



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 69 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Елизарова Т.Г., Иванов А.В.

Квазигазодинамический
алгоритм численного
решения двухслойных
уравнений мелкой воды

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Елизарова Т.Г., Иванов А.В. Квазигазодинамический алгоритм численного решения двухслойных уравнений мелкой воды // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 69. 27 с. doi:[10.20948/prepr-2016-69](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-69)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-69>

**ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. КЕЛДЫША
Российской академии наук**

Т.Г. Елизарова, А.В. Иванов

**Квазигазодинамический алгоритм численного
решения двухслойных уравнений мелкой воды**

Москва — 2016

Елизарова Т.Г., Иванов А.В.

Квазигазодинамический алгоритм численного решения двухслойных уравнений мелкой воды

Аннотация

Построен регуляризованный вид системы уравнений двухслойной мелкой воды для плоских одномерных течений с использованием квазигазодинамического подхода. Для численного решения полученных уравнений выписана условно-устойчивая конечно-разностная схема и проведено ее тестирование на примере известных одномерных течений. Для сравнения приведена регуляризованная система уравнений, построенная на основе квазигидродинамического подхода.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00048а.

Ключевые слова: уравнения двухслойной мелкой воды, квазигазодинамический подход, метод конечного объема, центрально-разностная схема, одномерные течения

Tatiana Gennadyevna Elizarova, Aleksander Vladimirovich Ivanov

Quasi-gasdynamics algorithm for numerical solution of two-layer shallow water equations

Abstract

Regularized form of two-layer shallow water equations is obtained based on quasi-gas-dynamic approach. For the numerical solution of the equations a finite-volume conditionally stable scheme is constructed and tested for a number of known one-dimensional flows. For comparison a simplified regularized two-layer system based on quasi-hydrodynamic approach is shown.

Key words: two-layer shallow water system, quasi-gas-dynamic approach, finite-volume method, central-difference scheme, one-dimensional flows

1. Введение

Согласно многочисленным работам, см., например, [1] - [9], система уравнений мелкой воды (МВ) для двухслойных плоских одномерных течений может быть записана в виде системы четырех уравнений. Используемые обозначения пояснены на рис. 1.

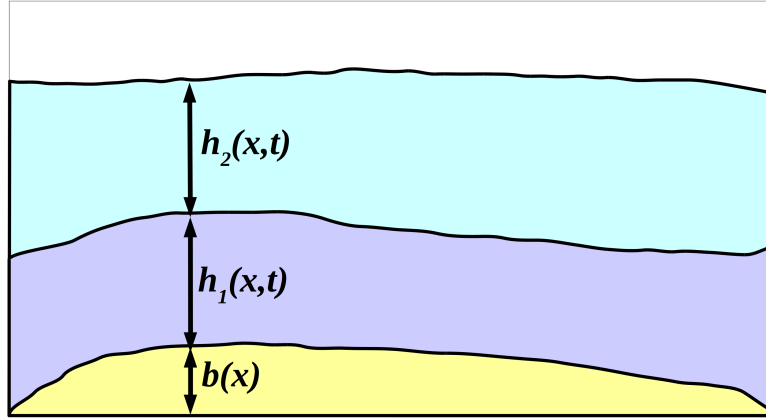


Рис. 1: Схематическое изображение двухслойной мелкой воды.

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 u_1) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 u_2) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial (h_1 u_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g h_1^2}{2} \right) + r g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} + g h_1 \frac{\partial b}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial (h_2 u_2^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g h_2^2}{2} \right) + g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + g h_2 \frac{\partial b}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Здесь $h_1(x, t)$ и $u_1(x, t)$ – толщина и скорость нижнего слоя, $h_2(x, t)$ и $u_2(x, t)$ – толщина и скорость верхнего слоя, $b(x)$ описывает топоологию дна, g – ускорение силы тяжести. Нумерация слоев начинается с нижнего слоя, см. рис. 1. Численный коэффициент $r = \rho_2/\rho_1 \leq 1$ представляет собой отношение плотностей верхнего и нижнего слоев. Очевидно, что при $r > 1$ в жидкой двухслойной системе может формироваться неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. Получающаяся при этом картина течения уже не может описываться уравнениями мелкой воды, при выводе которых предполагается, что вертикальная составляющая скорости течения пренебрежимо мала.

Система уравнений выписана без учета внешних сил (например, силы ветра или сил Кориолиса) и без учета сил вязкого трения, включая трение между слоями.

Выписанная система уравнений представляет собой две системы, каждая из которых описывает течение отдельного слоя. Связь между слоями осуществляется только за счет гидростатического давления и описывается неконсервативными слагаемыми, в которые включены h_1 и h_2 . Последнее создает существенные трудности, отличающие решение системы уравнений многослойной мелкой воды от решения однослойных уравнений. Для преодоления возникающих проблем используются многочисленные приемы, включающие в себя методы расщепления, схемы с направленными разностями, схемы типа Годунова, кинетические алгоритмы и методы, в которых для стабилизации решения вводится третий, промежуточный, слой исчезающей толщины. Описание разработанных численных алгоритмов и их особенностей, позволяющих преодолеть специфическую неустойчивость численных алгоритмов для двухслойных уравнений, имеется в работах [1] - [9], имеющихся в них ссылках, а также в работах Г.Г. Еленина, В.В. Остапенко и других, публикации которых доступны в интернете.

В данной работе приведен новый конечно-разностный алгоритм для численного решения двухслойных уравнений мелкой воды, в основе которого лежит квазигазодинамический подход [10]. В рамках этого подхода ранее был разработан и опробован численный алгоритм решения уравнений мелкой воды, который показал свою эффективность при решении многочисленных задач в указанном приближении, см. например, [11, 12].

В следующем разделе приведен способ построения регуляризованных уравнений в приближении двухслойной мелкой воды (далее – *большая система*). В разделе 3 выписана соответствующая разностная схема. В разделе 4 выполнена проверка условия хорошей балансировки схемы. В разделах 5, 6 и 7 приведены примеры численных расчетов известных тестовых задач о распространении межслойного интерфейса (interface propagation), распаде неподвижного гидродинамического разрыва и задачи о распаде гидродинамического разрыва внутреннего слоя жидкости вблизи наклонного берега. В последнем случае требуется учет так называемого эффекта сухого дна.

В Приложении приведен вывод регуляризованной системы уравнений МВ с использованием квазигидродинамического подхода (далее – *малая система*). Этот подход использовался для расчета тестовых задач, и его особенности в сравнении с основным алгоритмом указаны в тексте. Расчеты показывают, что "малая система" проявляет сильные осцилляции на разрывах решения и мало устойчива для случаев, когда плотности слоев близки между собой.

2. Сглаженные уравнения двухслойной мелкой воды

По аналогии с построением регуляризованных уравнений газовой динамики и регуляризованных уравнений мелкой воды (МВ) будем полагать, что

в течение некоторого малого интервала времени (времени сглаживания $\sim \tau$) скорость и высота слоя жидкости изменяются, принимая новые значения u^* и h^* соответственно. Для их определения мы разложим соответствующие функции в ряд Тейлора до первого члена по τ :

$$u^* = u + \tau \frac{\partial u}{\partial t}, \quad h^* = h + \tau \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (5)$$

Используя (5), распишем h^*u^* , оставив только слагаемые с первым порядком по τ :

$$h^*u^* = \left(h + \tau \frac{\partial h}{\partial t} \right) \left(u + \tau \frac{\partial u}{\partial t} \right) = hu + \tau \frac{\partial(hu)}{\partial t} + O(\tau^2).$$

Выразим производную по времени из уравнений (3), (4). Покажем это на примере регуляризации нижнего слоя (h_1, u_1) :

$$\frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial t} = -\frac{\partial (h_1 u_1^2)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_1^2}{2} \right) - rgh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - gh_1 \frac{\partial b}{\partial x}.$$

Введя обозначение:

$$w_1 = \frac{\tau_1}{h_1} \left[\frac{\partial (h_1 u_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_1^2}{2} \right) + rgh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} + gh_1 \frac{\partial b}{\partial x} \right], \quad (6)$$

$$j_1 = h_1 (u_1 - w_1), \quad (7)$$

получим:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial j_1}{\partial x} = 0.$$

Аналогично:

$$w_2 = \frac{\tau_2}{h_2} \left[\frac{\partial (h_2 u_2^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_2^2}{2} \right) + gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + gh_2 \frac{\partial b}{\partial x} \right], \quad (8)$$

$$j_2 = h_2 (u_2 - w_2), \quad (9)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial j_2}{\partial x} = 0.$$

Далее распишем каждое слагаемое уравнения (3) при $h_1 = h_1^*$ и $u_1 = u_1^*$:

$$\begin{aligned} h_1^* (u_1^*)^2 &= \left(h_1 + \tau_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \right) \left(u_1 + \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 = \\ &= \left(h_1 + \tau_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \right) \left(u_1^2 + 2u_1 \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + O(\tau_1^2) \right) = \\ u_1 &\left(h_1 u_1 + \tau_1 \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} \right) + u_1 h_1 \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + O(\tau^2) = \\ &u_1 j_1 + u_1 h_1 \tau_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Выразим производную по времени из уравнения (3):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = - \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + rg \frac{\partial h_2}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} \right]. \quad (10)$$

Распишем следующее слагаемое, используя (1):

$$\frac{1}{2} g (h_1^*)^2 = \frac{1}{2} g \left(h_1 + \tau_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} g h_1^2 + g h_1 \tau_1 \left[-h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right] + O(\tau^2).$$

Введём обозначение:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \tau_1 u_1 h_1 \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + rg \frac{\partial h_2}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} \right] + \\ &\tau_1 g h_1 \left[h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Оставшиеся слагаемые содержат h_1^* не в производной и будут записаны в виде:

$$h_1^* \rightarrow \left(h_1 - \tau_1 \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} \right).$$

Последним шагом является преобразование производной $\frac{\partial h_2^*}{\partial x}$:

$$\frac{\partial h_2^*}{\partial x} = \frac{\partial \left(h_2 - \tau_2 \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial h_2}{\partial x} - \tau_2 \frac{\partial^2(h_2 u_2)}{\partial x^2}.$$

Таким образом, учитывая перечисленные выше преобразования, для уравне-

ния (3) получим:

$$\frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial (u_1 j_1)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_1^2}{2} \right) + g \left(h_1 - \tau_1 \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial x} \right) \times \left[\frac{\partial h_2}{\partial x} - \tau_2 \frac{\partial^2 (h_2 u_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial b}{\partial x} \right] = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}.$$

Повторив те же действия для уравнения (4), получим систему сглаженных уравнений для второго слоя.

