



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 70 за 2016 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

О решении алгебраического
уравнения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. О решении алгебраического уравнения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 70. 20 с.
doi:[10.20948/prepr-2016-70](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-70)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-70>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук**

**А. Д. Брюно
О решении алгебраического уравнения**

Москва — 2016

УДК 517.55

Александр Дмитриевич Брюно

О решении алгебраического уравнения. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2016.

В работе предлагаются методы вычисления решений алгебраического уравнения от трёх неизвестных вблизи особой точки. Эти методы суть: многогранник Ньютона, степенные преобразования, новые варианты теоремы о неявной функции и униформизация плоской алгебраической кривой. Изложение начинается с обзора известных методов вычисления решений алгебраического уравнения от двух неизвестных. Вводится многогранник Адамара как новый метод для этого.

Ключевые слова: выпуклый многогранник, грань, алгебраическое уравнение, униформизация.

Alexander Dmitrievich Bruno

On solution of an algebraic equation

The methods for computation of solutions of an algebraic equation of three variables are proposed. These methods are: Newton polyhedron, power transformations, new versions of the implicit function theorem and uniformization of a planar algebraic curve. We begin from a survey of the known methods of computation of solutions of an algebraic equation of two variables and introduce the Hadamard polyhedron as a new method for that.

Key words: convex polyhedron, face, algebraic equation, uniformization.

Работа поддержана программой IV.1.1 ОМН РАН.

© А. Д. Брюно, 2016

© Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2016

Оглавление

1	Введение	3
2	Случай $n = 2$	3
3	Теоремы о неявной функции для $n = 3$	12
4	Локальный анализ для $n = 3$	13
	Список литературы	18
	Список рисунков	20

1. Введение

Пусть задан многочлен $f(X)$ с вещественными или комплексными коэффициентами, где $X = (x_1, \dots, x_n)$. Требуется найти решения уравнения

$$f(X) = 0 \quad (1)$$

для $X \in \mathbb{R}^n$ или \mathbb{C}^n в виде либо функций $X = \Phi(\Xi)$ от параметров Ξ , либо набора асимптотических разложений по параметрам

$$X = \Phi_0(\Xi) + \Phi_1(\Xi) + \dots \quad (2)$$

При этом множество решений уравнения (1) образует алгебраическое многообразие \mathcal{F} и может состоять из нескольких компонент (ветвей) разных размерностей. Для каждой компоненты надо найти свое разложение (2).

Здесь опишем алгоритмы решения этой задачи и их компьютерную реализацию. Изложение проведём по возрастанию размерности n этой задачи.

2. Случай $n = 2$

Точка $X = X^0$, $f(X^0) = 0$ называется *простой* точкой кривой \mathcal{F} , если в ней вектор $(\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2)$ не нулевой. В противном случае точка X^0 называется *особой* или *критической*. Сдвигом перенесём точку X^0 в начало координат.

2.1. Локальный анализ простой точки.

Теорема 1 (Коши [1]). *Если при $X^0 = 0$ производная $\partial f / \partial x_2 \neq 0$, то все решения уравнения (1) вблизи точки $X^0 = 0$ разлагаются в ряд*

$$x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k,$$

где b_k — постоянные.

2.2. Локальный анализ особой точки $X^0 = 0$ [2, гл. I, § 2], [3, гл. 2]. Запишем многочлен $f(X)$ в виде

$$f(X) = \sum a_Q X^Q \text{ по } Q \geq 0, \quad Q \in \mathbb{Z}^n, \quad (3)$$

где $X = (x_1, x_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, $X^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2}$, a_Q — постоянные. Пусть $\mathbf{S}(f) = \{Q : a_Q \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Множество \mathbf{S} называется *носителем* (support) многочлена $f(X)$.

Пусть оно состоит из точек Q_1, \dots, Q_k . Выпуклая оболочка носителя $\mathbf{S}(f)$ — это множество

$$\mathbf{N}(f) = \left\{ Q = \sum_{j=1}^k \mu_j Q_j, \mu_j \geq 0, \sum_{j=1}^k \mu_j = 1 \right\},$$

которое называется *многоугольником Ньютона*. Граница $\partial\mathbf{N}(f)$ состоит из вершин $\Gamma_i^{(0)}$ и рёбер $\Gamma_i^{(1)}$, где i это номер.

