



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 64 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Боровик Е.В., Гончаров А.В.,
Рыков Ю.Г., Туляков Д.Н.**

О расчете двумерных
сжимаемых
фильтрационных течений в
соответствии с
методологией «сжимаемых
линий тока»

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: О расчете двумерных сжимаемых фильтрационных течений в соответствии с методологией «сжимаемых линий тока» / Е.В.Боровик [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 64. 12 с. doi:[10.20948/prepr-2016-64](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-64)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-64>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Е.В. Боровик, А.В. Гончаров, Ю.Г. Рыков, Д.Н. Туляков

**О расчете двумерных сжимаемых
фильтрационных течений в соответствии
с методологией «сжимаемых линий тока»**

Москва — 2016

Боровик Е.В., Гончаров А.В., Рыков Ю.Г., Туляков Д.Н.

О расчете двумерных сжимаемых фильтрационных течений в соответствии с методологией «сжимаемых линий тока»

В работе рассмотрена конкретизация разработанного ранее подхода к расчету фильтрационных течений сжимаемых многофазных, многокомпонентных сред, нацеленного на вычисления с помощью гибридных архитектур. Представлен детальный алгоритм для частного случая двумерных двухфазных и двухкомпонентных течений, учитывающий смешанный характер системы уравнений фильтрации. Приведены результаты расчетов модельных задач вытеснения, а также сравнение с результатами аналогичных расчетов при помощи традиционного вычислительного комплекса «Эклипс».

Ключевые слова: фильтрационные течения, многофазность, многокомпонентность, сжимаемость, линии тока, смешанная система, характеристики, Эклипс

Ekaterina Vladimirovna Borovik, Andrei Vladimirovich Goncharov, Yuri Germanovich Rykov, Dmitriy Nikolaevich Tulyakov

On the calculation of 2D compressible filtration flows by the ‘compressible streamlines’ methodology

The paper elaborates a previously developed approach to the calculation of the filtration flows in compressible multiphase and multicomponent media. The approach aims to match the hybrid supercomputing architectures. The detailed algorithm for the particular case of 2D two-phase and two-component media is presented. The algorithm takes into account the mixed mathematical character of the filtration system. The numerical results for calculation of model displacement problem are presented. Also, the comparison with the solutions of analogous problems calculated via Eclipse is shown.

Key words: filtration flows, multiphase, multicomponent, compressibility, streamlines, mixed system, characteristics, Eclipse

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

Введение

В настоящем препринте проведена практическая реализация разработанной ранее методологии «сжимаемых линий тока», см. работы [1], [2], в случае двумерных фильтрационных течений двухфазной двухкомпонентной среды. Эта модель течения является наиболее простой и в то же время содержательной для тестирования возможностей предложенной методологии. Основу подхода «сжимаемых линий тока» составляет процедура расщепления многомерной задачи на специально подобранный набор одномерных для временных интервалов определенной длины. Затем каждую одномерную задачу можно решать независимо на выделенном процессоре. Такой подход представляется важным для современной нефтяной отрасли, поскольку в настоящее время в связи с усложнением условий залегания нефтегазовых ресурсов предъявляются повышенные требования к детализации описания содержащего резервуара, что, в свою очередь, увеличивает объем вычислений при моделировании. Поэтому необходимо создание методов, пусть даже, возможно, и «инженерной» природы, которые будут эффективно работать на многопроцессорных системах гибридной архитектуры.

Одним из таких перспективных методов решения задач фильтрации, адаптированным для вычислительных систем гибридной архитектуры, является алгоритмизация на основе кинетически-согласованных разностных схем, см., например, [3]. В настоящей работе адаптация задачи расчета фильтрационных течений к параллельным архитектурам проведена другим способом.

Течение в двумерном или трехмерном пространстве разбивается на взаимосвязанный набор течений в трубках тока, течение в трубке тока подчиняется системе одномерных уравнений для канала переменного сечения. Взаимосвязь между трубками тока осуществляется благодаря введению специальной метрики, которая существенно зависит от характера решаемой задачи. Система одномерных уравнений фильтрации решается с помощью явно-неявной схемы, которая основана на том факте, что указанная система является гиперболо-параболической, то есть обладает набором характеристик, который, однако, не является полным, см. [4–6].