Таким образом, построена следующая регуляризованная система для двух-слойных уравнений МВ:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial j_1}{\partial x} = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial j_2}{\partial x} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial (u_1 j_1)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_1^2}{2} \right) + g \left(h_1 - \tau_1 \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial x} \right) \times \left[r \frac{\partial h_2}{\partial x} - r \tau_2 \frac{\partial^2 (h_2 u_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial b}{\partial x} \right] = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}; \quad (14)$$

$$\frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial (u_2 j_2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_2^2}{2} \right) + g \left(h_2 - \tau_2 \frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial x} \right) \times \left[\frac{\partial h_1}{\partial x} - \tau_1 \frac{\partial^2 (h_1 u_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial b}{\partial x} \right] = \frac{\partial \Pi_2}{\partial x}; \quad (15)$$

где:

$$w_1 = \frac{\tau_1}{h_1} \left[\frac{\partial (h_1 u_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_1^2}{2} \right) + r g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} + g h_1 \frac{\partial b}{\partial x} \right]; \quad (16)$$

$$j_1 = h_1 (u_1 - w_1); \quad (17)$$

$$w_2 = \frac{\tau_2}{h_2} \left[\frac{\partial (h_2 u_2^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_2^2}{2} \right) + g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + g h_2 \frac{\partial b}{\partial x} \right]; \quad (18)$$

$$j_2 = h_2 (u_2 - w_2); \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 = \tau_1 u_1 h_1 \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + r g \frac{\partial h_2}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} \right] + \\ \tau_1 g h_1 \left[h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right]; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 = \tau_2 u_2 h_2 \left[u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + g \frac{\partial h_2}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} \right] + \\ \tau_2 g h_2 \left[h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

3. Разностная схема

По аналогии с алгоритмами [11, 12], разработанными для квазигазодинамических уравнений, для численного решения регуляризованных уравнений (12)–(21) будем использовать явную по времени разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями.

Значения искоемых переменных $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$, $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ зададим в узлах пространственной сетки i . Значения переменных в полуцелых пространственных точках $i + 1/2$ вычисляются как среднее арифметическое значений в соседних точках:

$$b_{i+1/2} = \frac{b_i + b_{i+1}}{2}, \quad (h_l)_{i+1/2} = \frac{(h_l)_i + (h_l)_{i+1}}{2}, \quad (u_l)_{i+1/2} = \frac{(u_l)_i + (u_l)_{i+1}}{2}, \\ l = 1, 2.$$

Тогда, если Δt и Δx – шаги по времени и координате соответственно, получаем:

$$\begin{aligned} (w_1)_{i+1/2} = \frac{(\tau_1)_{i+1/2}}{(h_1)_{i+1/2}} \left(\frac{(h_1 u_1)_{i+1}^2 - (h_1 u_1)_i^2}{\Delta x} + g(h_1)_{i+1/2} \times \right. \\ \left. \frac{r(h_2)_{i+1} + (h_1)_{i+1} + b_{i+1} - r(h_2)_i - (h_1)_i - b_i}{\Delta x} \right); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (w_2)_{i+1/2} = \frac{(\tau_2)_{i+1/2}}{(h_2)_{i+1/2}} \left(\frac{(h_2 u_2)_{i+1}^2 - (h_2 u_2)_i^2}{\Delta x} + g(h_2)_{i+1/2} \times \right. \\ \left. \frac{(h_2)_{i+1} + (h_1)_{i+1} + b_{i+1} - (h_2)_i - (h_1)_i - b_i}{\Delta x} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично определим:

$$\begin{aligned}
 (\Pi_1)_{i+1/2} = & (\tau_1)_{i+1/2}(u_1)_{i+1/2}(h_1)_{i+1/2} \left((u_1)_{i+1/2} \frac{(u_1)_{i+1} - (u_1)_i}{\Delta x} + \right. \\
 & \left. g \frac{(h_1)_{i+1} - (h_1)_i}{\Delta x} + rg \frac{(h_2)_{i+1} - (h_2)_i}{\Delta x} + g \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x} \right) + \\
 & g(\tau_1)_{i+1/2}(h_1)_{i+1/2} \left((h_1)_{i+1/2} \frac{(u_1)_{i+1} - (u_1)_i}{\Delta x} + \right. \\
 & \left. (u_1)_{i+1/2} \frac{(h_1)_{i+1} - (h_1)_i}{\Delta x} \right); \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Pi_2)_{i+1/2} = & (\tau_2)_{i+1/2}(u_2)_{i+1/2}(h_2)_{i+1/2} \left((u_2)_{i+1/2} \frac{(u_2)_{i+1} - (u_2)_i}{\Delta x} + \right. \\
 & \left. g \frac{(h_2)_{i+1} - (h_2)_i}{\Delta x} + g \frac{(h_1)_{i+1} - (h_1)_i}{\Delta x} + g \frac{b_{i+1} - b_i}{\Delta x} \right) + \\
 & g(\tau_2)_{i+1/2}(h_2)_{i+1/2} \left((h_2)_{i+1/2} \frac{(u_2)_{i+1} - (u_2)_i}{\Delta x} + \right. \\
 & \left. (u_2)_{i+1/2} \frac{(h_2)_{i+1} - (h_2)_i}{\Delta x} \right). \tag{25}
 \end{aligned}$$

Тогда:

$$(j_1)_{i+1/2} = (h_1)_{i+1/2} ((u_1)_{i+1/2} - (w_1)_{i+1/2}), \tag{26}$$

$$(j_2)_{i+1/2} = (h_2)_{i+1/2} ((u_2)_{i+1/2} - (w_2)_{i+1/2}). \tag{27}$$

Используя (12), (13), (26), (27), аппроксимируем первые уравнения:

$$\frac{(h_1)_i^{k+1} - (h_1)_i^k}{\Delta t} + \frac{(j_1)_{i+1/2} - (j_1)_{i-1/2}}{\Delta x} = 0; \tag{28}$$

$$\frac{(h_2)_i^{k+1} - (h_2)_i^k}{\Delta t} + \frac{(j_2)_{i+1/2} - (j_2)_{i-1/2}}{\Delta x} = 0. \tag{29}$$

Уравнения (14), (15) аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{(h_1)_i^{k+1}(u_1)_i^{k+1} - (h_1)_i^k(u_1)_i^k}{\Delta t} + \frac{(u_1)_{i+1/2}(j_1)_{i+1/2} - (u_1)_{i-1/2}(j_1)_{i-1/2}}{\Delta x} + \quad (30) \\ & \frac{g}{2} \frac{((h_1)_{i+1/2})^2 - ((h_1)_{i-1/2})^2}{\Delta x} + g(h_1^*)_i \left[r \frac{(h_2)_{i+1/2} - (h_2)_{i-1/2}}{\Delta x} - \right. \\ & \left. r(\tau_2)_i \frac{(h_2)_{i+1}(u_2)_{i+1} - 2(h_2)_i(u_2)_i + (h_2)_{i-1}(u_2)_{i-1}}{\Delta x^2} + \right. \\ & \left. \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{\Delta x} \right] = \frac{(\Pi_1)_{i+1/2} - (\Pi_1)_{i-1/2}}{\Delta x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(h_2)_i^{k+1}(u_2)_i^{k+1} - (h_2)_i^k(u_2)_i^k}{\Delta t} + \frac{(u_2)_{i+1/2}(j_2)_{i+1/2} - (u_2)_{i-1/2}(j_2)_{i-1/2}}{\Delta x} + \quad (31) \\ & \frac{g}{2} \frac{((h_2)_{i+1/2})^2 - ((h_2)_{i-1/2})^2}{\Delta x} + g(h_2^*)_i \left[\frac{(h_1)_{i+1/2} - (h_1)_{i-1/2}}{\Delta x} - \right. \\ & \left. (\tau_1)_i \frac{(h_1)_{i+1}(u_1)_{i+1} - 2(h_1)_i(u_1)_i + (h_1)_{i-1}(u_1)_{i-1}}{\Delta x^2} + \right. \\ & \left. \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{\Delta x} \right] = \frac{(\Pi_2)_{i+1/2} - (\Pi_2)_{i-1/2}}{\Delta x}. \end{aligned}$$

В уравнениях (14), (15) существуют различные способы разностной аппроксимации множителей h_1^* и h_2^* соответственно. Как будет показано в следующем разделе, выбор способа аппроксимации этих величин влияет на точность выполнения условия гидростатического равновесия. Укажем два способа аппроксимации:

