ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 60 за 2016 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Попков К.А.

Нижние оценки длин полных диагностических тестов для схем и входов схем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Попков К.А. Нижние оценки длин полных диагностических тестов для схем и входов схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 60. 12 с. doi:**10.20948/prepr-2016-60**
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-60**

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

К. А. Попков

Нижние оценки длин полных диагностических тестов для схем и входов схем

Москва — 2016

Попков К. А.

Нижние оценки длин полных диагностических тестов для схем и входов схем

Получены экспоненциальные нижние оценки длин следующих тестов:

1) полных диагностических тестов при однотипных и произвольных константных неисправностях на входах схем;

2) полных диагностических тестов для схем из функциональных элементов в некоторых базисах при однотипных и произвольных константных неисправностях на выходах элементов.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, неисправность, полный диагностический тест, тест для входов схем

Kirill Andreevich Popkov

Lower bounds on lengths of complete diagnostic tests for circuits and inputs of circuits

Exponential lower bounds on lengths of the following tests are obtained:

1) complete diagnostic tests in presence of one-type or arbitrary constant faults on inputs of circuits;

2) complete diagnostic tests for logic circuits in some bases in presence of one-type or arbitrary constant faults on outputs of gates.

Key words: logic circuit, fault, complete diagnostic test, test for inputs of circuits

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14–01–00598) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Оглавление

Введение

В работе рассматривается вопросы, связанные с тестированием логических устройств, реализующих заданные булевы функции. Тестовый подход к контролю работы схем предложен С. В. Яблонским и И. А. Чегис в [1]. Пусть имеется логическое устройство, например, двухполюсная контактная схема или схема из функциональных элементов S, реализующее булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Под воздействием некоторого источника неисправностей один или несколько элементов или входов схемы S могут перейти в неисправное состояние. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать некоторую булеву функцию $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых для рассматриваемой задачи неисправностях элементов либо входов схемы S, называются *функциями неисправности* данной схемы.

Введём следующие определения [2, 3, 4]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных функций неисправности $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество T, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если могут быть неисправны сколько угодно элементов либо входов схемы, и *единичным*, если может быть неисправен только один элемент либо вход схемы. Единичные тесты при неисправностях элементов схем обычно рассматривают для неизбыточных схем [4], т.е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность любого одного элемента приводит к функции неисправности, отличной от исходной функции, реализуемой данной схемой.

Пусть зафиксирован вид неисправностей элементов либо входов схем и T — полный диагностический тест для некоторой схемы S. Введём следующие обозначения: $D(T)$ — длина теста T; $D(S) = \min D(T)$, где минимум берётся по всем полным диагностическим тестам T для схемы S; $D(f) = \min D(S)$, где минимум берётся по всем схемам S (для случая схем из функциональных элементов — в некотором фиксированном функционально полном базисе B), реализующим функцию f; $D(n) = \max D(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f

от n переменных. Функция $D(n)$ называется *функцией Шеннона* длины полного диагностического теста.

Отметим, что если рассматриваются только неисправности на входах схем, то функции неисправности произвольной схемы не зависят от её строения и даже от принадлежности её определённому классу схем, а зависят лишь от исходной функции, реализуемой этой схемой (это обстоятельство отмечено, например, в работе [1]). Поэтому в данном случае можно говорить о функциях неисправности без указания схемы. Класс допустимых неисправностей на входах схем ограничим константными неисправностями, при которых значение на любом неисправном входе схемы становится равно некоторой булевой константе. Фактически, любая константная неисправность на входе схемы означает подстановку в булеву функцию, реализуемую этой схемой, вместо переменной, отвечающей неисправному входу, булевой константы.

В качестве допустимых неисправностей контактов (в контактных схемах) будем рассматривать их обрывы и замыкания. При обрыве контакта проводимость между его полюсами становится тождественно нулевой, а при замыкании — тождественно единичной. Класс неисправностей функциональных элементов ограничим константными и инверсными неисправностями на выходах элементов. Константная неисправность на выходе функционального элемента означает, что значение на этом выходе становится равно некоторой булевой константе. Константные неисправности на входах схем и выходах функциональных элементов называются однотипными константными типа δ, если значения на неисправных входах схем (выходах элементов) равны одной и той же булевой константе δ, и произвольными константными, если эти значения могут быть равны как 0, так и 1 для каждого неисправного входа схемы (выхода элемента) независимо от неисправностей других входов схемы (выходов элементов). Инверсная неисправность на выходе функционального элемента означает, что значение на этом выходе становится противоположным значению на нём в случае, когда этот выход исправен.