После более подробного описания используемой численной процедуры в указанном частном случае двумерного течения двухфазной двухкомпонентной среды в предлагаемом препринте приведено сравнение результатов расчетов, выполненных по методологии «сжимаемых линий тока» [1], [2] и с помощью вычислительного комплекса «Эклипс» [7]. Для сравнения был выбран класс течений, возникающий в квадратных областях, когда в одном углу области находится нагнетательная скважина, а в противоположном углу – продуцирующая. Результаты расчетов оказываются близкими в различных нормах для выбранного класса течений.

Авторы выражают признательность А.И. Аптекареву и Н.А. Зайцеву за полезные обсуждения.

Описание вычислительной процедуры для двумерных течений двухфазной двухкомпонентной среды

В рассматриваемом в настоящем препринте частном случае фильтрационных течений необходимо решить следующую систему двух уравнений

$$\begin{aligned} & \left[\phi(x_{1G}\rho_G s + x_{1L}\rho_L(1-s)) \right]_t - \left[(x_{1G}\rho_G\lambda_G(s) + x_{1L}\rho_L\lambda_L(1-s))P_x \right]_x - \\ & \quad \left[(x_{1G}\rho_G\lambda_G(s) + x_{1L}\rho_L\lambda_L(1-s))P_y \right]_y = 0 \\ & \left[\phi(x_{2G}\rho_G s + x_{2L}\rho_L(1-s)) \right]_t - \left[(x_{2G}\rho_G\lambda_G(s) + x_{2L}\rho_L\lambda_L(1-s))P_x \right]_x - \\ & \quad \left[(x_{2G}\rho_G\lambda_G(s) + x_{2L}\rho_L\lambda_L(1-s))P_y \right]_y = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ϕ представляет собой пористость; P – давление; s – насыщенность газовой фазы; $x_{iG} = x_{iG}(P)$, $x_{iL} = x_{iL}(P)$, $i=1,2$ являются равновесными молярными концентрациями первого и второго компонентов, находящихся соответственно в газовой и жидкой фазах, при этом $x_{1G} + x_{2G} = x_{1L} + x_{2L} = 1$; $\rho_G = \rho_G(P)$, $\rho_L = \rho_L(P)$ есть молярные плотности газовой и жидкой фазы соответственно; $\lambda_G(s) \equiv Kk_G(s)/\mu_G$, $\lambda_L(1-s) \equiv Kk_L(1-s)/\mu_L$ – подвижности фаз, k_G, k_L – относительные проницаемости фаз, K – абсолютная проницаемость, μ_G, μ_L – вязкости фаз. В рамках рассмотренной в препринте модельной задачи величины ϕ, K, μ_G, μ_L предполагаются постоянными.

После введения новой системы координат (см. [1], [2])

$$\begin{cases} \Pi = \Pi(x, y) \\ \psi = \psi(x, y) \end{cases}; \quad \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(\Pi, \psi)} \right)^2 \equiv g \neq 0 \quad (2)$$

система уравнений (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \left[\phi(x_{iG}\rho_G s + x_{iL}\rho_L(1-s)) \right]_t - \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left[\sqrt{g_{22}}(x_{iG}\rho_G\lambda_G(s) + x_{iL}\rho_L\lambda_L(1-s)) \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} P_\Pi \right]_\Pi - \\ & \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left[\sqrt{g_{11}}(x_{iG}\rho_G\lambda_G(s) + x_{iL}\rho_L\lambda_L(1-s)) \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} P_\psi \right]_\psi = 0, i=1,2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $g = g_{11} \cdot g_{22}$; $g_{11} = x_\Pi^2 + y_\Pi^2$; $g_{22} = x_\psi^2 + y_\psi^2$. Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
R(s, P) &= \rho_G(P) \cdot s + \rho_L(P) \cdot (1-s) \\
X(s, P) &= x_G(P) \rho_G(P) \cdot s + x_L(P) \rho_L(P) \cdot (1-s) \\
G(s, P) &= \rho_G(P) \cdot \frac{k_G(s)}{\mu_G} + \rho_L(P) \cdot \frac{k_L(1-s)}{\mu_L} \\
F(s, P) &= x_G(P) \rho_G(P) \cdot \frac{k_G(s)}{\mu_G} + x_L(P) \rho_L(P) \cdot \frac{k_L(1-s)}{\mu_L}
\end{aligned} \tag{4}$$