Способ 1:

$$\begin{aligned} (h_l^*)_i &= \frac{(h_l)_{i+1/2} + (h_l)_{i-1/2}}{2} - (\tau_l)_i \times \quad (32) \\ & \frac{(h_l)_{i+1/2}(u_l)_{i+1/2} - (h_l)_{i-1/2}(u_l)_{i-1/2}}{\Delta x}, \quad l = 1, 2. \end{aligned}$$

Способ 2:

$$\begin{aligned} (h_l^*)_i &= (h_l)_i - (\tau_l)_i \frac{(h_l)_{i+1/2}(u_l)_{i+1/2} - (h_l)_{i-1/2}(u_l)_{i-1/2}}{\Delta x}, \quad (33) \\ & l = 1, 2. \end{aligned}$$

Устойчивость численного алгоритма обеспечивается слагаемыми с коэффициентом τ . Определим регуляризатор τ как два независимых коэффициента

τ_1 и τ_2 для каждого слоя соответственно. Тогда:

$$\tau_1 = \alpha \frac{\Delta x}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{gh_1}; \quad (34)$$

$$\tau_2 = \alpha \frac{\Delta x}{c_2}, \quad c_2 = \sqrt{gh_2}. \quad (35)$$

Величина τ пропорциональна шагу пространственной сетки Δx с коэффициентом α , где $0 < \alpha < 1$ – число, выбираемое из условий точности и устойчивости счёта. Условие устойчивости имеет вид условия Куранта, где шаг по времени выбирается по формуле:

$$\Delta t = \beta \left(\frac{\Delta x}{c} \right)_{min} \quad (36)$$

4. Условия гидростатического равновесия

Удовлетворение алгоритма условию гидростатического равновесия, которое в данном контексте понимается как условие "*хорошей балансировки*" – *well balanced*, означает, что вычислительная схема не нарушает естественного условия, состоящего в том, что в отсутствие внешних сил покоящиеся горизонтальные слои жидкости не могут самопроизвольно приходить в движение над неровным дном.

Для приведенной выше двухслойной системы МВ это условие имеет вид

$$h_2 = const, \quad h_1 + b = const, \quad u_1 = u_2 = 0$$

и проверяется непосредственной подстановкой их в уравнения двухслойной МВ и в их регуляризованный аналог. Задача гидростатического равновесия является одним из немногих простых аналитических решений системы двухслойных уравнений МВ.

Обеспечение этого условия для численных алгоритмов решения двухслойной задачи зависит от используемого численного алгоритма. Соответствующие трудоёмкие подходы описаны, например, в [1], [2].

Для аппроксимации способом 1 (32) это условие точно удовлетворяет разностной схеме, что проверяется непосредственной подстановкой разностного решения $(u_1)_i = (u_2)_i = 0$, $(h_1)_i + b_i = const$, $(h_2)_i = const$ в систему разностных уравнений (22)–(31) для стационарной задачи. Аналогичное условие было проверено для однослойного случая в [11].

Для способа 2 (33) подстановка условия равновесия в схему (22)–(31) при-

водит к необходимости выполнения соотношениям вида

$$(h_l)_i = \frac{(h_l)_{i+1/2} + (h_l)_{i-1/2}}{2}, \quad l = 1, 2.$$

Для численной проверки условия равновесия в применении к двуслойной жидкости были выбраны две задачи с начальными условиями:

$$h_2(x, t = 0) = const = 2,$$

$$h_1(x, t = 0) + b(x) = const = 2,$$

$$u_1(x, t = 0) = u_2(x, t = 0) = 0,$$

для двух вариантов формы дна – гладкий профиль:

$$b(x) = \begin{cases} 0.5 (\cos (0.1\pi x) + 1), & 10 \leq x \leq 90, \\ 0, & x > 10 \cup x < 90, \end{cases}$$

и разрывный профиль в виде ступеньки:

$$b(x) = \begin{cases} 0, & x < 50, \\ 1, & x \geq 50. \end{cases}$$

Расчет проводился при постоянных коэффициентах: $r = 0.5$, $\beta = 0.1$, $\alpha = 0.3$. Здесь величина α соответствует наиболее устойчивому значению для регуляризованной системы МВ [11], хотя очевидно, что условие гидростатического равновесия будет выполняться при любых значениях этих коэффициентов. Время счёта: $t = 1$.

Для способа 1 результаты расчетов показаны на рис. 2. Здесь величину погрешности для расчетов задач с гладким и разрывным дном можно считать равной величине машинного нуля – около $10^{-15} - 10^{-16}$.

Для способа 2 результаты расчета приведены на рис. 3. Видно, что условие равновесия здесь выполняется приближенно. Ниже в таблицах приведены максимальные величины пиков, наблюдающихся в расчетах для этого способа.

Для задачи с гладким дном данные табл. 1 показывают быструю сходимость решения при уменьшении шага сетки. Для задачи с разрывным профилем дна (табл. 2) сходимость по сетке не наблюдается.

В дальнейших расчетах используется способ 1, который обеспечивает условие хорошей балансировки.

Таблица 1

Гладкое дно

	$N = 100$	$N = 200$	$N = 500$	$N = 1000$
h_1	1.68×10^{-3}	4.96×10^{-4}	8.42×10^{-5}	2.16×10^{-5}
h_2	5.53×10^{-4}	1.68×10^{-4}	3.15×10^{-5}	8.25×10^{-6}

Таблица 2

Дно с разрывом

	$N = 100$	$N = 200$	$N = 500$	$N = 1000$
h_1	0.13	0.16	0.15	0.14
h_2	0.025	0.025	0.021	0.021

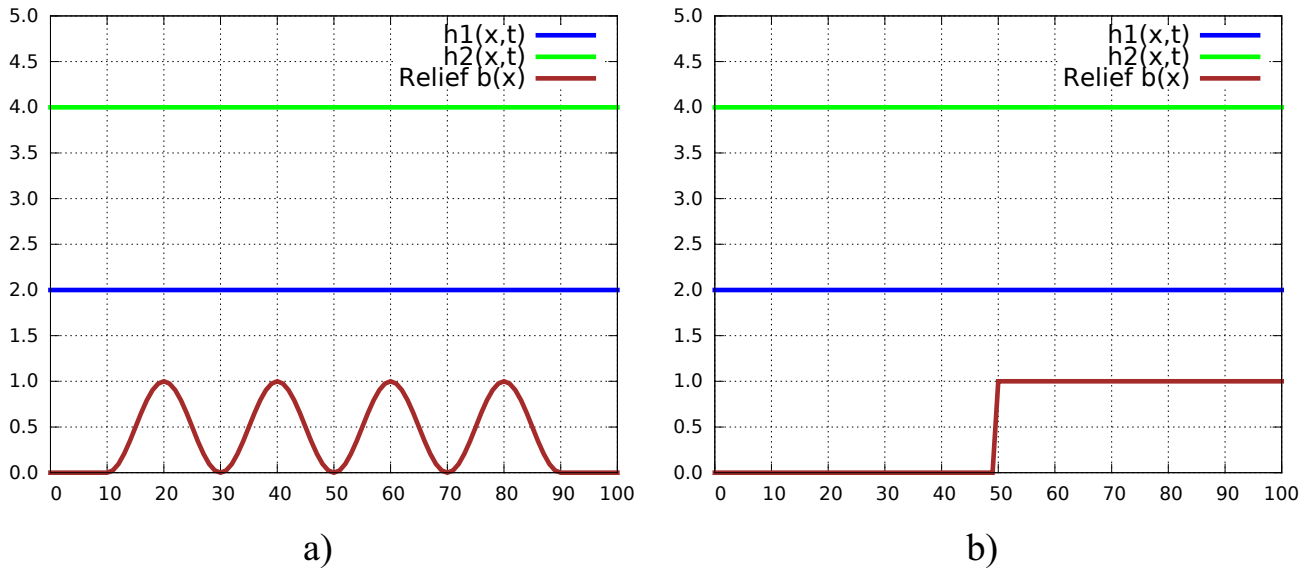


Рис. 2: Способ 1. Условие гидростатического равновесия. Разбиение $N = 100$.
 а) гладкое дно; б) разрывное дно.

