



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Долголева Г.В., Легкоступов М.С.,  
Плинер Л.А.

Численное моделирование  
гравитационной  
неустойчивости  
протопланетного диска  
Солнца в одномерном  
приближении. Часть I.  
Однородная изотропная  
среда

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Долголева Г.В., Легкоступов М.С., Плинер Л.А. Численное моделирование гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца в одномерном приближении. Часть I. Однородная изотропная среда // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 49. 44 с. doi:[10.20948/prepr-2016-49](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-49)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-49>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**Г.В. Долголева, М.С. Легкоступов, Л.А. Плинер**

**Численное моделирование  
гравитационной неустойчивости  
протопланетного диска Солнца  
в одномерном приближении.  
Часть I. Однородная изотропная среда**

**Москва — 2016**

*Долголева Г.В., Легкоступов М.С., Плинер Л.А.*

**Численное моделирование гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца в одномерном приближении. Часть I. Однородная изотропная среда**

Рассмотрены аналитические и численные решения уравнений движения однородной изотропной бесконечной гравитирующей газовой среды в двух приближениях: «холодного» газа и газа при конечной температуре.

Получены действительные решения, описывающие поведение как волновых возмущений плотности однородной среды, так и одиночных возмущений. Волны гравитационной неустойчивости, амплитуда которых растет экспоненциально, а максимумы и минимумы этой волны, как и ее узловые точки, сохраняют свое положение в пространстве, следуют основным закономерностям модели Джинса. Авторы интерпретируют эти волновые неустойчивости как аналог протопланетных колец, которые могут образовываться в протопланетных дисках.

Согласно результатам численных расчетов реакция однородной гравитирующей среды на локализованные (одиночные) начальные возмущения ее плотности существенно отличается от закономерностей модели Джинса. Неустойчивость локализованных начальных возмущений распространяется и на область  $\lambda < \lambda_J$ , хотя в этом случае нарастание плотности возмущений существенно меньше, чем при  $\lambda > \lambda_J$ .

Установлено подавление звука гравитационными неустойчивостями в области  $\lambda > \lambda_J$ .

Показано, что без учета вращения среды протопланетного диска Солнца его критическая плотность при возникновении крупномасштабной гравитационной неустойчивости примерно на четыре порядка меньше критической плотности, полученной в рамках теории образования планет путем аккумуляции твердых тел и частиц.

**Ключевые слова:** однородная изотропная газовая среда, гравитационная неустойчивость, дисперсионное уравнение, звуковая волна, волна гравитационной неустойчивости

*Galina Vladimirovna Dolgoleva, Mikhail Semenovich Legkostupov, Lyudmila Arkadjevna Pliner*

**Numerical simulation of gravitational instability of the Sun protoplanetary disk in the one-dimensional approximation. Part I. A homogeneous isotropic medium**

There were considered the analytical and numerical solutions of the motion equations of a homogeneous isotropic infinite gravitating gaseous medium in two approximations: "cold" gas and gas at the final temperature.

There were obtained real solutions, describing the behavior of homogeneous medium wave disturbances, and single disturbances. Waves of gravitational instability, the amplitude of which is growing exponentially, and the highs and lows of this wave, as well as its nodal points, retain its position in space, follow the basic laws of Jeans model. The authors interpret this wave of instability as an analogue protoplanetary rings that can be formed in protoplanetary disks.

According to the results of numerical calculations homogeneous gravitating medium reaction to the initial localized (single) perturbation of its density is significantly different from the laws of Jeans model. Instability localized initial perturbations extends to the region  $\lambda < \lambda_J$ , although in this case the growth of density perturbations is considerably less than when  $\lambda < \lambda_J$ .

It was found that the gravitational instability in the region  $\lambda < \lambda_J$  suppress sound.

It is shown that without taking into account the rotation of the medium of the Sun protoplanetary disk its critical density in the event of a large-scale gravitational instability to four orders of magnitude is less than the critical density, obtained in the framework of the theory of formation of planets by accumulation of solids and particles.

**Key words:** homogeneous isotropic gas medium, gravitational instability, dispersion equation, the sound wave, the wave of the gravitational instability

Работа выполнена по Программе фундаментальных исследований Президиума РАН № 30.

## Оглавление

Введение .....	5
1. Гравитационная неустойчивость однородной изотропной среды .....	6
2. Гравитационная неустойчивость однородной изотропной «холодной» среды .....	8
3. Гравитационная неустойчивость однородной изотропной среды при конечной температуре .....	9
4. Методика численного расчета уравнений однородной изотропной среды .....	14
5. Результаты численных расчетов гравитационной неустойчивости для однородной изотропной «холодной» среды .....	15
6. Результаты численных расчетов гравитационной неустойчивости для однородной изотропной среды при конечной температуре .....	20
7. Анализ и обсуждение результатов исследований .....	36
Заключение .....	41
Библиографический список .....	43

## Введение

Работа «Численное моделирование гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца в одномерном приближении» написана в трех частях и оформлена в виде трех препринтов: «Численное моделирование гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца в одномерном приближении. Часть I. Однородная изотропная среда», «Численное моделирование гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца в одномерном приближении. Часть II. Однородная среда с вращением», «Численное моделирование гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца в одномерном приближении. Часть III. Протопланетный диск Солнца».

Проблема гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции остается по-прежнему актуальной. Это объясняется тем, что гравитационная неустойчивость протопланетного диска на начальной стадии его эволюции может привести к образованию протопланет. Данное обстоятельство способно существенно изменить установившуюся картину наших представлений об образовании как в целом планетной системы Солнца, так и спутников планет [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Конечная цель данного цикла работ – установить, при каких условиях на начальной стадии эволюции протопланетного диска Солнца возможно образование гравитационной неустойчивости в виде протопланетных колец.

Чтобы в гравитирующей среде реализовалась гравитационная неустойчивость, необходимо воздействие возмущения на эту среду. Так для протопланетного диска Солнца В.Л. Поляченко и А.М. Фридман [1] предложили взять возмущенную (поверхностную) плотность диска в виде волны:

$$\sigma_1(r) = \sigma_{o,1}(r) \exp\left(ia \ln \frac{r-r_m}{c}\right), \quad (1)$$

где

$\sigma_{o,1}(r)$  – медленно меняющаяся с радиусом амплитуда возмущенной (поверхностной) плотности;

$$\begin{aligned} a &= 2\pi/\ln 2, \\ r_m &= 0.4 \text{ а.е.}, \\ c &= 0.3 \text{ а.е.} \end{aligned} \quad (2)$$

Эта волна при определенных условиях может привести к образованию протопланетных колец, которые соответствуют зонам планет [7]. В дальнейшем в рамках этой модели из протопланетных колец образуются протопланеты.

В рассматриваемых гравитирующих средах нас будет интересовать поведение возмущений плотности разных типов, в том числе и в виде волн плотности.

Как известно [8, 9], межзвездную среду протопланетного диска Солнца с достаточной точностью можно представить как однокомпонентный идеальный газ. Для такой среды и были получены основные результаты в теории гравитационной неустойчивости. В дальнейшем мы будем пользоваться результатами обзора работ, представленного в работе [5].

Исследования, результаты которых излагаются в настоящих препринтах, являются продолжением работ, опубликованных в [5, 6, 7]. Но, в отличие от этих публикаций, в представляемых работах основное внимание уделено численному моделированию гравитационной неустойчивости, что позволяет более детально рассмотреть возникновение и динамику развития этого явления. Исследования проводились в направлении от простых гравитирующих систем к более сложным, что дает возможность проследить за общими характерными закономерностями гравитирующих систем и их различиями.

Наше рассмотрение мы начнем с наиболее простой гравитирующей системы. Такой системой является бесконечная по всем направлениям однородная среда, которая была исследована на устойчивость в классической работе Джинса [10]. Исходя из однородности и изотропии такой среды, Джинс сделал предположение, что гравитационная сила в любой точке этой среды равна нулю и система стационарна.

Следует отметить, что эти предположения Джинса в действительности не являются корректными, так как однородная бесконечная гравитирующая среда обязана быть нестационарной [11]. Поэтому, строго говоря, задача о гравитационной неустойчивости бесконечной гравитирующей среды должна решаться на нестационарном фоне [12, 13]. Тем не менее основные качественные выводы, полученные Джинсом, и при точном рассмотрении неустойчивости сжимающегося или расширяющегося однородного мира оказываются справедливыми. По этой причине в наших рассмотрениях однородной гравитирующей среды мы будем следовать традиционному подходу Джинса.

### 1. Гравитационная неустойчивость однородной изотропной среды

Система уравнений газодинамики с учетом гравитации записывается в виде [14, 15, 16, 2]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\operatorname{grad} p + \rho \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}[(p + e) \vec{U}] = \rho \vec{U} \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad (1.3)$$

$$e = \rho(\varepsilon + \frac{1}{2}\vec{U} \cdot \vec{U}), \quad (1.4)$$

$$p = p(\rho, \varepsilon). \quad (1.5)$$

Внутри среды имеет место уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \Delta \varphi = -4\pi G \rho, \quad (1.6)$$

где

$\rho(\vec{r}, t)$  – плотность газовой среды;  $p(\vec{r}, t)$  – давление газовой среды;

$e = \rho(\varepsilon + \frac{1}{2}\vec{U} \cdot \vec{U})$  – энергия единицы объема газовой среды;

$p = p(\rho, \varepsilon)$  – уравнение состояния газовой среды;

$\vec{U}(\vec{r}, t)$  – вектор скорости;

$\varepsilon(\vec{r}, t)$  – внутренняя энергия единицы массы газовой среды;

$\varphi(\vec{r}, t)$  – гравитационный потенциал.

Допустим, что в некоторый момент времени однородная среда, до этого находившаяся в равновесном состоянии, каким-либо способом выведена из этого состояния. Тогда в последующие моменты времени она будет описываться функциями  $\rho$ ,  $\vec{U}$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $\varphi$ , которые можно представить в виде:

$$\rho = \rho_o + \rho_\Delta, \quad \vec{U} = \vec{U}_o + \vec{U}_\Delta, \quad p = p_o + p_\Delta, \quad e = e_o + e_\Delta, \quad \varphi = \varphi_o + \varphi_\Delta, \quad (1.7)$$

где

индексом "о" обозначено начальное состояние, относительно которого происходит разложение;

$\rho_\Delta(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{U}_\Delta(\vec{r}, t)$ ,  $p_\Delta(\vec{r}, t)$ ,  $e_\Delta(\vec{r}, t)$ ,  $\varphi_\Delta(\vec{r}, t)$  – малые величины;  $\vec{U}_o = 0$ ;

$\rho_o$ ,  $p_o$ ,  $e_o$ ,  $\varphi_o$  – постоянные величины.

Проведем линеаризацию уравнений (1.1), (1.2), подставляя в них выражения (1.7) и принимая во внимание однородность и равновесность среды в начальном состоянии:

$$\frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t} + \rho_o \operatorname{div}(\vec{U}_\Delta) = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \vec{U}_\Delta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_o} \operatorname{grad} p_\Delta + \operatorname{grad} \varphi_\Delta. \quad (1.9)$$

Применим операцию  $\operatorname{div}$  к уравнению (1.9). Учитывая, что

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi_\Delta) \equiv \nabla^2 \varphi_\Delta = -4\pi G \rho_\Delta, \quad (1.10)$$

и используя уравнение (1.8), получаем:



$$\frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} p_{\Delta}) + \omega_J^2 \rho_{\Delta}, \quad (1.11)$$

где

$$\omega_J^2 = 4\pi G \rho_o \quad (1.12)$$

есть частота Джинса.

Отметим одну особенность уравнения (1.11), которое описывает возмущенное состояние среды. В этом случае у нас нет уравнений, которые позволяли бы рассчитать характеристики основного состояния гравитирующей среды. Основное состояние гравитирующей среды не рассчитывается, а задается одним коэффициентом  $\omega_J$ , в который входит гравитационная постоянная ( $G$ ) и плотность среды ( $\rho_o$ ). Если оценки параметров основного состояния среды, в том числе и его равновесность, сделаны некорректно, как это было в случае исследований Джинса, то уравнение (1.11) все равно будет работать, «не заметив» эту ошибку. Это обстоятельство в какой-то мере объясняет «природу» парадокса Джинса.

## 2. Гравитационная неустойчивость однородной изотропной «холодной» среды

Допустим, что однородная изотропная бесконечная газовая среда является «холодной» ( $T \rightarrow 0^0\text{K}$ ). Тогда давлением среды можно пренебречь и уравнение (1.11) преобразуется в уравнение:

$$\frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial t^2} = \omega_J^2 \rho_{\Delta}. \quad (2.1)$$

Одним из частных решений этого уравнения является решение:

$$\rho_{\Delta} = \rho_{\Delta,o}(\vec{r}) \cdot e^{\omega_J t}, \quad (2.2)$$

где

$\rho_{\Delta,o}(\vec{r})$  – начальное возмущение плотности среды.

Решение (2.2) описывает главную неустойчивость гравитирующей среды, которая была впервые введена Джинсом.

Обычно решение (2.2) получают, предполагая, что оно имеет вид:

$$\rho_{\Delta} = \rho_{\Delta,o}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}, \quad (2.3)$$

где

$\omega$  – константа.

Подставляя решение (2.3) в уравнение (2.1), находят дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = -\omega_J^2. \quad (2.4)$$

Один из корней дисперсионного уравнения приводит к решению (2.2).

В дальнейшем для большей наглядности и простоты представления результатов будет рассмотрено поведение однородной изотропной гравитирующей среды при плоских начальных возмущениях ее плотности. Для этого вместо вектора  $\vec{r}$  введем координату  $x$ , в направлении которой будет изменяться плотность начального возмущения. Рассмотрение однородной среды проведем, используя уравнение (2.1), приведя его к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^2 \rho_{\Delta, \text{безр}}}{\partial t_{\text{безр}}^2} = \rho_{\Delta, \text{безр}}, \quad (2.5)$$

где

$$\rho_{\Delta, \text{безр}} = \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_o}, \quad \omega_{J, \text{безр}} = 1, \quad t_{\text{безр}} = \omega_J \cdot t.$$

Бесконечная однородная среда не имеет характерного параметра длины конечной величины. В этой работе будут рассматриваться объекты порядка размеров протопланетного диска Солнца. Поэтому без потери общности рассмотрения можно ввести параметр длины обезразмеривания, равный  $r_{ex}$  – внешнему радиусу протопланетного диска Солнца. При этих условиях

$$\text{имеем: } x_{\text{безр}} = \frac{x}{r_{ex}}.$$

### 3. Гравитационная неустойчивость однородной изотропной среды при конечной температуре

1. Допустим, что однородная изотропная бесконечная газовая среда находится при конечной температуре ( $T \neq 0^0\text{K}$ ). Как и прежде, рассматриваются плоские возмущения плотности. Тогда уравнение (1.11) преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_{\Delta}}{\partial x^2} + \omega_J^2 \rho_{\Delta}. \quad (3.1)$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial t^2} = C_o^2 \frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial x^2} + \omega_J^2 \rho_{\Delta}, \quad (3.2)$$

где

$$C_o = \left. \frac{\partial p_o}{\partial \rho_o} \right|_s \text{ – скорость звука в невозмущенной газовой среде.}$$

Будем искать решение в виде:

$$\rho_{\Delta} = \rho_{\Delta, o} e^{-i\omega t} e^{ikx}, \quad (3.3)$$

где

$\omega$  и  $k$  – константы;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  – длина волны возмущения плотности.