Тогда система (3) эквивалентна системе уравнений, состоящей из первого уравнения (3) и суммы первого и второго уравнений системы (3). Учитывая то, что сумма равновесных молярных концентраций компонент равна 1, величины x_{2G}, x_{2L} в новую систему входить не будут и, опуская индекс 1 в x_{1G}, x_{1L} , получим вместо (3)

$$\begin{aligned}
X(s, P)_t - \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{K}{\phi} \left\{ \left[\sqrt{g_{22}} F(s, P) \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} P_{\Pi} \right]_{\Pi} + \left[\sqrt{g_{11}} F(s, P) \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} P_{\Psi} \right]_{\Psi} \right\} &= 0 \\
R(s, P)_t - \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{K}{\phi} \left\{ \left[\sqrt{g_{22}} G(s, P) \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} P_{\Pi} \right]_{\Pi} + \left[\sqrt{g_{11}} G(s, P) \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} P_{\Psi} \right]_{\Psi} \right\} &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Основным предположением в рамках настоящего препринта, которое подлежит проверке и оценке, является утверждение о том, что в реальных течениях, которые характерны для условий разработки месторождений, линии тока постоянны в течение определенного, достаточно большого, времени Δt , см. [1], [2]. В течение этого времени для расчета процесса фильтрации можно использовать систему (5), в которой в обоих уравнениях членами, содержащими производные по ψ , можно пренебречь. Далее поле давления и, соответственно, линии тока следует пересчитать, например, в соответствии с уравнением, полученным путем сложения уравнений системы (1). При таком порядке действий будет необходимо решить численно, например, по неявной схеме, только одно двумерное уравнение, а не систему уравнений. Эффект будет заметно расти при рассмотрении трехмерных задач и роста числа компонент (в текущих условиях реальных месторождений требуемое число компонент при моделировании является достаточно большим).

Вследствие сказанного выше сосредоточимся на методологии расчета одномерной системы, полученной из (5)

$$\begin{aligned}
X(s, P)_t - \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{K}{\phi} \left[\sqrt{g_{22}} F(s, P) \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} P_{\Pi} \right]_{\Pi} &= 0 \\
R(s, P)_t - \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{K}{\phi} \left[\sqrt{g_{22}} G(s, P) \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} P_{\Pi} \right]_{\Pi} &= 0
\end{aligned} \tag{6}$$

и выборе соответствующих метрических коэффициентов g_{11}, g_{22} .

Нам будет полезна также следующая форма записи системы (6)

$$\begin{aligned}
X(s, P)_t + \frac{1}{g_{11}} [F(s, P)Q]_{\Pi} &= -QF(s, P)\Theta \\
R(s, P)_t + \frac{1}{g_{11}} [G(s, P)Q]_{\Pi} &= -QG(s, P)\Theta.
\end{aligned} \tag{7}$$

$$Q = -\frac{K}{\phi} P_{\Pi}, \Theta \equiv \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} \right)_{\Pi}$$

В соответствии с подходом, изложенным в [6], система (7) может быть рассмотрена как вырожденная система трех законов сохранения, у которой имеется одна характеристика с выполняющимся на ней соотношением

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi} = \lambda &\equiv \frac{Q}{g_{11}} \theta(s) \equiv \frac{Q}{g_{11}} \frac{GF_s - FG_s}{GX_s - FR_s} \\
(GX_s - FR_s)\dot{s} + (GX_p - FR_p)\dot{P} &= \\
\frac{Q^2}{g_{11}} \frac{\phi}{K} [(GF_p - FG_p) - \theta(s)(GX_p - FR_p)] &
\end{aligned} \tag{8}$$

Для наших целей проверки основного предположения о постоянстве линий тока достаточно сконструировать схему первого порядка для системы (7), которая будет использовать соотношения (8) и будет явно-неявной ввиду гиперголо-параболического характера системы (7). Определим разностную сетку, рис. 1. Поскольку рассматриваемая задача, имея частично гиперболический характер, допускает разрывы насыщенности s , то завершать построение схемы будем с помощью операции дивергентного замыкания, а потоки определять с помощью соотношения (8) и неявной схемы для второго уравнения (7) по неизвестной функции P .

