ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 54 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Голубев Ю.Ф.

Нестационарная модель возмущенной динамики прямоугольного плота на спокойной воде

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Голубев Ю.Ф. Нестационарная модель возмущенной динамики прямоугольного плота на спокойной воде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 54. 18 с. doi:10.20948/prepr-2016-54
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-54

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Ю.Ф. Голубев

Нестационарная модель возмущенной динамики прямоугольного плота на спокойной воде

Москва – 2016

УДК 531.38

Голубев Ю.Ф. **Нестационарная модель возмущенной динамики прямоугольного плота на спокойной воде**

Предложена полная математическая модель нестационарного пространственного движения прямоугольного плота под действием активных сил, архимедовой силы и сил сопротивления воды движению. При этом сила сопротивления воды помимо слагаемого, учитывающего вязкость, содержит слагаемое, пропорциональное квадрату величины скорости и направленное противоположно вектору скорости. При условии что под действием всех сил плот остается на плаву, исследована устойчивость по первому приближению для стационарных движений, возникающих вследствие приложения простейших активных сил.

Ключевые слова: уравнения движения, плот, архимедова сила, сопротивление воды, устойчивость

Yury Filippovich Golubev. **Non-Stationary Model of Perturbed Dynamics of a Rectangular Raft on a Calm Water**

There is proposed a full mathematical model for spatial non-stationary motion of the raft of the rectangular form under the action of active forces, of Archimedean forces and resistance forces of water from movement. The force of water resistance in addition to the summand that takes into account the viscosity, contains a summand proportional to the square of the velocity and directed opposite to the velocity vector. Under the assumption that under the action of all the forces the raft remains afloat, there is studied the stability of a first approximation relatively of the steady motions which are arising due to the application of mostly simple active forces.

Key words: equations of motion, raft, buoyancy force, water resistance, stability

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ: 16-01-00131).

Содержание

Введение

Исследование свойств алгоритмов управления движущимися объектами средствами компьютерного моделирования предполагает использование динамических свойств не только самого движущегося объекта, но и элементов среды, с которыми объект будет взаимодействовать [1]. В работах [2, 3] при моделировании движения робота на свободно катающихся шарах использовались модель сухого трения при взаимодействии стоп ног робота с шарами и модель трения качения шаров по плоскости.

Если наземный автономный мобильный робот не имеет плавучести и не приспособлен к функционированию в водной среде, то для преодоления препятствий в виде достаточно широкой водной преграды ему потребуется использование плавающих предметов. Одним из таких простейших и естественных предметов может служить прямоугольный плот, имеющий достаточную горизонтальную поверхность. В [4] для постановки необходимых многочисленных компьютерных экспериментов по исследованию динамики движения плота при его взаимодействии с активно перемещающимся по нему мобильным роботом предложена достаточно простая и вместе с тем правдоподобная математическая модель сил воздействия воды на нестационарно движущийся плот. Она допускает возможность оперативного изменения как самой формы плота и его гидродинамических свойств, так и характеристик движения плота относительно его центра масс вместе с движением центра масс при перемещении по нему дополнительной нагрузки. Указанная модель служит развитием на нестационарный случай общепринятых моделей, часто применяемых на практике для учета сил сопротивления воды, и помимо архимедовой силы учитывает действие вязкого трения, а также волнового сопротивления и сопротивления формы [5, 6].

Ниже предлагается полная математическая модель нестационарной пространственной динамики плота под действием активных сил, архимедовой силы и сил сопротивления воды движению плота [4]. По первому приближению исследуется устойчивость стационарных движений, возникающих вследствие приложения типичных активных сил. Полученные результаты в определенной мере демонстрируют правдоподобность предложенных моделей движения плота на поверхности воды.

1. Уравнения движения плота на спокойной воде

Как и в работе [4], предполагается, что однородный плот в форме прямоугольного параллелепипеда находится на спокойной поверхности воды под действием вертикальной нагрузки $\mathbf{F}$, силового момента $\mathbf{M}$ относительно центра масс C_p плота и архимедовой силы. Размеры плота: $2a$ – длина, $2b$ – ширина, $2d$ – толщина. Удельный вес воды обозначим γ. Под действием указанных сил плот будет находиться в равновесии в некотором положении относительно уровня спокойной воды. Выберем неподвижный декартов репер $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ так, что единичный горизонтальный вектор $\mathbf{e}_1$ направлен по длине ненагруженного плота, единичный горизонтальный вектор $\mathbf{e}_2$ – по его ширине, а единичный вектор $\mathbf{e}_3$ – вертикально вверх, когда плот находится на поверхности воды под действием только силы тяжести и архимедовой силы. В качестве начала координат O назначим вертикальную проекцию на поверхность воды центра масс C_p ненагруженного плота в некоторый начальный момент времени. С плотом жестко свяжем подвижный декартов репер $C_p\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ так, чтобы направления единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ соответственно совпали в положении ненагруженного плота. Под действием силы $\mathbf{F}$ и момента $\mathbf{M}$ плот примет наклонное положение. Для наклонного положения плота направляющие векторы свяжем соотношениями

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\mathbf{e}'_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

где коэффициенты (a_{ij}) образуют ортогональную матрицу. Пусть центр масс плота смещен относительно уровня воды на расстояние ζ. Другими словами, если $\zeta > 0$, то центр масс плота погружен в воду, а если $\zeta < 0$, то центр масс плота находится над водой. В [4] показано, что суммарная архимедова сила $\mathbf{F}_a$ и ее суммарный момент $\mathbf{M}_a$ вычисляются с помощью выражений

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}_a = \gamma\mathbf{e}_3(\zeta + d)4ab = \gamma(\zeta + d)4ab(a_{31}\mathbf{e}'_1 + a_{32}\mathbf{e}'_2 + a_{33}\mathbf{e}'_3), \\ &\mathbf{M}_a = \gamma[(I_y a_{33} - I_z a_{32})\mathbf{e}'_1 + (I_z a_{31} - I_x a_{33})\mathbf{e}'_2 + (I_x a_{32} - I_y a_{31})\mathbf{e}'_3], \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$\begin{aligned} I_x &= -\frac{4a_{31}}{3a_{33}}a^3 b, \\ I_y &= -\frac{4a_{32}}{3a_{33}}ab^3, \\ I_z &= \frac{ab}{2}\left(\zeta^2 - d^2 + \frac{4a_{31}^2 a^2}{3a_{33}^2} + \frac{4a_{32}^2 b^2}{3a_{33}^2}\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Для силы $\mathbf{R}$ и момента $\mathbf{N}$ сопротивления воды относительно центра масс плота C_p имеем выражения [4]

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^d + \mathbf{A}^a + \mathbf{A}^b, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B}^d + \mathbf{B}^a + \mathbf{B}^b, \tag{1.3}$$