Для удобства над буквой D будем ставить символ P в случаях, когда рассматриваются неисправности на входах схем (primary inputs), и символ O, когда рассматриваются неисправности контактов или неисправности на выходах функциональных элементов (outputs). Под буквой D будем ставить символ, обозначающий базис (для случая схем из функциональных элементов), а после него — символы «$0, 1$», «0», «1» или «Inv» в случаях, когда в схемах допускаются соответственно произвольные константные неисправности (на входах схем или выходах элементов либо как обрывы, так и замыкания контактов), однотипные константные неисправности типа 0 (на входах схем или выходах элементов либо только обрывы контактов), типа 1 (на входах схем или выходах элементов либо только замыкания контактов) или инверсные неисправности на выходах элементов.

В работе В. Н. Носкова [5] были получены оценки $\frac{2^{\frac{n}{2}}}{2\sqrt{n}} \leqslant D^P_{0,1}(n) \leqslant 4(n+1)^3 \cdot 2^{0{,}773n}$. Х. А. Мадатяном в [6], в частности, для класса произвольных двухполюсных контактных схем установлено, что $D^O_{0,1}(n) \geqslant 2^n$ (а с учётом наличия тривиального теста здесь можно поставить знак равенства), и, фактически, установлено, что $D^O_0(n) \geqslant 2^{n-1}$ и $D^O_1(n) \geqslant 2^{n-1}$, причём каждая из этих трёх оценок достигается на линейной булевой функции от n переменных. В работе [7] С. В. Коваценко для базиса $B_1 = \{\&, \oplus, 1\}$ и инверсных неисправностей на выходах функциональных элементов, в частности, получил оценку $D^O_{B_1;\,Inv}(n) \leqslant 2^{n-2}$. К настоящему времени ни для какого функционально полного конечного базиса B не известны верхние оценки величин $D^O_{B;\,0,1}(n)$, $D^O_{B;\,0}(n)$, $D^O_{B;\,1}(n)$ и $D^O_{B;\,Inv}(n)$, по порядку меньшие 2^n. Ранее были также неизвестны нелинейные нижние оценки ни одной этих величин.

Нижние оценки длин тестов для входов схем

В теоремах 1–3 устанавливаются экспоненциальные по n нижние оценки величин $D^P_0(n)$, $D^P_1(n)$ и $D^P_{0,1}(n)$.

Теорема 1. *При $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $D^P_0(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log_2 n+2}}$.*

Доказательство. При $n = 1$, $n = 2$ указанное неравенство следует, например, из соотношения $D^P_0(f) \geqslant 1$ при $f(x) = x$. Далее будем считать, что $n \geqslant 3$. Пусть $k = \left\lfloor \frac{n}{4} + \frac{\log_2 n}{8} + \frac{1}{2} \right\rfloor$, тогда $k \geqslant 1$ и в силу неравенства [8, с. 509, (А.3)] при $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ имеем

$$C^k_{2k} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2k}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2k}{2}} = \frac{2^{2k}}{2\sqrt{k}}$$
$$> \frac{2^{2\left(\frac{n}{4}+\frac{\log_2 n}{8}-\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{4\left(\frac{n}{4}+\frac{\log_2 n}{8}+\frac{1}{2}\right)}} = \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log_2 n+2}}.$$

Кроме того,

$$2^{n-2k} \geqslant 2^{n-2\left(\frac{n}{4}+\frac{\log_2 n}{8}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{4}}}{2} = \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n}} > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log_2 n+2}}.$$

Поэтому
$$m > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log_2 n + 2}},$$
где $m = \min(C_{2k}^k, 2^{n-2k})$, и достаточно доказать неравенство $D_0^P(n) \geqslant m$.

Отметим, что из определения числа k и неравенства $n \geqslant 3$ легко вытекает соотношение $2k < n$. Идеи дальнейших рассуждений доказательства теоремы 1 сходны с идеями, использованными В. Н. Носковым в работе [5] при получении нижней оценки для величины $\alpha_g(n)$. Пусть $K_1, \ldots, K_r$ — всевозможные попарно различные элементарные конъюнкции переменных $x_1, \ldots, x_{2k}$, в каждую из которых ровно k переменных входит с отрицанием. Тогда $r = C_{2k}^k$. Далее, пусть $K'_1, \ldots, K'_s$ — всевозможные попарно различные элементарные конъюнкции переменных $x_{2k+1}, \ldots, x_n$. Тогда $s = 2^{n-2k}$ и, следовательно, $m = \min(r, s)$.

