



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 56 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Самотохин А.С., Тучин А.Г.

Оптимизация
одноимпульсных траекторий
возврата с орбиты
искусственного спутника
Луны

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Самотохин А.С., Тучин А.Г. Оптимизация одноимпульсных траекторий возврата с орбиты искусственного спутника Луны // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 56. 24 с. doi:[10.20948/prepr-2016-56](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-56)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-56>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.С. Самотохин, А.Г. Тучин

**Оптимизация одноимпульсных
траекторий возврата с орбиты
искусственного спутника Луны**

Москва — 2016

Самотохин А.С., Тучин А.Г.

Оптимизация одноимпульсных траекторий возврата с орбиты искусственного спутника Луны

Рассматривается задача возврата космического аппарата с орбиты искусственного спутника Луны с использованием единственного импульса изменения скорости при минимальном расходе топлива. Конечной точкой рассматриваемых траекторий возврата является точка входа в атмосферу Земли. В этой точке накладывается ряд ограничений, соблюдение которых должно обеспечить посадку аппарата в заданном районе земной поверхности. Рассматриваются задачи с разным составом ограничений в конечной точке траектории возврата. Приведены результаты численного моделирования для различных окололунных орбит.

Ключевые слова: искусственный спутник Луны, траектории перелета Луна-Земля, численный метод, условная оптимизация.

Alexander Sergeevich Samotokhin, Andrey Georgievich Tuchin

Optimization of one impulse return trajectory from Moon orbit

The one impulse return trajectory from Moon orbit is considered. The right point of the return trajectory is entry point to Earth atmosphere. The purpose of considered method is to calculate optimal impulse that ensures limitations in right point of the trajectory. These limitations must provide landing of reentry vehicle in specified area of Earth surface. Several tasks with different sets of limitations are considered. The results of mathematic simulation for several Moon orbits are presented.

Key words: satellite of the Moon, transfer trajectory from Moon to Earth, numerical method, conditional minimization.

Оглавление

Постановка задачи.....	3
Ограничения в точке входа в атмосферу	4
Вычислительная схема.....	6
Начальное приближение для задачи 1	7
Построение начальной траектории в задаче 1.....	8
Вычисление параметров импульса	12
Алгоритм решения задачи 1	14
Алгоритм решения задачи 2.....	15
Алгоритм решения задачи 3	17
Результаты численного моделирования.....	19
Выводы	24
Библиографический список.....	24

Постановка задачи

В работе [1] была рассмотрена задача построения траектории возвращения космического аппарата от схода с окололунной орбиты до посадки на космодром “Восточный”. Затраты характеристической скорости для формирования траектории перелета к Земле, которые были приведены в этой работе, носили предварительный характер. Целью настоящей работы является построение методики оценки оптимальных затрат характеристической скорости при одноимпульсной схеме в зависимости от ограничений, которые должны выполняться в момент входа в атмосферу Земли. Участок управляемого спуска в атмосфере в настоящей работе не рассматривается. При проведении расчётов была использована модель движения КА, описанная в [2].

Таким образом все задачи, которые будут рассмотрены далее, сводятся к определению таких параметров импульса схода с окололунной орбиты, которые бы обеспечивали выполнение заданных ограничений в точке входа в атмосферу Земли с минимальными затратами характеристической скорости.

В качестве исходных данных для решения поставленной задачи приняты начальные условия движения космического аппарата на окололунной орбите. Предполагается, что импульс перехода на траекторию возврата должен быть приложен в течение текущего витка лунной орбиты. Ограничения, накладываемые на правом конце траектории возврата, зависят от координат центра полигона посадки и принятой схемы перелета (через южное или северное полушарие Земли). Более подробно эти ограничения будут рассмотрены позже.

Под параметрами импульса здесь и далее понимается время его приложения t_e и три компоненты вектора импульса $\Delta \mathbf{v}_e$, т.е. 4 параметра. С целью упрощения решения поставленной задачи был принят следующий подход. В качестве аргумента оптимизации используются 3 компонента вектора асимптотической скорости \mathbf{v}_∞ относительно Луны. Момент приложения импульса t_e при заданной асимптотической скорости \mathbf{v}_∞ выбирается таким образом, чтобы обеспечить вектор этой скорости при минимальном импульсе $|\Delta \mathbf{v}_e|$.

Таким образом, задачи, рассматриваемые в настоящей работе, сводятся к решению задач условной минимизации, когда требуется найти минимум целевой функции

$$f(\mathbf{v}_\infty) \rightarrow \min \quad (1)$$

при соблюдении некоторых ограничений

$$g_j(\mathbf{v}_\infty) \leq 0, j=1, \dots, m. \quad (2)$$

Ограничения в точке входа в атмосферу

Ограничения, которые накладываются на параметры движения в момент входа в атмосферу Земли, определяются требованиями алгоритма управления движением на атмосферном участке [3]. Предполагается, что выполнение этих ограничений позволяет осуществить управляемую посадку на заданный полигон с приемлемой точностью.

Прежде чем перейти к описанию ограничений в точке входа в атмосферу, введем следующие определения и обозначения.

Под *точкой условного перицентра* понимается точка траектории возврата, параметры которой вычисляются по алгоритму, включающему в себя два шага. На первом шаге выполняется численное интегрирование уравнений движения космического аппарата от момента схода с окололунной орбиты до выхода на границу сферы действия Луны, т.е. на расстояние 65 тыс. км от Луны. Этот момент времени определяется с точностью до 1 с. Далее в задаче двух тел (Земля + космический аппарат) строится приближенная траектория движения космического аппарата. Перицентр построенной траектории принимается в качестве точки условного перицентра. Радиус-вектор этой точки в геоцентрической системе отсчета обозначим как \mathbf{r}_π , вектор скорости – как \mathbf{v}_π , а ее высоту над земным эллипсоидом – как h_π . Под дальностью до условного перицентра понимается величина, вычисляемая по формуле

$$L_\pi = R_{Ecp} \frac{\arccos(\mathbf{r}_\pi \cdot \mathbf{r}_p)}{|\mathbf{r}_\pi| |\mathbf{r}_p|}. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{r}_p – радиус-вектор центра полигона посадки, $R_{Ecp} = 6371$ км – средний радиус Земли.

Под *точкой входа в атмосферу* понимается точка траектории возврата, в которой высота над земным эллипсоидом составляет 100 км. Определение координат этой точки выполняется с помощью численного интегрирования уравнений движения космического аппарата с точностью до 1 м по высоте. Далее координаты этой точки будем обозначать как \mathbf{r}_a , а вектор скорости в ней – как \mathbf{v}_a .

Под дальностью от точки входа до полигона посадки или дальностью спуска L_a будем понимать величину, которая вычисляется по следующему алгоритму с учетом упреждения, вызванного вращением Земли. Пусть φ, λ, h – соответственно широта, долгота и высота центра полигона посадки. Тогда координаты центра полигона можно вычислить по формулам

$$\mathbf{r}_p(\Delta\lambda) = \begin{bmatrix} \left(\frac{R_E}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \cos(\lambda + \Delta\lambda) \cos \varphi \\ \left(\frac{R_E}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \sin(\lambda + \Delta\lambda) \cos \varphi \\ \left(\frac{R_E(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где R_E – экваториальный радиус Земли, e – эксцентриситет земного эллипсоида, а величина $\Delta\lambda$ учитывает вращение Земли за время спуска космического аппарата в атмосфере Земли и вычисляется по приближенной формуле

$$\Delta\lambda = a + b(L_a - L_0). \quad (5)$$

Коэффициенты a и b определяются эмпирически. В расчётах было принято: $a = 4.09^\circ$, $b = 0.000545^\circ/\text{км}$, $L_0 = 5000$ км. Величина L_a в свою очередь вычисляется по формуле

$$L_a = R_{\text{Есп}} \frac{\arccos(\mathbf{r}_a \cdot \mathbf{r}_p(\Delta\lambda))}{|\mathbf{r}_a| |\mathbf{r}_p(\Delta\lambda)|}. \quad (6)$$

Таким образом, вычисление L_a при известных значениях φ, λ, h и \mathbf{r}_a выполняется численно с помощью итерационной процедуры совместного решения уравнений (4)-(6).