где

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}^d = -æ \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b} \mathbf{v}dxdy - \mathbf{e}_3' \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b} (æ_1|v_z| - æ)v_z dydx,\\
&\mathbf{A}^a = -æ_1\mathbf{e}_2' \int\limits_{-d}^{\zeta_0}\int\limits_{-a}^{a} |v_y|v_y dxdz, \quad \mathbf{A}^b = -æ_1\mathbf{e}_1' \int\limits_{-d}^{\zeta_0}\int\limits_{-b}^{b} |v_x|v_x dydz,\\
&\mathbf{B}^d = -æ \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b} \boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{v}dydx - \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b} \boldsymbol{\rho}_d \times \mathbf{e}_3'(æ_1|v_z| - æ)v_z dydx,\\
&\mathbf{B}^a = -æ_1 \int\limits_{-d}^{\zeta_0}\int\limits_{-a}^{a} \boldsymbol{\rho}_a \times \mathbf{e}_2'|v_y|v_y dxdz, \ \mathbf{B}^b = -æ_1 \int\limits_{-d}^{\zeta_0}\int\limits_{-b}^{b} \boldsymbol{\rho}_b \times \mathbf{e}_1'|v_x|v_x dydz,
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{e}_1' + q\mathbf{e}_2' + r\mathbf{e}_3'$ есть угловая скорость плота в репере $C_p\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$, $\mathbf{v}_p$ – скорость центра C_p плота. Расчетные формулы для интегралов, входящих в правые части выражений (1.4), можно найти в [4].

Будем считать, что репер $C_p\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ соответствует главным центральным осям инерции плота, а его главные моменты инерции равны A, B, C соответственно. С учетом формул (1.1), (1.3) динамические уравнения плота имеют вид

$$
\begin{aligned}
&M\ddot{\mathbf{r}}_c = \gamma(\zeta + d)4ab\mathbf{e}_3 + \mathbf{F} + \mathbf{R},\\
&A\dot{p} + (C - B)qr = -a_{32}s_1 + M_x + N_x,\\
&B\dot{q} + (A - C)pr = a_{31}s_2 + M_y + N_y,\\
&C\dot{r} + (B - A)pq = -\gamma\frac{4a_{31}a_{32}ab}{3a_{33}}(a^2 - b^2) + M_z + N_z,\\
&\dot{a}_{31} = a_{33}q - a_{32}r,\\
&\dot{a}_{32} = a_{31}r - a_{33}p,\\
&\dot{a}_{33} = a_{32}p - a_{31}q,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

где

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \gamma ab\left\{\frac{2}{3}\left[\left(2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2}\right)b^2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2}a^2\right] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2)\right\},\\
s_2 &= \gamma ab\left\{\frac{2}{3}\left[\left(2 + \frac{a_{31}^2}{a_{33}^2}\right)a^2 + \frac{a_{32}^2}{a_{33}^2}b^2\right] + \frac{1}{2}(\zeta^2 - d^2)\right\}.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

В общем случае, чтобы замкнуть систему (1.5), к ней следует добавить еще шесть кинематических уравнений вида

$$
\begin{aligned}
&\dot{a}_{11} = a_{13}q - a_{12}r, \quad \dot{a}_{21} = a_{23}q - a_{22}r,\\
&\dot{a}_{12} = a_{11}r - a_{13}p, \quad \dot{a}_{22} = a_{21}r - a_{23}p,\\
&\dot{a}_{13} = a_{12}p - a_{11}q, \quad \dot{a}_{33} = a_{22}p - a_{21}q
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

или использовать соотношения [4]

$$
\begin{aligned}
&a_{11} = \left(1 - \frac{a_{31}^2}{1+a_{33}}\right), \quad a_{12} = -\frac{a_{31}a_{32}}{1+a_{33}}, \qquad a_{13} = -a_{31},\\
&a_{21} = -\frac{a_{31}a_{32}}{1+a_{33}}, \qquad a_{22} = \left(1 - \frac{a_{32}^2}{1+a_{33}}\right), \quad a_{23} = -a_{32},\\
&a_{31}, \qquad a_{32}, \qquad a_{33},
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

которые в рассматриваемом диапазоне угловых отклонений плота (плот не переворачивается: $a_{33} > 0$) не имеют вырождений.

Непосредственная проверка с применением уравнений (1.7) подтверждает, что при выполнении условия согласования [4]

$$
a_{31}M_x + a_{32}M_y + a_{33}M_z = 0, \tag{1.9}
$$

которое означает, что проекция силового момента на направление вертикали отсутствует, и æ $=$ æ$_1 = 0$, система (1.5) допускает первый интеграл

$$
K_e = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{K} = Apa_{31} + Bqa_{32} + Cra_{33} = c, \tag{1.10}
$$

где $\mathbf{K}$ – кинетический момент плота, а c – соответствующая постоянная интегрирования. В том случае, если условие согласования (1.9) выполнено, но æ $\neq 0$, либо æ$_1 \neq 0$, проекция $K_e = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{K}$ кинетического момента на вертикальную ось подчиняется уравнению

$$
\dot{K}_e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_3. \tag{1.11}
$$

Если условие согласования (1.9) не выполнено и æ $\neq 0$, либо æ$_1 \neq 0$, то изменение проекции кинетического момента на вертикальную ось описывается уравнением

$$
\dot{K}_e = (\mathbf{M} + \mathbf{N}) \cdot \mathbf{e}_3, \tag{1.12}
$$

которое при желании можно применить вместо четвертого уравнения системы (1.5).

Для приближенного анализа свойств системы (1.5) примем предположение о малости угловых отклонений плота от его невозмущенного исходного положения:

$$
\begin{aligned}
&a_{11} \approx 1, \qquad a_{12} \approx -\alpha_3, \quad a_{13} \approx \alpha_2,\\
&a_{21} \approx \alpha_3, \qquad a_{22} \approx 1, \qquad a_{23} \approx -\alpha_1,\\
&a_{31} \approx -\alpha_2, \quad a_{32} \approx \alpha_1, \qquad a_{33} \approx 1.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Тогда $p = \dot{\alpha}_1$, $q = \dot{\alpha}_2$, $r = \dot{\alpha}_3$. Предположим также, что малы скорости $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ и отклонение $\tilde{\zeta} = \zeta - \zeta_0$ по вертикали центра масс от его равновесного положения. Кроме того, будем считать, что внешние силы и моменты не зависят от смещения центра масс плота, но могут зависеть от поворотов плота. Тогда квадратичные по скоростям члены в выражениях для сил сопротивления и их моментов пропадают, что можно учесть, положив в формулах (1.4) $æ_1 = 0$. Затем необходимо выполнить линеаризацию правых частей уравнений (1.5) относительно нулевых значений переменных. С учетом формул работы [4] линеаризованная система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}
&M\ddot{\xi} = \alpha_1 h_{11} + \alpha_2 h_{12} + \alpha_3 h_{13} + \dot{\alpha}_2 h_{14} - \dot{\xi} h_{15} + F_{\xi}^{(0)},\\
&M\ddot{\eta} = \alpha_1 h_{21} + \alpha_2 h_{22} + \alpha_3 h_{23} - \dot{\alpha}_1 h_{24} - \dot{\eta} h_{25} + F_{\eta}^{(0)},\\
&-M\ddot{\tilde{\zeta}} = \tilde{\zeta} h_{30} + \alpha_1 h_{31} + \alpha_2 h_{32} + \alpha_3 h_{33} + \dot{\zeta} h_{34} + F_{\zeta}^{(0)},\\
&A\ddot{\alpha}_1 = -\alpha_1 b_{11} + \alpha_2 b_{12} + \alpha_3 b_{13} - \dot{\alpha}_1 b_{14} - \dot{\eta} b_{15} + M_x^{(0)},\\
&B\ddot{\alpha}_2 = \alpha_1 b_{21} - \alpha_2 b_{22} + \alpha_3 b_{23} - \dot{\alpha}_2 b_{24} + \dot{\xi} b_{25} + M_y^{(0)},\\
&C\ddot{\alpha}_3 = \alpha_1 b_{31} + \alpha_2 b_{32} + \alpha_3 b_{33} - \dot{\alpha}_3 b_{34} + M_z^{(0)},
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где коэффициенты h_{ij}, b_{ij}, $i, j = \overline{1,3}$ выражаются формулами

$$\begin{aligned}
&h_{11} = \frac{\partial F_\xi}{\partial \alpha_1}, \quad h_{12} = \frac{\partial F_\xi}{\partial \alpha_2}, \quad h_{13} = \frac{\partial F_\xi}{\partial \alpha_3}, \quad h_{14} = 2æabd, \quad h_{15} = 4æab,\\
&h_{21} = \frac{\partial F_\eta}{\partial \alpha_1}, \quad h_{22} = \frac{\partial F_\eta}{\partial \alpha_2}, \quad h_{23} = \frac{\partial F_\eta}{\partial \alpha_3}, \quad h_{24} = h_{14}, \quad h_{25} = h_{15},\\
&h_{30} = 4\gamma ab, \quad h_{31} = \frac{\partial F_\zeta}{\partial \alpha_1}, \quad h_{32} = \frac{\partial F_\zeta}{\partial \alpha_2}, \quad h_{33} = \frac{\partial F_\zeta}{\partial \alpha_3}, \quad h_{34} = h_{15},\\
&b_{11} = \frac{1}{6}\gamma ab[8b^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)] - \frac{\partial M_x}{\partial \alpha_1}, \quad b_{12} = \frac{\partial M_x}{\partial \alpha_2}, \quad b_{13} = \frac{\partial M_x}{\partial \alpha_3},\\
&b_{21} = \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_1}, \quad b_{22} = \frac{1}{6}\gamma ab[8a^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)] - \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_2}, \quad b_{23} = \frac{\partial M_y}{\partial \alpha_3},\\
&b_{31} = \frac{\partial M_z}{\partial \alpha_1}, \quad b_{32} = \frac{\partial M_z}{\partial \alpha_2}, \quad b_{33} = \frac{\partial M_z}{\partial \alpha_3}, \quad b_{14} = 4æab\left(\frac{b^2}{3} + \frac{d^2}{4}\right),\\
&b_{15} = h_{14},\ b_{24} = 4æab\left(\frac{a^2}{3} + \frac{d^2}{4}\right),\ b_{25} = h_{14},\ b_{34} = \frac{4}{3}æab(a^2 + b^2),
\end{aligned} \tag{1.15}$$

причем ζ_0 соответствует равновесному положению плота, при котором архимедова сила и вертикальная составляющая $\mathbf{F}_{eq}$ активной силы, отвечающая горизонтальному равновесному положению плота, компенсируются:

$$\zeta_0 = -\frac{(\mathbf{F}_{eq} \cdot \mathbf{e}_3)}{4\gamma ab} - d. \tag{1.16}$$

Видим, что в общем случае правые части системы (1.14) зависят от всех фазовых координат плота.

Условие согласования (1.9) принимает вид

$$M_z = \alpha_1 M_y - \alpha_2 M_x.$$

Если это условие выполнено, то

$$b_{31} = -M_x^{(0)}, \quad b_{32} = M_y^{(0)}, \quad b_{33} = 0, \quad M_z^{(0)} = 0.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

2. На плот действует постоянная вертикальная сила

Пусть сила $\mathbf{F} = -P\mathbf{e}_3$ приложена в точке плота, заданной радиус-вектором $\mathbf{r}_s = x_s\mathbf{e}'_1 + y_s\mathbf{e}'_2 + z_s\mathbf{e}'_3$. Составляющие момента этой силы выражаются формулами

$$M_x = P(a_{32}z_s - a_{33}y_s), M_y = P(a_{33}x_s - a_{31}z_s), M_z = P(a_{31}y_s - a_{32}x_s), \quad (2.1)$$

а в линейном приближении (1.13) они принимают вид

$$M_x = P(\alpha_1 z_s - y_s), \quad M_y = P(x_s + \alpha_2 z_s), \quad M_z = -P(\alpha_1 x_s + \alpha_2 y_s). \quad (2.2)$$

Проекции F_ξ, F_η, F_ζ от углов поворота плота не зависят. Следовательно, получаются линейные уравнения

$$\begin{aligned}
&M\ddot{\xi} = \dot{\alpha}_2 h_{14} - \dot{\xi} h_{15},\\
&M\ddot{\eta} = -\dot{\alpha}_1 h_{14} - \dot{\eta} h_{15},\\
&M\ddot{\tilde{\zeta}} = -\tilde{\zeta} h_{30} - \dot{\tilde{\zeta}} h_{15},\\
&A\ddot{\alpha}_1 = -\alpha_1 \tilde{b}_{11} - \dot{\alpha}_1 b_{14} - \dot{\eta} b_{15} - P y_s,\\
&B\ddot{\alpha}_2 = -\alpha_2 \tilde{b}_{22} - \dot{\alpha}_2 b_{24} + \dot{\xi} b_{15} + P x_s,\\
&C\ddot{\alpha}_3 = -\alpha_1 P x_s - \alpha_2 P y_s - \dot{\alpha}_3 b_{34},
\end{aligned} \quad (2.3)$$