Рассмотрим булеву функцию $\hat{f}(\tilde{x}^n) = K_1K'_1 \vee K_2K'_2 \vee \ldots \vee K_mK'_m$. Предположим, что в конъюнкцию K_i, $i = 1, \ldots, m$, переменные $x_{j_1(i)}, \ldots, x_{j_k(i)}$ входят с отрицанием, а переменные $x_{j_{k+1}(i)}, \ldots, x_{j_{2k}(i)}$ — без отрицания, где $j_1(i), \ldots, j_{2k}(i)$ — попарно различные индексы от 1 до $2k$. Так как K_i — единственная конъюнкция среди $K_1, \ldots, K_m$, в которую каждая из переменных $x_{j_1(i)}, \ldots, x_{j_k(i)}$ входит с отрицанием, то при замене всех этих k переменных константой 0 конъюнкция K_i станет равна $x_{j_{k+1}(i)}\&$ $\&\ldots\&x_{j_{2k}(i)}$, а любая другая конъюнкция из $K_1, \ldots, K_m$ — тождественному нулю. Поэтому функция неисправности при указанной замене будет равна $g_i = x_{j_{k+1}(i)}\&\ldots\&x_{j_{2k}(i)}\&K'_i$. В то же время, если дополнительно заменить переменную $x_{j_{k+1}(i)}$ константой 0, то получающаяся функция неисправности будет равна $g_0 \equiv 0$.

Заметим, что функцию g_i, $i = 1, \ldots, m$, можно отличить от функции g_0 только на тех наборах, которые обращают в единицу конъюнкцию K'_i. Учитывая, что множества наборов, обращающих в единицу конъюнкции $K'_1, \ldots, K'_m$, попарно не пересекаются, в любой полный диагностический тест для функции $\hat{f}(\tilde{x}^n)$ должны входить по крайней мере m наборов, а тогда $D_0^P(n) \geqslant D_0^P(\hat{f}) \geqslant m$. Теорема 1 доказана.

По аналогии с доказательством теоремы 1, используя ту же булеву функцию $\hat{f}(\tilde{x}^n)$ и те же обозначения и рассматривая замену переменных $x_{j_{k+1}(i)}, \ldots, x_{j_{2k}(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, константой 1, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 2. *При $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $D_1^P(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log_2 n+2}}$.*

Рассмотрим теперь в качестве неисправностей входов схем произвольные константные неисправности.

Теорема 3. *При $n \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$D_{0,1}^P(n) \geqslant \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \text{*если* } n \text{ *чётно;*} \\ \left\lfloor \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \right\rfloor, & \text{*если* } n \text{ *нечётно.*} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть n чётно. Положим $d = \frac{n}{2}$, $m = 2^d$. Пусть $K_1, \ldots, K_m$ — всевозможные элементарные конъюнкции переменных $x_1, \ldots, x_d$, а $K'_1, \ldots, K'_m$ — всевозможные элементарные конъюнкции переменных $x_{d+1}, \ldots, x_n$. Рассмотрим булеву функцию $\check{f}(\tilde{x}^n) = K_1K'_1 \vee K_2K'_2 \vee \ldots \vee K_mK'_m$. Пусть $K_i = x_1^{\sigma_{i,1}} \& \ldots \& x_d^{\sigma_{i,d}}$, $i = 1, \ldots, m$, где $\sigma_{i,1}, \ldots, \sigma_{i,d}$ — булевы константы. Тогда при замене переменных $x_1, \ldots, x_d$ константами соответственно $\sigma_{i,1}$, $\ldots, \sigma_{i,d}$ конъюнкция K_i станет равна тождественной единице, а любая другая конъюнкция из $K_1, \ldots, K_m$ — тождественному нулю. Поэтому функция неисправности при указанной замене будет равна $g_i = K'_i$. В то же время, если дополнительно заменить переменную x_{d+1} такой константой, чтобы конъюнкция K'_i обратилась в нуль, то получающаяся функция неисправности будет равна $g_0 \equiv 0$.