Каждому ребру $\Gamma_i^{(1)}$ соответствуют его *граничное подмножество* $\mathbf{S}_i^{(1)} = \mathbf{S} \cap \Gamma_i^{(1)}$, *укороченный многочлен*

$$\hat{f}_i^{(1)}(X) = \sum_{Q \in \mathbf{S}_i^{(1)}} a_i X^Q$$

и свой *нормальный конус*

$$\mathbf{U}_i^{(1)} = \left\{ P : \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q'' \rangle > \langle P, Q''' \rangle, Q', Q'' \in \Gamma_i^{(1)}, Q''' \in \Gamma \setminus \Gamma_i^{(1)} \right\},$$

где $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_*^2$, а плоскость \mathbb{R}_*^2 сопряжена плоскости \mathbb{R}^2 .

Лемма 1 ([2, гл. I, § 2]). *Вблизи особой точки $X^0 = 0$ все решения уравнения $f(X) = 0$ образуют ветви вида*

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \tau^{r_{ik}}, \quad i = 1, 2, \tau \rightarrow 0, r_{ik} < r_{ik+1} \quad (4)$$

и каждый вектор $R_1 = (r_{11}, r_{21})$ принадлежит одному из нормальных конусов $\mathbf{U}_i^{(1)}$, лежащих в третьем квадранте плоскости \mathbb{R}_^2 , т. е. $p_1, p_2 < 0$.*

Из этой леммы следует, что в разложениях (4) отношения r_{ik}/r_{i1} , $i = 1, 2$, суть рациональные числа. Более того, при правильной параметризации все числа r_{ik} — целые.

Аналогично устроены ветви кривой (1) вблизи точки $X^0 = (\infty, \infty)$, только там надо ограничиться рёбрами $\Gamma_i^{(1)}$ с нормальными конусами $\mathbf{U}_i^{(1)}$, лежащими в первом квадранте $p_1, p_2 > 0$ плоскости \mathbb{R}_*^2 . Наконец, также устроены ветви кривой (1) вблизи точки $X^0 = (0, \infty)$, только там нормальные конусы $\mathbf{U}_i^{(1)}$ лежат во втором квадранте $p_1 < 0, p_2 > 0$ (в конусе задачи).

2.3. Степенное преобразование. Теперь заметим, что степенное преобразование

$$\begin{pmatrix} \ln x_1 \\ \ln x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\alpha = (\alpha_{ij})$ — неособая квадратная (2×2) матрица с вещественными элементами α_{ij} индуцирует аффинное преобразование в плоскостях \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}_*^2 :

$$\tilde{Q}^* = \alpha^* Q^* \text{ и } \tilde{P}^* = \alpha^{-1} P^*,$$

где звёздочка означает транспонирование. При этом

$$\langle \tilde{P}, \tilde{Q} \rangle = \langle P, Q \rangle$$

и моном X^Q переходит в моном $Y^{\tilde{Q}}$.

В дальнейшем можно ограничиться только унимодулярными матрицами $\alpha = (\alpha_{ij})$, т. е. α_{ij} — целые и $\det \alpha = \pm 1$.

Лемма 2 ([2, гл. I, § 2]). Для каждого ребра $\Gamma_j^{(1)}$ существует степенное преобразование (5) с унимодулярной матрицей α , которое переводит многочлен $f(X)$ в многочлен $g(Y)$. При этом ребру $\Gamma_i^{(1)} \subset \partial \mathbf{N}(f)$ соответствует вертикальное ребро $\tilde{\Gamma}_i^{(1)} \subset \partial \mathbf{N}(g)$.