Под *боковой дальностью* V_p будем понимать расстояние от плоскости, проходящей через вектора \mathbf{r}_a и \mathbf{v}_a до точки центра полигона посадки $\mathbf{r}_p(\Delta\lambda)$.

Отметим, что в общем случае могут существовать такие траектории, в которых точка входа в атмосферу Земли отсутствует. Разумеется, такие траектории не представляют практического интереса с точки зрения окончательных решений. Однако они могут возникать на промежуточных итерациях в задачах условной минимизации. В этом случае для обеспечения устойчивости сходимости в формулах (4)-(6) полагается $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_\pi, \mathbf{v}_a = \mathbf{v}_\pi$.

Во всех задачах, которые будут рассмотрены ниже, в точке входа в атмосферу накладываются ограничения на высоту условного перицентра и боковую дальность:

$$|h_\pi - h_{\pi 0}| \leq \varepsilon_h, \quad (7)$$

$$|B_p| \leq \varepsilon_B. \quad (8)$$

Здесь $h_{\pi 0}$ – требуемое значение высоты условного перицентра, ε_h – требуемая точность по высоте, ε_B – требуемая точность по боковой дальности. Ограничения (7) и (8) будем в дальнейшем называть *базовыми ограничениями*. Предполагается, что если эти ограничения выполнены, то алгоритм управления спуском в атмосфере заведомо обеспечит посадку космического аппарата на требуемый полигон с заданной точностью.

Кроме базовых ограничений, в точке входа в атмосферу могут накладываться дополнительные ограничения на дальность до полигона посадки L_a , наклонение траектории возврата и время перелета от лунной орбиты до точки входа в атмосферу.

Вычислительная схема

Пусть заданы параметры окололунной орбиты, с которой требуется обеспечить возврат космического аппарата к Земле. Пусть также известны координаты полигона посадки и требования по точности выполнения базовых ограничений. В этом случае практический интерес представляет построение траекторий возврата, удовлетворяющих базовым ограничениям, и оценка следующих параметров:

- минимального возможного импульса скорости $\Delta v_{e \min}$,
- диапазона возможных дальностей спуска $[L_{a \min}, L_{a \max}]$,
- диапазона возможных наклонений траекторий возврата $[i_{\min}, i_{\max}]$,
- диапазона возможных длительностей перелета $[\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max}]$ от момента ухода с лунной орбиты до входа в атмосферу Земли,
- величины импульса ухода с лунной орбиты Δv_e в случае наложения дополнительных ограничений на дальность спуска, наклонение траектории возврата или длительность перелета.

Для получения оценок перечисленных выше параметров была разработана вычислительная схема, которая подразумевает последовательное решение следующих задач условной минимизации:

1. Определение минимального возможного импульса скорости $\Delta v_{e \min}$, обеспечивающего выполнение базовых ограничений в точке входа в атмосферу Земли.
2. Определение диапазона возможных дальностей спуска $[L_{a \min}, L_{a \max}]$ с выполнением базовых ограничений и ограничений на наклонение траектории возврата.

3. Определение минимального возможного импульса скорости Δv_e , обеспечивающего заданную дальность спуска L_{a0} и соблюдение базовых ограничений.

Каждая из перечисленных выше задач решается с использованием численного метода, описанного в работе [4], и в общем случае может включать в себя несколько обращений к этому методу. Начальное приближение для задачи 1 получается с помощью алгоритма, который будет рассмотрен в следующем разделе. Начальные приближения для задач 2 и 3 формируются с использованием интерполяции по ранее полученным решениям.

При этом предусматривается следующая последовательность действий. Сначала с помощью решения задачи 1 определяется минимальный импульс скорости $\Delta v_{e\min}$. Затем с помощью решения задачи 2 при отсутствии ограничений на наклонение (формально $i \leq \pi$) определяется диапазон возможных дальностей $[L_{a\min}, L_{a\max}]$. В результате набор полученных решений будет состоять из трех элементов. Далее задачи 2 и 3 могут вызываться в произвольном порядке при соблюдении условия $i \geq \varphi$ для задачи 2 и условия $L_{a\min} < L_a < L_{a\max}$ для задачи 3.

Начальное приближение для задачи 1

При получении начального приближения v_∞ для задачи минимального импульса применяется следующий алгоритм. Сначала строится траектория возврата, которая удовлетворяет следующим требованиям:

- начальная точка траектории находится на рассматриваемой окололунной орбите;
- центральная точка полигона посадки принадлежит плоскости построенной траектории в момент прохождения условного перицентра;
- наклонение построенной траектории равно заданному значению i_{ret} ;
- перицентр построенной траектории расположен на заданном расстоянии от центра Земли $R_{\pi 0}$;
- длительность перелета до перицентра составляет Δt_0 с точностью до 1 суток;
- используется заданная схема перелета (через северное или южное полушарие Земли).

Алгоритм построения такой траектории будет подробно описан чуть позже, пока же предположим, что такая траектория была успешно построена. Далее, приняв в качестве начальных условий точку перицентра, выполним прогноз с обратным отсчетом времени до точки, расположенной на минимальном расстоянии от Луны. По параметрам движения объекта в этой точке можно вычислить асимптотическую скорость v_∞ (см. [5]) построенной

траектории относительно Луны и определить момент приложения t_e импульса схода с околорунной орбиты и вектор импульса Δv_e , который обеспечивает такую асимптотическую скорость.

Описанные выше действия повторяются для различных сочетаний наклона i_{ret} и времени перелета Δt_0 . Наклонение изменяется с шагом 1 градус от широты полигона посадки до 90 градусов, а значение Δt_0 принимается равным 4 и 5 суткам. Из всех полученных решений выбирается решение, которое соответствует минимуму $|\Delta v_e|$.

Выше было приведено лишь общее описание схемы получения начального приближения для задачи 1. Алгоритмы построения начальной траектории и определения параметров импульса будут рассмотрены в следующих разделах.

Построение начальной траектории в задаче 1

Рассмотрим алгоритм построения начальной траектории (см. предыдущий раздел).