Подставляя решение (3.3) в уравнение (3.2) и производя соответствующие выкладки, получаем известное дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = -\omega_J^2 + C_o^2 k^2, \quad (3.4)$$

из которого находится критическая длина волны Джинса:

$$\lambda_J = C_o \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_o}}. \quad (3.5)$$

Для последующих вычислений введем безразмерные переменные и с помощью их преобразуем уравнение (3.2):

$$\rho_{\Delta, безр} = \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_o}, \quad (3.6)$$

$$t_{безр} = \omega_J t, \quad (3.7)$$

$$x_{безр} = \frac{x}{r_{ex}}, \quad (3.8)$$

$$\omega_{безр} = \frac{\omega}{\omega_J}, \quad (3.9)$$

$$\lambda_{безр} = \frac{\lambda}{r_{ex}}, \quad (3.10)$$

$$\frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{ex}^2} - \text{безразмерная константа}. \quad (3.11)$$

С учетом введенных безразмерных переменных уравнение (3.2) запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \rho_{\Delta, безр}}{\partial t_{безр}^2} = \frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{ex}^2} \frac{\partial^2 \rho_{\Delta, безр}}{\partial x_{безр}^2} + \rho_{\Delta, безр}. \quad (3.12)$$

В теории образования планетной системы Солнца существует гипотеза происхождения планет из первоначально образовавшихся в результате гравитационной неустойчивости протопланетных колец [8, 17, 1, 3, 5, 6, 7]. Например, в работе [2] так описывается этот процесс: «нарастающие со временем кольцеобразные возмущения плотности диска располагаются в нем согласно закону Тициуса-Бодде». Если это соответствует действительности, то в однородной среде тоже должно наблюдаться подобное явление (за исключением реализации закона Тициуса-Бодде). Исследуем возможность образования гравитационной неустойчивости в однородной среде в виде волны,

ориентируясь на рассмотренную в работах [1, 2] гравитационную неустойчивость волнового процесса в протопланетном диске. Ясно, что в нашем случае аналогом протопланетных колец может быть только гравитационная неустойчивость в виде волны с нулевой фазовой скоростью. Для того чтобы рассматривать процессы в реальном времени и пространстве, необходимо получить действительные решения уравнения (3.12).

Нетрудно видеть, что частное решение уравнения (3.12)

$$\rho_{\Delta, \delta_{\text{езр}}} = C_1 \cdot e^{\omega_{\text{безр}} t_{\text{безр}}} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{безр}}} x_{\delta_{\text{езр}}} + C_2\right) \right] \quad (3.13)$$

обладает необходимыми свойствами для описания гравитационной неустойчивости однородной среды. Действительно, используя решение (3.13), зададим начальное возмущение на отрезке  $0 \leq x_{\delta_{\text{езр}}} \leq 1$  бесконечного однородного пространства в виде синусоидальной волны с числом максимумов, равным числу планет Солнечной системы (восемь планет и Пояс Астероидов). Из этих предпосылок следует, что

$$\lambda_{\delta_{\text{езр}}} = \frac{\lambda}{r_{\text{ex}}} = \frac{1}{9}, \quad (3.14)$$

$$C_2 = \pi. \quad (3.15)$$

Подставляя выражение (3.13) в уравнение (3.12), находим:

$$\omega_{\text{безр}}^2 = -\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{безр}}}\right)^2 \frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{\text{ex}}^2} + 1. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) является дисперсионным уравнением. Если в этом уравнении перейти к размерным переменным, используя соотношения (3.6) – (3.11), то получим дисперсионное уравнение в виде:

$$\omega^2 = -C_o^2 k^2 + \omega_J^2. \quad (3.17)$$

Как видно, уравнение (3.17) совпадает с общеизвестным уравнением (3.4) с точностью до знака правой части. Это связано с тем, что начальное возмущение в общепринятом случае задается в виде (3.3), а в нашем анализе – в соответствии с формулой (3.13). Вывод о том, что вид дисперсионного уравнения зависит от параметров начального возмущения, был сделан ранее в работе [6].

Как известно [2], при  $\omega = 0$  длина волны возмущения в формуле (3.17) соответствует критической длине волны Джинса ( $\lambda_J$ ). Это же утверждение справедливо и для дисперсионного уравнения (3.16). Полагая в уравнении (3.16)  $\omega = 0$ , получаем критическую длину волны Джинса в виде:

$$\lambda_{J,безр} = 2\pi \frac{C_o}{\omega_J r_{ex}}. \quad (3.18)$$

Естественно, переходя к размерным величинам, это выражение преобразуется в известную формулу:

$$\lambda_J = C_o \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_o}}. \quad (3.19)$$

Используя выражение (3.18), преобразуем уравнение (3.16) следующим образом:

$$\omega_{безр}^2 = -\frac{\lambda_{J,безр}^2}{\lambda_{безр}^2} + 1. \quad (3.20)$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\omega_{безр}^2 > 0, \text{ если } \lambda_{безр} > \lambda_{J,безр}; \quad (3.21)$$

$$\omega_{безр}^2 = 0, \text{ если } \lambda_{безр} = \lambda_{J,безр}; \quad (3.22)$$

$$\omega_{безр}^2 < 0, \text{ если } \lambda_{безр} < \lambda_{J,безр}. \quad (3.23)$$

Таким образом, гравитационная неустойчивость в виде волнового процесса в однородной изотропной среде возможна только при  $\lambda_{безр} > \lambda_{J,безр}$ , как это и следует из модели Джинса. При этом критическая длина волны Джинса ( $\lambda_{J,безр}$ ) разделяет диапазоны устойчивых ( $\lambda_{безр} < \lambda_{J,безр}$ ) и неустойчивых ( $\lambda_{безр} > \lambda_{J,безр}$ ) возмущений изотропной среды.

Все константы в уравнении (3.13) определяются, если, кроме уже заданных параметров, задать коэффициент  $C_1$ . При этом  $\lambda_{J,безр}$  находится через коэффициент  $\frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{ex}^2}$  по формуле (3.18).

Итак, решение (3.13) полностью определено и при  $\lambda_{безр} > \lambda_{J,безр}$  представляет собой экспоненциально возрастающую по амплитуде волну, т.е. описывает гравитационную неустойчивость однородной изотропной среды. Данная волна обладает характерными особенностями: максимумы и минимумы этой волны сохраняют свое положение в пространстве. Чтобы отличить эту волну от других типов волн, которые могут возникать в гравитирующей среде (бегущие волны, стоячие волны и др.), назовем этот тип волн волной гравитационной неустойчивости. Это образование можно рассматривать как аналог протопланетных колец в протопланетном диске Солнца.

2. Представляет интерес получить аналитические решения и при других диапазонах изменений  $\lambda_{безр}$ .

Если  $\lambda_{безр} = \lambda_{J,безр}$ , то решение представляет собой стационарную волну:

$$\rho_{\Delta, безр} = C_1 \cdot \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_{безр}} x_{безр} + C_2\right) \right]. \quad (3.24)$$

В этом случае среда гравитационно устойчива.

В случае  $\lambda_{безр} < \lambda_{J, безр}$  функция, описывающая волну возбуждения в представлении (3.13), преобразуется в функцию комплексного переменного. Однако интерес в нашем случае представляют функции действительного переменного, описывающие реальные параметры исследуемой среды. Известно, что действительная часть комплексного решения уравнения является также решением этого уравнения. В нашем случае одним из частных решений уравнения (3.12) является решение:

$$\rho_{\Delta, безр}(x_{безр}, t_{безр}) = const \cdot \cos \omega_{безр} t_{безр} \cdot \cos(k_{безр} x_{безр} + c_2), \quad (3.25)$$

где  $const$ ,  $\omega_{безр}$ ,  $k_{безр}$  суть постоянные.

Подставляя решение (3.25) в уравнение (3.12), получаем:

$$\omega_{безр}^2 = C_{безр}^2 k_{безр}^2 - 1, \quad (3.26)$$

где

$$C_{безр}^2 = \frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{ex}^2}. \quad (3.27)$$

Отсюда

$$\omega_{безр}^2 = \frac{\lambda_{J, безр}^2}{\lambda_{безр}^2} - 1. \quad (3.28)$$

Из уравнения (3.28) видно, что при  $\lambda_{безр} < \lambda_{J, безр}$  величина  $\omega_{безр}^2 > 0$ , и решение (3.25) существует и представляет собой классическую стоячую волну. В этом случае среда также гравитационно устойчива.

3. Как нетрудно видеть, уравнение (3.12) также имеет частное решение в виде бегущей волны:

$$\rho_{\Delta, безр} = C_3 \cdot \cos\left(\omega_{безр} t_{безр} + \frac{2\pi}{\lambda_{безр}} x_{безр} + C_2\right). \quad (3.29)$$

Подставив это решение в уравнение (3.12), находим дисперсионное уравнение

$$\omega_{безр}^2 = \frac{\lambda_{J, безр}^2}{\lambda_{безр}^2} - 1,$$

которое совпадает с уравнением (3.28).

Отсюда следует, что решение в виде бегущей волны (3.29) также существует, но только в области устойчивых возмущений однородной среды ( $\lambda_{\text{безр}} < \lambda_{J,\text{безр}}$ ).

Найдем скорость бегущей волны, исходя из уравнения (3.29):

$$c_{\text{безр}} = \frac{c}{\omega_J r_{ex}} = \frac{\omega_{\text{безр}}}{k_{\text{безр}}} = \frac{\lambda_{\text{безр}}}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_{J,\text{безр}}^2}{\lambda_{\text{безр}}^2} - 1}, \quad (3.30)$$

Для удобства анализа структуры скорости бегущей волны преобразуем ее к размерному виду:

$$c = \left[ C_o^2 - \frac{(4\pi G \rho_o) \lambda^2}{4\pi^2} \right]^{1/2}. \quad (3.31)$$

Это известная формула скорости «тяжелого» звука в гравитирующей газовой среде [18, 19]. Из этого выражения следует, что  $c \rightarrow C_o$  при  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\lambda \ll \lambda_J$ ). При возрастании  $\lambda$  скорость «тяжелого» звука уменьшается и при  $\lambda = \lambda_J$  становится равной нулю. При этом, как видно из выражения (3.28), частота  $\omega_{\text{безр}}$  при  $\lambda = \lambda_J$  также становится равной нулю.

Таким образом, решения (3.25) и (3.29) при  $\lambda \rightarrow \lambda_J$  сходятся к одному решению – стационарной волне (3.24). В области же  $\lambda > \lambda_J$  решений в виде (3.24), (3.25), (3.29) не существует.

#### 4. Методика численного расчета уравнений однородной изотропной среды

Опуская индексы у переменных, приведем уравнение (1.4) к виду:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \rho, \quad (4.1)$$

где

$$C^2 = \frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{ex}^2}.$$

Для проведения численных расчетов область по оси  $x$  разбиваем на счетные интервалы точками с целыми индексами. Функция  $\rho$  определена в центре интервала  $(x_i, x_{i+1})$  и обозначена индексом  $i+1/2$ . Переход от слоя  $n$  к слою  $n+1$  с постоянным шагом по времени  $\tau$  выполняется по стандартной разностной схеме:

$$\rho_{i+1/2}^{n+1} = 2\rho_{i+1/2}^n - \rho_{i+1/2}^{n-1} + \frac{C^2 \tau^2}{x_{i+1} - x_i} \left[ \frac{\rho_{i+3/2}^n - \rho_{i+1/2}^n}{x_{i+3/2} - x_{i+1/2}} - \frac{\rho_{i+1/2}^n - \rho_{i-1/2}^n}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \right] + \tau^2 \rho_{i+1/2}^n. \quad (4.2)$$

Для каждого расчетного случая, вводя начальные и граничные условия, записанные в конечных разностях, получаем разностную схему, по которой и проводились расчеты.

## 5. Результаты численных расчетов гравитационной неустойчивости для однородной изотропной «холодной» среды

Движение однородной изотропной бесконечной «холодной» ( $T \rightarrow 0^0\text{K}$ ) газовой среды описывается уравнением (2.5). Численные расчеты этого уравнения проводились по методике раздела 4 на отрезке  $0 \leq x_{\text{безр}} \leq 1$  при различных начальных условиях.

На рис. 5.1 представлены графики поведения начального плоского возмущения плотности прямоугольной формы в зависимости от времени (на всех приводимых рисунках в обозначениях переменных опущены индексы «безр»). Данное возмущение, в отличие от волнового возмущения, является локализованным в пространстве по оси  $x$ . В дальнейшем начальное возмущение плотности, локализованное в пространстве по оси  $x$ , будем называть сокращенно – локализованным начальным возмущением или одиночным начальным возмущением. Локализованное начальное возмущение в данном расчете имеет вид  $\rho_{\Delta, \text{безр}}(t=0) = 0,05$  на отрезке  $1/3 \leq x_{\text{безр}} \leq 0,5$ , вне которого

$$\rho_{\Delta, \text{безр}}(t=0) = 0. \text{ Задаются также начальное условие } \left. \frac{\partial \rho_{\Delta, \text{безр}}}{\partial t} \right|_{t=0} = \omega_{\text{безр}} \rho_{\Delta, \text{безр}}(t=0)$$

и краевые условия  $\rho_{\Delta, \text{безр}}(x=0, t) = 0$ ,  $\rho_{\Delta, \text{безр}}(x=1, t) = 0$ . В такой постановке задачи Коши возрастание возмущений плотности со временем происходит по экспоненциальному закону  $\sim e^{\omega_{\text{безр}} t}$ , где  $\omega_{\text{безр}} = \omega_{J, \text{безр}} = 1$ .

Сопоставление численного (треугольники) и аналитического решений (сплошная линия) возрастания плотности локализованного начального возмущения в зависимости от времени представлено на рис. 5.2. Расхождение этих решений не превышает 0,025 %.



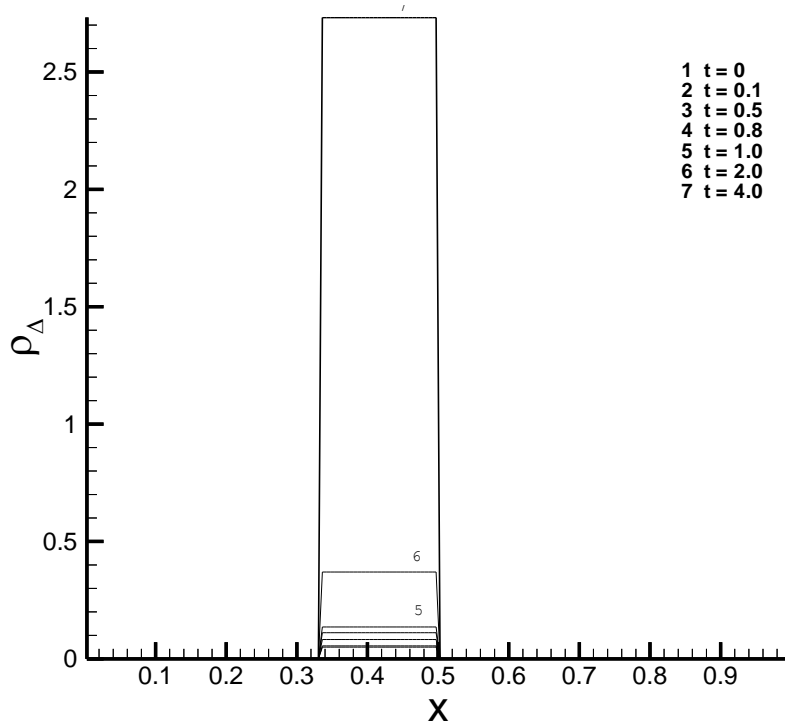


Рис. 5.1. Гравитационная неустойчивость однородной среды при начальном возмущении плотности прямоугольной формы,  $T \rightarrow 0^0\text{K}$ .