Теперь для вычисления разложений, соответствующих ребру $\Gamma_i^{(1)}$, надо найти ненулевые корни $y_2 = y_2^0$ уравнения $y_1^q \tilde{g}_i(y_2) = 0$, где $y_1^q \tilde{g}_i(y_2)$ — укорочение многочлена $g(y_1, y_2)$, соответствующее вертикальному ребру $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$. Пусть $y_2^0 \neq 0$ — такой корень. Если он прост, то теорема 1 о неявной функции даёт разложение ветви, проходящей через точку $y_1 = 0, y_2 = y_2^0$. Если y_2^0 — кратный корень многочлена $\tilde{g}_i(y_2)$, то делаем сдвиг $y_2 = y_2^0 + z_2$ и исследуем окрестность точки $y_1 = z_2 = 0$ тем же способом. Так получаются все ветви исходной кривой.

Пример 1. Лист Декарта

$$f(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0. \quad (6)$$

Его носитель состоит из точек $(3,0)$, $(0,3)$ и $(1,1)$. Их выпуклая оболочка — треугольник с этими вершинами (рис. 1).

1) Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченный многочлен

$$\check{f}_1^{(1)}(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2$$

и ветвь $x_2 = \frac{1}{3}x_1^2 + \varphi(x_1)$.

2) Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ соответствует укорочение

$$\check{f}_2^{(1)}(x_1, x_2) = x_2^3 - 3x_1x_2$$

и ветвь $x_1 = \frac{1}{3}x_2^2 + \varphi(x_2)$. Обе эти ветви пересекаются в особой точке $X^0 = 0$.