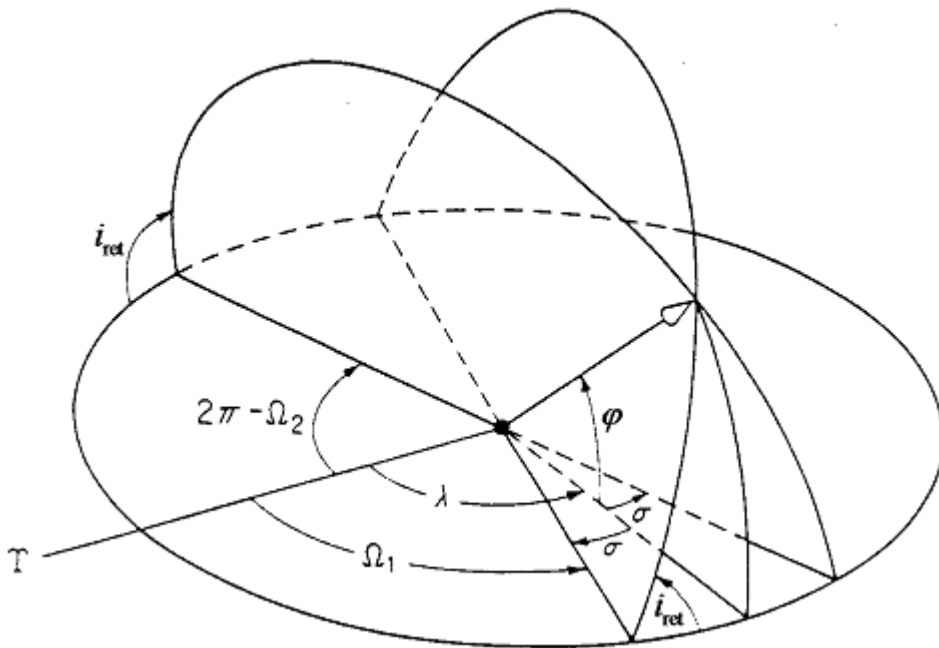


Рис. 1 – Углы в гринвичской системе координат (здесь $\Omega_1 = \lambda - \sigma$, $\Omega_2 = \lambda + \sigma + \pi$)

Вычислим долготу восходящего узла орбиты в гринвичской системе координат $\Omega_{гр}$ из условия прохождения плоскости орбиты через заданный полигон посадки (см. рис. 1).

Сначала отыщем вспомогательный угол σ из формулы сферической тригонометрии:

$$\sin \sigma = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} i_{\text{ret}}}. \quad (9)$$

Долгота восходящего узла орбиты возврата в гринвичской системе координат (в момент достижения условного перицентра) вычисляется по-разному в зависимости от полушария Земли, через которое происходит возврат. При возврате через северное полушарие:

$$\Omega_{\text{Гр}} = \lambda - \sigma, \quad (10)$$

при возврате через южное полушарие:

$$\Omega_{\text{Гр}} = \lambda + \sigma + \pi. \quad (11)$$

Если значение $\Omega_{\text{Гр}}$ оказывается отрицательным, то к нему прибавляется величина 2π .

Следующим шагом рассматриваемого алгоритма является уточнение времени перелета от окололунной орбиты до условного перицентра. Уточнение выполняется с помощью итерационной процедуры. Представим искомое время перелета как $\Delta t_{\text{ret}} = \Delta t_0 + \Delta \tau$. На первой итерации положим $\Delta \tau = 0$. Обозначим радиус-вектор начальной точки окололунной орбиты в геоцентрической системе отсчета J2000 как \mathbf{r}_0 и ее время как t_0 . На каждой очередной итерации выполняются следующие действия.

1. Вычислим в системе отсчета J2000 долготу восходящего узла Ω_{JM} траектории с наклоном i_{ret} , проходящей через точку \mathbf{r}_0 . Вычисления проводятся по следующим формулам:

$$\lambda_0 = \operatorname{atan} 2(r_{0y}, r_{0x}); \quad (12)$$

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{r_{0z}}{|\mathbf{r}_0|}. \quad (13)$$

Здесь функция $\operatorname{atan} 2$ возвращает значение в промежутке $[-\pi, \pi]$, в отличие от функции atan (в отечественной литературе принято обозначение arctg), которая возвращает значение на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Функция $\operatorname{atan} 2$ определяет угол в зависимости от положения точки (r_{0y}, r_{0x}) в соответствующем квадранте координатной плоскости.

Аналогично формулам (9)-(11) получим:

$$\sin \sigma_0 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\operatorname{tg} i_{\text{ret}}}. \quad (14)$$

При возврате через северное полушарие:

$$\Omega_{JM} = \lambda_0 - \sigma_0, \quad (15)$$

при возврате через южное полушарие:

$$\Omega_{JM} = \lambda_0 + \sigma_0 + \pi_0. \quad (16)$$

2. Вычислим в системе отсчета J2000 координаты единичного вектора \mathbf{n}_J , ортогонального плоскости построенной орбиты:

$$\begin{aligned} n_{Jx} &= \sin \Omega_{JM} \sin i_{\text{ret}}, \\ n_{Jy} &= -\cos \Omega_{JM} \sin i_{\text{ret}}, \\ n_{Jz} &= \cos i_{\text{ret}}. \end{aligned} \quad (17)$$

3. Переведем координаты вектора \mathbf{n}_J из системы отсчета J2000 в гринвичскую систему отсчета на момент времени $t_0 + \Delta t_{\text{ret}}$. Обозначим полученный вектор как \mathbf{n}_G .
4. Вычислим долготу восходящего узла Ω_{GM} в гринвичской системе отсчета по формуле

$$\Omega_{GM} = \operatorname{atan} 2(n_{Gy}, n_{Gx}). \quad (18)$$

5. Вычислим поправку к $\Delta \tau$ таким образом, чтобы обеспечить совпадение значений Ω_{Gp} и Ω_{GM} . Величина этой поправки рассчитывается с использованием скорости вращения Земли ω_E .

Сначала рассмотрим случай $\Omega_{GM} > \Omega_{Gp}$. Если $\Omega_{GM} - \Omega_{Gp} < \pi$, то подлёт произошёл раньше нужного момента времени, и тогда сдвиг вычисляется как $\frac{\Omega_{GM} - \Omega_{Gp}}{\omega_E}$, в противном случае подлёт произошёл позже и сдвиг равен $-\frac{2\pi + \Omega_{Gp} - \Omega_{GM}}{\omega_E}$.

В случае $\Omega_{GM} < \Omega_{Gp}$ расчёт проводится иначе: если $\Omega_{Gp} - \Omega_{GM} < \pi$, то подлёт произошёл позже нужного момента времени, и тогда сдвиг вычисляется как $-\frac{\Omega_{Gp} - \Omega_{GM}}{\omega_E}$, в противном случае подлёт произошёл раньше и сдвиг равен $\frac{2\pi + \Omega_{GM} - \Omega_{Gp}}{\omega_E}$.

Итерации продолжаются до тех пор, пока поправка, вычисленная на шаге 5, не станет по модулю меньше 0.1 с.

Окончательным этапом рассматриваемого алгоритма является формирование вектора состояния в условном перицентре. С этой целью решается задача Ламберта в форме Бэттина. Исходными данными для этой задачи являются расстояние до Земли R_0 в начальной точке траектории, расстояние до Земли $R_{\pi 0}$ в точке условного перицентра и время движения Δt_{ret} между этими точками. В результате решения вычисляются большая полуось орбиты a , ее эксцентриситет e и истинная аномалия θ . Знание этих параметров в совокупности с известным наклоном и долготой восходящего узла однозначно определяет положение объекта и его вектор скорости в точке условного перицентра.

Решение сформулированной выше задачи выполняется численно в два этапа. На первом этапе в цикле выполняется перебор значений θ в диапазоне от 0 до π с некоторым шагом. При этом последовательно вычисляются следующие величины:

большая полуось орбиты

$$a = \frac{R_0(R_0 - R_{\pi 0} \cos \theta)}{2R_0 - R_{\pi 0}(1 + \cos \theta)}; \quad (19)$$

длина хорды, соединяющей концы отрезков (по теореме косинусов)

$$s = \sqrt{R_0^2 + R_{\pi 0}^2 - 2R_0R_{\pi 0} \cos \theta}; \quad (20)$$

два вспомогательных угла

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 2 \arcsin \sqrt{\frac{R_0 + R_{\pi 0} + s}{4a}}; \\ \delta_0 &= 2 \arcsin \sqrt{\frac{R_0 + R_{\pi 0} - s}{4a}}; \end{aligned} \quad (21)$$

и вспомогательное выражение

$$\Phi = \sqrt{\mu_E} \Delta t_{ret} - \sqrt{a^3} ((\varepsilon_0 - \sin \varepsilon_0) - (\delta_0 - \sin \delta_0)), \quad (22)$$

где μ_E – гравитационный параметр Земли.