где коэффициенты $\tilde{b}_{11}$ и $\tilde{b}_{22}$ выражаются формулами

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{11} &= \frac{1}{6}\gamma ab[8b^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)] - P z_s,\\
\tilde{b}_{22} &= \frac{1}{6}\gamma ab[8a^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)] - P z_s.
\end{aligned} \quad (2.4)$$

Если исследовать движение в окрестности положения равновесия, определенного формулами

$$\alpha_1 = -y_s/æ_1, \quad \alpha_2 = x_s/æ_2, \quad \alpha_3 = 0 \quad (2.5)$$

и (1.16) [4], то уравнения (2.3) несколько упрощаются:

$$\begin{aligned}
&M\ddot{\xi} = \dot{\alpha}_2 h_{14} - \dot{\xi} h_{15},\\
&M\ddot{\eta} = -\dot{\alpha}_1 h_{14} - \dot{\eta} h_{15},\\
&M\ddot{\tilde{\zeta}} = -\tilde{\zeta} h_{30} - \dot{\tilde{\zeta}} h_{15},\\
&A\ddot{\tilde{\alpha}}_1 = -\tilde{\alpha}_1 \tilde{b}_{11} - \dot{\tilde{\alpha}}_1 b_{14} - \dot{\eta} h_{14},\\
&B\ddot{\tilde{\alpha}}_2 = -\tilde{\alpha}_2 \tilde{b}_{22} - \dot{\tilde{\alpha}}_2 b_{24} + \dot{\xi} h_{14},\\
&C\ddot{\tilde{\alpha}}_3 = -\tilde{\alpha}_1 P x_s - \tilde{\alpha}_2 P y_s - \dot{\tilde{\alpha}}_3 b_{34},
\end{aligned} \quad (2.6)$$

где
$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 + y_s/æ_1, \quad \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 - x_s/æ_2, \quad \tilde{\alpha}_3 = \alpha_3.$$

Правая часть третьего уравнения системы (2.6) зависит только от переменных $\tilde{\zeta}$ и $\dot{\tilde{\zeta}}$, и оно описывает затухающие колебания плота вдоль вертикальной оси, а правые части остальных уравнений от этих переменных не зависят. Правые части первого, второго, четвертого и пятого уравнений (2.6) не зависят ни от $\tilde{\alpha}_3$, ни от $\dot{\tilde{\alpha}}_3$. Их можно выделить в отдельную замкнутую систему

$$\begin{aligned} &M\ddot{\xi} = \dot{\alpha}_2 h_{14} - \dot{\xi} h_{15}, \\ &M\ddot{\eta} = -\dot{\alpha}_1 h_{14} - \dot{\eta} h_{15}, \\ &A\ddot{\tilde{\alpha}}_1 = -\tilde{\alpha}_1 \tilde{b}_{11} - \dot{\tilde{\alpha}}_1 b_{14} - \dot{\eta} h_{14}, \\ &B\ddot{\tilde{\alpha}}_2 = -\tilde{\alpha}_2 \tilde{b}_{22} - \dot{\tilde{\alpha}}_2 b_{24} + \dot{\xi} h_{14}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Выпишем аналог уравнения для изменения полной энергии системы (2.7). Обозначим

$$E = \frac{1}{2}[M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + A\dot{\tilde{\alpha}}_1^2 + B\dot{\tilde{\alpha}}_2^2 + \tilde{\alpha}_1^2 b_{11} + \tilde{\alpha}_2^2 b_{22}]. \tag{2.8}$$

Тогда
$$\frac{dE}{dt} = -h_{15}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \dot{\tilde{\alpha}}_1^2 b_{14} - \dot{\tilde{\alpha}}_2^2 b_{24} + 2h_{14}(\dot{\xi}\dot{\tilde{\alpha}}_2 - \dot{\eta}\dot{\tilde{\alpha}}_1). \tag{2.9}$$

Рассмотрим выражение

$$h_{15}\dot{\xi}^2 + \dot{\tilde{\alpha}}_2^2 b_{24} - 2h_{14}\dot{\xi}\dot{\tilde{\alpha}}_2 = 4æab\left[\left(\dot{\xi} - \frac{d}{2}\dot{\tilde{\alpha}}_2\right)^2 + \frac{a^2}{3}\dot{\tilde{\alpha}}_2^2\right] > 0.$$

Аналогично

$$h_{15}\dot{\eta}^2 + \dot{\tilde{\alpha}}_1^2 b_{14} + 2h_{14}\dot{\eta}\dot{\tilde{\alpha}}_1 = 4æab\left[\left(\dot{\eta} + \frac{d}{2}\dot{\tilde{\alpha}}_1\right)^2 + \frac{b^2}{3}\dot{\tilde{\alpha}}_1^2\right] > 0.$$

Получается, что положительно определенная функция E имеет отрицательно определенную производную в силу уравнений движения. Поэтому, как и следовало ожидать, решение системы (2.7) асимптотически устойчиво [7].

Другими словами, при движении плота под действием постоянной вертикальной силы происходит асимптотическое успокоение всех координат с той лишь разницей, что по координатам ζ, α_1, α_2 успокоение происходит при достижении ими равновесного положения, определенного формулами (2.5), а по координатам ξ, η, α_3 — в том положении, которое было достигнуто ими в процессе успокоения координат ζ, α_1, α_2.

3. Компоненты силы постоянны в осях, связанных с плотом

Пусть единственная сила $\mathbf{F} = F_x\mathbf{e}'_1 + F_y\mathbf{e}'_2 + F_z\mathbf{e}'_3$ приложена в точке с координатами $\mathbf{r}_s = x_s\mathbf{e}'_1 + y_s\mathbf{e}'_2 + z_s\mathbf{e}'_3$. Проекции этой силы на оси неподвижного репера примут вид

$$\begin{aligned} F_\xi &= F_x a_{11} + F_y a_{12} + F_z a_{13}, \\ F_\eta &= F_x a_{21} + F_y a_{22} + F_z a_{23}, \\ F_\zeta &= F_x a_{31} + F_y a_{32} + F_z a_{33}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

а в линейном приближении (1.13) они выразятся формулами

$$\begin{aligned} F_\xi &= F_x - F_y\alpha_3 + F_z\alpha_2, \\ F_\eta &= F_x\alpha_3 + F_y - F_z\alpha_1, \\ F_\zeta &= -F_x\alpha_2 + F_y\alpha_1 + F_z. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Составляющие момента $\mathbf{M} = \mathbf{r}_s \times \mathbf{F} = M_x\mathbf{e}'_1 + M_y\mathbf{e}'_2 + M_z\mathbf{e}'_3$ этой силы даются выражениями

$$M_x = yF_z - zF_y, \quad M_y = zF_x - xF_z, \quad M_z = xF_y - yF_x. \tag{3.3}$$

Условие согласования (1.9) принимает вид

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{M} = \mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{r}_s \times \mathbf{F}) = \mathbf{r}_s \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{e}_3) = 0 \tag{3.4}$$

и означает, что точка $\mathbf{r}_s$ приложения силы должна быть параллельна плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{e}_3$. Это естественно, если мы хотим заставить плот двигаться в направлении проекции силы на горизонтальную плоскость, исключив при этом возникновение углового ускорения плота вокруг вертикальной оси.