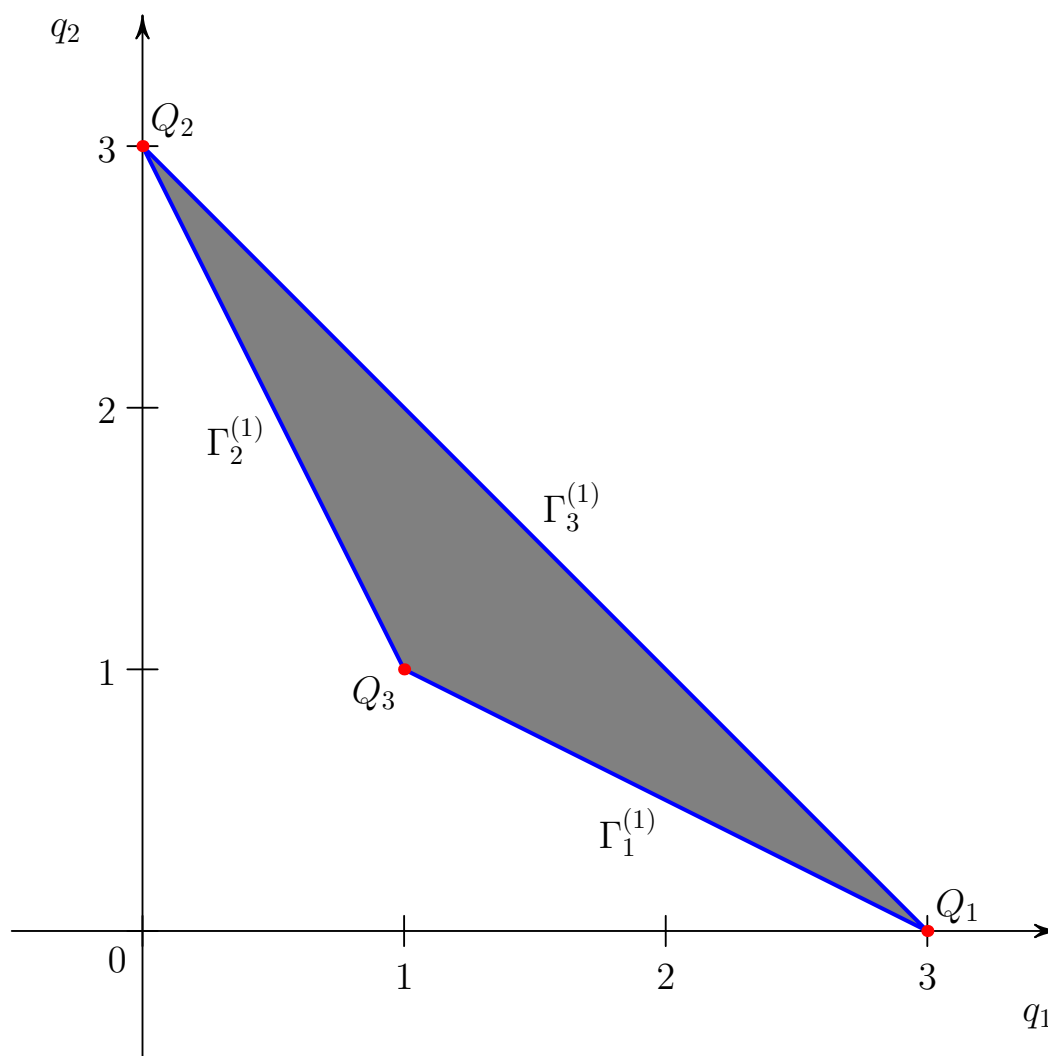


Рис. 1. Носитель и многоугольник Ньютона листа Декарта (6).

3) Ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствует укорочение

$$\check{f}_3^{(1)}(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

и ветвь $x_2 = -x_1 - 1 + \dots$ в бесконечности (рис. 2). □

2.4. Глобальный анализ плоской кривой. Предположим сначала, что многочлен $f(X)$ не распадается на множители. Тогда его корневое множество \mathcal{F} — это плоская алгебраическая кривая. Она имеет целочисленный топологический инвариант — род $g \geq 0$, $g \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим ситуации для различных значений g .
0) Случай $g = 0$. Тогда кривая \mathcal{F} бирационально эквивалентна прямой. То есть существует параметризация