Перебор продолжается до тех пор, пока на двух последовательных итерациях не будут получены значения Φ с разными знаками. На втором этапе уточнение значения θ выполняется путем решения уравнения $\Phi = 0$ методом бисекции.

Вычисление параметров импульса

Сначала рассмотрим следующую задачу. Пусть известны радиус-вектор положения объекта \mathbf{r}_M на окололунной орбите и вектор его скорости \mathbf{v}_M относительно Луны. Требуется вычислить вектор импульса $\Delta \mathbf{v}_e$, который обеспечивает переход на траекторию с заданным вектором асимптотической скорости \mathbf{v}_∞ .

Решение этой задачи выполняется численно и состоит из нескольких этапов, которые будут рассмотрены ниже. При этом рассмотрении с помощью подстрочного индекса h мы будем обозначать элементы целевой гиперболической траектории с асимптотической скоростью \mathbf{v}_∞ , а с помощью индекса M – параметры исходной окололунной орбиты.

На первом этапе выполняется вычисление наклона i_h , долготы восходящего узла Ω_h и аргумента широты u_h целевой траектории. Для этого сначала вычисляется вспомогательный вектор

$$\mathbf{w} = \mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_\infty, \quad (23)$$

который перпендикулярен плоскости целевой орбиты. Тогда

$$i_h = \arccos\left(\frac{w_z}{|\mathbf{w}|}\right), \quad \Omega_h = \text{atan2}(w_x, -w_y). \quad (24)$$

Если i_h близко к нулю, то аргумент широты вычисляется по формуле

$$u_h = \text{atan2}(r_{My}, r_{Mx}) - \Omega_h. \quad (25)$$

В противном случае:

$$\begin{aligned} \sin u_h &= \frac{r_{Mz}}{|\mathbf{r}_M| \sin i_h}, \\ \cos u_h &= \frac{1}{\cos \Omega_h} \left(\frac{r_{Mx}}{|\mathbf{r}_M|} + \sin u_h \sin \Omega_h \cos i_h \right), \text{ если } |\cos \Omega_h| < |\sin \Omega_h|; \\ \cos u_h &= \frac{1}{\sin \Omega_h} \left(\frac{r_{My}}{|\mathbf{r}_M|} - \sin u_h \cos \Omega_h \cos i_h \right), \text{ если } |\cos \Omega_h| \geq |\sin \Omega_h|. \end{aligned} \quad (26)$$

Далее вычисляем модуль скорости v_h в точке \mathbf{r}_M , единичный вектор \mathbf{e}_∞ , направленный вдоль вектора асимптотической скорости \mathbf{v}_∞ и большую полуось целевой траектории a_h :

$$v_h = \sqrt{\frac{2\mu_M}{|\mathbf{r}_M|} + |\mathbf{v}_\infty|^2}, \quad \mathbf{e}_\infty = \frac{\mathbf{v}_\infty}{|\mathbf{v}_\infty|}, \quad a_h = \frac{\mu_M}{|\mathbf{v}_\infty|^2}. \quad (27)$$

Здесь μ_M – гравитационный параметр Луны.

Следующей стадией решения поставленной задачи является нахождение такого значения истинной аномалии θ_h , при которой расстояние r_h от Луны до точки траектории с аргументом широты u_h будет совпадать с $|\mathbf{r}_M|$. Поиск этого значения выполняется в два этапа. На первом этапе в цикле происходит последовательный перебор значений θ_h от $-\pi/9$ до 2π с шагом в 1 градус. Целью этого этапа является нахождение таких двух последовательных значений θ_h , для которых разность $r_h - |\mathbf{r}_M|$ имеет разные знаки. При нахождении такой пары значений на втором этапе уточнение θ_h проводится методом бисекции, пока модуль этой разности не станет меньше 0.1 м.

Приведем расчетные формулы для вычисления r_h в зависимости от θ_h . Вычислим единичные вектора \mathbf{p} и \mathbf{q} , а также вспомогательные переменные ξ и η :

$$\begin{aligned} p_x &= \cos \omega_h \cos \Omega_h - \sin \omega_h \sin \Omega_h \cos i_h, \\ p_y &= \cos \omega_h \sin \Omega_h + \sin \omega_h \cos \Omega_h \cos i_h, \\ p_z &= \sin \Omega_h \sin i_h, \\ q_x &= -\sin \omega_h \cos \Omega_h - \cos \omega_h \sin \Omega_h \cos i_h, \\ q_y &= -\sin \omega_h \sin \Omega_h + \cos \omega_h \sin \Omega_h \cos i_h, \\ q_z &= \cos \Omega_h \sin i_h, \\ \xi &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_\infty, \quad \eta = \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_\infty. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $\omega_h = u_h - \theta_h$ – аргумент перицентра. Величина ξ связана с эксцентриситетом целевой траектории соотношением $e_h = -1/\xi$. Интерес представляет только тот случай, когда $e_h \geq 1$. В этом случае искомая величина вычисляется по формуле

$$r_h = a_h \frac{e_h^2 - 1}{1 + e_h \cos \theta}. \quad (29)$$

После того как найдено θ_h , радиальная v_{hr} и трансверсальная v_{ht} компоненты вектора скорости вычисляются по формулам

$$v_{hr} = e_h \sin \theta_h \cdot \sqrt{\frac{\mu_M}{a_h(e_h^2 - 1)}}, \quad v_{ht} = (1 + e_h \cos \theta_h) \sqrt{\frac{\mu_M}{a_h(e_h^2 - 1)}}. \quad (30)$$

Тогда компоненты вектора скорости \mathbf{v}_h равны

$$\begin{aligned}
v_{hx} &= v_{hr} \frac{r_{Mx}}{|\mathbf{r}_M|} + v_{ht} (-\sin u_h \cos \Omega_h - \cos u_h \sin \Omega_h \cos i_h), \\
v_{hy} &= v_{hr} \frac{r_{My}}{|\mathbf{r}_M|} + v_{ht} (-\sin u_h \sin \Omega_h + \cos u_h \cos \Omega_h \cos i_h), \\
v_{hz} &= v_{hr} \frac{r_{Mz}}{|\mathbf{r}_M|} + v_{ht} \cos u_h \sin i_h,
\end{aligned} \tag{31}$$

а искомый импульс скорости определяется по формуле

$$\Delta \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_h - \mathbf{v}_M. \tag{32}$$

Отметим два важных обстоятельства. Во-первых, при некоторых сочетаниях исходных данных рассмотренная выше задача может не иметь решения. Во-вторых, даже если решение существует, то полученная целевая траектория может оказаться физически нереализуемой вследствие ее пересечения с поверхностью Луны. Траектория возврата не будет иметь пересечений с поверхностью Луны, если выполняется одно из двух условий:

1. Время движения до перицентра является отрицательным.
2. Время движения до перицентра является положительным и радиус перицентра превышает радиус поверхности Луны.

Задача определения параметров импульса схода с окололунной орбиты при известном векторе асимптотической скорости \mathbf{v}_∞ сводится к нахождению такого момента $0 \leq t_e \leq T_M$ (где T_M – период исходной орбиты), для которого существует решение сформулированной выше задачи при минимальном значении $|\Delta \mathbf{v}_e|$.

Алгоритм решения задачи 1

Под задачей 1 понимается задача определения оптимального импульса схода с окололунной орбиты при выполнении базовых ограничений (7) и (8). Решение этой задачи включает в себя несколько этапов.