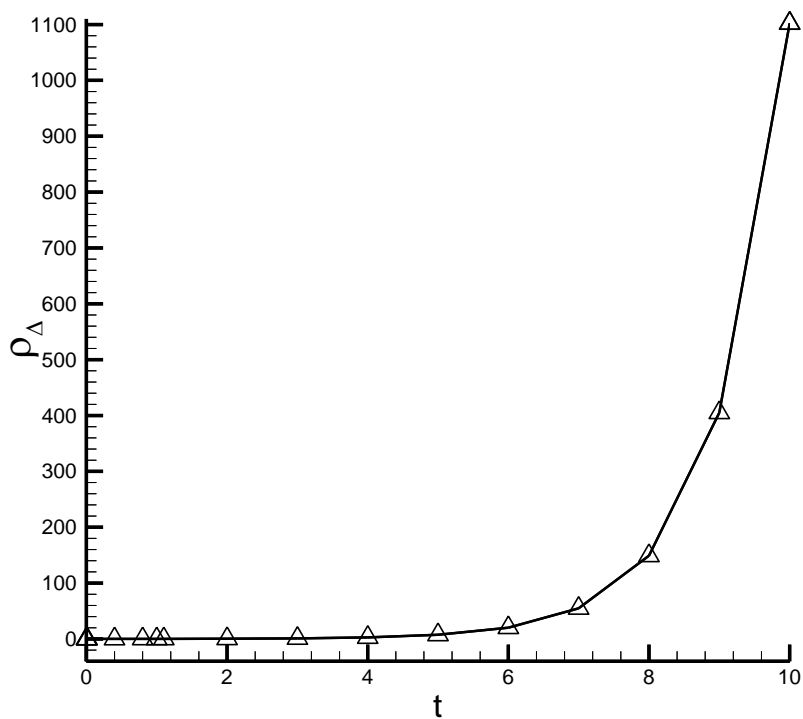


Рис. 5.2. Сопоставление численного (треугольники) и аналитического (сплошная линия) решений при начальном возмущении плотности прямоугольной формы,  $T \rightarrow 0^0\text{K}$ .

В случае  $T \rightarrow 0^0\text{K}$  начальная прямоугольная форма возмущения плотности при нарастании амплитуды возмущения со временем сохраняется.

Если изменить форму локализованного (одиночного) начального возмущения плотности, то нарастание плотности со временем в каждой точке этого возмущения также будет пропорционально  $\sim e^{\omega_{\text{безр}} t_{\text{безр}}}$  ( $\omega_{\text{безр}} = \omega_{J, \text{безр}} = 1$ ), и «размытия» возмущения по оси  $x$  не происходит.

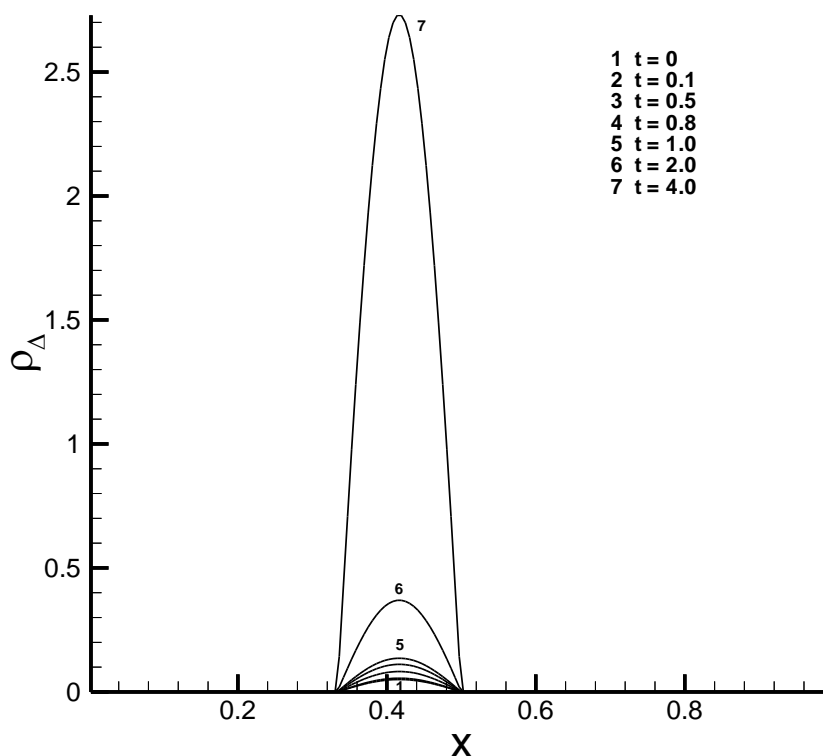


Рис. 5.3. Гравитационная неустойчивость однородной среды при начальном возмущении плотности в виде положительной синусоидальной полуволны,  $T \rightarrow 0^0\text{K}$ .

Для примера на рис. 5.3 форма локализованного начального возмущения плотности представляет собой положительную синусоидальную полуволну в виде  $\rho_{\Delta, \text{безр}}(t=0) = 0,05 \cdot \cos(6\pi \cdot x_{\text{безр}} - \frac{\pi}{2})$ , заданную на отрезке  $1/3 \leq x_{\text{безр}} \leq 0,5$ , вне которого  $\rho_{\Delta, \text{безр}}(t=0) = 0$ . Задаются также начальное условие  $\frac{\partial \rho_{\Delta, \text{безр}}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \omega_{\text{безр}} \cdot \rho_{\Delta, \text{безр}}(t=0)$  и краевые условия  $\rho_{\Delta, \text{безр}}(x=0, t) = 0$ ,  $\rho_{\Delta, \text{безр}}(x=1, t) = 0$ .

Проведем сравнение численного и аналитического решений для двух точек полуволны с координатами  $x_{\text{безр}} = 0,4056$  и  $x_{\text{безр}} = 0,336$  соответственно. На рис. 5.4 аналитическое решение в этих точках представлено сплошной и

штриховой линиями соответственно, а значения из численного решения нанесены символом «треугольник». Расхождение между численным и аналитическим решениями в этом случае не превышает 0,025%.

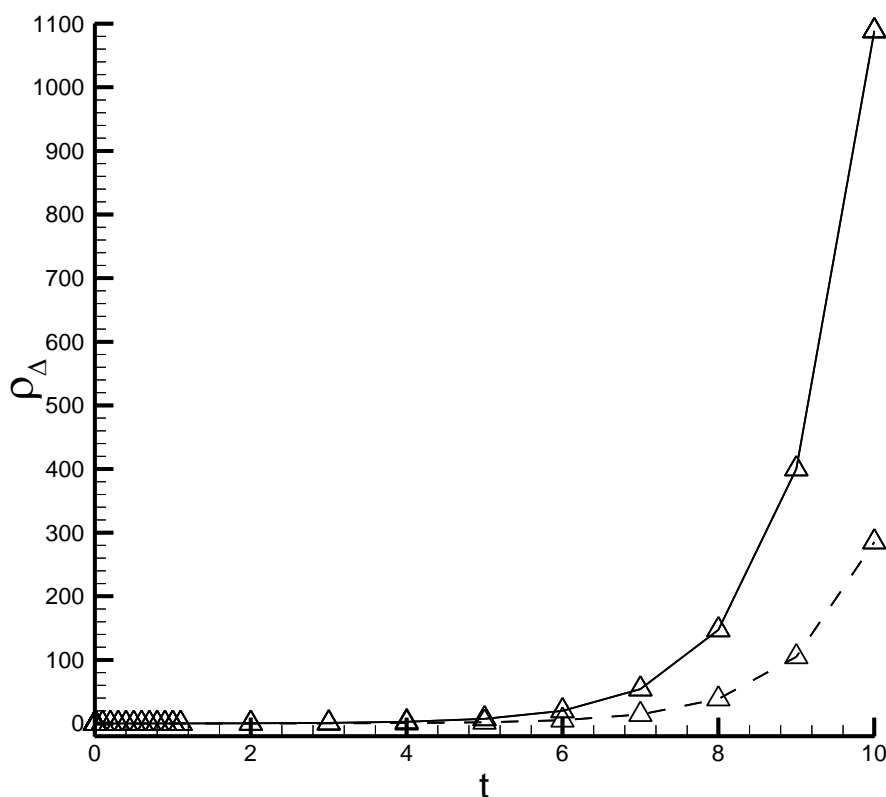


Рис. 5.4. Сопоставление численного (треугольники) и аналитического (для  $x = 0,4056$  – сплошная линия, для  $x = 0,336$  – штриховая линия) решений для синусоидальной полуволны,  $T \rightarrow 0^0\text{K}$ .

Далее перейдем к расчету движения гравитирующей среды при начальном возмущении ее плотности в виде синусоидальной волны. Зададим начальное волновое возмущение с числом максимумов равным числу планет Солнечной системы (восемь планет и Пояс Астероидов) на отрезке  $0 \leq x_{\text{безр}} \leq 1$ , как это было сделано в разделе 3:  $\rho_{\Delta, \text{безр}} = 0,01 \cdot \cos(18\pi x_{\text{безр}} + \pi)$ . Для решения этой

задачи Коши задаются также начальное условие  $\left. \frac{\partial \rho_{\Delta, \text{безр}}}{\partial t} \right|_{t=0} = \omega_{\text{безр}} \cdot \rho_{\Delta, \text{безр}}(t=0)$  и

$$\text{краевые условия } \left. \frac{\partial \rho_{\Delta, \text{безр}}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \rho_{\Delta, \text{безр}}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0.$$

Численное решение этой задачи Коши представлено на графиках рис. 5.5, где показаны возмущения плотности синусоидальной волны на разные моменты времени.

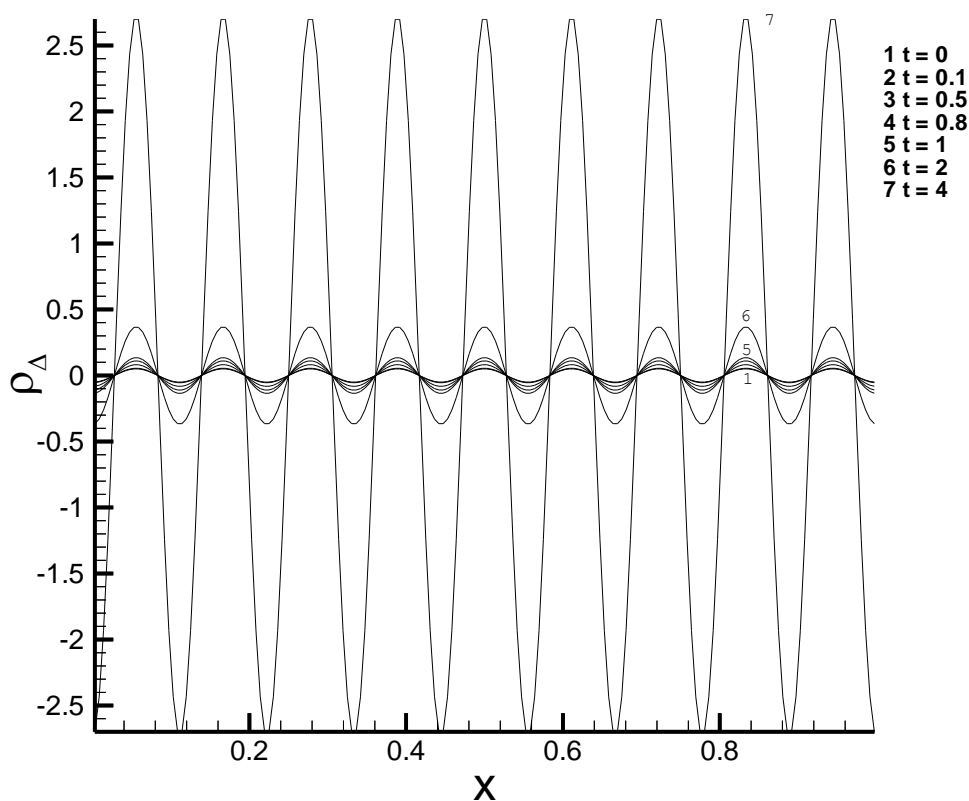


Рис. 5.5. Гравитационная неустойчивость однородной среды в виде синусоидальной волны,  $T \rightarrow 0^0\text{K}$ .

Как видно из рис. 5.5, в результате гравитационной неустойчивости образуется характерная волна возмущенной среды с нарастающей амплитудой. В этой волне сохраняют свое положение в пространстве как узловые точки, так и ее максимумы и минимумы. Такого типа волны были названы в разделе 3 волнами гравитационной неустойчивости. Волны гравитационной неустойчивости в однородной среде по своей природе подобны волнам гравитационной неустойчивости в протопланетном диске [1, 2], из которых образуются протопланетные кольца. Отличительная особенность протопланетного диска заключается в его геометрии, которая формируется в поле тяготения звезды.

Таким образом, исследования показывают, что однородная изотропная бесконечная «холодная» ( $T \rightarrow 0^0\text{K}$ ) гравитирующая газовая среда имеет следующие особенности:

- в этой среде могут возникать гравитационные неустойчивости как в виде одиночных возмущений, локализованных в пространстве, так и в виде волн гравитационной неустойчивости;
- образующиеся в этой среде гравитационные неустойчивости «не размываются» со временем, если даже они зарождаются в результате локальных начальных возмущений;
- гравитационные неустойчивости в такой среде могут развиваться при сколько угодно малых по пространственным размерам начальных

возмущениях плотности, локализованных в пространстве, или при сколько угодно малых длинах волн;

- возникающие в этой среде неустойчивости типа волн гравитационной неустойчивости представляют собой аналог протопланетных колец в протопланетном диске Солнца.

## 6. Результаты численных расчетов гравитационной неустойчивости для однородной изотропной среды при конечной температуре

Как было показано в разделе 3, в джинсовской модели однородной среды при конечной температуре ( $T \neq 0^0\text{K}$ ), в отличие от «холодной» среды, для волновых возмущений плотности существует критическая длина волны Джинса ( $\lambda_J$ ). При возмущениях с длиной волны  $\lambda > \lambda_J$  возникает гравитационная неустойчивость, а в случае  $\lambda \leq \lambda_J$  гравитационная неустойчивость отсутствует.

Приступим к рассмотрению одиночных возмущений плотности гравитирующей однородной среды, локализованных в пространстве по оси  $x$ .

Следует отметить, что решение (3.13) не является общим решением уравнения (3.12). В математической физике это уравнение известно под названием телеграфного уравнения [20]. В работе [21] приводится решение телеграфного уравнения, записанного как

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b^2 u(x, t) \quad (6.1)$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x), \quad (6.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x). \quad (6.3)$$

Решение имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-at}^{x+at} \Phi(x, t, z) dz, \quad (6.4)$$

где

$$\Phi(x, t, z) = \frac{1}{a} F(z) J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{(z-x)^2 - a^2 t^2}\right) + b t f(z) \frac{J_0'\left(\frac{b}{a} \sqrt{(z-x)^2 - a^2 t^2}\right)}{\sqrt{(z-x)^2 - a^2 t^2}}, \quad (6.5)$$

$J_0, J_0'$  – функция Бесселя и ее производная,

$f(x-at), f(x+at)$  – представляют собой бегущие волны, распространяющиеся в противоположных направлениях.

Если начальные данные заданы в виде одиночного локализованного возмущения на отрезке длиной  $L$ , то функции  $f(x-at)$ ,  $f(x+at)$  интерпретируются как периодические функции с периодом  $2L$  [20].

Исходя из этих представлений и принимая, что  $\lambda \approx 2L$ , при первоначальном анализе численных решений с начальными условиями в виде одиночных локализованных возмущений плотности можно воспользоваться дисперсионным уравнением (3.20) и соотношениями (3.21) – (3.23), чтобы определить области, в которых могут существовать разные типы решений. При этом  $\lambda_{J, безр}$  определяется по выражению (3.18).

1. Были проведены численные расчеты уравнения (3.12) для локализованных (одиночных) начальных возмущений плотности однородной среды по методике раздела 4.

На рис. 6.1 представлены графики поведения в зависимости от расстояния начального плоского возмущения плотности прямоугольной формы в виде  $\rho_{\Delta, безр}(t=0) = 0,05$  для разных моментов времени. Начальное возмущение задано на отрезке  $1/3 \leq x_{безр} \leq 0,5$  ( $\lambda = 2L = 1/3$  и  $\lambda > \lambda_J$ ), вне которого  $\rho_{\Delta, безр}(t=0) = 0$ . Начальные данные и краевые условия такие же, как и в аналогичном варианте для холодной среды.