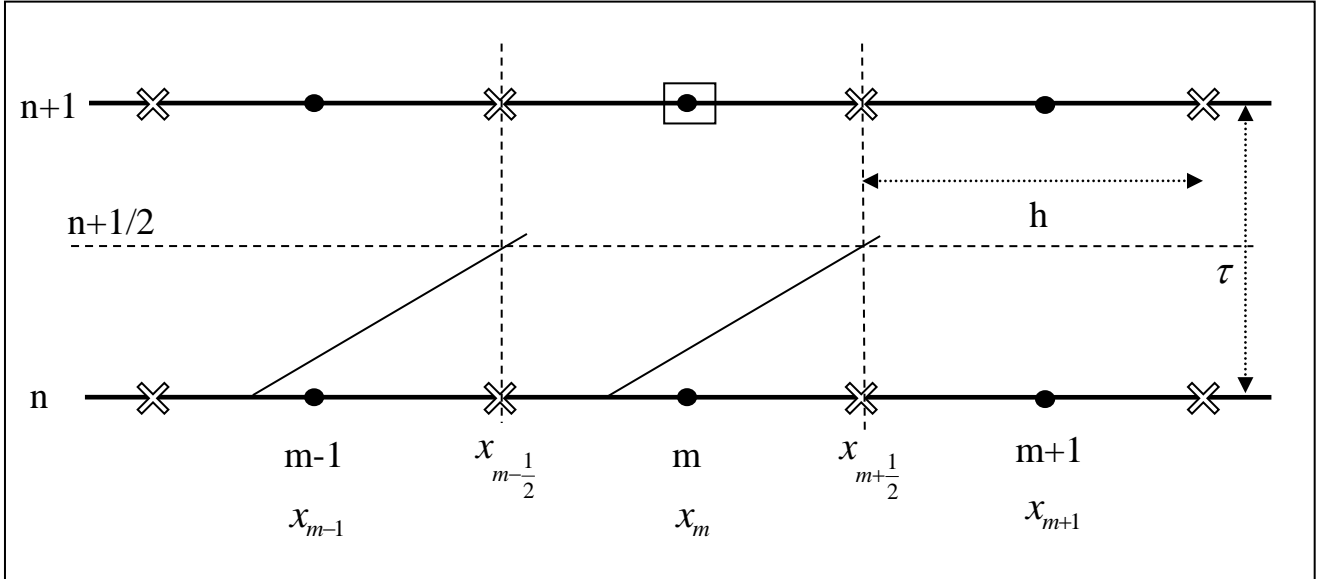


Рис. 1. Сетка для решения задачи фильтрации. Тонкие сплошные линии иллюстрируют поведение характеристик; точка $(n+1, m)$ отмечена квадратиком

Итак, построение схемы первого порядка состоит из трех этапов.

- Использование характеристического соотношения и неявная схема для второго уравнения (7) для определения потоковых значений s, P :

$$(s_{m+1/2}^{n+1/2} - s_m^n)[GX_s - FR_s]_m^n + (P_{m+1/2}^{n+1/2} - P_m^n)[GX_P - FR_P]_m^n = 0;$$

$$s_{m+1/2}^n = 0.5(s_{m+1}^n + s_m^n), P_{m+1/2}^n = 0.5(P_{m+1}^n + P_m^n);$$

$$\begin{aligned} & (R_s)_{m+1/2}^n \frac{s_{m+1/2}^{n+1/2} - s_{m+1/2}^n}{\tau} + (R_P)_{m+1/2}^n \frac{P_{m+1/2}^{n+1/2} - P_{m+1/2}^n}{\tau} + \\ & \frac{1}{(g_{11})_{m+1/2}^n} \left[(G_s)_{m+1/2}^n \frac{s_{m+3/2}^{n+1/2} - s_{m+1/2}^{n+1/2}}{h} + (G_P)_{m+1/2}^n \frac{P_{m+3/2}^{n+1/2} - P_{m-1/2}^{n+1/2}}{2h} \right] \left(-\frac{K}{\phi} \frac{P_{m+3/2}^n - P_{m-1/2}^n}{2h} \right) + \\ & \frac{G_{m+1/2}^n}{(g_{11})_{m+1/2}^n} \left(-\frac{K}{\phi} \frac{P_{m+3/2}^{n+1/2} - 2P_{m+1/2}^{n+1/2} + P_{m-1/2}^{n+1/2}}{h^2} \right) = \frac{K}{\phi} (G\Theta)_{m+1/2}^n \frac{P_{m+3/2}^n - P_{m-1/2}^n}{2h} \end{aligned}$$