5. Тест 1. Распространение интерфейсного скачка

Этот тест детально исследовался в [1], [2], [3] и [4]. Здесь мы основываемся на постановке [1]. Рассматривается система с ровным дном ($b(x) = 0$), в которой $g = 9.81$, $r = 0.98$, и начальная толщина слоев задана в виде:

$$h_2(x, t = 0) = \begin{cases} 0.5, & x < 0.5, \\ 0.55, & x \geq 0.5, \end{cases}$$

$$h_1(x, t = 0) = \begin{cases} 0.5, & x < 0.5, \\ 0.45, & x \geq 0.5, \end{cases}$$

$$u_1(x, t = 0) = u_2(x, t = 0) = 2.5.$$

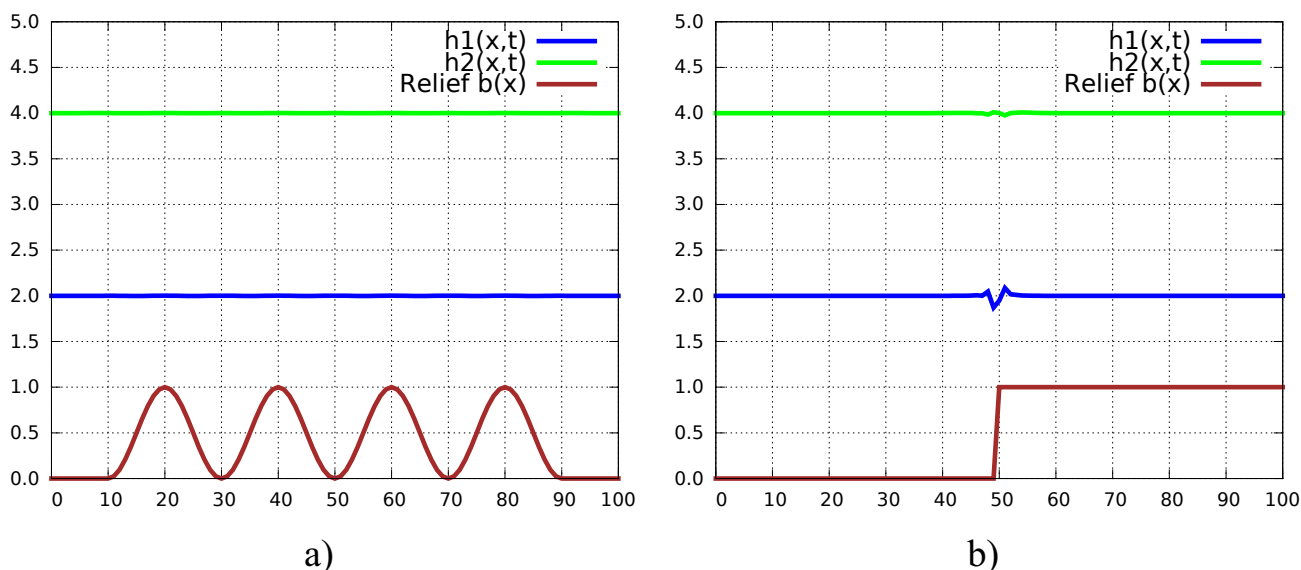


Рис. 3: Способ 2. Условие гидростатического равновесия. Разбиение $N = 100$. а) гладкое дно; б) разрывное дно.

В [1] данная задача решалась для случая $x \in [0, 1]$, результаты продемонстрированы для времени $t = 0.05$ и числа точек сетки $N = 100$. Используются разработанные авторами устойчивые схемы с расщеплением по времени первого и второго порядка точности. Эти схемы удовлетворяют условию *well balance* и дискретному энтропийному неравенству.

Результат, полученный с использованием регуляризованных уравнений для $N = 100$ и числом Куранта $\beta = 0.1$, приведен на рис. 4.

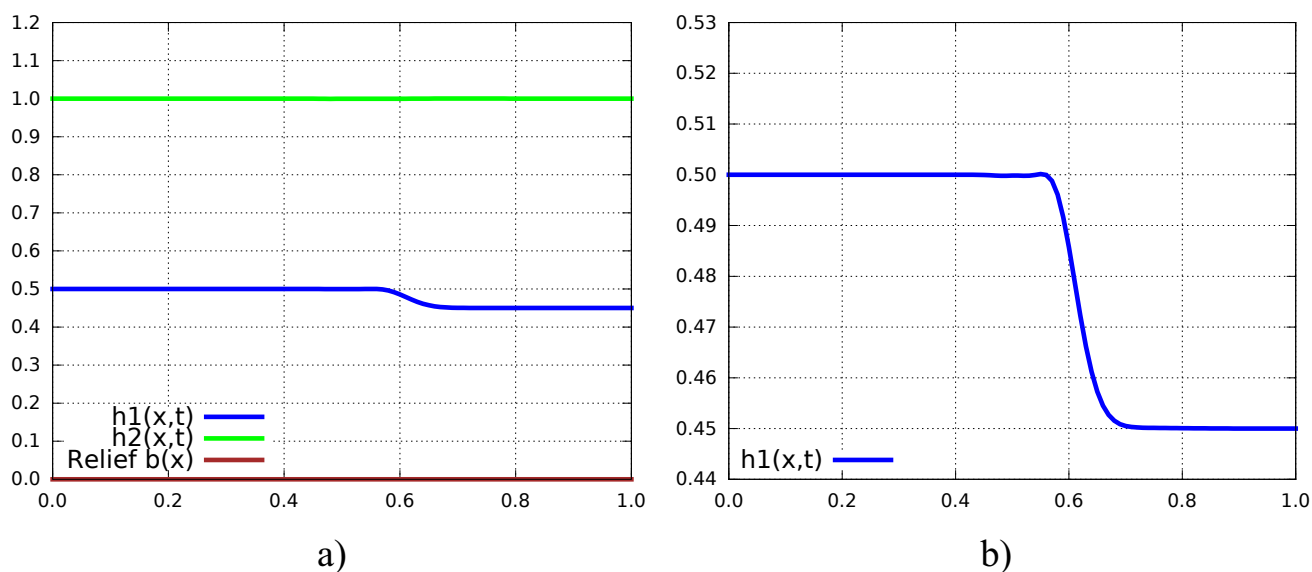


Рис. 4: Тест 1. $N = 100$, $\beta = 0.1$, $\alpha = 0.3$, а) общая картина; б) фрагмент профиля.

Зависимость численного решения от коэффициента регуляризации α и чис-

ла точек сетки представлена на рис. 5. При приближении к $\alpha = 0.05$, как и в [11], наблюдается появление осцилляций и последующее нарушение устойчивости численного решения, рис. 5(a). Увеличение крутизны фронта и уменьшение амплитуды осцилляций при увеличении числа точек сетки видно из рис. 5(b).

Как пишут авторы [1], в численном решении в окрестности фронта наблюдаются осцилляции, которые видны при увеличении масштаба рисунка по x . Однако сами осцилляции малы на фоне общей картины, они наблюдаются при $x \in [0.5, 0.6]$, а их амплитуда около 0.01 в расчетах по схеме с первым порядком точности и 0.003 в расчетах со вторым порядком точности. Из рисунков следует, что полученные в наших расчетах колебания в зоне $x \in [0.5, 0.6]$ для $\alpha = 0.1$ практически совпадают по амплитуде с колебаниями решения второго порядка из [1].

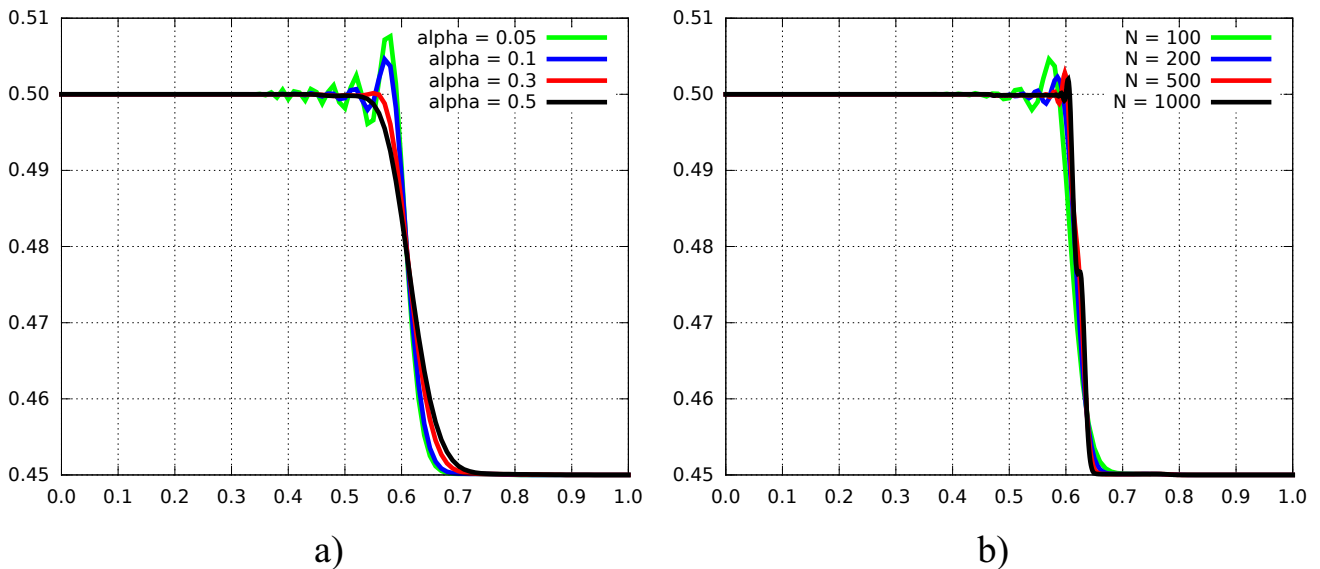


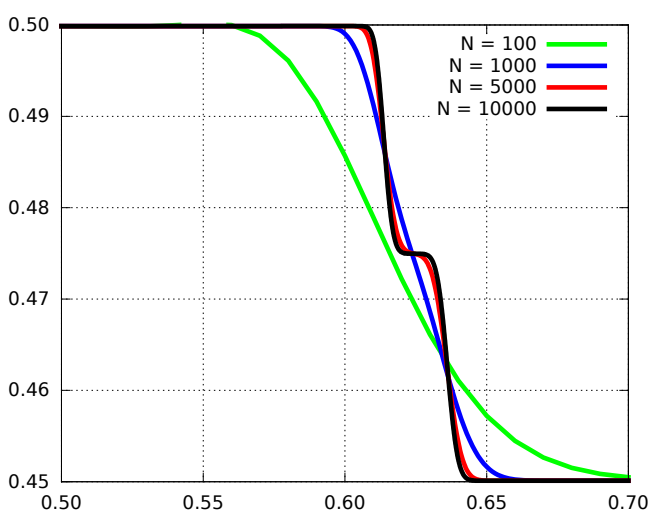
Рис. 5: Тест 1. а) Различные значения α . $N = 100$. б) Зависимость решения от числа точек. $\alpha = 0.1$.