На первом этапе с помощью алгоритма, описанного ранее в разделе «Построение начальной траектории в задаче 1», определяется начальное приближение для вектора асимптотической скорости \mathbf{v}_∞ . Далее последовательно решаются две или три задачи условной минимизации с помощью численного метода, описанного в [4]. Результат решения очередной задачи используется в качестве начального приближения для следующей. Во всех случаях в качестве целевой функции используется функция $\Delta v_e(\mathbf{v}_\infty) \rightarrow \min$. Однако решаемые задачи различаются составом ограничений и настройками требуемой точности.

Так, первое уточнение вектора \mathbf{v}_∞ выполняется только в том случае, если на траектории, соответствующей начальному приближению, высота условного

перицентра оказывается больше 100 км или менее 5 км. В качестве ограничений используются базовые ограничения (7), (8), однако расчет бокового смещения выполняется без учета вращения Земли. Требуемая точность по выполнению ограничений принимается равной $\varepsilon_h = \varepsilon_B = 30$ км, а требуемая точность по компонентам $\mathbf{v}_\infty - 0.1$ м/с. Поиск решения прекращается при нахождении первой точки, удовлетворяющей ограничениям. Целью выполняемого уточнения является получение такой траектории, условный перицентр которой заведомо расположен внутри земной атмосферы, что гарантирует существование точки входа в нее.

Следующее уточнение вектора \mathbf{v}_∞ выполняется с базовыми ограничениями (7), (8) с учетом упреждения, вызванного вращением Земли. Требуемая точность по выполнению ограничений принимается $\varepsilon_h = \varepsilon_B = 1$ км, а требуемая точность по компонентам $\mathbf{v}_\infty - 0.01$ м/с. Поиск решения также прекращается при нахождении первой точки, удовлетворяющей всем ограничениям.

Наконец, окончательное решение задачи 1 получается в результате еще одного уточнения с более высокими требованиями по точности: $\varepsilon_h = \varepsilon_B = 100$ м, точность по компонентам $\mathbf{v}_\infty - 0.001$ м/с. Решение выполняется в режиме полного поиска (см. [4], раздел «Вычислительная схема условной минимизации»).

Алгоритм решения задачи 2

Под задачей 2 понимается задача определения предельных дальностей L_a для траекторий возврата, которые удовлетворяют базовым ограничениям (7), (8) и ограничению на предельное наклонение:

$$i \leq i_{\max}, \quad (33)$$

где i_{\max} – некоторая константа. Отметим, что если $i_{\max} = \pi$, то ограничение (33) заведомо выполняется.

Как уже отмечалось ранее, обращение к задаче 2 при $i_{\max} = \pi$ должно выполняться только после того, как было получено решение задачи 1, а при $i_{\max} < \pi$ – только после получения решений для $i_{\max} = \pi$.

Общая вычислительная схема решения задачи 2 аналогична схеме решения задачи 1: сначала получение начального приближения, затем последовательное решение нескольких задач условной минимизации с помощью численного метода, описанного в работе [4]. Далее в текущем разделе мы будем рассматривать задачу минимизации L_a . Схема решения задачи максимизации L_a аналогична: в ней меняется только форма целевой функции.

В случае $i_{\max} = \pi$ вектор начального приближения $\mathbf{v}_{\infty 0}$ может принимать одно из двух значений. Пусть $\mathbf{v}_{\infty 1}$ – ранее полученное решение задачи 1, а $L_{\pi 1}$ –

дальность от условного перицентра до центра полигона посадки, которая соответствует этому решению. Обозначим через $\mathbf{v}_{\infty 2}$ вектор начального приближения, вычисленный с помощью алгоритма, описанного ранее в разделе «Начальное приближение для задачи 1», а через $L_{\pi 2}$ – соответствующую ему дальность от условного перицентра. Если $L_{\pi 1} < L_{\pi 2}$, то в качестве начального приближения принимается $\mathbf{v}_{\infty 1}$, в противном случае – $\mathbf{v}_{\infty 2}$.

Если же $i_{\max} < \pi$, то начальное приближение строится с помощью интерполяции по ранее полученным решениям с использованием алгоритма, который описан ниже. В соответствии с принятой вычислительной схемой на момент построения начального приближения должно существовать не менее 3 решений задач 1 и 2. Сначала на их основе с помощью метода наименьших квадратов строится квадратичная аппроксимация для зависимости наклона i от дальности до полигона посадки L_a :

$$i(L_a) = a_L L_a^2 + b_L L_a + c_L. \quad (34)$$

В результате решения квадратного уравнения $i(L_a) = i_{\max}$ вычисляются начальные приближения для $L_{a\max}$ и $L_{a\min}$. Следующим шагом является построение квадратичной аппроксимации для каждой из компонент вектора $\mathbf{v}_{\infty}(L_a)$ в зависимости от дальности и вычисление начального приближения $\mathbf{v}_{\infty 0} = \mathbf{v}_{\infty}(L_{a\min})$. В последнем случае квадратичная аппроксимация для $\mathbf{v}_{\infty}(L_a)$ строится по трем решениям, в которых дальность спуска наиболее близка к начальным приближениям для $L_{a\max}$ и $L_{a\min}$.

После того как вычислено начальное приближение для \mathbf{v}_{∞} , дальнейшее его уточнение выполняется путем последовательного решения задач условной минимизации, которые перечислены ниже.

1. Шаг выполняется в случае, если разница между наклоном траектории возврата и i_{\max} превышает 2 градуса. Решается задача минимизации дальности от перицентра L_{π} при соблюдении ограничений (7), (8), (33). Расчет бокового смещения B_p выполняется без учета вращения Земли. Требуемая точность по выполнению ограничений на высоту перицентра и боковое отклонение принимается равной $\varepsilon_h = \varepsilon_B = 30$ км, а требуемая точность по компонентам \mathbf{v}_{∞} – 0.1 м/с. Поиск решения прекращается при нахождении первой точки локального минимума.
2. Проводится уточнение решения задачи, сформулированной на 1-м шаге с более высокими требованиями по точности: $\varepsilon_h = \varepsilon_B = 1$ км, требуемая точность по компонентам \mathbf{v}_{∞} – 0.01 м/с. Поиск решения прекращается при нахождении первой точки, удовлетворяющей всем ограничениям.

3. Решается задача условной минимизации дальности от точки входа в атмосферу L_a при соблюдении ограничений (7), (8), (33). Расчет бокового смещения B_p выполняется с учетом упреждения, вызванного вращением Земли. Требуемая точность по выполнению ограничений на высоту перицентра и боковое отклонение принимается $\varepsilon_h = \varepsilon_B = 0.5$ км, а требуемая точность по компонентам $v_\infty - 0.01$ м/с. Поиск решения прекращается при нахождении первой точки, удовлетворяющей всем ограничениям.
4. Проводится уточнение решения задачи, сформулированной на предыдущем шаге с более высокими требованиями по точности: $\varepsilon_h = \varepsilon_B = 0.1$ км, требуемая точность по компонентам $v_\infty - 0.001$ м/с. Решение выполняется в режиме полного поиска (см. [4], раздел «Вычислительная схема условной минимизации»).
5. Шаг выполняется только в том случае, если $i_{\max} < \pi$ и разница между полученным наклоном и i_{\max} превышает величину $\varepsilon_i = 0.01$ градуса. В этом случае еще раз повторяется решение задачи, сформулированной на предыдущем шаге, в которой ограничение (33) заменяется на более жесткое:

$$i_{\max} - \varepsilon_i \leq i \leq i_{\max}. \quad (35)$$

Алгоритм решения задачи 3

Под задачей 3 понимается задача определения оптимального импульса схода с окололунной орбиты при выполнении базовых ограничений (7) и (8) и дополнительного ограничения

$$|L_a - L_{\text{arg}}| \leq \varepsilon_L. \quad (36)$$

Здесь L_{arg} – заданное значение дальности, а ε_L – заданная точность.