- Определение потоковых значений Q :

$$Q_{m+1/2}^{n+1/2} = -\frac{K}{\phi} \frac{P_{m+3/2}^{n+1/2} - P_{m-1/2}^{n+1/2}}{2h}.$$

- Дивергентное замыкание:

$$\frac{X(s_m^{n+1}, P_m^{n+1}) - X(s_m^n, P_m^n)}{\tau} + \frac{1}{(g_{11})_m^n} \frac{(FQ)_{m+1/2}^{n+1/2} - (FQ)_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = -(QF\Theta)_m^n$$

$$\frac{R(s_m^{n+1}, P_m^{n+1}) - R(s_m^n, P_m^n)}{\tau} + \frac{1}{(g_{11})_m^n} \frac{(GQ)_{m+1/2}^{n+1/2} - (GQ)_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = -(QG\Theta)_m^n$$

Далее остановимся на стратегии выбора метрических коэффициентов g_{11}, g_{22} . Система координат (2) должна удовлетворять следующим соотношениям

$$\begin{cases} P_x x_\psi + P_y y_\psi = 0 \\ x_\Pi x_\psi + y_\Pi y_\psi = 0 \end{cases} \text{ ИЛИ } \begin{cases} P(x(\Pi, \psi), y(\Pi, \psi))_\psi = 0 \\ P_y x_\Pi - P_x y_\Pi = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Если ввести интегрирующий множитель $\mu(x, y)$, так что $\mu P_y = A_x$ и $-\mu P_x = A_y$, где $A(x, y)$ – соответствующий потенциал, то, учитывая, что $P_x A_x + P_y A_y = 0$, из (9) получим

$$P(x(\Pi, \psi), y(\Pi, \psi)) = F(\Pi) \quad ; \quad A(x(\Pi, \psi), y(\Pi, \psi)) = G(\psi), \quad (10)$$

где F, G – произвольные (вообще говоря, достаточно гладкие и монотонные) функции, а A постоянна вдоль линий, касающихся направления градиента давления, $\dot{x} = P_x$, $\dot{y} = P_y$. При этом выпишем еще уравнение для интегрирующего множителя μ

$$\mu_x P_x + \mu_y P_y + \mu \Delta P = 0.$$

Из полученного представления следует, что можно выбирать удобную нормировку для системы координат в ограничениях формул (10).

Результаты расчетов

В данном разделе представлены результаты расчетов течений вдоль линий тока по описанной выше методологии в сравнении с расчетами тех же задач, выполненными с помощью традиционного вычислительного комплекса «Эклипс».

Отметим, что имеющаяся в распоряжении авторов версия комплекса не содержала средств решения модельных задач, а была ориентирована на моделирование реальных производственных процессов. Поэтому вначале был подобран расчет на «Эклипс», течение в котором отражало модельную постановку задачи: двухфазная смесь вытесняется вследствие повышенного давления на одной нагнетательной скважине и вытекает в другую добывающую скважину, расположенную на противоположной стороне рассматриваемой области, см. рис. 2. После этого параметры расчета на «Эклипс» использовались для решения модельной системы (1).

Ниже на рис. 2 представлена картина движения фронта вытеснения, рассчитанная при помощи «Эклипс» по истечении 365 и 730 дней от начала расчета (в соответствии с масштабом времени «Эклипс»).