$$x_1 = \varphi(t), \quad x_2 = \psi(t), \quad t = \eta(x_1, x_2),$$

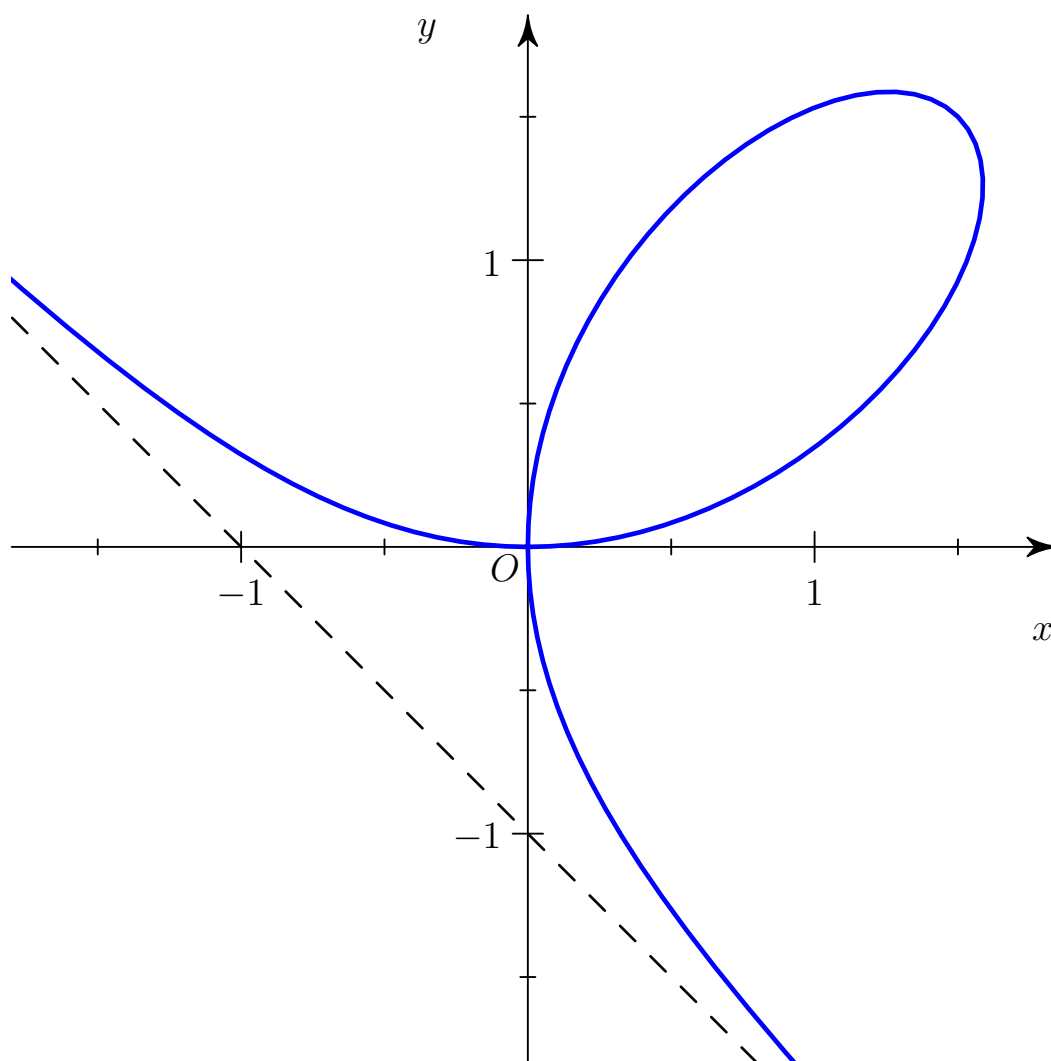


Рис. 2. Лист Декарта. Пунктиром показана асимптота.

где φ, ψ, η — рациональные функции своих аргументов.

Пример 2. Для листа Декарта (6) имеем параметризацию

$$x_1 = \frac{3t}{1+t^3}, \quad x_2 = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad t = x_2/x_1. \quad \square$$

1) Случай $g = 1$ [4]. Тогда кривая $f(X) = 0$ называется *эллиптической*. посредством бирациональной замены $x_1, x_2 \leftrightarrow y_1, y_2$ она приводится к нормальной форме Вейерштрасса

$$y_2^2 = 4y_1^3 - g_2y_1 - g_3, \quad (7)$$

где g_2 и g_3 — постоянные (модули). Униформизацию кривой (7) дает функция Вейерштрасса $\wp(t)$, которая является решением дифференциального уравнения

$$[\wp'(t)]^2 = 4\wp^3(t) - g_2\wp(t) - g_3,$$

где $\wp' = d\wp(t)/dt$, $g_2, g_3 = \text{const}$, и вблизи $t = 0$

$$\wp(t) = \frac{1}{t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{2k}, \quad b_k = \text{const}.$$

Итак, получаем униформизацию

$$y_1 = \wp(t), \quad y_2 = \wp'(t).$$

2) Гиперэллиптический случай с $g > 1$ [4, гл. 13]. В этом случае с помощью бирационального преобразования $x_1, x_2 \leftrightarrow y_1, y_2$ уравнение кривой приводится к нормальной форме

$$y_2^2 = R(y_1),$$

где $R(y_1)$ — многочлен степени $2g + 1$ без кратных корней. Решения этого уравнения можно записать в виде $y_1 = \varphi(t)$, $y_2 = \psi(t)$, где автоморфные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определённым образом выражаются через тета-функции. Если $g = 2$, то кривая всегда является гиперэллиптической (см. примеры в [5–11]), но при $g > 2$ существуют не гиперэллиптические кривые [12, гл. 7].

3) Суперэллиптический случай с $g > 2$. В этом случае бирациональной заменой координат уравнение приводится к нормальной форме

$$y_2^m = R(y_1),$$

где натуральное $m \geq 3$, а $R(y_1)$ — многочлен. Здесь также существует униформизация через тета-функции. Но как её находить пока неясно [13, 14]. По-видимому, существуют кривые, которые не являются суперэллиптическими. Но для них пока нет нормальной формы.

Пример 3. Рассмотрим кривую Ферма

$$x^n + y^n = 1.$$

Для четных n ее род $g = n(n-3)/2+1$, для нечетных n род $g = (n^2-2n-1)/2+1$. Эти значения приведены в таблице 1.

Таблица 1

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g	0	2	3	8	10	18	21	32	36

Только при $n = 2$ эта кривая рациональна.