При принятой вычислительной схеме предполагается, что обращение к задаче 3 должно выполняться только после того, как ранее были получены решение задачи 1 и решения задачи 2 при $i_{\max} = \pi$. Последнее условие означает, что был определен диапазон возможных дальностей спуска от точки входа в атмосферу $[L_{a\min}, L_{a\max}]$. Очевидно, поставленная задача имеет решение только в том случае, если значение L_{arg} находится внутри этого диапазона.

Вычислительная схема для задачи 3 аналогична схемам для задач 1 и 2 и заключается в последовательном решении нескольких задач условной минимизации с помощью численного метода, описанного в работе [4]. Начальное приближение для вектора v_∞ получается путем интерполяции компонентов этого вектора по дальности L_a . Для этого из ранее полученных решений выбираются три решения, наиболее близкие к L_{arg} , и на их основе для

каждой компоненты v_∞ строится ее квадратичная аппроксимация в зависимости от дальности L_a .

Ниже приведен перечень задач условной минимизации, которые решаются последовательно. При описании этих задач под обозначением L_{aopt} понимается дальность траектории спуска, полученной в результате решения задачи 1. На всех шагах, кроме последнего, при решении задач условной минимизации поиск прекращается при нахождении первой точки, удовлетворяющей всем ограничениям.

1. Шаг выполняется в том случае, если траектория, соответствующая начальному приближению, удовлетворяет хотя бы одному из трех условий:

- высота условного перицентра меньше 5 км;
- высота условного перицентра больше 100 км;
- разница между дальностью спуска L_a и L_{targ} превышает 1000 км.

В этом случае решается задача условной минимизации, в которой в качестве целевой функции используется модуль импульса схода с околорунной орбиты $|\Delta v_e|$, а в качестве ограничений – базовые ограничения (7) и (8), а также ограничения на дальность, которые формируются следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{targ} \leq L_a \leq L_{targ} + \varepsilon_L, \text{ если } L_{targ} \geq L_{aopt}; \\ L_{targ} - \varepsilon_L \leq L_a \leq L_{targ}, \text{ если } L_{targ} < L_{aopt}. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь ε_L полагается равным 50 км, а величины ε_h и ε_B , которые используются в ограничениях (7) и (8), – 30 км. Требуемая точность по компонентам вектора асимптотической скорости полагается равной 0.1 м/с.

2. Решается задача условной минимизации, аналогичная задаче, описанной на предыдущем шаге с более высокими требованиями по точности: $\varepsilon_L = 5$ км, $\varepsilon_h = \varepsilon_B = 1$ км, точность по компонентам вектора асимптотической скорости равна 0.01 м/с.
3. Шаг выполняется в том случае, если наклонение текущей траектории превышает 75 градусов. Опять решается задача условной минимизации, аналогичная задачам, описанным на предыдущих шагах со следующими настройками точности: $\varepsilon_L = 0.5$ км, $\varepsilon_h = \varepsilon_B = 0.1$ км, точность по компонентам вектора асимптотической скорости равна 0.001 м/с. Необходимость выполнения такого шага объясняется тем обстоятельством, что, как показала практика, при больших наклонениях для сходимости задачи условной минимизации требуется большее число итераций.
4. Получение в режиме полного поиска (см. [4]) окончательного решения задачи условной минимизации со следующими настройками точности: $\varepsilon_L = 0.1$ км, $\varepsilon_h = \varepsilon_B = 0.1$ км, точность по компонентам вектора асимптотической скорости равна 0.001 м/с.

Результаты численного моделирования

Отработка и тестирование представленной методики проводилась на примере 4 окололунных орбит, параметры которых представлены ниже в таблице 1.

Таблица 1

Параметры окололунных орбит

Номер орбиты	1	2	3	4
Склонение Луны, град	28.5	-28.1	-19.3	-28.0
Наклонение, град	10	10	10	90
Долгота восходящего узла, град	0	90	90	-135
Высота перицентра, км	100	100	100	100

Параметры орбит, приведенные в таблице 1, соответствуют системе отсчета, связанной с фигурой Луны.

Во всех 4 случаях расчеты проводились по единой вычислительной схеме, которая включала в себя следующие шаги:

1. Решение задачи 1 для получения траектории с минимальным импульсом.
2. Решение задачи 2 со значением i_{\max} , соответствующим 180 градусам.
3. Решение задачи 2 со значениями i_{\max} , соответствующими 75 и 70 градусам.
4. Решение задачи 3 со значениями L_{targ} , кратными 500 км и находящимися внутри диапазона $[L_{\text{amin}}, L_{\text{amax}}]$.

При расчетах использовались координаты полигона посадки, расположенного вблизи космодрома «Восточный» (50.286 градусов с.ш. и 128.45 градусов в.д.). Все расчеты проводились для схемы перелета через южное полушарие Земли.

Таблица 2

Параметры траекторий с минимальным импульсом

Номер орбиты	1	2	3	4
Импульс схода, м/с	840.7	833.5	857.9	843.6
Наклонение, град	50.0	50.4	50.2	53.4
Дальность до полигона, км	15638	7732	8598	5418

Номер орбиты	1	2	3	4
Время перелета, сутки	4.699	4.031	3.893	4.910
Широта точки входа, град	-35.6	19.2	10.6	19.4
Долгота точки входа, град	9.4	53.5	51.7	84.9

В таблице 2 представлены параметры траекторий возврата с окололунных орбит, для которых затраты характеристической скорости минимальны (решения задач 1). Здесь приведено наклонение траекторий возврата в системе отсчета J2000. Как видно из представленных результатов, наклонения оптимальных по импульсу схода траекторий возврата во всех случаях близки к широте полигона посадки (даже в том случае, когда наклонение исходной окололунной орбиты равно 90 градусам). Другие же параметры траекторий могут изменяться в весьма широких пределах.

Таблица 3

Диапазоны изменения параметров траекторий возврата

Номер орбиты		1	2	3	4
Импульс схода, м/с	min	840.7	833.5	857.9	843.6
	max	928.6	894.7	948.9	942.0
Дальность до полигона, км	min	10022	3978	4813	3818
	max	18763	12669	13512	12520
Время перелета, сутки	min	4.378	3.845	3.693	4.821
	max	4.862	4.325	4.175	5.287
Широта точки входа, град	min	-40.2	14.4	6.9	16.6
	max	-35.6	19.1	10.6	19.4
Долгота точки входа, град	min	-40.0	-43.1	-42.7	-43.1
	max	135.5	130.8	132.3	122.9

Как видно из представленных результатов, диапазон величины импульса скорости, обеспечивающего реализацию траекторий возврата с соблюдением базовых ограничений, может отличаться от оптимального на 60-100 м/с. При этом ширина диапазона дальностей спуска для всех рассмотренных вариантов составляет 8000-9000 км, а время перелета может варьироваться до 12 часов. Также обращает на себя внимание то обстоятельство, что диапазон возможных долгот точек входа в атмосферу остается примерно одинаковым для всех

вариантов. Но диапазон широт точек входа сильно зависит от параметров исходной окололунной орбиты, а ширина этого диапазона довольно узка и не превышает 6 градусов.