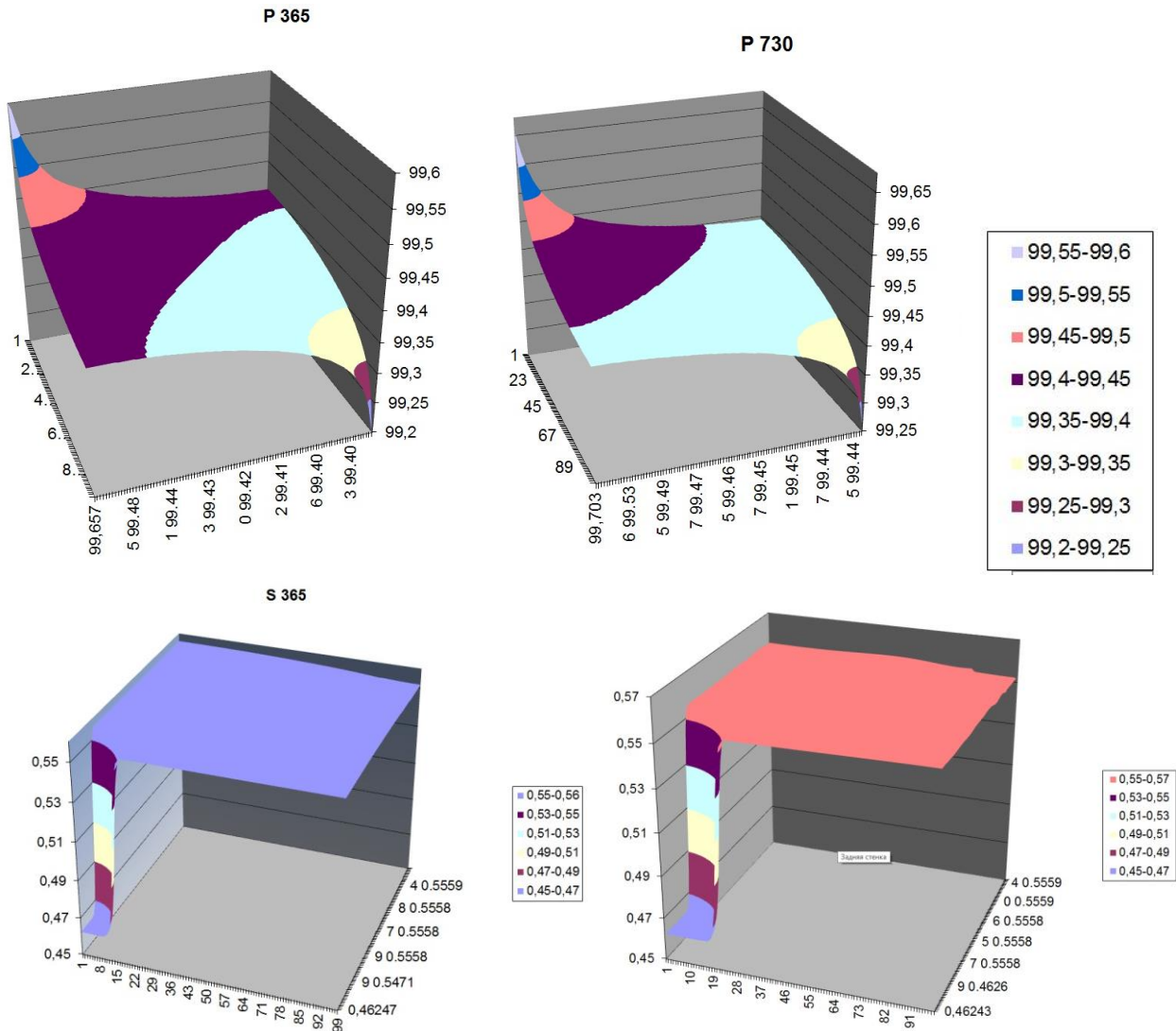


Рис. 2. Решение модельной задачи на «Эклипс»: графики давления и насыщенности для двух моментов времени

Для расчета модельной задачи в прямоугольной области были взяты поля давления и насыщенности, рассчитанные по «Эклипс» через 365 и 730 дней (в соответствии с масштабом времени «Эклипс»), рис. 2. Первые поля служили начальными данными для расчета по модели (б), краевые условия были интерполированы в соответствии с данными «Эклипс». Также в указанном на рис. 2 решении (по истечении 365 дней) были выделены соответствующие линии тока, рис. 3. Рассматриваемое течение имеет логарифмические особенности в точках источника и стока для двухфазной среды, поэтому линии тока, за исключением центральной, в окрестности указанных точек искажены.

