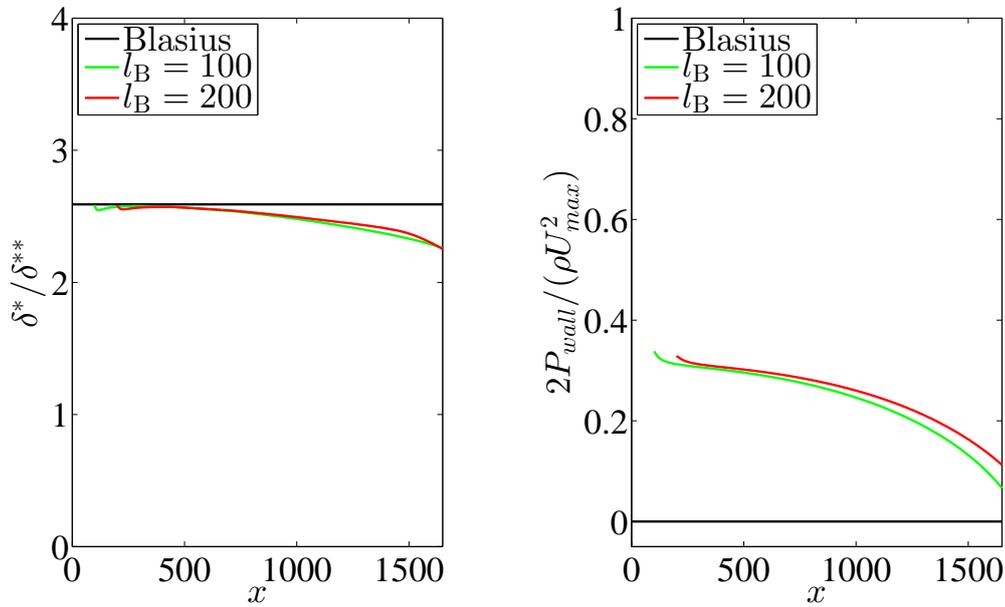


Рис. 13: Слева — отношение толщины вытеснения к толщине потери импульса. Справа — безразмерное пристенное давление.

(ненормализованного) давления. Видно, что величина формпараметра начинает заметно отличаться от величины 2.59, характерной для пограничного слоя Блазиуса, начиная с $x \approx 0.6$ мм, причем увеличение в два раза величины l_B не меняет заметно область над пластиной, где значение формпараметра близко к 2.59.

Таким образом, использование расчетной области без буферных зон позволяет получить течение, близкое к автомодельному на значительном участке над криволинейной поверхностью. Корректируя форму верхней стенки и граничные условия на ней, а также размер расчетной области, этот участок, по всей видимости, можно будет сделать более протяженным. В то же время дальнейшее увеличение параметра l_B вряд ли будет оправдано.

4.3. Моделирование контролируемых возмущений

Для прямого численного моделирования рассматриваемого трубного эксперимента наряду с адекватным моделированием основного течения необходимо адекватно моделировать генерацию возмущений источником, представляющим собой прямоугольную часть обтекаемой поверхности (мембрану), точки которой колеблются гармонически по времени в вертикальном направлении по закону (2). В соответствии с этим расчетную область (см. рис. 9) целесообразно выбирать толщины 8 либо 12 мм, равной длине волны $\lambda_z = 2\pi/\beta$ колебаний мембраны в поперечном направлении, и ставить на боковых стенках периодические граничные условия.

Имеется масса работ, в которых малые колебания поверхности моделируются линеаризованными граничными условиями, подобными тем, какие были использованы в третьем разделе для моделирования с помощью параболизированных уравнений, но вопросы адекватности такого подхода проработаны мало. Среди работ, посвященных моделированию малых возмущений поверхности линеаризованными граничными условиями, следует отметить

— классические работы Бенджамина [15, 37, 38, 39], где (по-видимому, впервые) возмущения поверхности предлагается моделировать линеаризованными граничными условиями;

— работу [16], где на pp. 346-347 обсуждаются линеаризованные граничные условия для стационарного случая гёртлеровской неустойчивости;

— работу [40], где этот подход также применяется и делается попытка проанализировать его адекватность.