В том случае, когда на плот действуют две одинаковые силы, приложенные к разным точкам плота, условие (1.9) принимает вид

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{M} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{e}_3) = 0,$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ – радиус-векторы точек приложения указанных сил. Оно означает, что сумма этих радиус-векторов параллельна плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{e}_3$. Другими словами, диагональ параллелограмма, построенного на радиус-векторах точек приложения сил, параллельна указанной плоскости. Самый простой случай, когда это достигается, возникает при симметрии точек приложения сил относительно плоскости $(\mathbf{F}, \mathbf{e}_3)$. Так будет, например, если корпус шагающего робота ориентирован в направлении требуемого движения и применяется походка "галоп".

Рассмотрим линейные уравнения движения:

$$
\begin{aligned}
&M\ddot{\xi} = F_x - F_y\alpha_3 + F_z\alpha_2 + \dot{\alpha}_2 h_{14} - \dot{\xi} h_{15},\\
&M\ddot{\eta} = F_x\alpha_3 + F_y - F_z\alpha_1 - \dot{\alpha}_1 h_{14} - \dot{\eta} h_{15},\\
&M\ddot{\tilde{\zeta}} = -\tilde{\zeta} h_{30} + F_x\alpha_2 - F_y\alpha_1 - F_z - \dot{\tilde{\zeta}} h_{15},\\
&A\ddot{\alpha}_1 = -\alpha_1\bar{b}_{11} - \dot{\alpha}_1 b_{14} - \dot{\eta} b_{15} + M_x,\\
&B\ddot{\alpha}_2 = -\alpha_2\bar{b}_{22} - \dot{\alpha}_2 b_{24} + \dot{\xi} b_{15} + M_y,\\
&C\ddot{\alpha}_3 = M_z - \dot{\alpha}_3 b_{34},
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\bar{b}_{11} = \frac{1}{6}\gamma ab[8b^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)],\\
&\bar{b}_{22} = \frac{1}{6}\gamma ab[8a^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)],\\
&\zeta_0 = -\frac{F_z}{4\gamma ab} - d.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Найдем стационарное решение, при котором

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_3 = \dot{\tilde{\zeta}} = \ddot{\xi} = \ddot{\eta} \equiv 0.$$

Подставив указанные значения в (3.5), получим следующую систему линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
&F_y\hat{\alpha}_3 - F_z\hat{\alpha}_2 + \dot{\hat{\xi}} h_{15} = F_x,\\
&F_z\hat{\alpha}_1 - F_x\hat{\alpha}_3 + \dot{\hat{\eta}} h_{15} = F_y,\\
&\hat{\zeta} h_{30} - F_x\hat{\alpha}_2 + F_y\hat{\alpha}_1 = -F_z,\\
&\hat{\alpha}_1\bar{b}_{11} + \dot{\hat{\eta}} b_{15} = M_x,\\
&\hat{\alpha}_2\bar{b}_{22} - \dot{\hat{\xi}} b_{15} = M_y,\\
&M_z = 0,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

где символ ($\hat{}$) поверх буквы означает стационарное значение координат. Последнее равенство системы (3.7) отвечает условию согласования (3.4). Другими словами, стационарное движение невозможно, если условие согласования не выполнено. Решение системы (3.7) может быть найдено из формул

$$
\begin{aligned}
&\dot{\hat{\xi}} = \frac{1}{s_1}\left(F_x - F_y\hat{\alpha}_3 + \frac{F_z M_y}{b_{22}})\right),\\
&\dot{\hat{\eta}} = \frac{1}{s_2}\left(F_y + F_x\hat{\alpha}_3 - \frac{F_z M_x}{b_{11}})\right),\\
&\hat{\alpha}_1 = \frac{M_x - \dot{\hat{\eta}} b_{15}}{\bar{b}_{11}}, \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{M_y + \dot{\hat{\xi}} b_{15}}{\bar{b}_{22}},\\
&\hat{\zeta} = \frac{M_y + \dot{\hat{\xi}} b_{15}}{\bar{b}_{22} h_{30}} F_x - \frac{M_x - \dot{\hat{\eta}} b_{15}}{\bar{b}_{11} h_{30}} F_y - \frac{F_z}{h_{30}},
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

в которых с учетом формул (3.6) и (1.15) обозначено

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{h_{15}b_{22} - F_z b_{15}}{b_{22}} = h_{15}\frac{8a^2 + 3[(\zeta_0 + d)^2 - d^2]}{8a^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)} > 0, \\
s_2 &= \frac{h_{15}b_{11} - F_z b_{15}}{b_{11}} = h_{15}\frac{8b^2 + 3[(\zeta_0 + d)^2 - d^2]}{8b^2 + 3(\zeta_0^2 - d^2)} > 0,
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

а угол $\hat{\alpha}_3$ служит параметром и может быть выбран произвольно. Имеем параметрическое семейство стационарных движений, для траекторий которого скорость центра плота может отличаться в значительных пределах. Обозначим

$$
\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}, \quad \tilde{\eta} = \eta - \hat{\eta}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 - \hat{\alpha}_1, \quad \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 - \hat{\alpha}_2, \quad \bar{\zeta} = \tilde{\zeta} - \hat{\zeta}
$$

отклонения координат от их стационарных значений. Уравнения для этих отклонений примут вид

$$
\begin{aligned}
&M\ddot{\tilde{\xi}} = -F_y\alpha_3 + F_z\tilde{\alpha}_2 + \dot{\tilde{\alpha}}_2 h_{14} - \dot{\tilde{\xi}} h_{15}, \\
&M\ddot{\tilde{\eta}} = F_x\alpha_3 - F_z\tilde{\alpha}_1 - \dot{\tilde{\alpha}}_1 h_{14} - \dot{\tilde{\eta}} h_{15}, \\
&M\ddot{\bar{\zeta}} = -\bar{\zeta} h_{30} - F_x\tilde{\alpha}_2 + F_y\tilde{\alpha}_1 - \dot{\bar{\zeta}} h_{15}, \\
&A\ddot{\tilde{\alpha}}_1 = -\tilde{\alpha}_1\bar{b}_{11} - \dot{\tilde{\alpha}}_1 b_{14} - \dot{\tilde{\eta}} b_{15}, \\
&B\ddot{\tilde{\alpha}}_2 = -\tilde{\alpha}_2\bar{b}_{22} - \dot{\tilde{\alpha}}_2 b_{24} + \dot{\tilde{\xi}} b_{15}, \\
&C\ddot{\alpha}_3 = -\dot{\alpha}_3 b_{34},
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Решение последнего уравнения этой системы имеет вид

$$
\alpha_3 = \frac{\dot{\alpha}_{30}}{b_{34}}[1 - \exp(-b_{34}(t - t_0)] + \alpha_{30},
$$