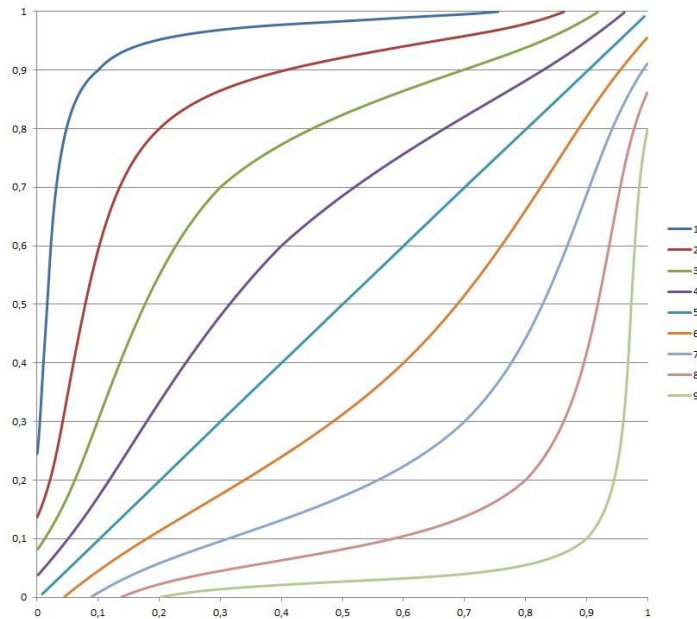


Рис. 3. «Линии тока», соответствующие решению модельной задачи на «Эклипс»

Наконец был произведен расчет вдоль линий тока в соответствии с формулами (6). Результаты этого расчета и его сравнение с данными расчета по «Эклипс» приведены на рис. 4. Номер линии тока на рис. 4 соответствует нумерации, приведенной на рис. 3.