В [2] указывается, что в рассматриваемой задаче при недостаточной схемной вязкости на межфазном фронте могут наблюдаться дополнительные интерфейсные неустойчивости, которые становятся более заметны при большом числе расчетных точек. Для момента времени $t = 0.05$ такая высокочастотная неустойчивость располагается перед фронтом в окрестности точки 0.4. Такие же осцилляции наблюдались при расчете этой задачи с использованием приведенной в Приложении квазигидродинамической, или малой, системы двухслойных уравнений МВ. Наличие межфазных осцилляций говорит о недостаточном сглаживании, присутствующем в "малой системе" уравнений. Численные эксперименты показали, что квазигазодинамическая (большая система) гораздо стабильней малой и указанных неустойчивостей при ее численном решении не наблюдается.

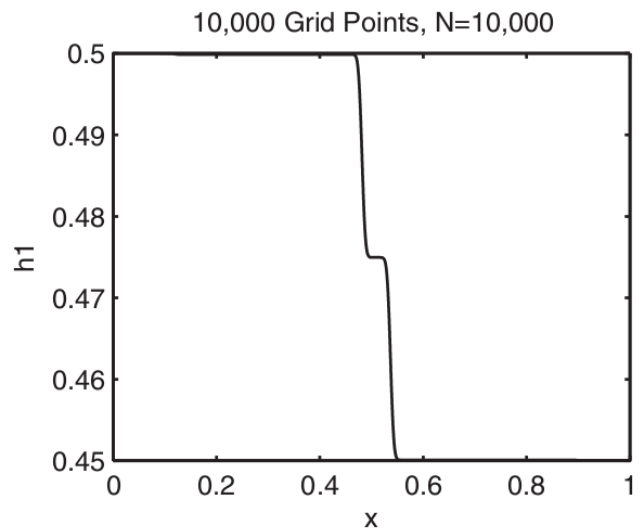
Расчеты на подробных сетках

Численные эксперименты показывают, что асимптотическим решением задачи при больших N является "ступенька" на фронте. Это продемонстрировано на рис. 6(a). При $N=5000$ и 10000 отчетливо видно раздвоение и выпрямление обоих участков фронта. В [1] рассматривались только $N=100$, и указанное явление не наблюдалось.

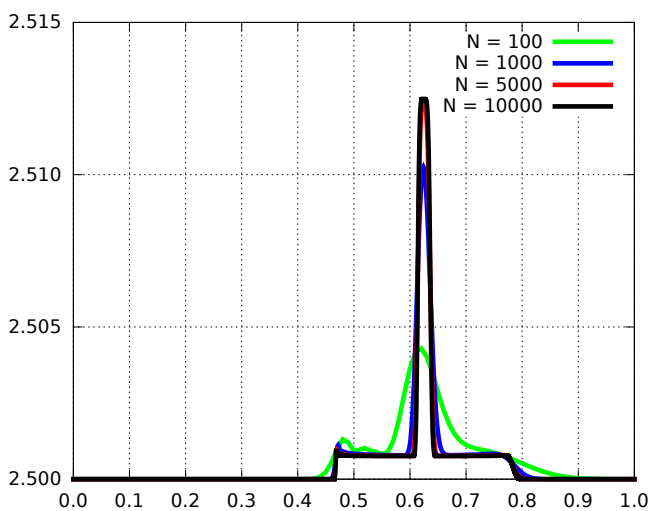
Раздвоения фронта и образование ступеньки отмечено в [2] для случая $N=10000$ – рис. 6(b). В [2] задача считалась при $g=10$, это было учтено в нашем расчете. Отметим, что в [2] использовался метод релаксации с различными вариантами искусственной вязкости.



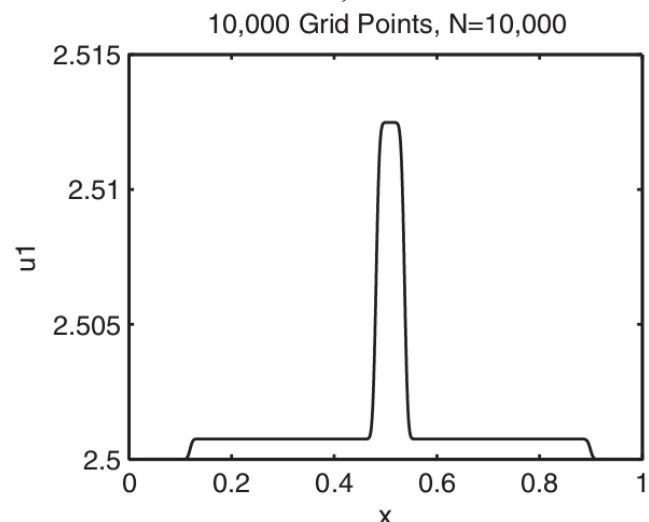
a)



b)



c)



d)

Рис. 6: Тест 1. $g=10$. Различные значения N , $\alpha=0.3$: а) h_1 с) u_1 . Проявление раздвоения фронта в [2]: б) h_1 , д) u_1 .

При использовании "малой системы" регуляризованных уравнений МВ

при увеличении числа разбиений по координате $N = 10000$ также наблюдалось раздвоение фронта интерфейсного скачка.

Значения r , близкие к 1

В [1] отмечается, что использованные в этой работе схемы начинают расходиться при $r = \rho_2/\rho_1 \rightarrow 1$. Это имеет физическое обоснование: при больших значениях r сверху оказывается достаточно тяжёлый слой, жидкости начинают перемешиваться, что образует сильные осцилляции на границе, и, как следствие, это приводит к расходимости схемы.

Устойчивость разностных схем при увеличении коэффициента $r = \rho_2/\rho_1 \rightarrow 1$ является важным фактором при расчете слоев жидкости с небольшими отличиями в плотности.

На рис. 7 показаны примеры развития осцилляций на фронте интерфейсного разрыва при значениях коэффициентов $r > 1$ и разных уровнях схемной диссипации α .

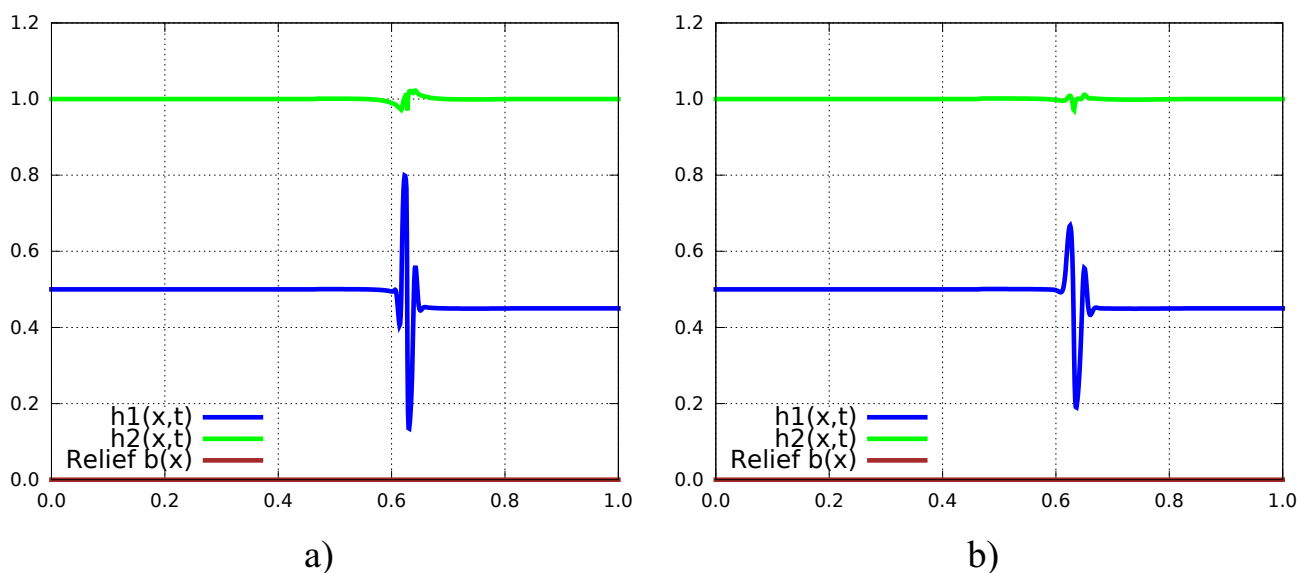


Рис. 7: Тест 1. Демонстрация поведения при больших r . $N = 1000$ а) $r = 1.1$, $\alpha = 0.3$, б) $r = 1.15$, $\alpha = 0.5$.

6. Тест 2. Распад неподвижного разрыва для различных значений r

Данный тест был описан и исследован в [1]. В задаче рассматривается схема с ровным дном $b(x) = 0$, в которой $g = 9.81$,

$$h_1(x, t = 0) = \begin{cases} 0.2, & x < 5, \\ 1.8, & x \geq 5, \end{cases}$$

$$h_2(x, t = 0) + h_1(x, t = 0) = 2,$$

$$u_1(x, t = 0) = u_2(x, t = 0) = 0.$$

При этом использовалось разбиение по координате $N = 500$ и $x \in [0, 10]$, результаты представлены для $t = 1$. Использовались гидростатические солверы первого и второго порядка точности и кинетический солвер, который считается более точным и устойчивым.