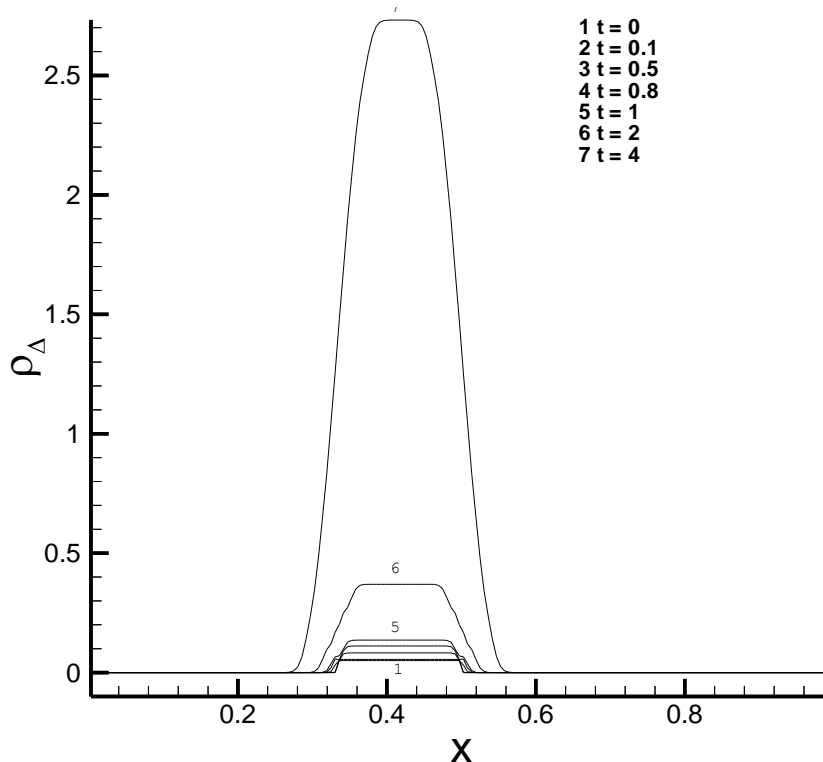


Рис. 6.1. Гравитационная неустойчивость однородной среды при начальном возмущении плотности прямоугольной формы,

$$T \neq 0^{\circ}\text{K}, \lambda > \lambda_J, t \leq 4.$$

Из этого рисунка видно, что, в отличие от случая  $T \rightarrow 0^0\text{K}$ , при конечной температуре ( $T \neq 0^0\text{K}$ ) на фоне возрастания начального возмущения среды, вызванного гравитационной неустойчивостью, происходит распространение возмущений плотности в окружающую среду и распространение волн разрежения внутрь начального возмущения. До момента времени, пока волны разрежения, идущие с противоположных концов начального возмущения, не встретятся, амплитуда начального возмущения плотности нарастает по закону  $\sim e^{\omega_{\text{безр}} t_{\text{безр}}}$ , где  $\omega_{\text{безр}} = \omega_{J, \text{безр}} = 1$ . После взаимодействия волн разрежения закон нарастания амплитуды возмущения плотности меняется. Это можно объяснить тем, что  $\omega$  в экспоненциальном законе начинает уменьшаться со временем. Эта стадия нарастания возмущения плотности со временем показана на рис. 6.2. Видно, что в этом случае плоская площадка на вершине кривой  $\rho_{\Delta, \text{безр}}(x, t = \text{const})$  отсутствует. Это свидетельствует о том, что взаимодействие волн разрежений внутри возмущения к этому времени уже произошло.

Анализ показывает, что динамика возмущения определяется сложным характером взаимодействий как внутри самого возмущения, так и возмущения со средой.

На рис. 6.3 представлено численное решение  $\rho_{\Delta, \text{безр}}(x, t = \text{const})$  для двух точек начального возмущения прямоугольной формы: для центральной точки  $x = 0,406$  численное решение показано сплошной линией, для боковой точки возмущения  $x = 0,344$  численное решение показано штриховой линией.

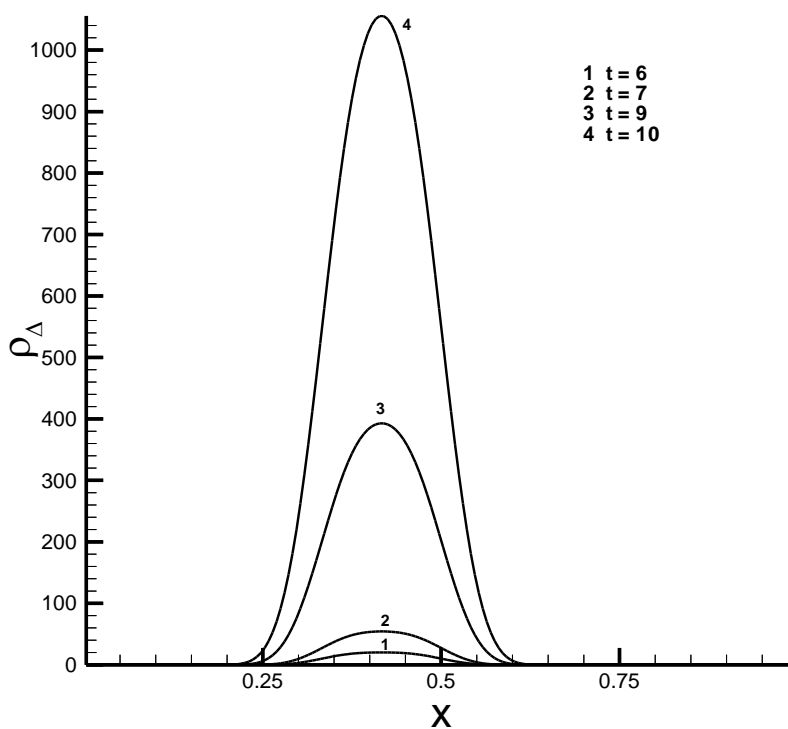


Рис. 6.2. Гравитационная неустойчивость однородной среды при начальном возмущении плотности прямоугольной формы,  $T \neq 0^0\text{K}$ ,  $\lambda > \lambda_J$ ,  $10 > t > 5$ .

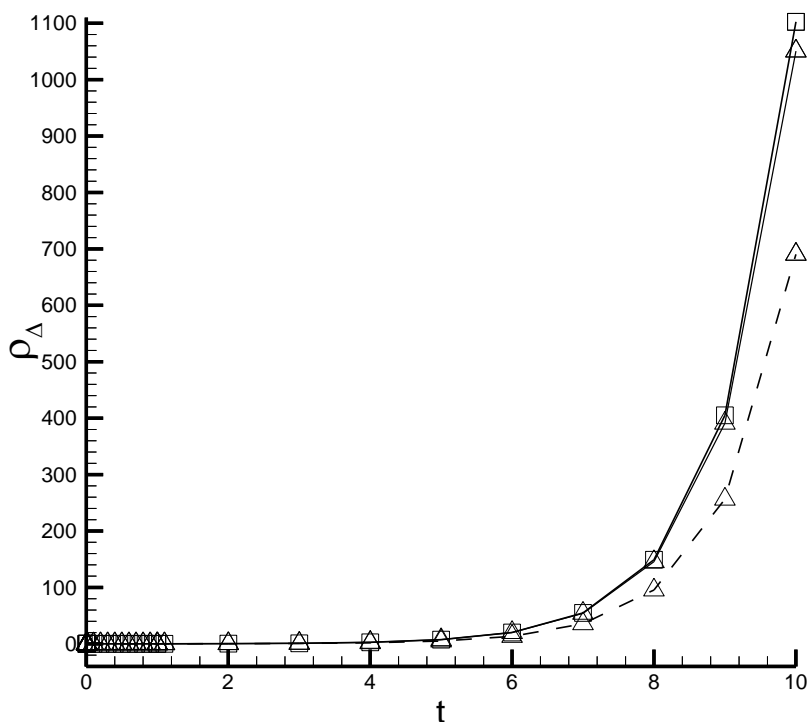


Рис. 6.3. Изменения начального возмущения плотности прямоугольной формы в зависимости от времени, полученные численным расчетом для двух точек:

$x = 0,406$  – сплошная линия с символами «треугольник»,

$x = 0,344$  – штриховая линия с символами «треугольник».

Сплошная линия с символами «квадрат» –  $0,05 \cdot e^{\omega_{I, безр} t_{безр}}$ .  $T \neq 0^0\text{K}$ .

Численное решение для этих точек также продублировано символами «треугольник». Для сравнения сплошной линией с символами «квадрат» показана зависимость  $0,05 \cdot e^{\omega_{I, безр} t_{безр}}$ . Из этого рисунка видно, что, в отличие от «холодной» среды (рис. 5.2), нарастание плотности возмущения для разных его точек происходит по различным законам.

Были проведены численные расчеты поведения начального возмущения плотности прямоугольной формы при  $\lambda < \lambda_J$ . Результаты этих расчетов показаны на рис. 6.4.

Анализ результатов численных расчетов динамики однородной среды ( $T \neq 0^0\text{K}$ ) при начальном возмущении плотности прямоугольной формы показывает, что гравитационная неустойчивость в этих условиях возникает как в диапазоне  $\lambda > \lambda_J$  (рис. 6.3), так и в диапазоне  $\lambda < \lambda_J$  (рис. 6.4). Сценарий развития гравитационной неустойчивости в этих областях один и тот же, и он описан при рассмотрении рис. 6.3. Отличительной особенностью развития неустойчивости в диапазоне  $\lambda < \lambda_J$  является то, что скорость распространения волн возмущений в этом диапазоне может быть существенно выше, чем в диапазоне  $\lambda > \lambda_J$ . Это приводит, с одной стороны, к большему «размытию» пространственного размера одиночного возмущения, с другой стороны, к уменьшению нарастания амплитуды начального одиночного возмущения (рис. 6.4).



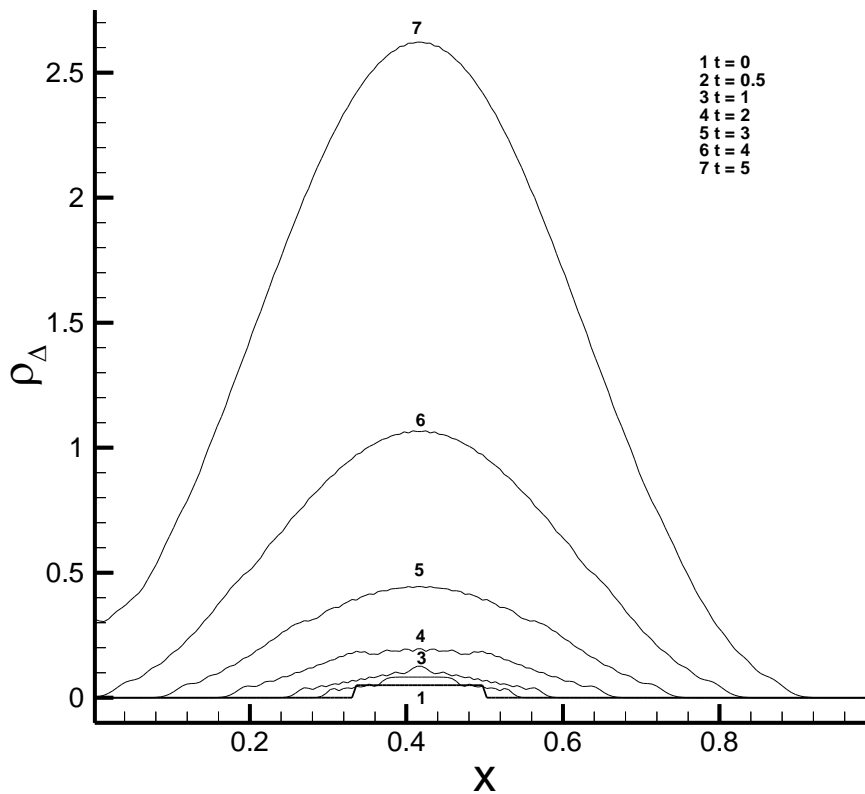


Рис. 6.4. Гравитационная неустойчивость однородной среды при начальном возмущении плотности прямоугольной формы,  $T \neq 0^0\text{K}$ ,  $\lambda < \lambda_J$ ,  $t \leq 5$ .

2. Гравитационная неустойчивость однородной изотропной среды при начальном возмущении плотности в виде положительной синусоидальной полуволны, которая описывается формулой

$$\rho_{\Delta, \text{безр}}(t=0) = 0,05 \cdot \cos\left(6\pi \cdot x_{\text{безр}} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.6)$$

на отрезке  $1/3 \leq x_{\text{безр}} \leq 0,5$ , вне которого  $\rho_{\Delta, \text{безр}}(t=0) = 0$ , для случая  $\lambda > \lambda_J$  показана на рис. 6.5 и рис. 6.6. Для решения задачи Коши заданы также

начальное условие  $\left. \frac{\partial \rho_{\Delta, \text{безр}}}{\partial t} \right|_{t=0} = \omega_{\text{безр}} \cdot \rho_{\Delta, \text{безр}}(t=0)$  и краевые условия

$$\rho_{\Delta, \text{безр}}(x=0, t) = 0, \quad \rho_{\Delta, \text{безр}}(x=1, t) = 0.$$

Из представленных рис. 6.5 и рис. 6.6 графиков следует, что в условиях конечных температур ( $T \neq 0^0\text{K}$ ) при начальном возмущении плотности однородной среды в виде положительной синусоидальной полуволны, длина волны которой больше  $\lambda_J$ , возникает гравитационная неустойчивость. Амплитуда начального возмущения в зависимости от времени начинает резко возрастать: ко времени  $t = 10$  амплитуда увеличивается примерно в 16000 раз.

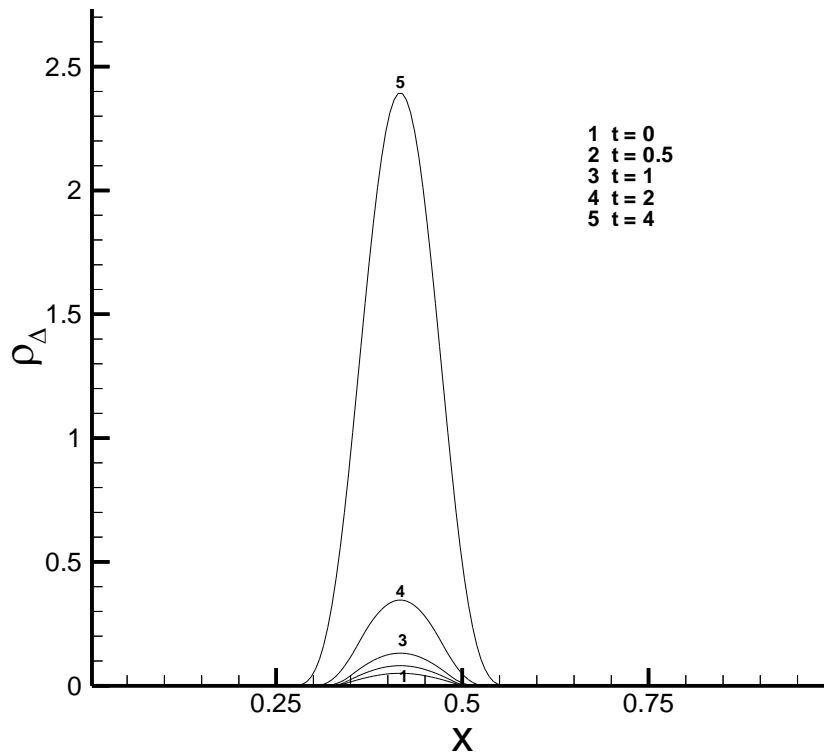


Рис. 6.5. Гравитационная неустойчивость однородной среды при начальном возмущении плотности в виде положительной синусоидальной полуволны,  $T \neq 0^0\text{K}$ ,  $\lambda > \lambda_J$ ,  $t \leq 4$ .