□

4) Общий случай. Для произвольной кривой $f(x, y) = 0$ известна только теорема о существовании её глобальной униформизации $x_1 = \varphi(t)$, $x_2 = \psi(t)$, но нет аналитического алгоритма ее вычисления. Более того, даже для гиперэллиптических кривых такая униформизация находится преимущественно в случаях наличия дополнительных симметрий [5–9].

Впрочем, это не удивительно. Ведь даже для уравнения $f(x_1) = 0$ от одной неизвестной в общем случае нет аналитического алгоритма вычисления его корней. Имеется только аналитический алгоритм для вычисления приближенных значений этих корней, а их уточнение надо производить численно.

В [19, 21] предложен алгоритм униформизации алгебраической кривой с помощью радикалов. В частности, он позволяет найти униформизации кривых рода $g \leq 6$, а также некоторых специальных кривых с $g > 6$. Например, для эллиптической кривой (7) униформизация в радикалах — это $y_1 = t$, $y_2 = \sqrt{4t^3 - g_1t - g_3}$. Для общей кривой рода $g > 6$ униформизация в радикалах невозможна. Также как невозможно решение в радикалах общего уравнения степени больше 4.

2.5. Имплементация. Все локальные вычисления пунктов 2.1 и 2.2 имеют в системе компьютерной алгебры Maple. Для пункта 2.3 с помощью пакета `algcurves` можно вычислить род кривой g . Если $g = 0$ или 1, то можно найти соответствующую бирациональную замену координат кривой к прямой или к нормальной форме. Если $g > 2$, то можно выяснить является ли кривая гиперэллиптической или нет. Для гиперэллиптической кривой можно найти бирациональное преобразование к нормальной форме, алгоритма поиска униформизации там нет. Вопросы, связанные с суперэллиптическими кривыми, в Maple не рассматриваются [15].

Замечание 1. Аналогичным методом можно находить приближенные значения корней одного многочлена $f(x) = \sum a_k x^k$ от одной неизвестной. Для этого строится выпуклая оболочка \mathbf{H} точек $\check{Q}_k = (k, \ln |a_k|)$ на плоскости. Ребра её границы $\partial\mathbf{H}$ дают укороченные многочлены $\check{f}_i(x)$, корни которых являются приближениями к корням исходного многочлена. Верхняя часть границы $\partial\mathbf{H}$ — это ломанная Адамара (J. Hadamard, 1893) [16], [2, гл. IV, § 2, п. 2.1].

Пример 4. Рассмотрим многочлен $f(x) = ax + bx^3 + cx^5$. Если $|ac| < |b|^2$, то многочлен $f(x)$ имеет 2 укорочения: $\check{f}_1(x) = ax + bx^3$ и $\check{f}_2(x) = bx^3 + cx^5$ (рис. 3). Если $|ac| > |b|^2$, то $f(x)$ имеет только одно укорочение $\check{f}_3 = ax + cx^5$ (рис. 4).

Корни \tilde{x}^0 многочленов \check{f}_1 , \check{f}_2 и \check{f}_3 приближают корни x^0 исходного многочлена f . Дальнейшее приближение ε корня $x^0 + \varepsilon$ можно искать методом Ньютона из уравнения $f(x^0) + \varepsilon f'(x^0) = 0$ и т. д. \square