Детальное сравнение моделирования с помощью линеаризованных граничных условий с физическим экспериментом практически отсутствует. Поэтому представляется оправданным для начала попробовать моделировать рассматриваемый источник возмущений линеаризованными граничными ус-

ловиями, которые в данном случае будут иметь следующий вид (в криволинейных координатах):

$$\begin{aligned} u(x, 0, z, t) &= -\frac{\partial U}{\partial y}(x, 0)H_{\beta\omega}(x)\cos(\beta z - \omega t), \\ v(x, 0, z, t) &= \omega H_{\beta\omega}(x)\sin(\beta z - \omega t), \\ w(x, 0, z, t) &= 0. \end{aligned}$$

Для нелинейного моделирования источника можно использовать один из трех следующих подходов.

Физическое смещение граничных узлов, используя обобщенную лагранжево-эйлерову формулировку уравнений Навье-Стокса. Поскольку источник очень мал в продольном направлении, мы должны будем моделировать возмущения, решая локальные задачи на подсетке и передавая силы/потоки в решатель на основной сетке. Это выполнимо, но потребует серьезных изменений в коде пакета FEATFLOW.

Использование пристеночных функций для получения естественных (поточкового типа) граничных условий в области источника для вариационной формулировки уравнений Навье-Стокса.

Моделирование источника путем добавления дополнительных членов в уравнение неразрывности в граничные элементы. Дивергенция поля скорости описывается изменением объема. Движение мембраны изменяет объем ячеек сетки, примыкающих к источнику. Вместо перемещения узлов сетки и пересчета элементов матриц конечно-элементной дискретизации можно ввести члены, описывающие соответствующее изменение объема и его влияние на движение потока путем "вдува" или "отсоса" жидкости в/от границы ячеек.

5. Заключение

Главной проблемой прямого численного моделирования трубных экспериментов в рамках пакета FEATFLOW является отсутствие какой-либо стабилизации в основанной на элементах высокого порядка версии этого пакета, которая использовалась для получения описанных в предыдущем разделе результатов, и использование стабилизации низкого порядка в стандартной версии пакета на основе элементов невысокого порядка, предложенных в работе [41]. Для охвата достаточно высоких чисел Рейнольдса и повышения надежности необходимо разработать и внедрить операторы стабилизации высокого порядка, чтобы исключать паразитные колебания, оставляя физические возмущения, которые мы хотим моделировать. Это

основная математическая проблема, которую необходимо решить для создания новой ветви пакета FEATFLOW, предназначенной для трехмерного численного моделирования экспериментов, проводимых в малотурбулентных аэродинамических трубах по исследованию устойчивости дозвуковых ламинарных сдвиговых течений. Кроме того, будет необходимо:

— реализовать периодические граничные условия в поперечном направлении;

— реализовать условия проскальзывания на искривленных поверхностях, что позволило бы сократить вычислительные затраты при использовании искривленной верхней стенки расчетной области для исключения "поджатия";

— ответить на вопрос, как используемые в настоящее время условия на выходе влияют на течение в пограничном слое, и подумать о более адекватных условиях, например, предложенных в работе [42];

— разработать и реализовать модели источника, основанные на подходах, описанных в разделе 4.3.

Список литературы

- [1] *Ivanov A. V., Kachanov Y. S., Mischenko D. A.* Excitation of unsteady Görtler vortices by surface non-uniformities. // Euromech Fluid Mechanics Conference – 8 (EFMC-8), September 13–16, 2010, Bad-Reichenhall, Germany. Abstracts. P. S4–12.
- [2] *Ivanov A. V., Kachanov Y. S., Mischenko D. A.* Generation of nonstationary Görtler vortices by localized surface nonuniformities. receptivity coefficients. // Thermophys. Aeromech. 2012. Vol. 19, No. 4, P. 523–539.
- [3] *Boiko A. V., Ivanov A. V., Kachanov Y. S., Mischenko D. A., Nechepurenko Y. M.* Excitation of unsteady Goertler vortices by localized surface nonuniformities. // Theor. Comput. Fluid Dyn. (submitted in 2015).
- [4] *Drazin P. G., Reid W. H.* Hydrodynamic Stability. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 628 p.
- [5] *Floryan J. M.* On the Görtler instability of boundary layers. // J. Aerosp. Sci. 1991. Vol. 28. P. 235–271.
- [6] *Floryan J. M., Saric W. S.* Stability of Görtler vortices in boundary layers. // AIAA J. 1982. Vol. 20, No. 3. P. 316–324.