где $\dot{\alpha}_{30}$ и α_{30} – значения $\dot{\alpha}_3$ и α_3 в начальный момент времени t_0. Следовательно,

$$
\lim_{t\to\infty} \alpha_3 = \frac{\dot{\alpha}_{30}}{b_{34}} + \alpha_{30}
$$

зависит от начальной скорости $\dot{\alpha}_3(0)$. Поэтому значение параметра α_3 в формулах (3.8) подвержено существенному влиянию ошибок начальных данных, а в зависимости от этого параметра меняется направление стационарного движения плота. Следовательно, движение плота в целом будет неустойчивым.

4. Компоненты силы постоянны в неподвижных осях

Пусть единственная сила $\mathbf{F} = F_\xi \mathbf{e}_1 + F_\eta \mathbf{e}_2 + F_\zeta \mathbf{e}_3$ приложена в точке с координатами $\mathbf{r}_s = x_s\mathbf{e}_1' + y_s\mathbf{e}_2' + z_s\mathbf{e}_3'$. Проекции этой силы на оси репера, связанного с плотом, примут вид

$$
\begin{aligned}
F_x &= F_\xi a_{11} + F_\eta a_{21} + F_\zeta a_{31},\\
F_y &= F_\xi a_{12} + F_\eta a_{22} + F_\zeta a_{32},\\
F_z &= F_\xi a_{13} + F_\eta a_{23} + F_\zeta a_{33},
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

а соответсвующие компоненты момента выразятся формулами

$$
\begin{aligned}
M_x &= F_\xi(a_{13}y_s - a_{12}z_s) + F_\eta(a_{23}y_s - a_{22}z_s) + F_\zeta(a_{33}y_s - a_{32}z_s),\\
M_y &= F_\xi(a_{11}z_s - a_{13}x_s) + F_\eta(a_{21}z_s - a_{23}x_s) + F_\zeta(a_{31}z_s - a_{33}x_s),\\
M_z &= F_\xi(a_{12}x_s - a_{11}y_s) + F_\eta(a_{22}x_s - a_{21}y_s) + F_\zeta(a_{32}x_s - a_{31}y_s).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Условие согласования (1.9) запишется следующим образом

$$
\mathbf{r}_s\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{e}_3) = x_s(F_\eta a_{11} - F_\xi a_{21}) + y_s(F_\eta a_{12} - F_\xi a_{22}) + z_s(F_\eta a_{13} - F_\xi a_{23}) = 0 \tag{4.3}
$$

и оно по прежнему означает, что точка $\mathbf{r}_s$ приложения силы должна быть параллельна, но теперь уже фиксированной в неподвижном пространстве плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{e}_3$. В линейном приближении (1.13) формулы (4.2) и равенство (4.3) представятся в виде

$$
\begin{aligned}
&M_x = F_\xi(\alpha_2 y_s + \alpha_3 z_s) - F_\eta(\alpha_1 y_s + z_s) + F_\zeta(y_s - \alpha_1 z_s),\\
&M_y = F_\xi(z_s - \alpha_2 x_s) + F_\eta(\alpha_3 z_s + \alpha_1 x_s) - F_\zeta(\alpha_2 z_s + x_s),\\
&M_z = -F_\xi(\alpha_3 x_s + y_s) + F_\eta(x_s - \alpha_3 y_s) + F_\zeta(\alpha_1 x_s + \alpha_2 y_s),\\
&x_s(F_\eta - F_\xi\alpha_3) - y_s(F_\eta\alpha_3 + F_\xi) + z_s(F_\eta\alpha_2 + F_\xi\alpha_1) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Рассмотрим линейные уравнения движения:

$$
\begin{aligned}
&M\ddot{\xi} = F_\xi + \dot{\alpha}_2 h_{14} - \dot{\xi} h_{15},\\
&M\ddot{\eta} = F_\eta - \dot{\alpha}_1 h_{14} - \dot{\eta} h_{15},\\
&M\ddot{\tilde{\zeta}} = -\tilde{\zeta} h_{30} - F_{\zeta} - \dot{\tilde{\zeta}} h_{15},\\
&A\ddot{\alpha}_1 = -\alpha_1(c_{11} + \overline{b}_{11}) + \alpha_2 c_{12} + \alpha_3 c_{13} - \dot{\alpha}_1 b_{14} - \dot{\eta} b_{15} + c_{10},\\
&B\ddot{\alpha}_2 = \alpha_1 c_{21} - \alpha_2(c_{22} + \overline{b}_{22}) + \alpha_3 c_{23} - \dot{\alpha}_2 b_{24} + \dot{\xi} b_{15} + c_{20},\\
&C\ddot{\alpha}_3 = \alpha_1 c_{31} + \alpha_2 c_{32} - \alpha_3 c_{33} - \dot{\alpha}_3 b_{34} + c_{30},
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&c_{11} = F_\eta y_s + F_\zeta z_s, \quad c_{12} = F_\xi y_s, \quad c_{13} = F_\xi z_s, \quad c_{10} = F_\zeta y_s - F_\eta z_s,\\
&c_{21} = F_\eta x_s, \quad c_{22} = F_\xi x_s + F_\zeta z_s, \quad c_{23} = F_\eta z_s, \quad c_{20} = F_\xi z_s - F_\zeta x_s,\\
&c_{31} = F_\zeta x_s, \quad c_{32} = F_\zeta y_s, \quad c_{33} = F_\xi x_s + F_\eta y_s, \quad c_{30} = F_\eta x_s - F_\xi y_s,
\end{aligned}
$$

а $\overline{b}_{22}$ и $\overline{b}_{22}$ определены формулами (3.6) и отвечают за момент архимедовой силы. Найдем стационарное решение, при котором

$$
\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_3 = \dot{\tilde{\zeta}} = \ddot{\xi} = \ddot{\eta} \equiv 0.
$$

Подставив указанные значения в (4.5), получим следующую систему линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{\xi}^c h_{15} = F_\xi,\\
&\dot{\eta}^c h_{15} = F_\eta,\\
&\tilde{\zeta}^c h_{30} = -F_\zeta,\\
&\alpha_1^c(c_{11}+\bar{b}_{11}) - \alpha_2^c c_{12} - \alpha_3^c c_{13} + \dot{\eta}^c b_{15} = c_{10},\\
&\alpha_1^c c_{21} - \alpha_2^c(c_{22}+\bar{b}_{22}) + \alpha_3^c c_{23} + \dot{\xi}^c b_{15} = -c_{20},\\
&\alpha_1^c c_{31} + \alpha_2^c c_{32} - \alpha_3^c c_{33} = -c_{30}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Из этой системы, в частности, следует, что в стационарном движении центр масс плота будет двигаться в сторону внешней силы, а относительно уровня воды он будет смещен вверх, если F_ζ положительна, и вниз – в противоположном случае.