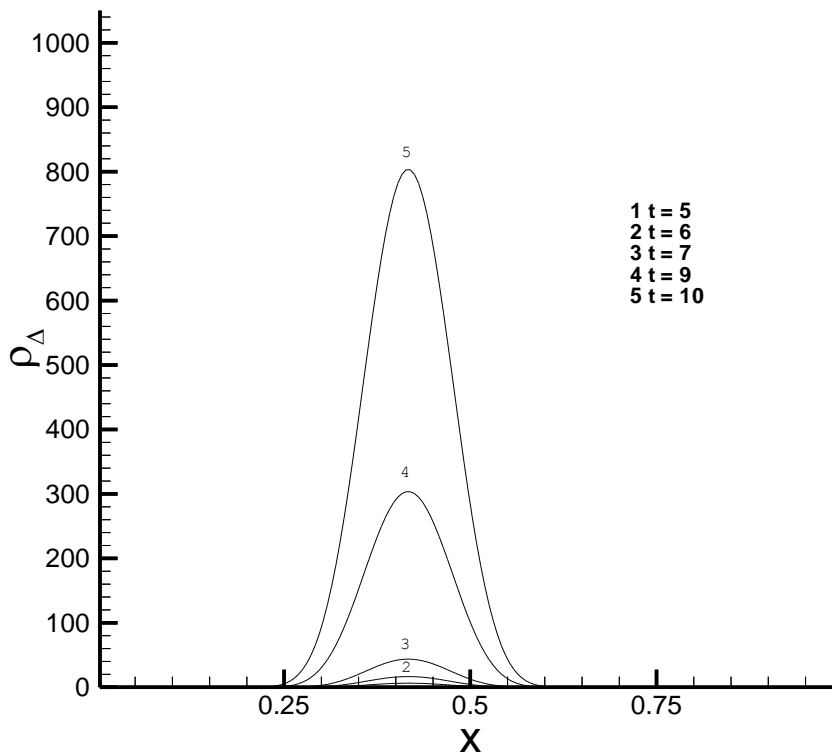


Рис. 6.6. Гравитационная неустойчивость однородной среды при начальном возмущении плотности в виде положительной синусоидальной полуволны,  $T \neq 0^0\text{K}$ ,  $\lambda > \lambda_J$ ,  $5 \leq t \leq 10$ .

При этом характерный размер возмущения по оси  $x$  также возрастает, но в значительно меньшей степени, чем амплитуда: ко времени  $t = 10$  характерный размер увеличивается всего примерно в 2 раза. В этом случае кривые возмущения плотности по обе стороны от максимума в зависимости от расстояния на всех временах являются строго монотонными за исключение самой точки максимума.

На следующем этапе исследований были проведены численные расчеты при начальном возмущении плотности однородной среды в виде положительной синусоидальной полуволны для случаев  $\lambda = \lambda_J$  и  $\lambda < \lambda_J$ . Начальное возмущение плотности задавалось по формуле (6.6) на отрезке  $1/3 \leq x_{\text{безр}} \leq 0,5$ , вне которого  $\rho_{\Delta, \text{безр}}(t=0) = 0$ . Заданы также начальное условие

$$\left. \frac{\partial \rho_{\Delta, \text{безр}}}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{и краевые условия} \quad \rho_{\Delta, \text{безр}}(x=0, t) = 0, \quad \rho_{\Delta, \text{безр}}(x=1, t) = 0.$$

Изменения начального возмущения плотности в зависимости от расстояния для разных моментов времени при  $\lambda = \lambda_J$  представлены на рис. 6.7.

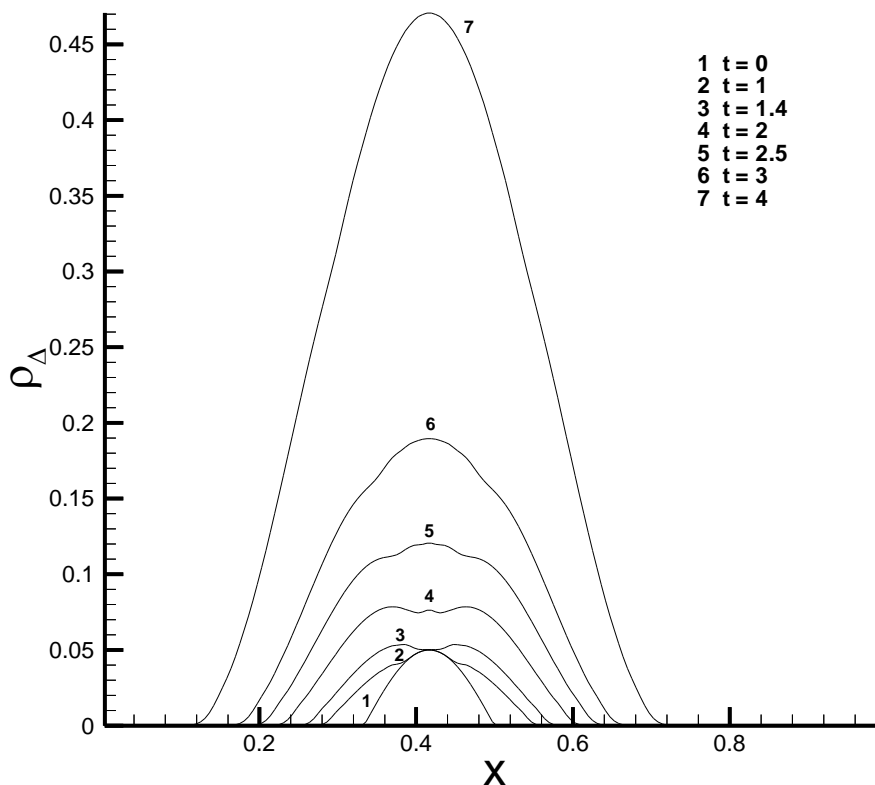


Рис. 6.7. Изменение начального возмущения плотности в виде положительной синусоидальной полуволны в зависимости от расстояния для разных моментов времени,  $\lambda = \lambda_J$ ,  $t \leq 4$ .

Из графиков рис. 6.7 видно, что характер кривых  $\rho_{\Delta, \text{безр}}(x, t = \text{const})$  существенно меняется по сравнению со случаем  $\lambda > \lambda_J$  (рис. 6.5, рис. 6.6). До некоторого момента времени ( $t \approx 1$ ) величина максимума кривых остается

постоянной, хотя характерный размер возмущения по  $x$  растет, а величина плотности на боковых ветвях этих кривых нарастает со временем, пока не достигнет значения максимума начальной полуволны (кривая 1 при  $t = 0$ ). После этого на некотором отрезке времени кривые плотности по обе стороны от центральной точки в зависимости от расстояния имеют немонотонный характер (рис. 6.7, кривые 3, 4). Так, кривая 3 имеет два максимума. При больших временах амплитуда возмущения нарастает, а кривые постепенно сглаживаются и становятся по обе стороны от максимума строго монотонными за исключением самой точки максимума. На момент времени  $t = 10$  амплитуда возмущения возрастает примерно в 2500 раз, что в 6 раз меньше, чем в диапазоне  $\lambda > \lambda_J$ .

Интересным в данном расчете является тот факт, что в этом случае ( $\lambda = \lambda_J$ ) также имеет место гравитационная неустойчивость, хотя она менее выражена, чем при  $\lambda > \lambda_J$ .

Изменения начального возмущения плотности (формула (6.6)) при  $\lambda < \lambda_J$  в зависимости от расстояния для разных моментов времени представлены на рис. 6.8.

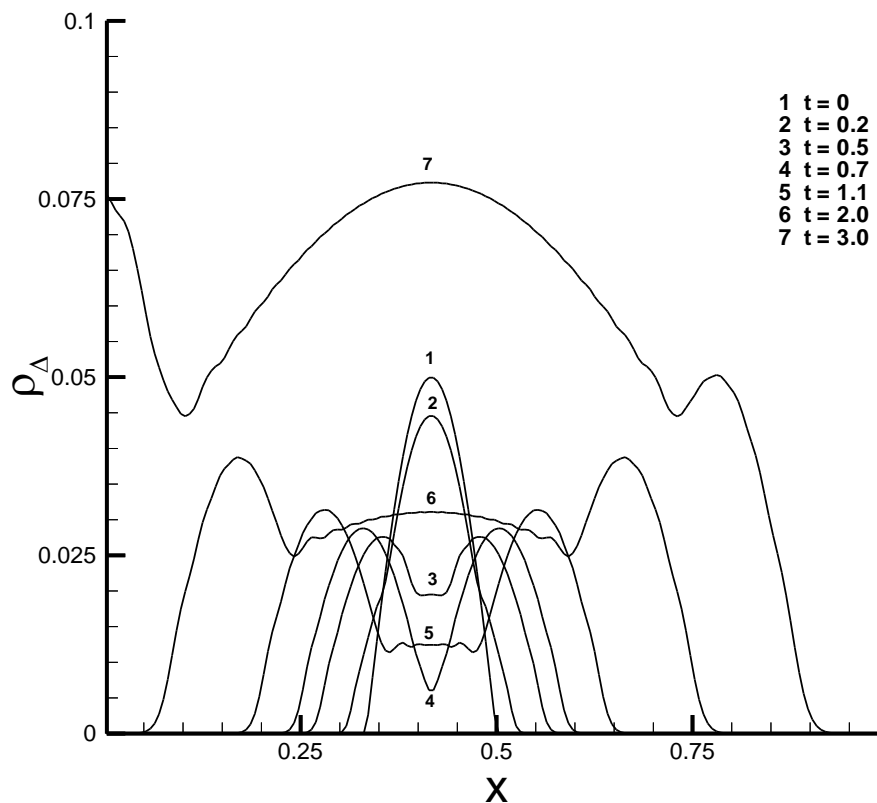


Рис. 6.8. Изменения начального возмущения плотности в виде положительной синусоидальной полуволны в зависимости от расстояния для разных моментов времени,  $\lambda < \lambda_J$ ,  $t \leq 3.0$ .

Поведение возмущения плотности в случае  $\lambda < \lambda_J$ , как это видно из рис. 6.8, отличается от ситуации как при  $\lambda > \lambda_J$ , так и при  $\lambda = \lambda_J$ . На начальном этапе, примерно к моменту времени  $t = 0,5$  начальное возмущение распадается на два

возмущения, которые начинают распространяться в противоположных направлениях. Это качественно совпадает с решением (6.4), (6.5), в котором первый член описывает две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, амплитуды которых в два раза меньше амплитуды начального возмущения. Однако с определенного момента времени ( $t > 1$ ) амплитуда в центре начинает возрастать. Это можно объяснить тем, что в уравнении (3.12)

вторая производная  $\frac{\partial^2 \rho_{\Delta, безр}}{\partial x_{безр}^2}$  становится настолько малой, что преобладающим

в правой части этого уравнения оказывается второй член. В этом случае главным членом в решении является выражение вида (3.13) с экспоненциальным множителем по времени. Таким образом, амплитуда возмущения плотности начинает возрастать, и ко времени  $t \approx 2,5$  ее значение превосходит амплитуду начального возмущения.

Изменения от времени возмущения плотности, заданного первоначально в виде положительной синусоидальной полуволны, в центральной ее точке для диапазонов  $\lambda > \lambda_J$ ,  $\lambda = \lambda_J$ ,  $\lambda < \lambda_J$  приведены на рис. 6.9.

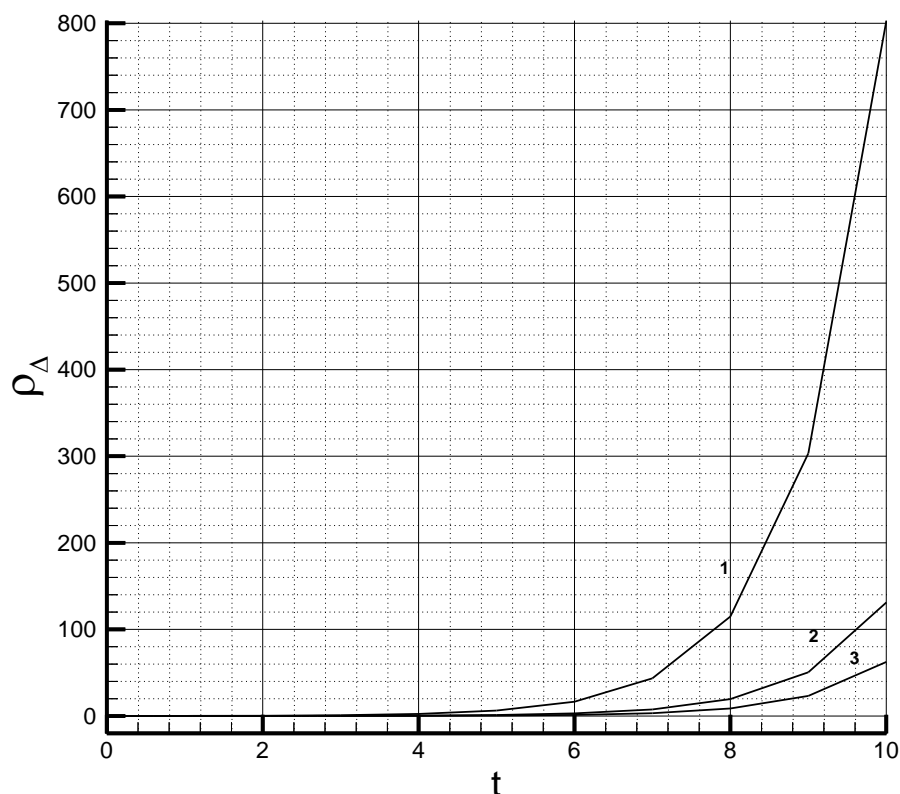


Рис. 6.9. Зависимости от времени возмущения плотности в виде синусоидальной полуволны в центральной ее точке для разных диапазонов  $\lambda$ : 1.  $\lambda > \lambda_J$ ; 2.  $\lambda = \lambda_J$ ; 3.  $\lambda < \lambda_J$ .

Данные, приведенные на этом рисунке, показывают, что при всех значениях  $\lambda$ , соответствующих диапазонам  $\lambda > \lambda_J$ ,  $\lambda = \lambda_J$ ,  $\lambda < \lambda_J$ , происходит нарастание со временем амплитуды начального возмущения плотности, т.е.

имеет место гравитационная неустойчивость. Однако наибольшее увеличение амплитуды происходит в диапазоне  $\lambda > \lambda_J$ .

Этот результат может иметь весьма важное значение при рассмотрении зарождения гравитационных неустойчивостей в протопланетном диске, так как при локальных возмущениях плотности порог устойчивости среды диска может существенно снизиться.

Для полноты представлений о решениях уравнения (3.12) обратим внимание на то, что если коэффициент  $C^2 = \frac{C_o^2}{\omega_J^2 r_{ex}^2}$  сделать достаточно большим, то уравнение перейдет в известное волновое уравнение.

На рис. 6.10 представлено численное решение уравнения (3.12) с коэффициентом  $C^2 = 1,822$  на разные моменты времени. Следует отметить, что это значение коэффициента далеко выходит за рамки значений, которые соответствуют, например, параметрам среды протопланетного диска Солнца.

Как видно из рис. 6.10, численное решение уравнения (3.12) с коэффициентом  $C^2 = 1,822$  представляет собой две одиночные полуволны с амплитудой, равной половине амплитуды начального возмущения плотности, которые распространяются в противоположных направлениях. Это полностью соответствует общему решению волнового уравнения [20].

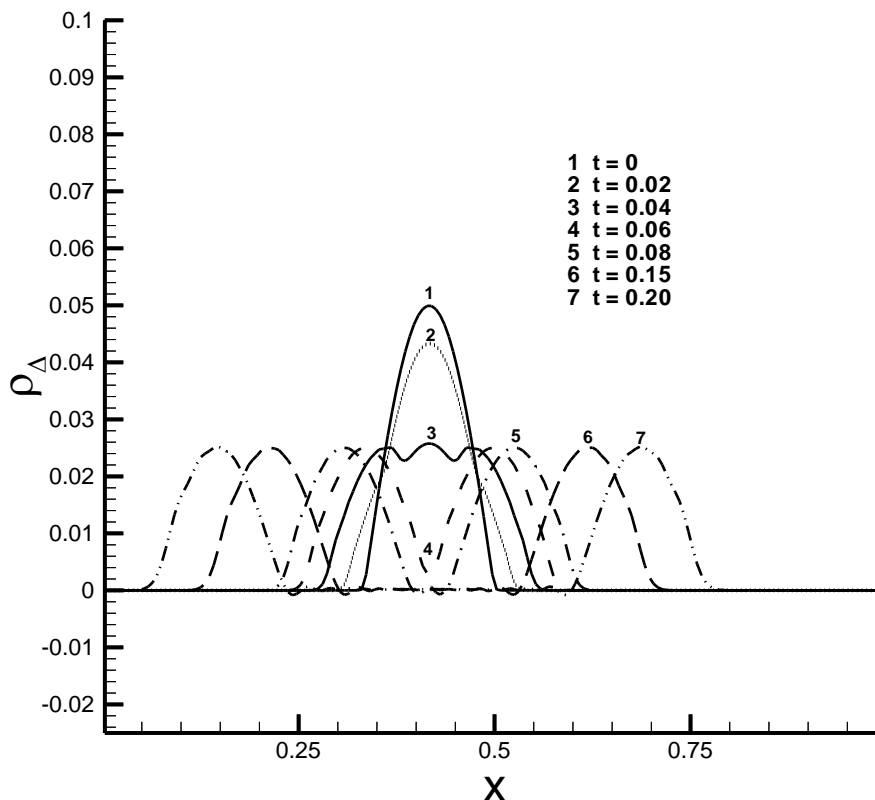


Рис. 6.10. Изменения начального возмущения плотности в виде положительной синусоидальной полуволны в зависимости от расстояния для разных моментов времени,  $\lambda < \lambda_J$ ,  $C^2 = 1,822$ .