- [7] *Hall P.* Görtler vortices in growing boundary layers: The leading edge receptivity problem, linear growth and the nonlinear breakdown stage. // *Mathematika*. 1990. Vol. 37. P. 151–189.
- [8] *Saric W. S.* Görtler vortices. // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1994. Vol. 26. P. 379–409.
- [9] *Finnis M. V., Brown A.* The linear growth of Görtler vortices. // *Intern. J. Heat Fluid Flow*. 1997. Vol. 18, No. 4. P. 389–399.
- [10] *Bippes H., Görtler H.* Dreidimensionale Störungen in der Grenzschicht an einer konkaven Wand. // *Acta Mech.* 1972. Vol. 14. P. 251–267.
- [11] *Boiko A. V., Ivanov A. V., Kachanov Y. S., Mischenko D. A.* Steady and unsteady Görtler boundary-layer instability on concave wall. // *Eur. J. Mech. – B/Fluids*. 2010. Vol. 29, No. 2. P. 61–83.
- [12] *Murphy J. S.* Extensions of the Falkner–Skan similar solutions to flows with surface curvature. // *AIAA J.* 1965. Vol. 3, No. 11. P. 2043–2049.
- [13] *Schlichting H., Gersten K.* Boundary layer theory, 8 edn. Berlin: Springer-Verlag, 2000. 800 p.
- [14] *Hall P.* The linear development of Görtler vortices in growing boundary layers. // *J. Fluid Mech.* 1983. Vol. 130. P. 41–58.
- [15] *Benjamin T. B.* Shearing flow over a wavy boundary. // *J. Fluid Mech.* 1959. Vol. 6, No. 2. P. 161–205. DOI: 10.1017/S0022112059000568.
- [16] *Bottaro A., Zebib A.* Görtler vortices promoted by wall roughness. // *Fluid. Dyn. Res.* 1997. Vol. 19, No. 6. P. 343–362.
- [17] *Yeo K. S.* The stability of boundary-layer flow over single-and multi-layer viscoelastic walls. // *J. Fluid Mech.* 1988. Vol. 196. P. 359–408.
- [18] *Gaurav, Shankar V.* Stability of pressure-driven flow in a deformable neo-Hookean channel. // *J. Fluid Mech.* 2010. Vol. 659. P. 318–350.
- [19] *Hoepffner J., Bottaro A., Favier J.* Mechanisms of non-modal energy amplification in channel flow between compliant walls. // *J. Fluid Mech.* 2010. Vol. 642. P. 489–507.
- [20] *Tempelmann D., Schrader L. U., Hanifi A., Brandt L., Henningson D. S.* Swept wing boundary-layer receptivity to localized surface roughness. // *J. Fluid Mech.* 2012. Vol. 711. P. 516–544.