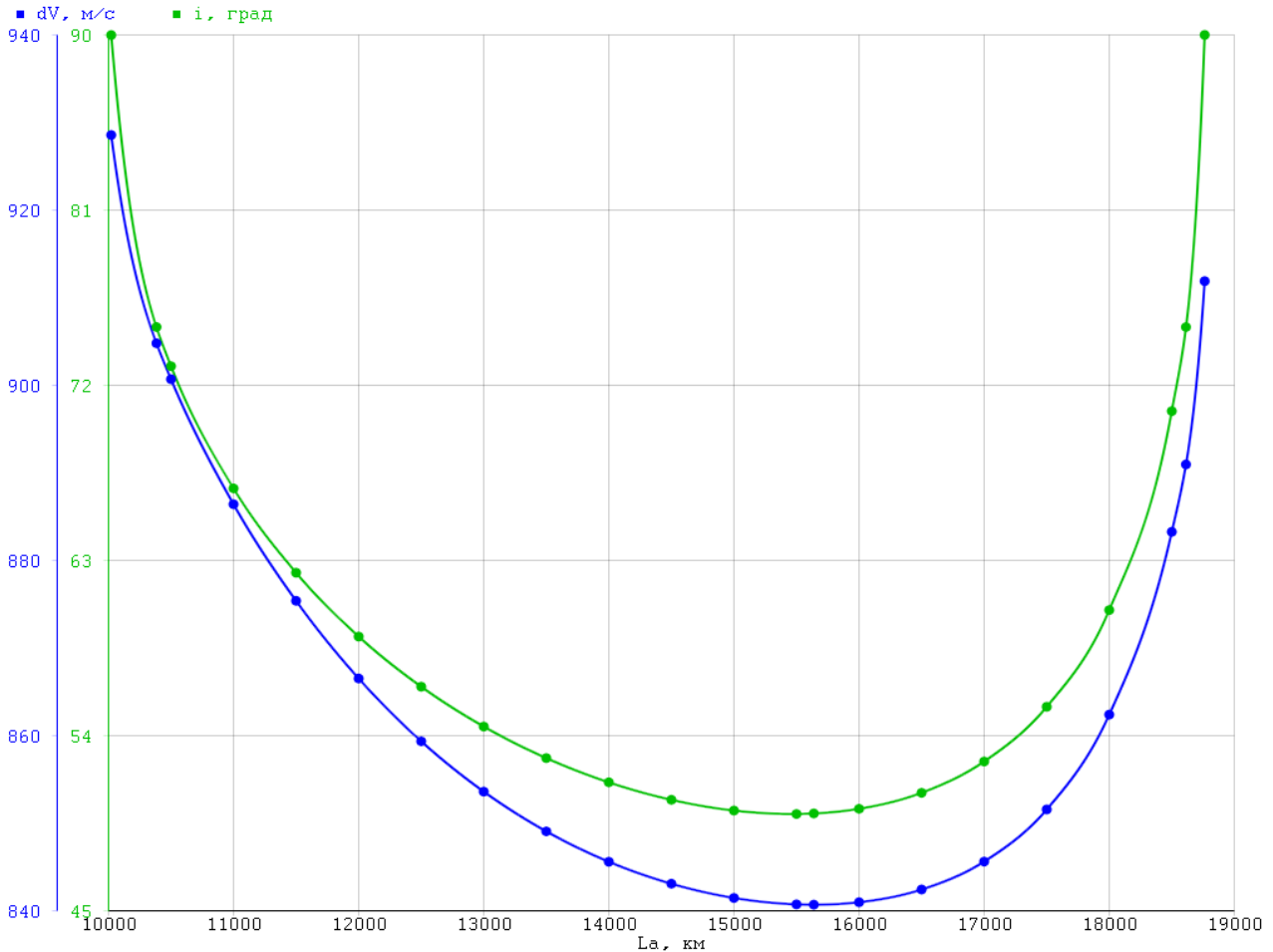


Рис. 2 – Зависимость наклона и величины импульса от дальности спуска для орбиты 1

На рис. 2 представлена зависимость наклона и величины импульса от дальности спуска для орбиты 1. Здесь синим цветом показана величина импульса, а зеленым – наклонение траектории возврата в системе отсчета J2000. На этом рисунке решения задач 1-3 отмечены маркерами, а промежуточные точки графиков получены с помощью интерполяции кубическими сплайнами.

Как видно из представленного рисунка, изменение дальности спуска относительно траектории с минимальными затратами характеристической скорости может достигаться за счет увеличения наклона, а теоретически возможные пределы по дальности (как минимальный, так и максимальный) достигаются на наклонах, близких к 90 градусам.

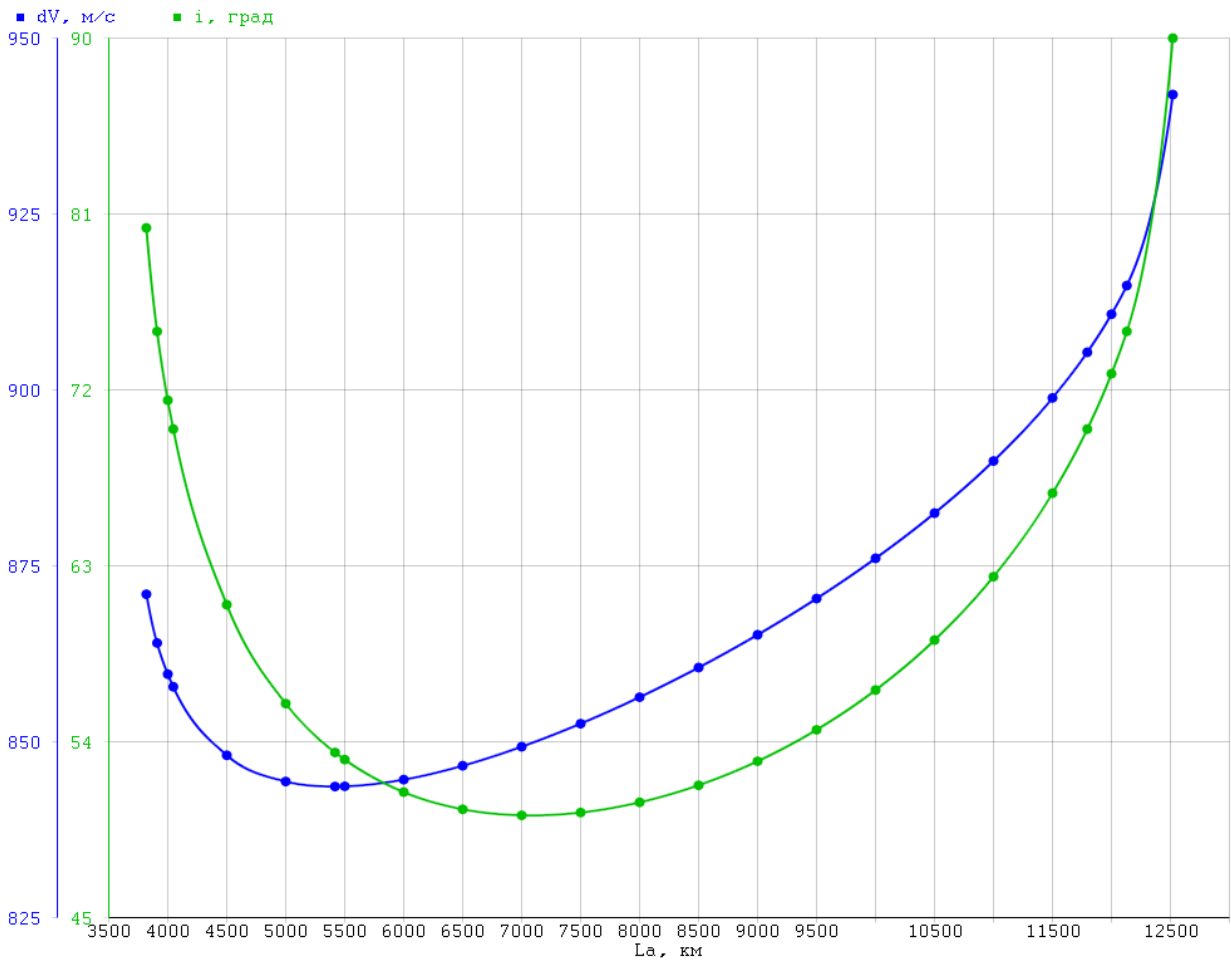


Рис.3 – Зависимость наклона и величины импульса от дальности спуска для орбиты 4

В целом такой характер изменения величины импульса, наклона и дальности сохраняется во всех рассмотренных нами вариантах. Однако форма графиков изменения этих параметров может существенно зависеть от параметров исходной окололунной орбиты. Так, на рис. 3 представлен наиболее экзотический случай для орбиты 4, когда наклонение окололунной орбиты составляет 90 градусов.