3. Далее перейдем к численным расчетам движения однородной гравитирующей среды, когда начальные возмущения задаются в виде синусоидальной волны.

На рис. 6.11 показана гравитационная неустойчивость однородной гравитирующей среды, которая наблюдается, когда начальное возмущение плотности среды представляет собой синусоидальную волну в виде

$$\rho_{\Delta, безр} = 0.01 \cdot \cos(18\pi r_{безр} + \pi), \quad (6.7)$$

заданную на отрезке  $0 \leq x_{безр} \leq 1$ , для случая  $\lambda > \lambda_j$ . Заданы также начальное

условие  $\left. \frac{\partial \rho_{\Delta, безр}}{\partial t} \right|_{t=0} = \omega_{безр} \cdot \rho_{\Delta, безр}(t=0)$  и краевые условия  $\left. \frac{\partial \rho_{\Delta, безр}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0,$

$\left. \frac{\partial \rho_{\Delta, безр}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0$ . Волна начального возмущения задается с девятью

максимумами, число которых равно числу планет Солнечной системы (восемь планет и Пояс Астероидов), расположенными на расстоянии, равном ширине протопланетного диска. Такие же начальные условия были использованы в разделах 3 и 5, чтобы иметь возможность провести некоторые допустимые сравнения полученных результатов с данными по образованию планетной системы Солнца.

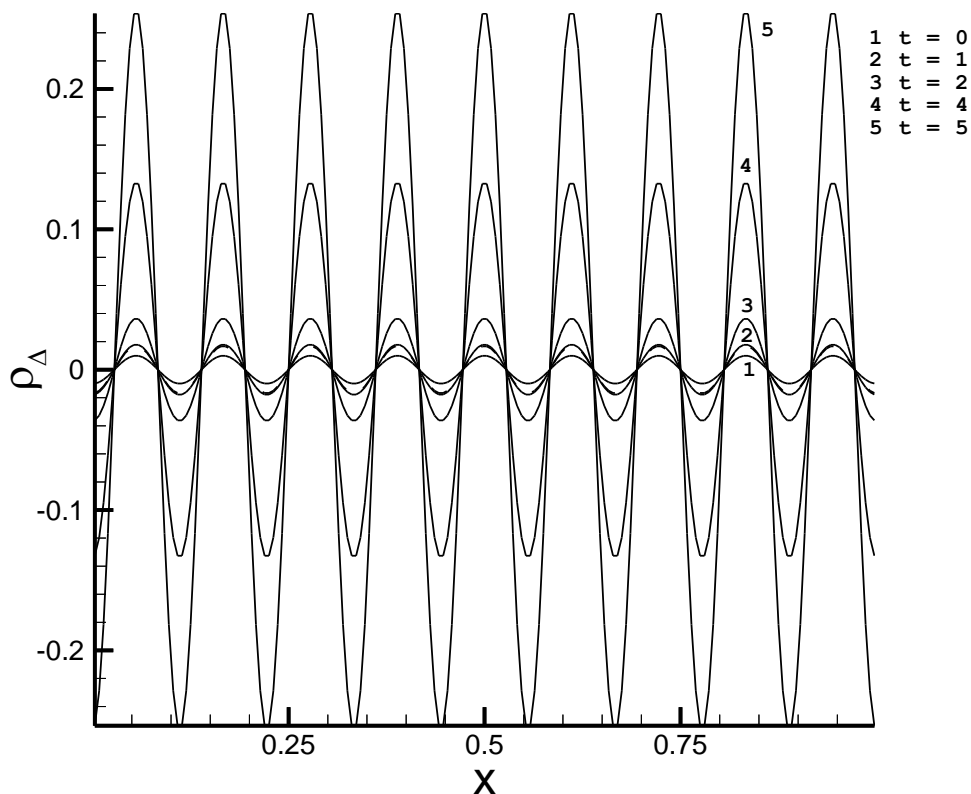


Рис. 6.11. Гравитационная неустойчивость однородной среды в виде волны при  $\lambda > \lambda_j$ ,  $T \neq 0^0\text{K}$ .

Как видно из рис. 6.11, гравитационная неустойчивость однородной среды в этом случае возникает в виде волны гравитационной неустойчивости, определенной в разделе 3. Нарастание амплитуды волны гравитационной неустойчивости соответствует экспоненциальному закону.

Если длина волны  $\lambda$  приближается к критической длине волны Джинса  $\lambda_J$ , то амплитуда волны гравитационной неустойчивости однородной среды резко падает. На рис. 6.12 показана гравитационная неустойчивость в случае  $\lambda \approx \lambda_J$ . Начальные и граничные условия данной задачи Коши соответствуют случаю  $\lambda > \lambda_J$ .

Из рис. 6.12 следует, что при  $\lambda \approx \lambda_J$  амплитуда волны начального возмущения плотности среды с течением времени практически остается неизменной по сравнению со случаем  $\lambda > \lambda_J$ , а фазовая скорость также равна нулю. Эту волну в отличие от других типов волн можно назвать стационарной волной.

В случае  $\lambda < \lambda_J$  поведение начального возмущения плотности в виде синусоидальной волны представлено на рис. 6.13. Начальные и граничные условия данной задачи Коши соответствуют случаю  $\lambda > \lambda_J$ .

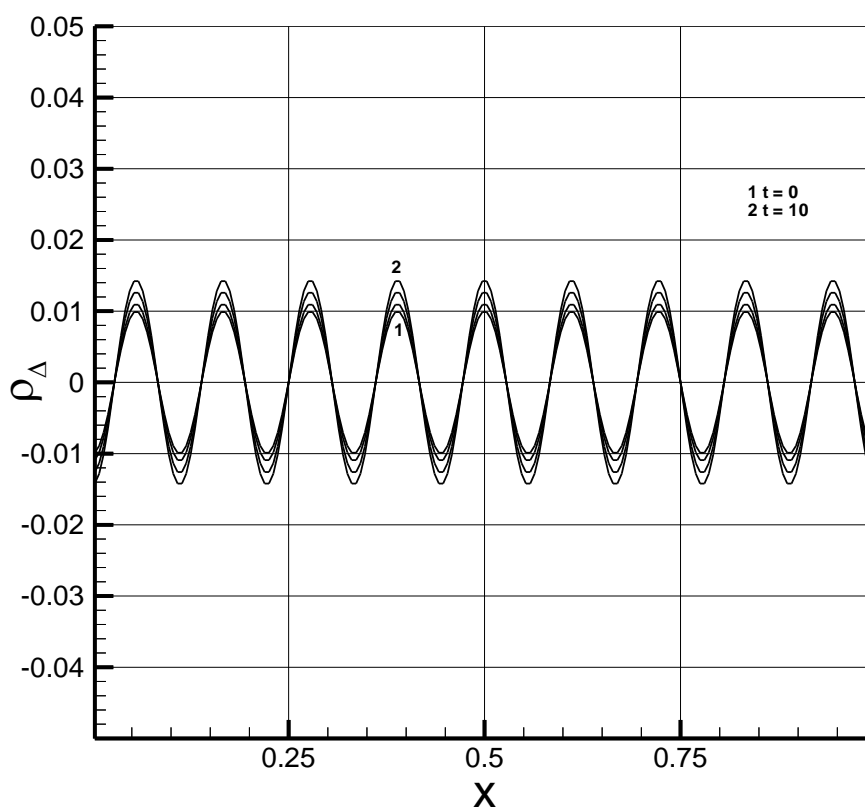


Рис. 6.12 . Изменение начального возмущения плотности однородной среды в виде волны при  $\lambda \approx \lambda_J$ ,  $T \neq 0^0\text{K}$  за время  $0 \leq t \leq 10$ .



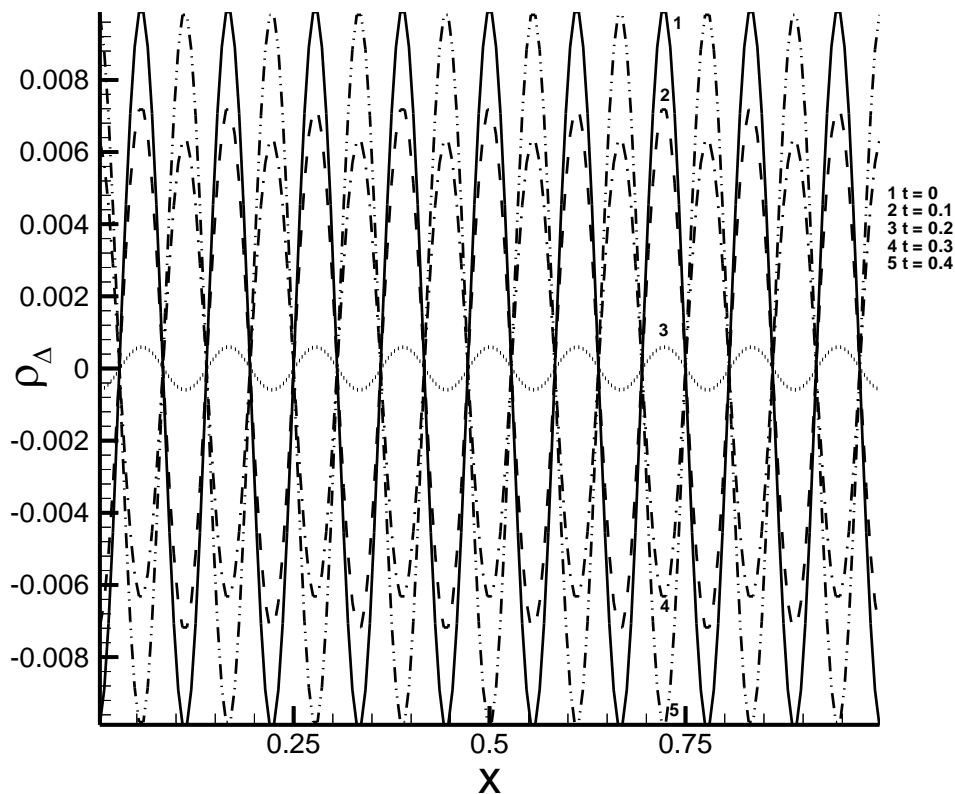


Рис. 6.13. Возникновение стоячей волны при отсутствии гравитационной неустойчивости в однородной среде при  $\lambda < \lambda_J$ ,  $T \neq 0^0\text{K}$ .

На рис. 6.13 проиллюстрировано отсутствие гравитационной неустойчивости в однородной среде при  $\lambda < \lambda_J$ . Однако в отличие от случая  $\lambda = \lambda_J$  при заданных начальных и граничных условиях образуется стоячая волна.

Изменения амплитуды волны возмущения плотности от времени во всем диапазоне изменений  $\lambda$  представлено на рис. 6.14. Отдельно для диапазона  $\lambda > \lambda_J$  эта зависимость дана на рис. 6.15. Из этих рисунков видно, что только при  $\lambda > \lambda_J$  возникает гравитационная неустойчивость. Амплитуда волны гравитационной неустойчивости нарастает по экспоненциальной зависимости от времени. При  $\lambda = \lambda_J$  амплитуда волны остается постоянной. В случае  $\lambda < \lambda_J$  амплитуда стоячей волны, соответствующая пучностям, совершает гармонические колебания во времени, но не превышает амплитуду волны начального возмущения. В диапазоне  $\lambda \leq \lambda_J$  однородная среда гравитационно устойчива.

4. В приведенных выше аналитических и численных исследованиях (разделы 3, 5, 6) были получены волновые возмущения плотности однородной гравитирующей среды с нулевой фазовой скоростью. Представляло интерес исследовать на основе уравнения (3.12) поведение волновых возмущений в виде бегущей волны (3.29). Аналитическое рассмотрение этого случая изложено в разделе 3.

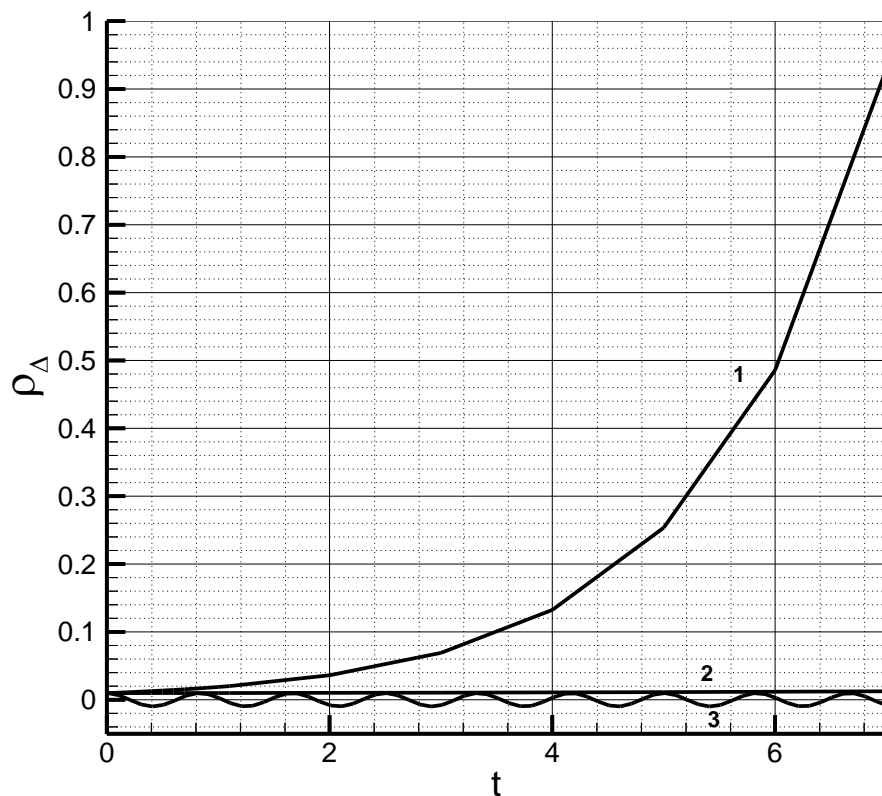


Рис. 6.14. Зависимости амплитуды волны возмущения плотности от времени для разных диапазонов  $\lambda$ :  
 1.  $\lambda > \lambda_J$ ; 2.  $\lambda = \lambda_J$ ; 3.  $\lambda < \lambda_J$ .