Вариант $r = 0.7$

Данный расчет показан на рис. 8. Как видно из рисунка, результаты наших расчетов и расчетов [1] по схеме второго порядка для гидростатического солвера очень близки.

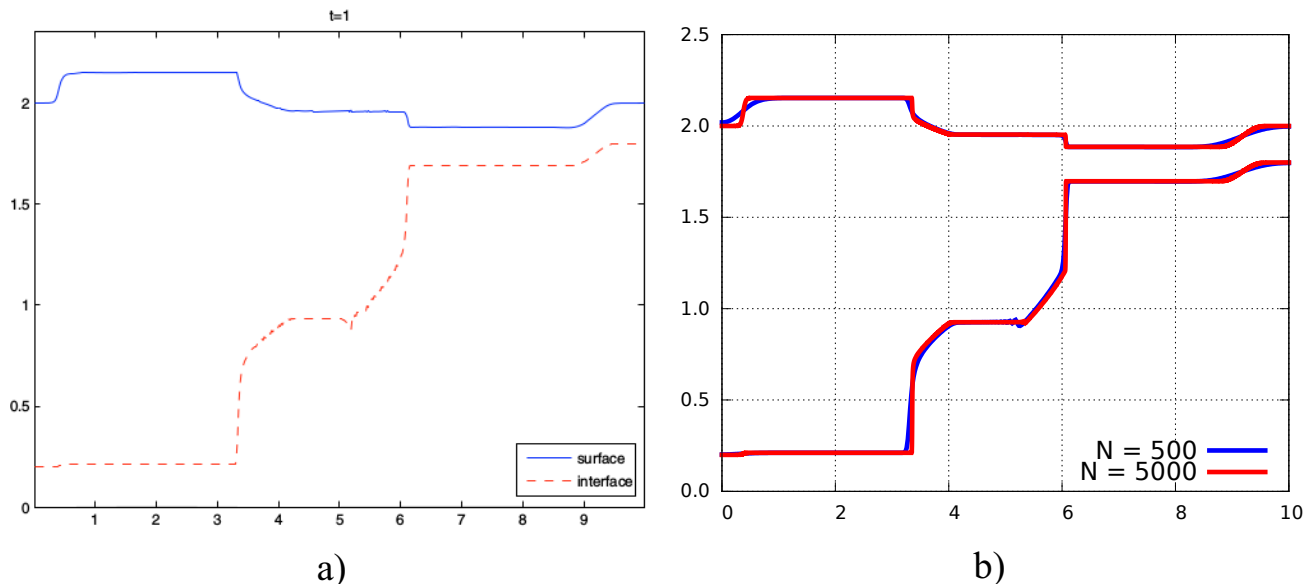


Рис. 8: Тест 2. $r = 0.7$, $t = 1$. а) Гидростатический солвер второго порядка точности [1] $N = 500$, число Куранта 0.01. б) Большая система, $N=500$ и 5000, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$.

Была рассмотрена зависимость решения от коэффициента α . При $\alpha \leq 0.05$ решение начинало осциллировать и расходиться. Сопоставление решений [1] и расчетов по "большой системе" для $\alpha = 0.5$ при $N = 500$ и 5000 приведено на рис. 8. Видно очень хорошее согласие результатов даже на сетках с одина-

ковым числом узлов. Рис. 8(b) показывает сходимость численного решения по сетке.

Отметим, что для данной задачи в расчетах авторов используется разностная схема первого порядка точности, в которой число Куранта в 10 раз превосходит соответствующую величину из [1].

Авторы [1] отмечают, что решение данной задачи с использованием гидростатического солвера первого порядка имеет нефизичные разрывы. В то же время более универсальный и более устойчивый кинетический солвер первого порядка дает нефизичное слишком сглаженное решение. Адекватное решение получается при применении гидростатического или кинетического солверов второго порядка точности.

Вариант $r = 0.98$

В [1] проведено моделирование этой задачи для r , близкого к 1 ($\rho_2/\rho_1 = 0.98$). Авторы [1] отмечают, что в этом случае формируется стационарный разрыв, вид которого сильно зависит от используемого солвера.

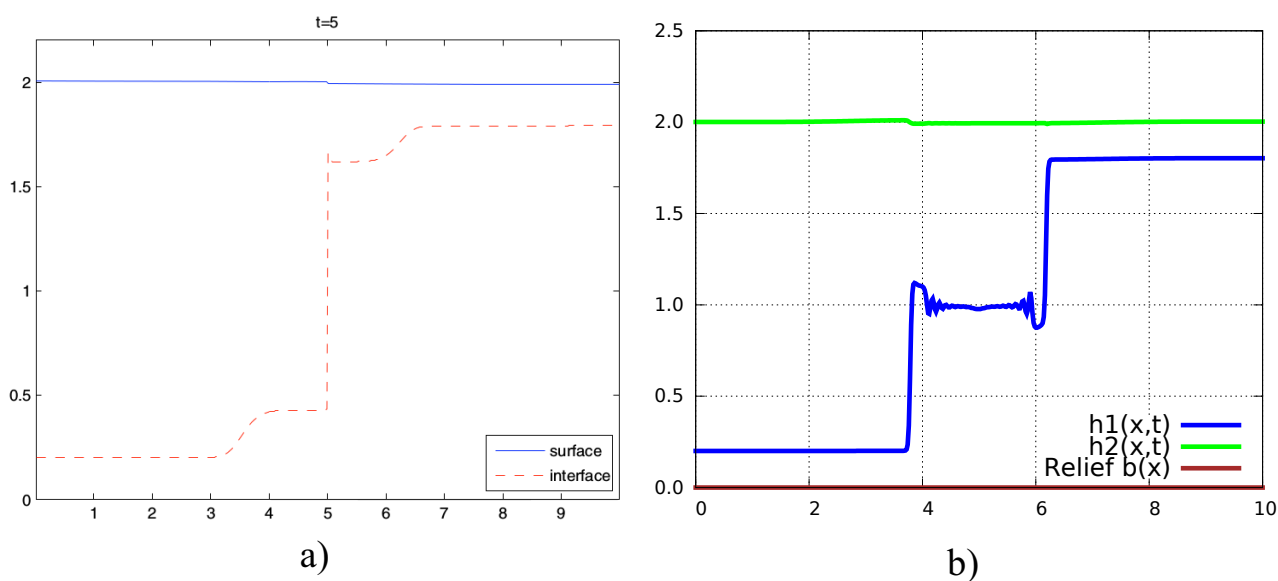


Рис. 9: Тест 2, $r = 0.98$, $t = 5$. а) Кинетический солвер первого порядка [1], б) большая система, $N = 500$, $\beta = 0.1$, $\alpha = 0.5$.

В наших расчетах $\beta = 0.1$ и для повышения устойчивости выбрано $\alpha = 0.5$. На рис. 9 приведено сравнение результатов для $r = 0.98$. Можно заметить, что решения разительно отличаются. Это ставит под сомнение полученный результат, хотя в [1] указывается о возможном несовпадении результатов расчетов этой задачи, полученных различными методами.

Вариант $r = 1$

Рис. 10(a) представляет устойчивую структуру слоев для $r = 1$. Эта структура практически не меняется с течением времени (наблюдается раздвоение фронта при больших временах счёта). Данный результат представляется естественным и физичным, поскольку случай неподвижного разрыва при $r = 1$

соответствует неподвижной жидкости, плотность которой везде одинакова. Отметим, что предложенный авторами алгоритм оказывается устойчивым для этого специфического предельного случая.

При небольшом увеличении $r > 1$ наблюдается неустойчивость численного решения, что наглядно показано на рис. 10(b). При $r > 1.0002$ схема расходится. Это, в свою очередь, говорит о том, что результат удовлетворяет физическому свойству смешивания двух слоёв.

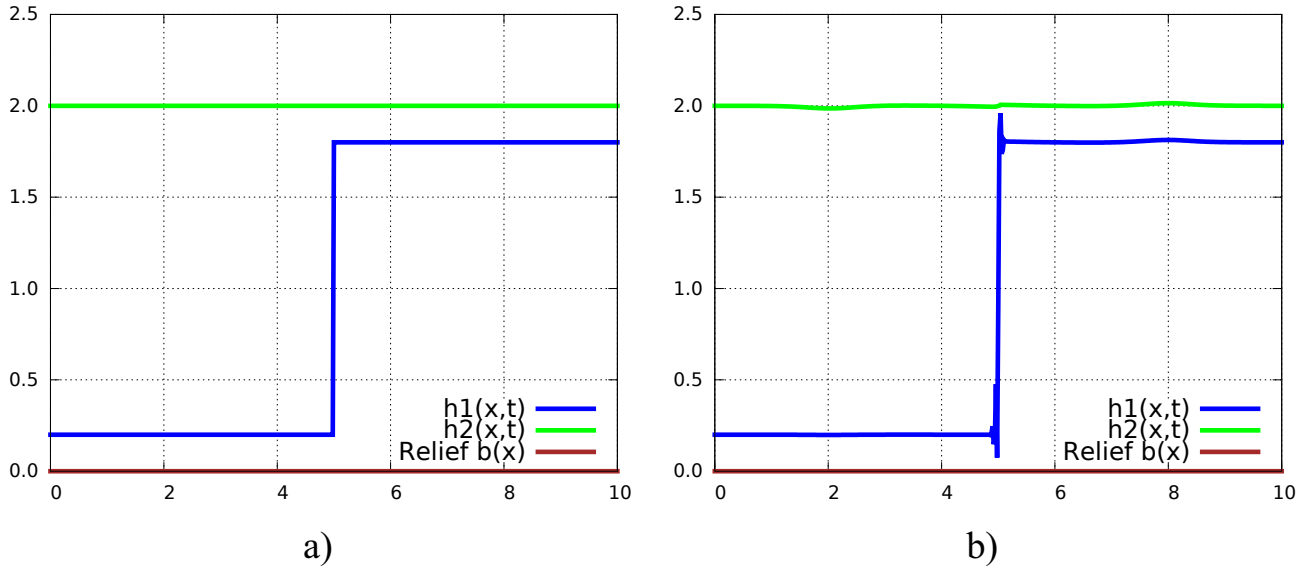


Рис. 10: Тест 2, $N = 500$, $\beta = 0.1$, $\alpha = 0.5$, а) $r = 1.0$, $t = 5c$. б) $r = 1.0002$, $t = 1c$.