Рассмотрим вариант, когда внешняя сила горизонтальна, т.е. $F_\zeta = 0$. Тогда будем иметь

$$
\begin{aligned}
&c_{11} = F_\eta y_s, \quad c_{12} = F_\xi y_s, \quad c_{13} = F_\xi z_s, \quad c_{10} = -F_\eta z_s,\\
&c_{21} = F_\eta x_s, \quad c_{22} = F_\xi x_s, \quad c_{23} = F_\eta z_s, \quad c_{20} = F_\xi z_s,\\
&c_{31} = 0, \quad c_{32} = 0, \quad c_{33} = F_\xi x_s + F_\eta y_s, \quad c_{30} = F_\eta x_s - F_\xi y_s,
\end{aligned}
$$

и уравнения (4.6) можно представить в виде:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\xi}^c = \frac{F_\xi}{h_{15}}, \quad \dot{\eta}^c = \frac{F_\eta}{h_{15}}, \quad \tilde{\zeta}^c = 0, \quad \alpha_3^c = \frac{c_{30}}{c_{33}} = \frac{F_\eta x_s - F_\xi y_s}{F_\xi x_s + F_\eta y_s},\\
&\alpha_1^c(c_{11}+\bar{b}_{11}) - \alpha_2^c c_{12} = c_{10} + \alpha_3^c c_{13} - \dot{\eta}^c b_{15},\\
&\alpha_1^c c_{21} - \alpha_2^c(c_{22}+\bar{b}_{22}) = -c_{20} - \alpha_3^c c_{23} - \dot{\xi}^c b_{15}.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Из выражения для α_3^c видим, что стационарная величина поворота вокруг вертикальной оси в линейном приближении будет равна углу между радиус-вектором точки приложения силы F и ее направлением. Другими словами, плот будет стремиться в положение, когда указанный радиус-вектор и сила F коллинеарны. При этом углы α_1^c и α_2^c примут некоторые значения, отвечающие перекошенному положению плота относительно действующей силы.

В практически интересном случае, когда сила направлена параллельно вектору $\mathbf{e}_1$ и приложена к точке, расположенной на оси $C_p\mathbf{e}_1'$, будем иметь $F_\eta = 0$, $y_s = 0$ и

$$
\begin{aligned}
&c_{11} = 0, \quad c_{12} = 0, \quad c_{13} = F_\xi z_s, \quad c_{10} = 0,\\
&c_{21} = 0, \quad c_{22} = F_\xi x_s, \quad c_{23} = 0, \quad c_{20} = F_\xi z_s,\\
&c_{31} = 0, \quad c_{32} = 0, \quad c_{33} = F_\xi x_s, \quad c_{30} = 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, решение системы (4.7) с учетом обозначений (1.15) примет вид

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}^c = \frac{F_\xi}{h_{15}}, \quad \dot{\eta}^c = 0, \quad \tilde{\zeta}^c = 0, \quad \alpha_3 = 0, \\ &\alpha_1^c = 0, \quad \alpha_2^c = \frac{F_\xi}{F_\xi x_s + \bar{b}_{22}} \left(z_s + \frac{d}{2} \right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Если $F_\xi x_s + \bar{b}_{22} > 0$, получается, что плот под действием силы F_ξ будет в линейном приближении двигаться с постоянной скоростью вдоль направления силы и будет зарываться в воду в направлении движения. При этом наклон плота будет увеличен за счет действия сил трения о дно.

Обозначим

$$\hat{\xi} = \xi - \xi^c, \quad \hat{\eta} = \eta - \eta^c, \quad \hat{\zeta} = \tilde{\zeta} - \tilde{\zeta}^c, \quad \hat{\alpha}_1 = \alpha_1 - \alpha_1^c, \quad \hat{\alpha}_2 = \alpha_2 - \alpha_2^c, \quad \hat{\alpha}_3 = \alpha_3 - \alpha_3^c$$

и рассмотрим уравнения движения в окрестности стационарного решения:

$$\begin{aligned} &M\ddot{\hat{\xi}} = \dot{\hat{\alpha}}_2 h_{14} - \dot{\hat{\xi}} h_{15}, \\ &M\ddot{\hat{\eta}} = -\dot{\hat{\alpha}}_1 h_{14} - \dot{\hat{\eta}} h_{15}, \\ &M\ddot{\hat{\zeta}} = -\hat{\zeta} h_{30} - \dot{\hat{\zeta}} h_{15}, \\ &A\ddot{\hat{\alpha}}_1 = -\hat{\alpha}_1 (c_{11} + \bar{b}_{11}) + \hat{\alpha}_2 c_{12} + \hat{\alpha}_3 c_{13} - \dot{\hat{\alpha}}_1 b_{14} - \dot{\hat{\eta}} b_{15}, \\ &B\ddot{\hat{\alpha}}_2 = \hat{\alpha}_1 c_{21} - \hat{\alpha}_2 (c_{22} + \bar{b}_{22}) + \hat{\alpha}_3 c_{23} - \dot{\hat{\alpha}}_2 b_{24} + \dot{\hat{\xi}} b_{15}, \\ &C\ddot{\hat{\alpha}}_3 = \hat{\alpha}_1 c_{31} + \hat{\alpha}_2 c_{32} - \hat{\alpha}_3 c_{33} - \dot{\hat{\alpha}}_3 b_{34}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Коэффициенты системы (4.9) существенно зависят от компонент активной силы и координат точки ее приложения. Поэтому исследование устойчивости решения этой системы в общем случае затруднено. Здесь рассмотрим наиболее простой случай, отвечающий стационарному решению (4.8). Система уравнений (4.9) принимает вид

$$\begin{aligned} &M\ddot{\hat{\xi}} = \dot{\hat{\alpha}}_2 h_{14} - \dot{\hat{\xi}} h_{15}, \\ &M\ddot{\hat{\eta}} = -\dot{\hat{\alpha}}_1 h_{14} - \dot{\hat{\eta}} h_{15}, \\ &M\ddot{\hat{\zeta}} = -\hat{\zeta} h_{30} - \dot{\hat{\zeta}} h_{15}, \\ &A\ddot{\hat{\alpha}}_1 = -\hat{\alpha}_1 \bar{b}_{11} + \hat{\alpha}_3 c_{13} - \dot{\hat{\alpha}}_1 b_{14} - \dot{\hat{\eta}} b_{15}, \\ &B\ddot{\hat{\alpha}}_2 = -\hat{\alpha}_2 (c_{22} + \bar{b}_{22}) - \dot{\hat{\alpha}}_2 b_{24} + \dot{\hat{\xi}} b_{15}, \\ &C\ddot{\hat{\alpha}}_3 = -\hat{\alpha}_3 c_{33} - \dot{\hat{\alpha}}_3 b_{34}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