Заметим, что функцию g_i, $i = 1, \ldots, m$, можно отличить от функции g_0 только на тех наборах, которые обращают в единицу конъюнкцию K'_i. Учитывая, что множества наборов, обращающих в единицу конъюнкции $K'_1, \ldots, K'_m$, попарно не пересекаются, в любой полный диагностический тест для функции $\check{f}(\tilde{x}^n)$ должны входить по крайней мере m наборов, а тогда $D_{0,1}^P(n) \geqslant D_{0,1}^P(\check{f}) \geqslant m = 2^{\frac{n}{2}}$, что и требовалось доказать. Случай 1 разобран.

2. Пусть n нечётно. При $n = 1$ требуемое неравенство следует, например, из соотношения $D_{0,1}^P(f) \geqslant 1$ при $f(x) = x$. Далее будем считать, что $n \geqslant 3$. Положим $d = \frac{n-1}{2}$, $m = 2^d$, $m_1 = \left\lfloor \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{3} \right\rfloor$, $m_2 = \left\lfloor \frac{2^{\frac{n+1}{2}}+1}{3} \right\rfloor$. Пусть $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_m$ — всевозможные двоичные наборы длины d, идущие, для определённости, в лексикографическом порядке; $\tilde{\sigma}_i = (\sigma_{i,1}, \ldots, \sigma_{i,d})$ для $i = 1, \ldots, m$; $j(i) = \left\lceil \frac{i+m_1}{2} \right\rceil$, $j'(i) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$, $j''(i) = i - m_1 + \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil$;

$$K_i = \begin{cases} x_1^{\sigma_{i,1}} \& \ldots \& x_d^{\sigma_{i,d}} & \text{для } i = 1, \ldots, m_1; \\ x_1^{\sigma_{j(i),1}} \& \ldots \& x_d^{\sigma_{j(i),d}} \& x_{d+1} & \text{для нечётных } i \in [m_1 + 1; m_1 + m_2]; \\ x_1^{\sigma_{j(i),1}} \& \ldots \& x_d^{\sigma_{j(i),d}} \& \overline{x_{d+1}} & \text{для чётных } i \in [m_1 + 1; m_1 + m_2]; \end{cases}$$

$$K'_i = \begin{cases} x_{d+1} \& x_{d+2}^{\sigma_{j'(i),1}} \& \ldots \& x_n^{\sigma_{j'(i),d}} & \text{для нечётных } i \in [1; m_1]; \\ \overline{x_{d+1}} \& x_{d+2}^{\sigma_{j'(i),1}} \& \ldots \& x_n^{\sigma_{j'(i),d}} & \text{для чётных } i \in [1; m_1]; \\ x_{d+2}^{\sigma_{j''(i),1}} \& \ldots \& x_n^{\sigma_{j''(i),d}} & \text{для } i = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2. \end{cases}$$

(Отметим, что $d+2=n-d+1$).

При определении элементарных конъюнкций K_i и K_i' используются неравенства $j(i) \leqslant m$ при $i \in [m_1+1; m_1+m_2]$, $j'(i) \leqslant m$ при $i \in [1; m_1]$ и $j''(i) \leqslant m$ при $i \in [m_1+1; m_1+m_2]$. Докажем их и равенство

$$m_1 + m_2 = \left\lfloor \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \right\rfloor. \tag{1}$$

Рассмотрим два подслучая.

2.1. Число $2^{\frac{n+1}{2}}$ имеет вид $3k+1$, где $k \in \mathbb{Z}^+$. Имеем

$$m_1 = m_2 = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} - 1}{3},$$

$$j(i) = \left\lceil \frac{i+m_1}{2} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{2m_1+m_2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3m_1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^{\frac{n+1}{2}} - 1}{2} \right\rceil = 2^{\frac{n-1}{2}} = m,$$

$$j'(i) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{3m_1}{2} \right\rceil = m;$$

$$j''(i) = i - m_1 + \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil \leqslant m_2 + \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2m_2+m_1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3m_1}{2} \right\rceil = m;$$

$$m_1 + m_2 = \frac{2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} - 2}{3} = \left\lfloor \frac{2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}}}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \right\rfloor,$$

что и требовалось доказать.