7. Тест 3. Распад разрыва вблизи наклонного берега

Для этого теста рассматривалось $g = 9.81$, $r = 0.95$, $x \in [0, 10]$ и:

$$h_1(x, t = 0) = \begin{cases} 0.5, & x < 0.25, \\ 0, & x \geq 0.25, \end{cases}$$

$$h_2(x, t = 0) = (1 - h_1(x, t = 0) - b(x))_+,$$

$$u_1(x, t = 0) = u_2(x, t = 0) = 0,$$

в [1] использовалось разбиение по координате $N = 100$, результаты представлены для $t = 0.5$ и $t = 50$.

В [1] говорится, что данная система решалась с помощью кинетического солвера. Слева использовалось условие "твёрдой стены" для сохранения массы. Результат представлен на рис. 11. Авторы [1] отмечают, что наблюдается хорошее поведение системы в пустых областях (так называемых "сухих зонах"). На рис. 11(b) показано достижение устойчивого равновесия, что говорит о проявлении свойств хорошей балансировки системы [1].

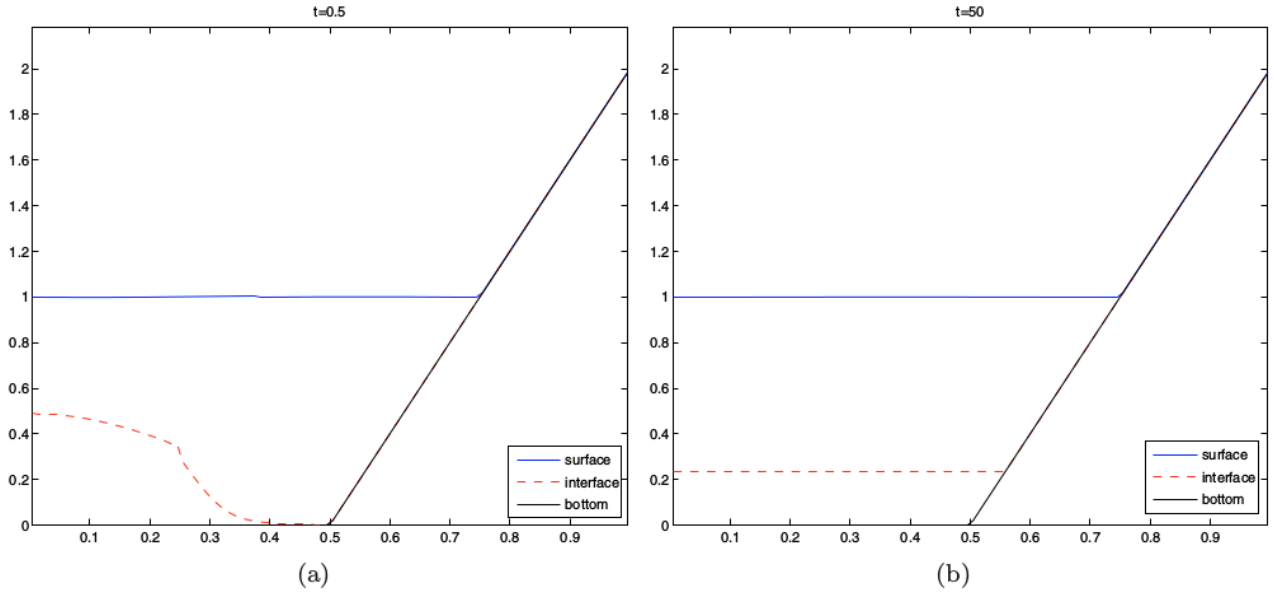


Рис. 11: Тест 3. [1] кинетический солвер, а) $t = 0.5$, б) $t = 50$.

Для сравнения результатов с [1] был проделан тест с тем же разбиением по координате $N = 100$ и коэффициентами: $\beta = 0.1$, $\alpha = 0.5$.

Помимо этого, было необходимо учесть в системе (22)–(31) условие "сухой зоны". Для этого в соответствии с [12] было выбрано малое ε , такое, что:

$$(\tau_1)_i = \begin{cases} \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{g((h_1)_i)}}, & (h_1)_i > \varepsilon, \\ 0, & (h_1)_i \leq \varepsilon, \end{cases}$$

$$(\tau_2)_i = \begin{cases} \alpha \frac{\Delta x}{\sqrt{g((h_2)_i)}}, & (h_2)_i > \varepsilon, \\ 0, & (h_2)_i \leq \varepsilon, \end{cases}$$

а также:

$$(u_1)_i^{k+1} = \begin{cases} (30), & (h_1)_i^{k+1} > \varepsilon, \\ 0, & (h_1)_i^{k+1} \leq \varepsilon, \end{cases}$$

$$(u_2)_i^{k+1} = \begin{cases} (31), & (h_2)_i^{k+1} > \varepsilon, \\ 0, & (h_2)_i^{k+1} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Выбор значения ε представляет собой отдельную задачу. Оптимальным вариантом был выбран: $\varepsilon = 0.01$ При меньших значениях в условии для скорости схема расходилась ($\varepsilon = 0.001$).

Результат виден на рис. 12. При сгущении сетки для $t = 0.5$ мы получаем обычный распад разрыва, который можно наблюдать на рис. 12(a).

Таким образом, можно говорить о том, что большая система по своей точности соответствует гидростатическому солверу [1] второго порядка точности

и, в то же время, позволяет решать задачи, для которых используется более устойчивый кинетический солвер второго порядка точности.

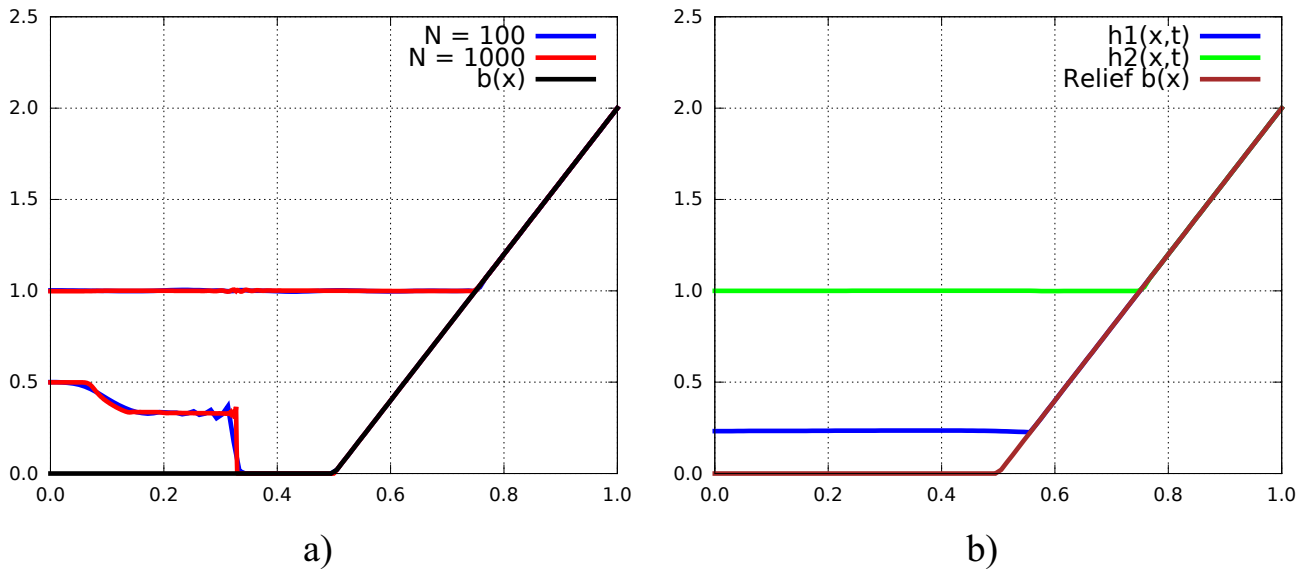


Рис. 12: Тест 3, $\beta = 0.1$, $\alpha = 0.5$, а) $t = 0.5$ для различных N , б) $t = 50$, $N = 100$.

Заключительные замечания

Главным достижением этой работы является построение новой явной по времени разностной схемы для моделирования течений двухслойной мелкой воды и практическая апробация ее работоспособности.

Построенный метод оказывается устойчивым в случае, когда плотность верхнего слоя лишь немного меньше плотности нижнего слоя. Такие значения характерны для океанических течений различной солености и температуры. Например, это течения в Гибралтарском проливе и возникающие в нем приливные внутренние волны [3], [5]. Показанная нами возможность численного моделирования течений со значительно различающимися плотностями слоев и течений с внутренними "сухими зонами" может использоваться для моделирования генерации волн цунами при смещениях подводных слоев [5]. Очевидные обобщения построенного алгоритма на двумерный случай могут быть проверены на тестах, представленных в [6, 7, 9].