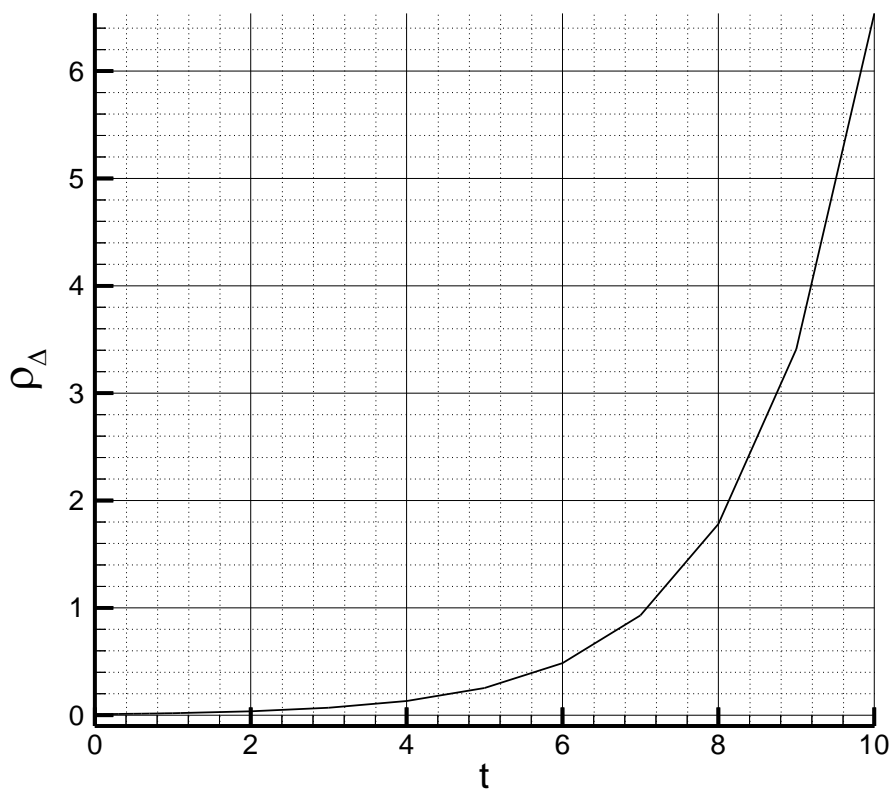


Рис. 6.15. Зависимость амплитуды волны возмущения плотности от времени при  $\lambda > \lambda_J$ ,  $T \neq 0^{\circ}\text{K}$ .

Для численных расчетов волновых возмущений в виде бегущей волны были использованы следующие начальные и краевые условия. Начальное синусоидальное возмущение плотности осталось без изменений и имело вид (6.7). Начальное условие в виде производной по времени задавалось в виде

$$\left. \frac{\partial \rho_{\Delta, \text{безр}}}{\partial t} \right|_{t=0} = -0,01 \cdot \omega_{\text{безр}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{безр}}} x_{\text{безр}} + \pi\right). \quad \text{Краевые условия задавались в}$$

соответствии с (3.29) как:

$$\frac{\partial \rho_{\Delta, \text{безр}}}{\partial x_{\text{безр}}}(x_{\text{безр}} = 0, t_{\text{безр}}) = 0,01 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_{\text{безр}}} \cdot \sin(\omega_{\text{безр}} t_{\text{безр}}), \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial \rho_{\Delta, \text{безр}}}{\partial x_{\text{безр}}}(x_{\text{безр}} = 1, t_{\text{безр}}) = 0,01 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_{\text{безр}}} \cdot \sin(\omega_{\text{безр}} t_{\text{безр}}), \quad (6.9)$$

или в виде:

$$\rho_{\Delta, \text{безр}}(x_{\text{безр}} = 0, t_{\text{безр}}) = 0,01 \cdot \cos(\omega_{\text{безр}} t_{\text{безр}} + \pi), \quad (6.10)$$

$$\rho_{\Delta, \text{безр}}(x_{\text{безр}} = 1, t_{\text{безр}}) = 0,01 \cdot \cos\left(\omega_{\text{безр}} t_{\text{безр}} + \frac{2\pi}{\lambda_{\text{безр}}} + \pi\right). \quad (6.11)$$

Наилучшим вариантом краевых условий, который давал высокую точность в расчетах, являлся видоизмененный вариант (6.10), (6.11) – периодический вариант:

$$\rho_{\Delta, \text{безр}}(t_{\text{безр}}, x_{\text{безр}} = x_{-1/2}) = \rho_{\Delta, \text{безр}}(t_{\text{безр}}, x_{\text{безр}} = x_{N-1/2}), \quad (6.12)$$

$$\rho_{\Delta, \text{безр}}(t_{\text{безр}}, x_{\text{безр}} = x_{1/2}) = \rho_{\Delta, \text{безр}}(t_{\text{безр}}, x_{\text{безр}} = x_{N+1/2}). \quad (6.13)$$

На рис. 6.16 показано численное решение уравнения (3.12) в виде бегущей волны для  $\lambda < \lambda_J$ . На этом рисунке точки с одинаковой фазой на графиках волн в разные моменты времени изображены кружочками под символом «А». Видно, что волна смещается справа налево. Численное решение на момент времени  $t = 10$  совпадает с аналитическим решением по фазе в пределах 1%. Это решение описывает «тяжелый» звук в гравитирующей газовой среде.

В разделах 3, 6 были получены как аналитические, так и численные решения волны гравитационной неустойчивости в диапазоне  $\lambda > \lambda_J$ , которая имеет нулевую фазовую скорость. Существуют ли в этой области волны гравитационной неустойчивости в виде бегущей волны? Для решения этого вопроса были проведены численные расчеты в области  $\lambda > \lambda_J$  с начальными и краевыми условиями, соответствующими бегущей волне, которые приведены выше (формулы (6.8 – 6.13)). На рис. 6.17 приведены результаты этих расчетов.

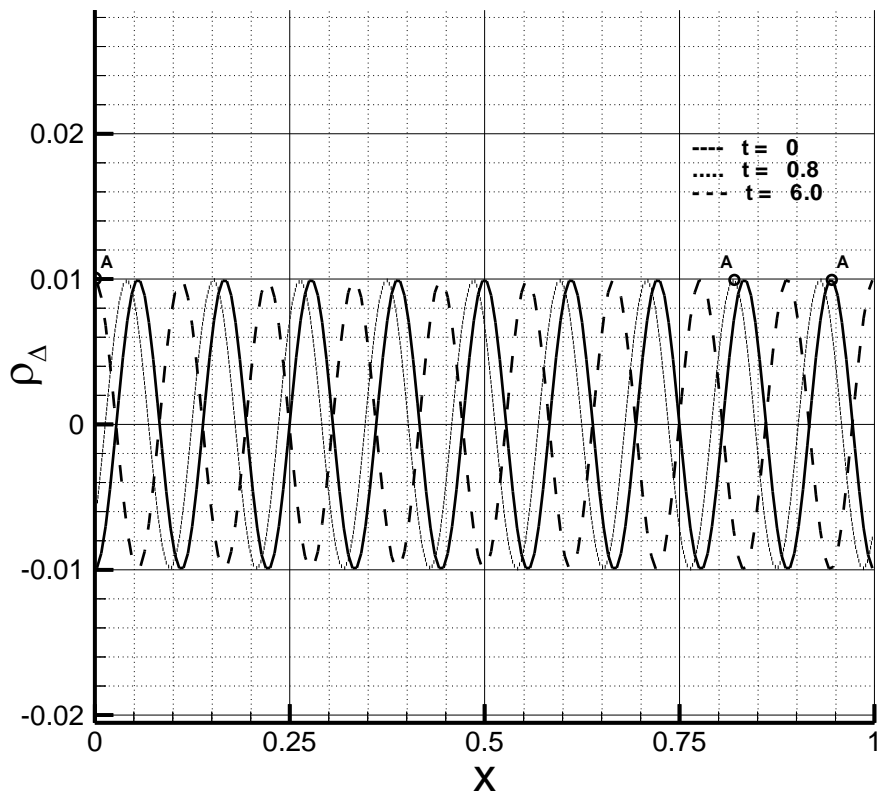


Рис. 6.16. Бегущая волна «тяжелого» звука,  $\lambda < \lambda_J$ ,  $T \neq 0^0\text{K}$ .

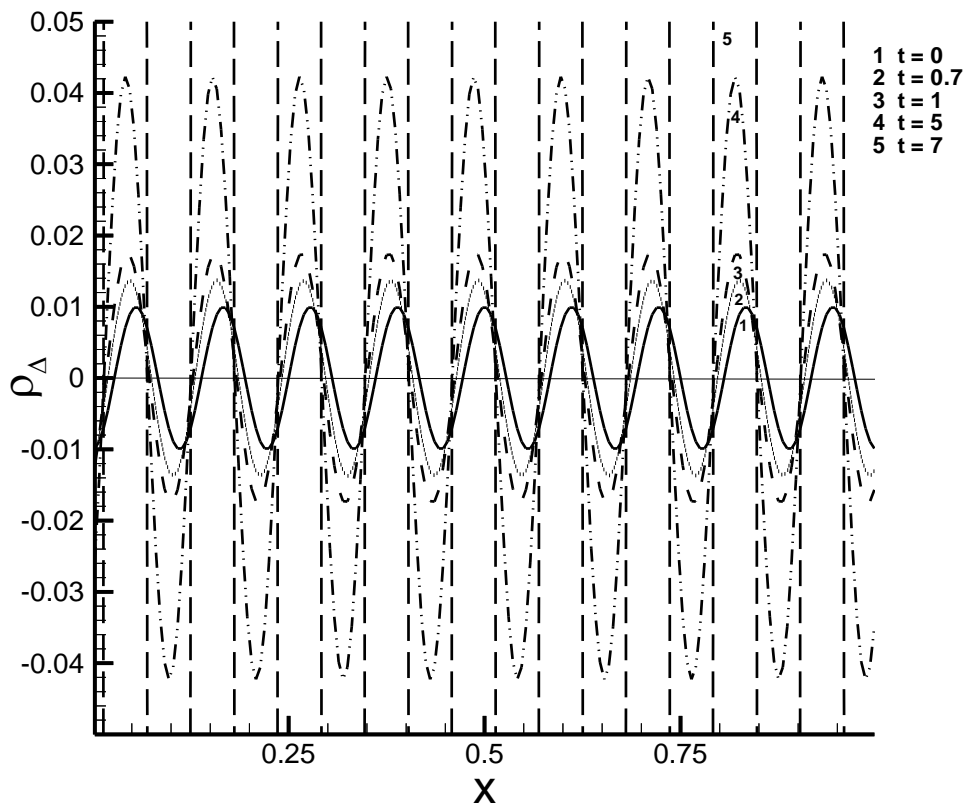


Рис. 6.17. Волны гравитационной неустойчивости ( $\lambda > \lambda_J$ ) при начальных и краевых условиях, соответствующих бегущей волне, на временах  $0 \leq t \leq 7$ .

Видно, что в начальные моменты времени ( $t \leq 1$ ), когда только начинает развиваться гравитационная неустойчивость, волна возмущения плотности начинает двигаться. Но при возрастании амплитуды волнового возмущения движение волны прекращается и фазовая скорость волны гравитационной неустойчивости становится равной нулю. Итак, в диапазоне  $\lambda > \lambda_J$  независимо от начальных и граничных условий возникает волна гравитационной неустойчивости с фазовой скоростью, равной нулю.

Таким образом, исследования показывают, что бесконечная однородная изотропная гравитирующая газовая среда при конечной температуре ( $T \neq 0^0\text{K}$ ) имеет следующие особенности:

- в этой среде также могут возникать гравитационные неустойчивости как при локализованных начальных возмущениях плотности в виде одиночных возмущений, так и при волновых начальных возмущениях плотности в виде волн гравитационной неустойчивости;
- волны гравитационной неустойчивости в этой среде описываются в рамках модели Джинса [10]. Существующая критическая длина волны Джинса ( $\lambda_J$ ) разделяет области устойчивых ( $\lambda < \lambda_J$ ) и неустойчивых ( $\lambda > \lambda_J$ ) начальных возмущений;
- возникающие в этой среде одиночные гравитационные неустойчивости не могут быть описаны в рамках модели Джинса [10], так как в этом случае область гравитационно неустойчивых локализованных начальных возмущений распространяется и на область  $\lambda < \lambda_J$ ;
- характерные пространственные размеры одиночных возмущений увеличиваются с течением времени;
- возникающие в этой среде неустойчивости типа волн гравитационной неустойчивости представляют собой аналог протопланетных колец в протопланетном диске Солнца.

## 7. Анализ и обсуждение результатов исследований

1. Результаты численных расчетов показали, что «холодная» ( $T \rightarrow 0^0\text{K}$ ) однородная изотропная бесконечная газовая среда гравитационно неустойчива к любым видам возмущений ее плотности: как к возмущениям в виде волн, так и к локализованным (одиночным) начальным возмущениям. Зарождение гравитационных неустойчивостей в такой среде не зависит ни от длины волны при волновых возмущениях, ни от пространственных размеров локализованных начальных возмущений. Нарастание плотности возмущения в каждой его точке происходит во времени по экспоненциальному закону:  $\sim e^{\omega_J t}$ , где  $\omega_J = \sqrt{4\pi G \rho_0}$ . Хотя плотность локализованного начального возмущения возрастает во времени по экспоненциальному закону, его характерный пространственный размер остается постоянным (не «размывается»). В этих условиях гравитационной неустойчивости среды форма локализованного начального возмущения с течением времени также сохраняется неизменной:

возмущение прямоугольной формы остается прямоугольным, синусоидальная волна сохраняет свою синусоидальную форму и т.д. Перечисленные особенности поведения гравитационных неустойчивостей объясняются тем, что температура, препятствующая образованию гравитационных неустойчивостей, в этом случае стремится к нулю.

2. В отличие от «холодной» среды, из численных расчетов следует, что однородная изотропная бесконечная газовая среда при конечной температуре ( $T \neq 0^0\text{K}$ ) может быть гравитационно устойчива к определенным видам возмущения ее плотности. Так, волны гравитационной неустойчивости следуют закономерностям модели Джинса, в которой существует критическая длина волны Джинса ( $\lambda_J$ ), разделяющая области устойчивых ( $\lambda < \lambda_J$ ) и неустойчивых ( $\lambda > \lambda_J$ ) начальных волновых возмущений плотности.

По результатам проведенных численных расчетов реакция однородной гравитирующей среды на локализованные начальные возмущения ее плотности существенно отличается от закономерностей модели Джинса. Гравитационная неустойчивость одиночных возмущений плотности распространяется и на область  $\lambda < \lambda_J$ , хотя в этом случае нарастание плотности возмущений существенно меньше, чем при  $\lambda > \lambda_J$ . По нашим представлениям, это объясняется тем, что теория Джинса исходит из начальных возмущений плотности среды в виде синусоидальной (гармонической) волны, простирающейся на всю однородную среду. При локализованных (одиночных) начальных возмущениях плотности задача о движении среды существенно отличается от задачи в постановке Джинса. По существу это другая краевая задача, решение которой не совпадает с решением Джинса, что и приводит к результатам, представленным в данной работе. Таким образом, результаты, полученные для локализованных начальных возмущений плотности среды, строго говоря, не находятся в противоречии с теорией Джинса.

Следующими особенностями однородной среды при конечной температуре в области гравитационной неустойчивости, наряду с нарастанием плотности начального одиночного возмущения, являются увеличение характерного пространственного размера самого возмущения, а также изменение его формы. Это факты объясняются влиянием температуры, которая противодействует возникновению гравитационной неустойчивости.

3. В теории образования планетных систем существует гипотеза возникновения протопланетных колец [8, 17, 1, 3, 5, 6, 7]. Данное явление также связано с гравитационной неустойчивостью среды, но не однородной и изотропной, а протопланетного диска в начальной стадии его образования, вращающегося вокруг звезды. По данным работы [1] гравитационная неустойчивость протопланетного диска Солнца могла возникнуть за счет волны возмущения, которая описывается формулой (1). Весьма важно понять, могут ли подобные явления возникать в гравитирующих средах другой конфигурации. В случае отрицательного ответа можно поставить под сомнение образование таких неустойчивостей и в протопланетном диске. Данные

исследования подтвердили, что в гравитирующей однородной изотропной среде могут возникать волны гравитационной неустойчивости, амплитуда которых растёт экспоненциально, а максимумы и минимумы этой волны, как и ее узловые точки сохраняют свое положение в пространстве. Это явление может возникать как в «холодной» среде, так и в среде при конечной температуре. Такое образование по своей природе подобно нарастающим со временем кольцеобразным возмущениям плотности протопланетного диска Солнца (протопланетным кольцам).