2.1. Число $2^{\frac{n+1}{2}}$ имеет вид $3k+2$, где $k \in \mathbb{Z}^+$. Имеем

$$m_1 = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} - 2}{3},\ m_2 = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} + 1}{3},$$

$$j(i) = \left\lceil \frac{i+m_1}{2} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{2m_1+m_2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} - 3}{3 \cdot 2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^{\frac{n+1}{2}} - 1}{2} \right\rceil = 2^{\frac{n-1}{2}} = m,$$

$$j'(i) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{3m_1}{2} \right\rceil < m;$$

$$j''(i) = i - m_1 + \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil \leqslant m_2 + \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2m_2+m_1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}}}{3 \cdot 2} \right\rceil = m;$$

$$m_1 + m_2 = \frac{2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} - 1}{3} = \left\lfloor \frac{2 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}}}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \right\rfloor,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим булеву функцию $\check{f}(\tilde{x}^n) = K_1K_1' \vee K_2K_2' \vee \ldots \vee K_{m_1+m_2}K_{m_1+m_2}'$. Непосредственно из определения конъюнкций $K_1, K_2, \ldots, K_{m_1+m_2}$ следует, что в конъюнкции K_i, $i = 1, \ldots, m_1 + m_2$, содержатся переменные $x_1, \ldots, x_d$ и, быть может, переменная x_{d+1} и при замене всех этих переменных некоторыми булевыми константами конъюнкция K_i станет равна тождественной единице, а любая другая конъюнкция из $K_1, \ldots,$ $K_{m_1+m_2}$ — тождественному нулю. Поэтому функция неисправности при указанной замене будет равна $g_i = K_i'$ (здесь используется также тот факт, что множества переменных, содержащихся в конъюнкциях K_i и K_i', не пересекаются). В то же время, если дополнительно заменить переменную x_{d+2} такой константой, чтобы конъюнкция K_i' обратилась в нуль, то получающаяся функция неисправности будет равна $g_0 \equiv 0$.

Заметим, что функцию g_i, $i = 1, \ldots, m_1+m_2$, можно отличить от функции g_0 только на тех наборах, которые обращают в единицу конъюнкцию K_i'. Учитывая, что множества наборов, обращающих в единицу конъюнкции $K_1', \ldots, K_{m_1+m_2}'$, попарно не пересекаются (это непосредственно следует из определения указанных конъюнкций), в любой полный диагностический тест для функции $\check{f}(\tilde{x}^n)$ должны входить по крайней мере m_1+m_2 наборов, а тогда $D_{0,1}^P(n) \geqslant D_{0,1}^P(\check{f}) \geqslant m_1+m_2 = \left\lfloor \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \right\rfloor$ в силу (1). Теорема 3 доказана.

Результат теоремы 3 улучшает оценку $D_{0,1}^P(n) \geqslant \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2\sqrt{n}}$, полученную в [5].

Нижние оценки длин тестов для схем из функциональных элементов

В теоремах 4–7 устанавливаются экспоненциальные по n нижние оценки величин $D_{B;\,1}^O(n)$, $D_{B;\,0}^O(n)$ и $D_{B;\,0,1}^O(n)$ для некоторых базисов B.

Рассмотрим базис $B_2 = \{x \mid y\}$, где $x \mid y = \overline{x \& y}$ — штрих Шеффера. В качестве неисправностей будем рассматривать неисправности типа 1 на выходах функциональных элементов.

В доказательстве следующей теоремы используются идеи, сходные с идеями Ю. В. Бородиной из работы [9].

Теорема 4. *При* $n \geqslant 1$ *справедливо неравенство* $D_{B_2;\,1}^O(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log_2 n+2}}$.

Доказательство. При $n = 1$, $n = 2$ указанное неравенство следует, например, из соотношения $D_{B_2;\,1}^O(f) \geqslant 1$ при $f(x) = \overline{x}$. Действительно, в любой схеме в базисе B_2, реализующей эту функцию, должен содержаться выходной элемент. При его неисправности на выходе этой схемы будет реализована тождественная единица, которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе. Далее будем считать, что $n \geqslant 3$.

Пусть $\hat{f}(\tilde{x}^n)$ — булева функция, определённая в ходе доказательства теоремы 1; S — произвольная схема из функциональных элементов в базисе B_2, её реализующая. Предположим, что на некоторых входах этой схемы возникли неисправности типа 0. Тогда на все входы элементов схемы S, соединенные с неисправными входами схемы, будет подаваться константа 0 и на выходах этих элементов по свойству функции $x \mid y$ будет реализована тождественная единица. Таким образом, неисправности типа 0 любых входов схемы S можно «промоделировать» неисправностями типа 1 на выходах некоторых элементов этой схемы. Поэтому множество функций, получаемых при всевозможных неисправностях типа 0 на входах схемы S, содержится во множестве функций, получаемых при всевозможных неисправностях типа 1 на выходах элементов этой схемы, откуда следует неравенство $D_0^P(\hat{f}) \leqslant D^O_{B_2;\,1}(\hat{f})$, а с учётом теоремы 1 — соотношение

$$D^O_{B_2;\,1}(n) \geqslant D^O_{B_2;\,1}(\hat{f}) \geqslant D_0^P(\hat{f}) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log_2 n + 2}}.$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. Результат теоремы 4 остаётся справедлив при рассмотрении в качестве базиса B_2 базиса $\{\overline{x_1 \& \ldots \& x_n}\}$, где $n \geqslant 3$, и даже бесконечного базиса $\{\overline{x_1 \& \ldots \& x_n} \mid n \geqslant 1\}$. Доказательство проводится аналогично.