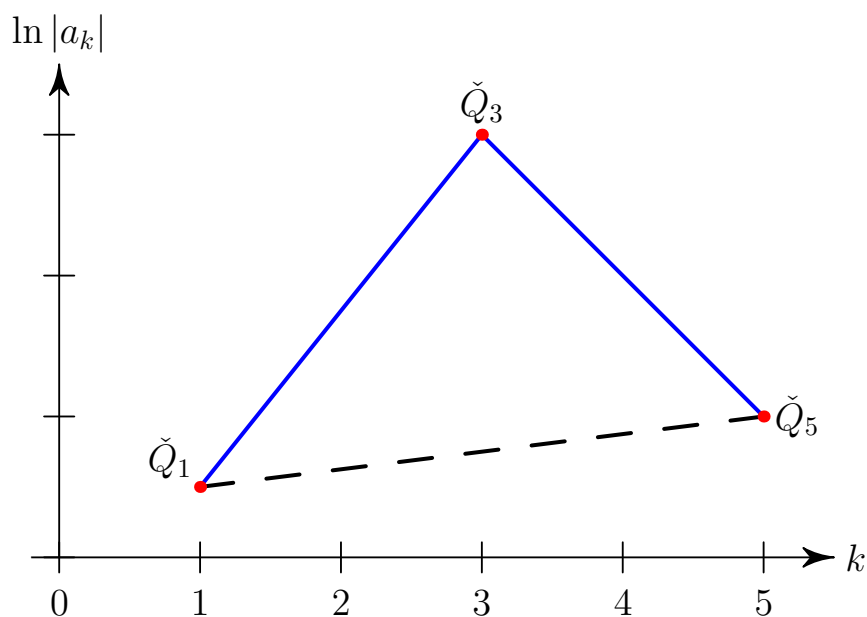


Рис. 3. Суперноситель и ломаная Адамара при $|ac| < |b|^2$ примера 4.

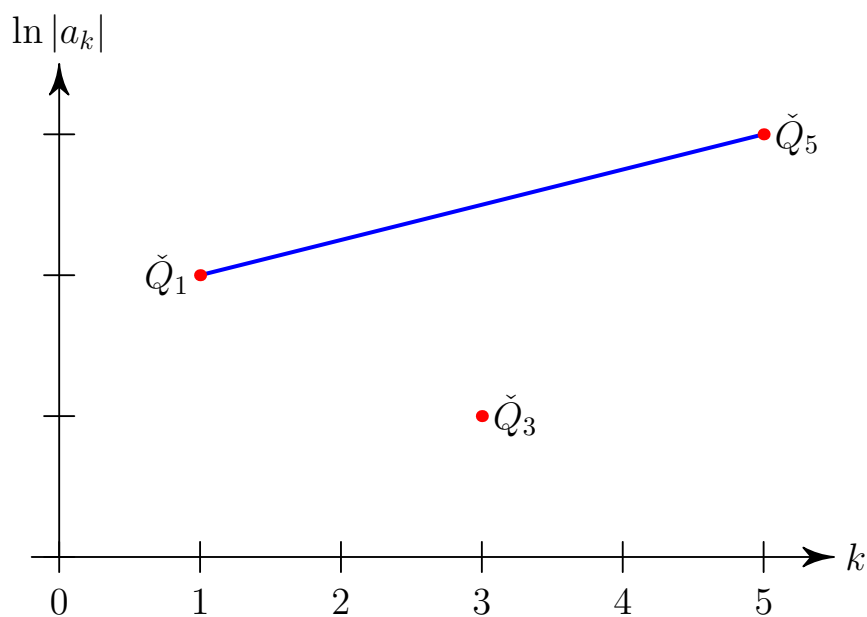


Рис. 4. Суперноситель и ломаная Адамара при $|ac| > |b|^2$ примера 4.

Пример 5. С помощью ломанной Адамара найдем приближенные значения корней многочлена

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^7 a_k x^k.$$

Значения его коэффициентов a_k приведены во второй строке таблицы 2. В третьей строке даны значения $\alpha_k = \ln |a_k|$. На рис. 5 показаны точки (k, α_k) и их

огибающая — ломанная Адамара $\partial\mathbf{H}$. Для всех k , кроме $k = 2$ и $k = 5$, эти точки