Следует отметить, что в общем случае для некоторого фиксированного наклона, которое превышает широту полигона посадки, возможна реализация двух траекторий возврата с существенно разными дальностями спуска.

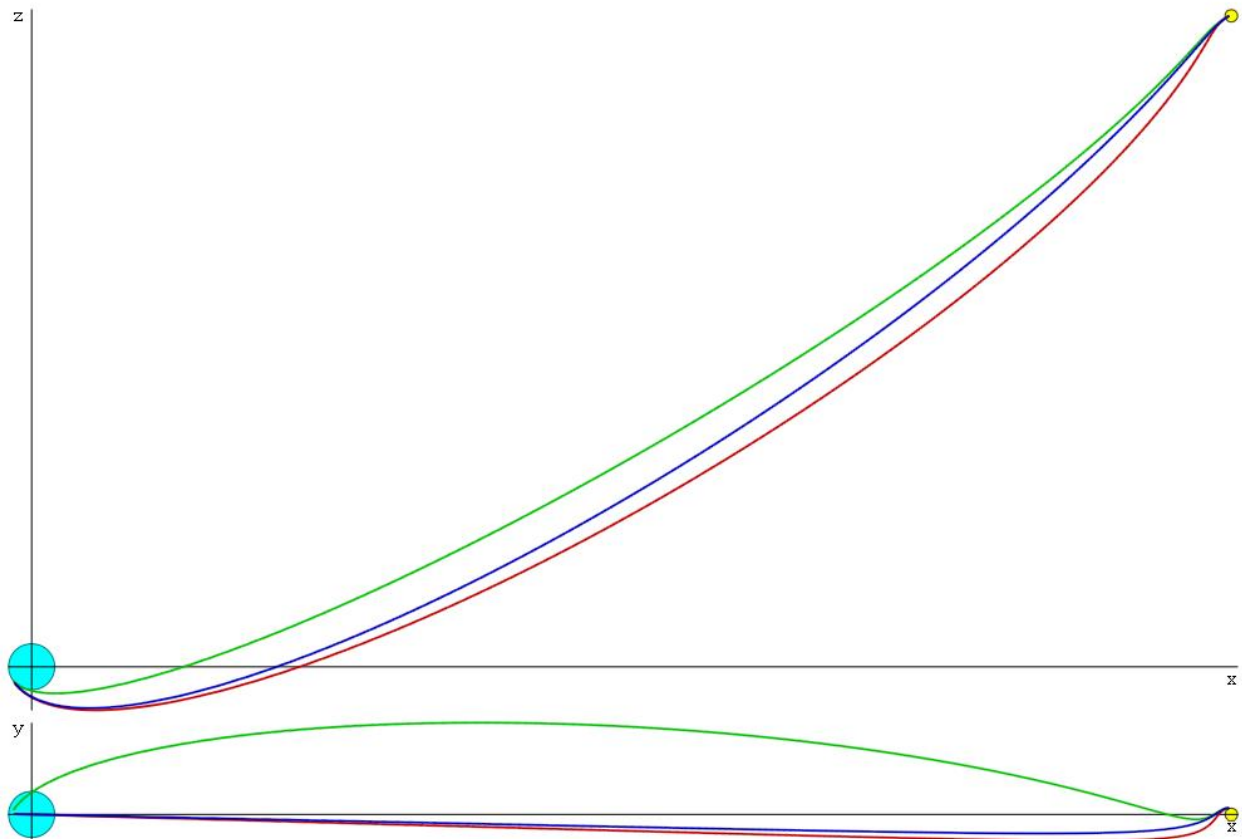


Рис.4 – Геометрия траекторий возврата для орбиты 1

На рис. 4 показана геометрия траекторий возврата для орбиты 1. На этом рисунке зеленым цветом показана траектория, соответствующая минимальным затратам характеристической скорости, красным и синим – траектории, соответствующие максимальной и минимальной дальности спуска. С помощью кругов голубого и желтого цвета показаны соответственно Луна и Земля. При построении рисунка использовалась инерциальная система координат, которая обладает следующими свойствами. Начало этой системы расположено в центре Земли, а ее ось z совпадает с осью z системы координат J2000. Ось x ортогональна оси z и направлена в сторону центра Луны в момент старта с окололунной орбиты (т.е. координата центра Луны y равна 0 в этот момент времени). Ось y дополняет систему до правой.

Отметим, что, поскольку использованная система является инерциальной, положение Луны в ней изменяется со временем. На рис. 4 показано положение Луны в момент старта с окололунной орбиты. На верхней части рисунка показаны траектории возврата в проекции на плоскость x,z , а на нижней – в проекции на плоскость x,y выбранной системы координат.

Для других вариантов исходных орбит геометрия траекторий возврата похожа на ту, что приведена на рис. 4.

Выводы

Представлена методика оптимизации траекторий возврата с окололунной орбиты с соблюдением в точке входа в атмосферу Земли ограничений, которые обусловлены требованиями алгоритма управления спуском. Созданная методика позволяет определять оптимальные затраты характеристической скорости при реализации одноимпульсной схемы перелета.

Работоспособность методики была проверена на нескольких вариантах исходных окололунных орбит, для которых были получены количественные оценки затрат характеристической скорости и реализуемых параметров траекторий возврата.

Созданная методика может быть использована при баллистическом проектировании космических миссий, предусматривающих возврат космических аппаратов с орбиты искусственного спутника Луны. Результаты, получаемые с использованием представленной методики, могут использоваться в качестве начального приближения для построения траекторий возврата с более сложными схемами управления (многоимпульсные маневры, оптимальное управление и т.д.).

Библиографический список

- [1] С. Н. Евдокимов, С. И. Климанов, А. Н. Корчагин, Е. А. Микрин, Ю. Г. Сихарулидзе, А. Г. Тучин, Д. А. Тучин. Обеспечение посадки спускаемого аппарата на космодром “Восточный” после возвращения от Луны. // Известия РАН. Теория и системы управления, 2014, № 6, с. 136–152.
- [2] С. Н. Евдокимов, С. И. Климанов, А. Н. Корчагин, Е. А. Микрин, Ю. Г. Сихарулидзе. Концепция терминального алгоритма управления спуском при входе аппарата в атмосферу Земли с околопараболической скоростью. // Известия РАН. Теория и системы управления, 2014, № 2, с. 122–129.
- [3] Навигация космических аппаратов при исследовании дальнего космоса // под ред. Е.П. Молотова, А.Г. Тучина. М.: Радиотехника, 2016 г. 232 с. ISBN 978-5-93108-121.
- [4] А. С. Самотохин. Численный метод условной минимизации с использованием кэширования и модифицированной функции Лагранжа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 39. 25 с. doi:[10.20948/prepr-2016-39](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-39) URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-39>
- [5] Д.Е. Охоцимский, Ю.Г. Сихарулидзе. Основы механики космического полета // М., «Наука», — 1990.