4. В работе изучалось прохождение звуковых колебаний плотности через однородную гравитирующую среду при конечной температуре в диапазоне волн как  $\lambda < \lambda_J$ , так и  $\lambda > \lambda_J$ . Было показано, что в диапазоне волн  $\lambda < \lambda_J$  могут образовываться стоячие волны (3.25), а также распространяться волны в виде бегущей волны при соответствующих начальных и краевых условиях. Бегущая волна реализуется в виде волны «тяжелого» звука (3.29, 3.31). Отличительной особенностью волны «тяжелого» звука является уменьшение фазовой скорости этой волны при увеличении  $\lambda$ . При  $\lambda = \lambda_J$  фазовая скорость волны «тяжелого» звука становится равной нулю и волна вырождается в стационарную волну (3.24).

Стоячая волна в наших исследованиях является стоячей волной «тяжелого» звука. При заданных  $\lambda$  и  $\lambda_J$  частота стоячей волны «тяжелого» звука равна частоте бегущей волны «тяжелого» звука. При достижении  $\lambda = \lambda_J$  в стационарную волну вырождается и стоячая волна.

В диапазоне длин волн  $\lambda > \lambda_J$  волны в виде стоячей и бегущей волн «тяжелого» звука существовать не могут. В этой области при возмущении среды возникает волна гравитационной неустойчивости (3.13). Причем фазовая скорость установившейся волны гравитационной неустойчивости равна нулю и не зависит при численных расчетах от граничных и начальных условий. Этот интересный факт объясняется гравитационным подавлением звука возникающими массами газа гравитационных неустойчивостей.

5. В проведенных исследованиях однородная среда рассматривалась как однокомпонентный идеальный газ. Данное приближение справедливо и для протопланетного диска Солнца в начальной стадии его эволюции. В работах [23, 3, 24] была предложена альтернативная модель образования планетной системы Солнца, основанная на принципах крупномасштабной гравитационной неустойчивости с образованием протопланетных колец, из которых в дальнейшем формируются планеты. При образовании протопланет не все вещество протопланетного диска будет захвачено этим процессом. В части вещества, которая осталась вне протопланетных колец и далее вне протопланет, пылевые частицы, сталкиваясь между собой, растут и оседают в экваториальной плоскости диска. Динамика и рост этих частиц описывается теорией твердотельной аккумуляции [18]. Рост плотности пылевой компоненты в районе экваториальной плоскости может создать условия, при которых пылевая компонента по плотности преобладает над газовой компонентой, как

это и предполагал В.С. Сафронов [25]. В этом случае, как было показано в работе [1], дисперсионное уравнение соответствует «холодному» газу. Согласно этому уравнению гравитационной неустойчивостью обладают и возмущения с короткой длиной волны, что может привести к образованию из пылевой компоненты, оставшейся вне протопланет, твердых тел различных размеров, включая и малые [7].

Как показали проведенные исследования, однородная изотропная среда в большей степени гравитационно неустойчива, чем среда протопланетного диска. Дисперсионные уравнения в случае как «холодной» однородной изотропной среды (2.4), так и однородной изотропной среды при конечной температуре (3.4), естественно, не содержат слагаемого с угловой скоростью вращения, которая ограничивает зарождение гравитационных неустойчивостей. Зарождение гравитационных неустойчивостей в «холодной» однородной изотропной среде не зависит ни от длины волны при волновых возмущениях, ни от характерных пространственных размеров одиночных возмущений. Таким образом, результаты, полученные при исследованиях «холодной» однородной изотропной среды, подтверждают возможность образования из пылевой компоненты твердых тел различных размеров, включая и малые.

6. К настоящему времени, вероятно, преждевременно говорить о завершенности модели образования планетной системы Солнца. Наряду с теориями образования планетной системы, такими как: образование планет путем аккумуляции твердых тел и частиц [18], образование протопланет путем столкновения и объединения газопылевых сгущений [22], образование планет путем возникновения волны возмущения на масштабах всего диска, которая приводит к формированию протопланетных колец и впоследствии самих планет вследствие крупномасштабной гравитационной неустойчивости диска [23, 3, 24], существуют и гипотезы образования некоторых планет солнечной системы, например Юпитера, путем образования в виде отдельной протопланеты [26]. Поэтому для рассмотрения возможных сценариев образования планет Солнечной системы необходимо знать условия зарождения гравитационных неустойчивостей разного типа и их динамику. Результаты таких исследований для однородной изотропной среды представлены в данной работе. На наш взгляд, в этих исследованиях следует обратить внимание на следующий результат. Было показано, что неустойчивость локализованных (одиночных) начальных возмущений распространяется и на область  $\lambda < \lambda_J$ . Таким образом, расширяются границы возможного образования одиночных гравитационных неустойчивостей в однородной среде. Если такое явление имеет место и в протопланетном диске, то это может существенно повысить вероятность образования одиночного протопланетного кольца и, как следствие, привести к образованию из этого кольца отдельной протопланеты.

7. В работе [5] была введена критическая плотность протопланетного диска, как минимальная плотность, при которой может возникнуть



гравитационная неустойчивость при учете возмущений во всем диапазоне возможных длин волн. Это определение будем считать справедливым и для однородной газовой среды. Если среда протопланетного диска имеет распределение плотности пылевой компоненты, близкое к однородному, и содержание пыли по массе не превышает несколько процентов, то усредненные параметры такой среды с достаточной точностью описываются уравнением состояния идеального газа [18, 9, 27]. Примем, что в наших исследованиях однородная газовая среда также является идеальным газом. Тогда конфигурация волновых начальных возмущений плотности однородной изотропной газовой среды, которая была исследована в настоящей работе, позволяет оценить критическую плотность протопланетного диска Солнца без учета стабилизирующего влияния вращательного движения диска на его гравитационную устойчивость. Действительно, гравитационная неустойчивость однородной изотропной газовой среды изучалась при таких волновых начальных возмущениях плотности, когда на расстоянии, равном ширине протопланетного диска, укладывалось девять длин волн, что соответствовало числу планет Солнечной системы, включая Пояс Астероидов. Так как в однородной среде волна гравитационной неустойчивости наблюдается в виде гармонической волны, то эта оценка может дать только усредненное значение критической плотности протопланетного диска Солнца, что и в таком приближении представляет несомненный интерес. Оценку критической плотности ( $\rho_{o,кр}$ ) проведем, используя выражение для критической длины волны Джинса, из которого следует [5]:

$$\rho_{o,кр} = \frac{\gamma RT}{\mu \lambda_j^2} \frac{\pi}{G} = \frac{\pi \gamma RT}{\mu G \lambda_j^2}, \quad (7.1)$$

где

$R$  – газовая постоянная, эрг·град<sup>-1</sup>·моль<sup>-1</sup>;

$T$  – температура газовой среды протопланетного диска, °К;

$\mu$  – молекулярный вес газовой среды диска, г/моль;

$\gamma$  – отношение  $C_p/C_v$  газовой среды диска (показатель адиабаты)

$G$  – гравитационная постоянная, см<sup>3</sup>/(г·сек<sup>2</sup>).

Если на пылевые частицы приходится по массе около 1,5% вещества солнечного состава, то молекулярный вес для такой среды равен 2,53 г/моль, а показатель адиабаты – 1,43 [9]. Согласно современным представлениям температура газовой среды, например, для зоны Земли в начальной стадии эволюции протопланетного диска составляла  $T \sim 300^\circ\text{K}$ , а плотность  $\sim 3 \cdot 10^{-9}$  г/см<sup>3</sup> [18]. Усредняя данные по температурам для всех зон, получим среднюю температуру диска в его экваториальной плоскости  $\approx 150^\circ\text{K}$ . В наших расчетах было принято:

$$\lambda_{безр} = \frac{\lambda}{r_{ex}} = \frac{1}{9}.$$

Для оценки критической плотности, которая соответствует образованию девяти пиков гравитационных неустойчивостей в однородной среде на расстоянии, равном радиусу диска, полагаем:

$$\lambda_J \approx \lambda = \frac{r_{ex}}{9} \approx 6,57 \cdot 10^{13} \text{ см.} \quad (7.2)$$

$$T \approx 150^0\text{К},$$

$$\gamma = 1,43,$$

$$\mu = 2,53 \text{ г/моль},$$

$$G = 6.673 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{сек}^2),$$

$$r_{ex} = 0.591 \cdot 10^{15} \text{ см},$$

$$R = 8,31434 \cdot 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}.$$

Подставляем значения переменных и параметров в формулу (7.1) и находим критическую плотность:

$$\rho_{o,kr} \approx 7,7 \cdot 10^{-11} \text{ г/см}^3. \quad (7.3)$$

Данное значение критической плотности примерно на порядок больше приведенного в работе [5]. Это объясняется тем, что в настоящей оценке значение  $\lambda_J$  приблизительно в 4 раза меньше значения  $\lambda_J$ , взятого в работе [5] равным полуширине протопланетного диска Солнца.

Принципиально важное значение имеет сопоставление критической плотности диска, полученной в рамках модели крупномасштабных неустойчивостей [23, 3, 24], с результатами теории образования планет путем аккумуляции твердых тел и частиц [18, 25]. Критическая плотность (7.3), при которой возникает крупномасштабная гравитационная неустойчивость, примерно на четыре порядка меньше критической плотности ( $\rho_{kr} \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ г/см}^3$ ), полученной в рамках теории [18, 25], и на два порядка меньше плотности ( $\sim 3 \cdot 10^{-9} \text{ г/см}^3$ ) газовой среды в зоне Земли [18].

Таким образом, представленная оценка критической плотности дает основание утверждать, что при рассмотрении гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца необходимо принимать во внимание возможное развитие крупномасштабных неустойчивостей, как неустойчивостей, которые зарождаются при наименьшей критической плотности из всех возможных. При этом длина волны крупномасштабных неустойчивостей может быть сопоставима с расстоянием между планетами.

Известно, что вращение среды диска в определенной степени подавляет гравитационную неустойчивость [25]. Учет влияния вращения среды диска на его критическую плотность будет рассмотрен в последующих препринтах (часть II, часть III)

### Заключение

Настоящая работа посвящена гравитационной неустойчивости бесконечной однородной изотропной газовой среды. Целью работы было

установление характерных закономерностей гравитационных неустойчивостей этой среды с помощью методов численного моделирования. Изучались как одиночные гравитационные неустойчивости, так и гравитационные неустойчивости в виде волн.

Показано, что при определенных условиях начальные волновые возмущения плотности однородной изотропной среды могут приводить к волнам гравитационной неустойчивости. Волны гравитационной неустойчивости в этой среде описываются теорией Джинса [10]. Образование такого типа гравитационных неустойчивостей в однородной изотропной среде дает основание предполагать, что подобные структуры могут появляться и в гравитирующих средах более сложной конфигурации. Действительно, например, в протопланетных дисках предсказано появление протопланетных колец [8, 17, 1, 3, 5, 6, 7], которые можно трактовать как результат гравитационной неустойчивости в виде волны в протопланетном диске [1, 2].

В исследованиях локализованных (одиночных) начальных возмущений плотности однородной среды было установлено, что они также могут приводить к гравитационным неустойчивостям, но имеют свои особенности по сравнению с волновыми возмущениями. Так, возникающие в однородной среде при конечной температуре одиночные неустойчивости не представляется возможным описать в рамках модели Джинса [10], так как область неустойчивых начальных возмущений распространяется и на область  $\lambda < \lambda_J$ . Характерные пространственные размеры одиночных возмущений плотности в «холодной» однородной среде остаются постоянными в зависимости от времени, а в среде при конечной температуре увеличиваются во времени («размываются» со временем).

В работе изучалось прохождение звуковых колебаний плотности через однородную гравитирующую среду при конечной температуре. Установлено подавление звука гравитационными неустойчивостями в области  $\lambda > \lambda_J$ .

По результатам расчетов проведена оценка критической плотности протопланетного диска. В рассмотренном приближении показано, что критическая плотность (7.3) протопланетного диска Солнца, при которой возникает крупномасштабная гравитационная неустойчивость, примерно на четыре порядка меньше критической плотности ( $\rho_{кр} \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ г/см}^3$ ), полученной в рамках теории [18, 25].

В ходе работы также проводилась отработка методов численного моделирования с тем, чтобы использовать их в гравитирующих средах более сложной конфигурации.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В.Т. Жукову, К.В. Брушлинскому, И.С. Меньшову, Е.А. Забродиной за интерес к работе и полезные обсуждения. Авторы также выражают искреннюю признательность М.С. Гавреевой за помощь в оформлении работы.

### Библиографический список

1. Поляченко В. Л., Фридман А.М. О законе планетных расстояний // Астр. ж. 1972. Т. 49. № 1. С. 157.
2. Поляченко В. Л., Фридман А.М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: «Наука». 1976.
3. Забродин А.В., Забродина Е.А., Легкоступов М.С., Мануковский К.В., Плинер Л.А. Некоторые модели описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 70. 44 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2006-70>
4. Брушлинский К.В., Долголева Г.В., Жуков В.Т., Забродина Е.А., Легкоступов М.С., Меньшов И.С., Плинер Л.А. К вопросу об эволюции протопланетного диска Солнца // Проблемы зарождения и эволюции биосферы. / Научный сборник под ред. академика Э.М. Галимова. М.: «Красанд». 2013. С. 33 – 46.
5. Легкоступов М.С. К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца. Часть I. Постановка задачи // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 34. 19 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-34>
6. Легкоступов М.С. К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца. Часть II. Дисперсионные уравнения // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 35. 33 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-35>
7. Легкоступов М.С. К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца. Часть III. К развитию и обоснованию модели // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 36. 24 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-36>
8. Происхождение солнечной системы // Сборник статей под редакцией Г.Ривса. М.: «Мир». 1976.
9. Макалкин А. Б., Дорофеева В. А. Строение протопланетного аккреционного диска вокруг Солнца на стадии Т Тельца // Астр. вест. Исследования Солнечной системы. 1995. Т. 29. № 2. С.99.
10. Jeans J. H. Astronomy and cosmogony. Cambridge. 1929.
11. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Релятивистская астрофизика. М.: «Наука». 1967.
12. Лифшиц Е.М. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 587.
13. Vonnor W. B. // Appl. Math. 1967. V. 8. P. 263.
14. Бонд Дж., Уотсон К., Уэлч Дж. Физическая теория газовой динамики. М.: «Мир». 1968.
15. Баум Ф.А., Каплан С.А., Станюкович К.П. Введение в космическую газодинамику. М.: Издательство физ.-мат. Литературы. 1958.
16. Горбацкий В.Г. Космическая газодинамика. М.: «Наука». 1977.
17. Ebert R. Habilitationsschrift. Un. f. Frankfurt-am-Main. 1964.
18. Витязев А.В., Печерникова Г.В., Сафронов В.С. Планеты земной группы:

- Происхождение и ранняя эволюция. М.: «Наука». 1990.
19. Сурдин В.Г. Рождение звезд. М.: «Эдиториал УРСС». 1999.
  20. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. 1973.
  21. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: «Высшая школа». 1970.
  22. Энеев Т.М., Козлов Н.Н. Модель аккумуляционного процесса формирования планетных систем // Астр. вест. 1981. Т. XV. № 2. С. 80-94; № 3. С. 131-140.
  23. Отчет ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Численное моделирование эволюции протопланетного диска Солнца на начальной ее стадии. Программа № 25 фундаментальных исследований Президиума РАН. М.. 2006, инв. № 8-3-06.
  24. Забродин А.В., Забродина Е.А., Легкоступов М.С., Мануковский К.В., Плинер Л.А. Некоторые модели описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции // Проблемы зарождения и эволюции биосферы. (Под ред. Э.М. Галимова). М.: «Либроком». 2008. С. 297-316.
  25. Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: «Наука». 1969.
  26. Кусков О.Л., Дорофеева В.А., Кронрод В.А., Макалкин А.Б. Системы Юпитера и Сатурна: Формирование, состав и внутреннее строение крупных спутников. ЛКИ. 2009.
  27. Отчет ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Механизм аккумуляции планетарных тел. Программа № 25 фундаментальных исследований Президиума РАН. М.. 2004.