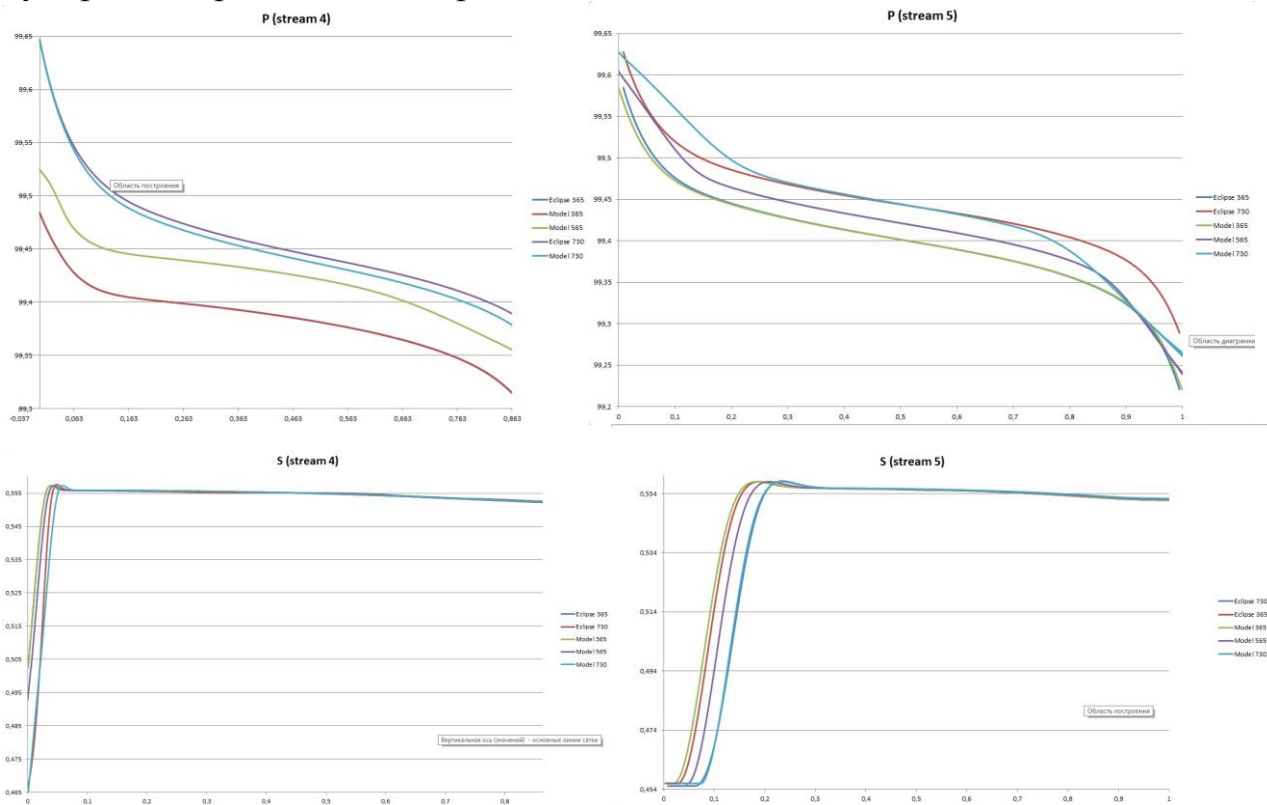


Рис. 4. Сравнение результатов расчета вдоль избранных линий тока с данными расчета по «Эклипс»

На рис. 4 данные расчета по «Эклипс» приведены для двух моментов времени, а модельные расчеты – для трех моментов. Некоторое несовпадение кривых в начальный момент модельных расчетов объясняется наличием процедуры переинтерполяции полей перед заданием начальных данных. Можно заметить, что значения насыщенности демонстрируют хорошее совпадение на интервале до 730 дней от начала вытеснения (в соответствии с масштабом времени «Эклипс»), однако величины давления демонстрируют некоторое отличие на 730 день, которое частично связано с наличием логарифмической особенности.

Хотя продемонстрированные расчеты еще требуют большей аккуратности и уточнения, можно оценить, что на протяжении примерно в несколько месяцев (т.е. порядка 0.01 от общего времени расчета в соответствии с масштабом времени «Эклипс») процесс вытеснения можно рассчитывать в соответствии с формулами (6). Затем необходимо пересчитать давление в соответствии с уравнением, полученным, например, после суммирования уравнений (1), и перестроить систему линий тока.

Разработанная методология предлагает оригинальный тип расщепления системы уравнений фильтрации, который по предварительным теоретическим оценкам должен обеспечить лучшее соответствие гибридной архитектуре суперкомпьютеров.

Библиографический список

- [1] Рыков Ю.Г. Строгая формулировка вычислительной методологии «стримлайн» для моделирования процесса вытеснения нефти с учетом эффектов сжимаемости, многокомпонентности и фазовых переходов // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. — 2008. — № 4. — 16 с. — URL: http://keldysh.ru/papers/2008/prep04/rep2008_04.html
- [2] Рыков Ю.Г. О форме системы уравнений фильтрации, удобной для конструирования параллельных алгоритмов // Доклады Российской Академии Наук. — 2015. — Т. 464. — № 6. — С. 672 – 675
- [3] Люпа А.А., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.А., Чурбанова М.Г. Моделирование трехфазной фильтрации явными методами на гибридных вычислительных системах // Мат. моделирование. — 2014. — Т. 26. — № 4. — С. 33 – 43
- [4] Радвогин Ю.Б. Каноническая форма уравнений двухкомпонентной фильтрации // Доклады Российской Академии Наук. — 2003. — Т. 391. — № 3. — С. 1 – 4
- [5] Колдоба Е.В., Колдоба А.В. Распространение слабых разрывов концентраций при изотермической фильтрации многокомпонентной

- смеси с фазовыми переходами // ПММ. — 2007. — Т. 71. — № 3. — С. 477 – 482
- [6] Рыков Ю.Г. О возможности распространения теории законов сохранения на некоторые вырожденные параболические системы уравнений, описывающие процессы сжимаемой двухфазной многокомпонентной фильтрации // Математические заметки. — 2011. — Т. 89. — Вып. 2. — С. 300 – 315
- [7] PVTi and ECLIPSE 300. An introduction to PVT analysis and compositional simulations // Abingdon Technology Center. — Schlumberger. – 2005

Оглавление

Введение	3
Описание вычислительной процедуры для двумерных течений двухфазной двухкомпонентной среды	4
Результаты расчетов.....	8