Приложение

Вывод малой системы

При выводе большой системы предполагается, что скорость и высота слоя изменяются, принимая новые значения u^* и h^* соответственно. Для их опреде-

ления мы раскладываем соответствующие функции в ряд Тейлора до первого члена по τ :

$$u^* = u + \tau \frac{\partial u}{\partial t}, \quad h^* = h + \tau \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Малая система, т.е. упрощённый регуляризатор, рассматривает изменение скорости и пренебрегает изменением высоты.

Опишем алгоритм регуляризации уравнений (1) – (4). Рассматривая изменение скорости течения как:

$$u^* = u + \tau \frac{\partial u}{\partial t},$$

выразим u_1 и u_2 и подставим их в исходные уравнения.

$$u_1^* = u_1 + \tau \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad u_2^* = u_2 + \tau \frac{\partial u_2}{\partial t}.$$

Чтобы выразить производные, сделаем следующее: упростим уравнение (3):

$$h_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} + h_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial x} + g h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + r g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} + g h_1 \frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$

использовав (1), получим $u_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 u_1) = 0$, тогда:

$$-\frac{\partial u_1}{\partial t} = u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial h_1}{\partial x} + r g \frac{\partial h_2}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} = 0.$$

Введя обозначение:

$$w_1 = \tau \left[u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial (h_1 + r h_2 + b)}{\partial x} \right], \quad (37)$$

получим:

$$u_1^* = u_1 - w_1.$$

Ввиду симметрии для второй пары уравнений получим аналогично:

$$w_2 = \tau \left[u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + g \frac{\partial (h_1 + h_2 + b)}{\partial x} \right], \quad (38)$$

$$u_2^* = u_2 - w_2.$$

Находя u_i^2 ($i = 1, 2$), рассмотрим только первый порядок малости, т.е.

$$(u_i^*)^2 = u_i^2 - 2u_i w_i, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, подставив вышенаписанные выражения в уравнения, мы

получили регуляризованную систему уравнений:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 u_1) = \frac{\partial}{\partial x} (h_1 w_1), \quad (39)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_2 u_2) = \frac{\partial}{\partial x} (h_2 w_2), \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial (h_1 u_1^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_1^2}{2} \right) + rgh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} + gh_1 \frac{\partial b}{\partial x} = \\ 2 \frac{\partial}{\partial x} (h_1 u_1 w_1), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial (h_2 u_2^2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gh_2^2}{2} \right) + gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + gh_2 \frac{\partial b}{\partial x} = \\ 2 \frac{\partial}{\partial x} (h_2 u_2 w_2). \end{aligned} \quad (42)$$

Разностная схема

Для численного решения регуляризованных уравнений (39)–(42) используем явную по времени разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями.

Значения искоемых переменных $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$, $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ зададим в узлах пространственной сетки i . Значения переменных в полуцелых пространственных точках $i + 1/2$ вычисляются как среднее арифметическое значений в соседних точках:

$$b_{i+1/2} = \frac{b_i + b_{i+1}}{2}, \quad (h_l)_{i+1/2} = \frac{(h_l)_i + (h_l)_{i+1}}{2}, \quad (u_l)_{i+1/2} = \frac{(u_l)_i + (u_l)_{i+1}}{2}, \\ l = 1, 2.$$

Тогда, если Δt и Δx – шаги по времени и координате соответственно, получаем:

$$\begin{aligned} (w_1)_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} \left((u_1)_{i+1/2} \frac{(u_1)_{i+1} - (u_1)_i}{\Delta x} + \right. \\ \left. g \frac{r(h_2)_{i+1} + (h_1)_{i+1} + b_{i+1} - r(h_2)_i - (h_1)_i - b_i}{\Delta x} \right); \end{aligned} \quad (43)$$

$$(w_2)_{i+1/2} = \tau_{i+1/2} \left((u_2)_{i+1/2} \frac{(u_2)_{i+1} - (u_2)_i}{\Delta x} + g \frac{(h_2)_{i+1} + (h_1)_{i+1} + b_{i+1} - (h_2)_i - (h_1)_i - b_i}{\Delta x} \right). \quad (44)$$

Тогда для системы уравнений получим:

$$\frac{(h_1)_i^{j+1} - (h_1)_i^j}{\Delta t} + \frac{(h_1)_{i+1/2}^j \left((u_1)_{i+1/2}^j - (w_1)_{i+1/2} \right)}{\Delta x} - \frac{(h_1)_{i-1/2}^j \left((u_1)_{i-1/2}^j - (w_1)_{i-1/2} \right)}{\Delta x} = 0; \quad (45)$$

$$\frac{(h_2)_i^{j+1} - (h_2)_i^j}{\Delta t} + \frac{(h_2)_{i+1/2}^j \left((u_2)_{i+1/2}^j - (w_2)_{i+1/2} \right)}{\Delta x} - \frac{(h_2)_{i-1/2}^j \left((u_2)_{i-1/2}^j - (w_2)_{i-1/2} \right)}{\Delta x} = 0; \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(h_1)_i^{j+1} (u_1)_i^{j+1} - (h_1)_i^j (u_1)_i^j}{\Delta t} + r g (h_1)_i^j \frac{(h_2)_{i+1/2}^j - (h_2)_{i-1/2}^j}{\Delta x} + \\ & \quad g (h_1)_i^j \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{\Delta x} - \\ & \quad 2 \frac{(h_1)_{i+1/2}^j (u_1)_{i+1/2}^j (w_1)_{i+1/2} - (h_1)_{i-1/2}^j (u_1)_{i-1/2}^j (w_1)_{i-1/2}}{\Delta x} + \\ & \quad \frac{g \left((h_1)_{i+1/2}^j \right)^2 - \left((h_1)_{i-1/2}^j \right)^2}{2 \Delta x} + \\ & \quad \frac{(h_1)_{i+1/2}^j \left((u_1)_{i+1/2}^j \right)^2 - (h_1)_{i-1/2}^j \left((u_1)_{i-1/2}^j \right)^2}{\Delta x} = 0; \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(h_2)_i^{j+1}(u_2)_i^{j+1} - (h_2)_i^j(u_2)_i^j}{\Delta t} + g(h_2)_i^j \frac{(h_1)_{i+1/2}^j - (h_1)_{i-1/2}^j}{\Delta x} + \\
& \qquad \qquad \qquad g(h_2)_i^j \frac{b_{i+1/2} - b_{i-1/2}}{\Delta x} - \\
& 2 \frac{(h_2)_{i+1/2}^j (u_2)_{i+1/2}^j (w_2)_{i+1/2} - (h_2)_{i-1/2}^j (u_2)_{i-1/2}^j (w_2)_{i-1/2}}{\Delta x} + \\
& \qquad \qquad \qquad \frac{g \left((h_2)_{i+1/2}^j \right)^2 - \left((h_2)_{i-1/2}^j \right)^2}{2 \Delta x} + \\
& \qquad \qquad \qquad \frac{(h_2)_{i+1/2}^j \left((u_2)_{i+1/2}^j \right)^2 - (h_2)_{i-1/2}^j \left((u_2)_{i-1/2}^j \right)^2}{\Delta x} = 0.
\end{aligned} \tag{48}$$

Устойчивость численного алгоритма обеспечивается слагаемыми с коэффициентом τ .

Список литературы

- [1] *F. Bouchut, T. Morales de Luna.* An entropy satisfying scheme for two-layer shallow water equations with uncoupled treatment. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis.* 2008. vol. 42. no. 4. pp. 638–698.
- [2] *Remi Abgrall, Smadar Karni.* Two-layer shallow water system: a relaxation approach. *SIAM Journal on Scientific Computing.* 2009. vol. 31. no. 3. pp. 1603–1627.
- [3] *Manuel Castro, Jorge Macias, Carlos Pares.* A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. application to a two-layer 1-D shallow water system. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis.* 2001. vol. 35. no. 1. pp. 107–127.
- [4] *Manuel J. Castro, Alberto Pardo, Carlos Pares, E. F. Toro.* On some fast well-balanced first order solvers for nonconservative systems. *Mathematics of computation.* 2010. vol. 79. no. 271. pp. 1427–1472.
- [5] *Jihwan Kim and Randall J. LeVeque.* Two-layer shallow water system and its applications. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics.*
- [6] *A. Kurganov and G. Petrova.* Central-Upwind Schemes for Two-Layer Shallow Water Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing.* 2009. vol. 31. no 3. pp. 1742–1773.

- [7] *K.T. Mandli*. A Numerical Method for the Two Layer Shallow Water Equations with Dry States. *Ocean Modelling* 72 (2013): 80–91.
- [8] *Alina Chertock, Alexander Kurganov, Zhuolin Qu and Tong Wu*. On a Three-Layer Approximation of Two-Layer Shallow Water Equations. *Mathematical Modelling and Analysis*. 2013. vol. 18. no 5. pp. 675–693.
- [9] *S.C. Chen, S.H. Peng*. Two dimensional numerical model of two-layer shallow water equations for confluence simulation. *ScienceDirect, Advances in Water Resources* 29 (2006) pp. 1608-1617.
- [10] *Елизарова Т.Г.*. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
- [11] *Булатов О.В., Елизарова Т.Г.* Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах. *ЖВМиМФ*. 2011. т. 51. № 1. с. 170–184.
- [12] *Булатов О.В., Елизарова Т.Г.* Регуляризованные уравнения мелкой воды для численного моделирования течений с подвижной береговой линией. *ЖВМиМФ*. 2016. т. 56. № 4. с. 158–177.