В третьем уравнении системы (4.10) все коэффициенты положительны. Следовательно, переменная $\hat{\zeta} \to 0$ при $t \to \infty$. Поведение решения шестого уравнения (4.10) существенно зависит от коэффициентов $b^{14} = 2æabd > 0$ и $c_{33} = F_\xi x^s$ [7]. Если $F_\xi x^s < 0$, то один из корней характеристического уравнения окажется положительным, а система в целом окажется неустойчивой.

Это тот случай, когда сила и радиус-вектор ее точки приложения ориентированы в противоположные стороны. Если же $F_\xi x^s = 0$, то решение шестого уравнения системы (4.10) будет устойчивым, а при $F_\xi x^s > 0$ оно будет асимптотически устойчивым.

Для простоты дальнейшего анализа примем, что точка приложения силы $\mathbf{F}$ принадлежит срединной плоскости плота: $z_s = 0$. Тогда $c_{13} = 0$, а система из четырех оставшихся уравнений (4.10) примет вид

$$
\begin{aligned}
&M\ddot{\hat{\xi}} = \dot{\hat{\alpha}}_2 h_{14} - \dot{\hat{\xi}} h_{15},\\
&M\ddot{\hat{\eta}} = -\dot{\hat{\alpha}}_1 h_{14} - \dot{\hat{\eta}} h_{15},\\
&A\ddot{\hat{\alpha}}_1 = -\hat{\alpha}_1 \bar{b}_{11} - \dot{\hat{\alpha}}_1 b_{14} - \dot{\hat{\eta}} b_{15},\\
&B\ddot{\hat{\alpha}}_2 = -\hat{\alpha}_2 (c_{22} + \bar{b}_{22}) - \dot{\hat{\alpha}}_2 b_{24} + \dot{\hat{\xi}} b_{15}.
\end{aligned}
$$

Эта система подобна системе (2.7). Если ввести функцию

$$
\tilde{E} = \frac{1}{2}[M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + A\dot{\tilde{\alpha}}_1^2 + B\dot{\tilde{\alpha}}_2^2 + \tilde{\alpha}_1^2 b_{11} + \tilde{\alpha}_2^2 (c_{22} + b_{22})],
$$

то производная по времени от этой функции примет вид

$$
\frac{d\tilde{E}}{dt} = -h_{15}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \dot{\tilde{\alpha}}_1^2 b_{14} - \dot{\tilde{\alpha}}_2^2 b_{24} + 2h_{14}(\dot{\xi}\dot{\tilde{\alpha}}_2 - \dot{\eta}\dot{\tilde{\alpha}}_1).
$$

При $c_{22} = F_\xi x^s \geq 0$ функция $\tilde{E}$ будет положительной, а, как следует из анализа уравнения (2.9), правая часть полученного уравнения окажется отрицательной. Поэтому нулевое решение системы (4.10) окажется в данном случае асимптотически устойчивым [8].

Заключение

Предложена полная математическая модель нестационарной пространственной динамики плота под действием активных сил, архимедовой силы и сил сопротивления воды движению [4]. Вычисление правых частей этой модели осложнено из-за наличия углов и ребер на поверхности плота. Кроме того, в разных точках плота его скорость относительно воды может быть различной не только по величине, но и по направлению. При этом сила сопротивления воды имеет слагаемое, пропорциональное квадрату величины скорости и направленное противоположно вектору скорости. Указанные обстоятельства существенно затрудняют аналитическое исследование особенностей динамики плота в нестационарном движении даже при отсутствии активных сил. Вместе с тем, при очень малых угловых и поступательных скоростях квадратичными слагаемыми сопротивления воды можно пренебречь. Возникающие тогда линейные уравнения движения в ряде случаев поддаются качественному анализу свойств движения. По первому приближению исследована устойчивость стационарных движений, возникающих вследствие приложения простейших активных сил. При условии, что под действием указанных сил плот остается на плаву, установлены следующие свойства движения

1. Положение равновесия, возникающее под действием постоянной вертикальной силы, асимптотически устойчиво.

2. Если компоненты силы постоянны в осях, связанных с плотом, то возникающее при этом стационарное движение неустойчиво. Другими словами, для плота с мотором обязательно требуется активное управление движением.

3. Если компоненты силы постоянны в неподвижных осях (плот на буксире), то движение будет устойчивым, когда точка приложения силы смещена от центра плота в сторону действия силы (трос от буксира привязан к носовой части плота). В противоположном случае движение будет неустойчивым.

Полученные результаты в определенной мере демонстрируют правдоподобность предложенных моделей движения плота на поверхности воды.

Список литературы

1. Универсальный механизм. Моделирование динамики механических систем. URL: `http://www.umlab.ru` (дата обращения: 18.06.2015).

2. *Голубев Ю.Ф., Корянов В.В.* Движение инсектоморфного робота с использованием незакрепленных шаров//Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 50. 24с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-50

3. *Голубев Ю. Ф., Корянов В. В.* Маневрирование инсектоморфного робота на свободно катающихся шарах. Изв. РАН. ТиСУ. 2016. №1. С. 134-146. Golubev Yu. F., Koryanov V. V. Insectomorphic Robot Maneuvering on Freely Rolling Balls. Pleiades Publishing, Ltd., Journal of Computer and Systems Sciences International. 2016. Vol. 55, No. 1. Pp. 125-137.

4. *Голубев Ю.Ф.* Нестационарная модель сил воздействия воды на плоский прямоугольный плот//Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 53. 40с. doi:10.20948/prepr-2016-53
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-53

5. *Митрофанов А.А.* Лесосплав. Новые технологии, научное и техническое обеспечение. Архангельск: Изд-во АГТУ, 2007. 492 с.

6. *Мурашова О.В., Митрофанов А.А.* Исследование гидродинамических характеристик плоских сплоточных единиц на моделях и в натурных условиях. ИВУЗ. "Лесной журнал". 2007. № 1. С. 58-66.

7. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики: учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с.

8. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. 472 с.