Пусть $B_2^* = \{x \uparrow y\}$, где $x \uparrow y = \overline{x \vee y}$ — стрелка Пирса. Используя теорему 4 и принцип двойственности (см., например, [10, с. 19, утверждение 3]), нетрудно получить следующий результат.

Теорема 5. *При* $n \geqslant 1$ *справедливо неравенство* $D^O_{B_2^*;\,0}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log_2 n+2}}$.

Рассмотрим теперь базис $B_3 = \{\&, \neg\}$, а в качестве неисправностей — произвольные константные неисправности на выходах функциональных элементов.

Теорема 6. *При* $n \geqslant 1$ *справедливо неравенство* $D^O_{B_3;\,0,1}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log_2 n+2}}$.

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 4. При $n = 1$, $n = 2$ указанное неравенство следует, например, из соотношения $D^O_{B_3;\,0,1}(f) \geqslant 1$ при $f(x) = \overline{x}$. Действительно, в любой схеме в базисе B_3, реализующей эту функцию, должен содержаться выходной элемент. При его неисправности типа 1 на выходе этой схемы будет реализована тождественная единица, которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе. Далее будем считать, что $n \geqslant 3$.

Пусть $\hat{f}(\tilde{x}^n)$ — булева функция, определённая в ходе доказательства теоремы 1; S — произвольная схема из функциональных элементов в базисе B_3, её реализующая. Предположим, что на некоторых входах этой схемы возникли неисправности типа 0. Тогда на все входы элементов схемы S, соединенные с указанными входами схемы, будет подаваться константа 0 и на выходе каждого такого элемента по свойству функций $x\&y, \overline{x}$ будет реализована одна из булевых констант. Таким образом, неисправности типа 0 любых входов схемы S можно «промоделировать» неисправностями типа 0 и 1 на выходах некоторых элементов этой схемы. Поэтому множество функций, получаемых при всевозможных неисправностях типа 0 на входах схемы S, содержится во множестве функций, получаемых при всевозможных произвольных константных неисправностях на выходах элементов этой схемы, откуда следует неравенство $D_0^P(\hat{f}) \leqslant D^O_{B_3;\,0;1}(\hat{f})$, а с учётом теоремы 1 — соотношение

$$D^O_{B_3;\,0;1}(n) \geqslant D^O_{B_3;\,0;1}(\hat{f}) \geqslant D_0^P(\hat{f}) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log_2 n + 2}}.$$

Теорема 6 доказана.

Замечание 2. Результат теоремы 6 остаётся справедлив при рассмотрении в качестве базиса B_3 любого базиса $\{x_1\&\ldots\&x_m, \overline{x_1\&\ldots\&x_n}\}$, где $m \geqslant 2, n \geqslant 1$, и даже бесконечного базиса $\{x_1\&\ldots\&x_n, \overline{x_1\&\ldots\&x_n} | n \geqslant 1\}$. Доказательство проводится аналогично.

Пусть $B_3^* = \{\vee, \neg\}$. Используя теорему 6 и принцип двойственности, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 7. *При $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $D^O_{B_3^*;\,0,1}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log_2 n+2}}$.*

Список литературы

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

2. Яблонский С. В. Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: МГУ. — 1986. — С. 7–12.

3. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

4. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. — М.: Изд-во МГУ, 1992.

5. Носков В. Н. Диагностические тесты для входов логических устройств // Дискретный анализ. — Вып. 26. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1974. — С. 72–83.

6. Мадатян Х. А. Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 103–118.

7. Коваценко С. В. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2000. — № 2. — С. 45–47.

8. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. — М.: Мир, 1976.

9. Бородина Ю. В. Нижняя оценка длины полного проверяющего теста в базисе $\{x \mid y\}$ // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. — 2015. — № 4. — С. 49–51.

10. Угольников А. Б. Классы Поста. Учебное пособие. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008.