- [21] *Luchini P.* Linearized no-slip boundary conditions at a rough surface. // J. Fluid Mech. 2013. Vol. 737. P. 349–367.
- [22] *Weideman J. A. C., Reddy S. C.* A MATLAB differentiation matrix suite. // ACM Trans. Math. Software. 2000. Vol. 26, No. 4. P. 465–519.
- [23] *Tannehill J. C., Anderson D. A., Pletcher R. H.* Computational fluid mechanics and heat transfer, 3 edn. Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences. CRC Press, 2012. 774 p.
- [24] *Kierzenka J., Shampine L. F.* A BVP solver based on residual control and the Matlab PSE. // ACM TOMS. 2001. Vol. 27, No. 3. P. 299–316.
- [25] *Shampine L.F., Gladwell I., Thompson S.* Solving ODEs with MATLAB. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 263 p.
- [26] *Boiko A. V., Nechepurenko Y. M.* Numerical spectral analysis of temporal stability of laminar duct flows with constant cross-sections. // Comput. Math. Math. Phys. 2008. Vol. 48, No. 10. P. 1699–1714.
- [27] *Nechepurenko Y. M.* On the dimension reduction of linear differential-algebraic control systems. // Doklady Math. 2012. Vol. 86, No. 1. P. 457–459.
- [28] *Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G.* Solving ordinary differential equations I: Nonstiff Problems, 2 edn. Berlin: Springer–Verlag, 2008. 528 p.
- [29] *Schrader L.-U., Brandt L., Zaki T. A.* Receptivity, instability and breakdown of Görtler flow. // J. Fluid Mech. 2011. Vol. 682. P. 362–396.
- [30] *Turek S., Becker Chr.* Finite element software for the incompressible Navier-Stokes equations. User manual. Release 1.1. Heidelberg: Heidelberg University, 1998. 72 p.
- [31] *Turek S.* Efficient solvers for incompressible flow problems: An algorithmic approach in view of computational aspects. LNCSE 2. Springer-Verlag, 1998.
- [32] *Kuzmin D., Hämäläinen J.* Finite Element Methods for Computational Fluid Dynamics: A Practical Guide. SIAM, Philadelphia, 2014. 313 p.
- [33] *Turek S., Kuzmin D.* Algebraic flux correction III. Incompressible flow problems. In: D. Kuzmin, R. Löhner and S. Turek (eds.) Flux-Corrected Transport: Principles, Algorithms, and Applications. 2nd edition. Springer Berlin Heidelberg, 2012. P. 251-296.

- [34] *Davis T. A.* UMFPACK Version 5.3.0 User Guide. Gainesville: University of Florida, 2011. 140 p.
- [35] *Davis T. A., Duff I. S.* An unsymmetric-pattern multifrontal method for sparse LU factorization. // SIAM J. Matrix Anal. Applic. 1997. Vol. 18, No. 1. P. 140–158.
- [36] *Davis T. A., Duff I. S.* A combined unifrontal/multifrontal method for unsymmetric sparse matrices. ACM Trans. Math. Softw. 1999. Vol. 25, No. 1. P. 1–19.
- [37] *Benjamin T. B.* Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability. // J. Fluid Mech. 1960. Vol. 9, No. 4. P. 513–532.
- [38] *Benjamin T. B.* The development of three-dimensional disturbances in an unstable film of liquid flowing down an inclined plane. // J. Fluid Mech. 1961. Vol. 10, No. 3. P. 401–419.
- [39] *Benjamin T. B.* The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows. // J. Fluid Mech. 1963. Vol. 16, No. 3. P. 436–450.
- [40] *Voropayev G. A., Zagumennyi I. V.* Wave and vortex structure of the transitional boundary layer over a deformable surface. // Phys. Scripta. 2010. Vol. 2010, No. 142. P. 1–9.
- [41] *Rannacher R., Turek S.* A simple nonconforming quadrilateral Stokes element. // Numer. Meth. Part. Diff. Equ. 1992. Vol. 8, P. 97–111.
- [42] *Braack M., Mucha P.B.* Directional do-nothing condition for the Navier-Stokes equations. // J. Comput. Math. 2014. Vol. 32, No. 5. P. 507–521.

Содержание

1. Введение	3
2. Эксперимент в аэродинамической трубе	4
2.1 Экспериментальная модель	5
2.2 Источник возмущений	7
2.3 Характеристики пограничного слоя	9
2.4 Возбуждаемые контролируемые возмущения	9
3. Моделирование на основе параболизированных уравнений	13
3.1 Теоретическая модель	13
3.2 Численная модель	17
3.3 Сравнение с экспериментом	19
4. Прямое численное моделирование	22
4.1 Пакет FEATFLOW	22
4.2 Моделирование основного течения	25
4.3 Моделирование контролируемых возмущений	31
5. Заключение	32
Список литературы	33