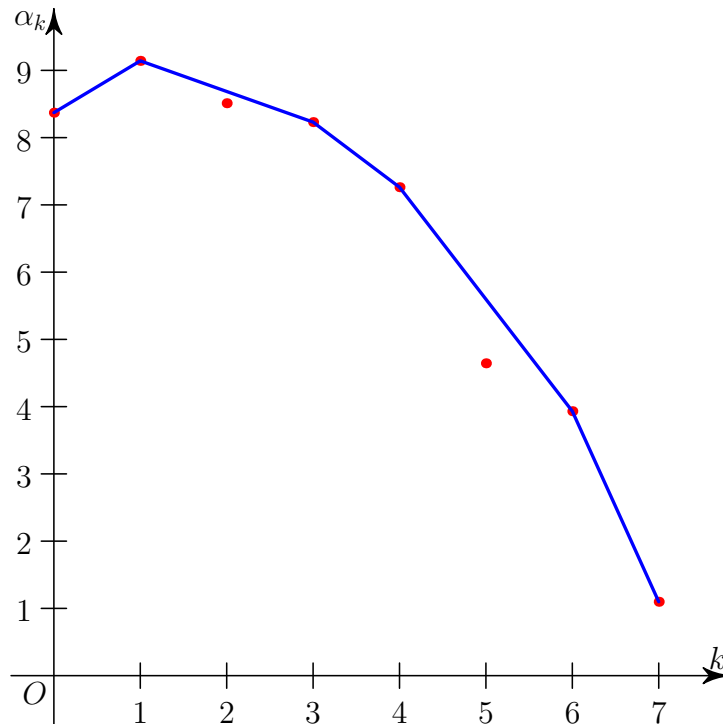


Рис. 5. Ломанная Адамара многочлена $f(x)$ примера 5.

являются вершинами ломанной $\partial\mathbf{H}$. Паре соседних вершин (k, α_k) и (l, α_l) , $k < l$, соответствует укороченный многочлен $\check{f}_k(x) = a_k x^k + a_l x^l$. Его ненулевые корни обозначим x_{k+1} , если $l = k + 1$, или x_{k+1}, x_{k+2} , если $l = k + 2$. Их значения приведены в четвёртой строке таблицы 2. В каждой из этих точек вычислены значения $f(x_k)$ и $f'(x_k)$. Вычисленные по методу Ньютона поправки $\varepsilon_k = -f(x_k)/f'(x_k)$ к потенциальным корням x_k приведены в пятой строке таблицы 2. Для $k < 6$ модули поправок $\varepsilon_k < 0.5$, а для $k = 6$ и 7 эти модули больше 1.5. Поэтому значения x_6 и x_7 требуют уточнения. Они получены из укороченных многочленов, содержащих $a_4 x^4$, $a_6 x^6$ и $a_7 x^7$. Поэтому в качестве приближенного к $f(x)$ рассмотрим многочлен $g = \sum_{k=4}^7 a_k x^k$, т. е. многочлен третьей степени $h = x^{-4}g$. Для него значение x_5 является приближенным корнем. Более точным является значение $x = 4$. Деля многочлен h на $x - 4$, получаем

$$3x^2 + 63x + 256 \tag{8}$$

и -2 в остатке. Корни \tilde{x}_6 и \tilde{x}_7 многочлена (8) суть $-10.5 \pm 2.9i$. Они приведены в шестой строке таблицы 2. Соответствующие поправки $\tilde{\varepsilon}_k = -f(\tilde{x}_k)/f'(\tilde{x}_k)$ приведены в седьмой строке. В восьмой строке приведены уточненные значения $x_k + \varepsilon_k$ для $k < 6$ и $\tilde{x}_k + \tilde{\varepsilon}_k$ для $k = 6, 7$. Наконец, в девятой строке приведены

точные значения x_k^0 корней. Полученные приближенные значения корней многочлена $f(x)$ пригодны для уточнения по методу Ньютона. \square

Таблица 2

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_k	–4320	–9336	–4972	–3754	–1426	104	51	3
α_k	8.371	9.142	8.511	8.230	7.262	4.644	3.932	1.098
x_k		–.4627	1.577i	–1.577i	–2.633	5.288	–5.288	–17
ε_k		–.1157	.0439	.0439	.36	–.032	1.82	1.78
			–.0633i	+ .0633i				
\tilde{x}_k							–10.5	–10.5
							+2.9i	–2.9i
$\tilde{\varepsilon}_k$							0.578	0.578
							–0.762i	+0.762i
$x_k + \varepsilon_k$		–.5784	.0439+	.0439+	–2.2725	5.2558	–9.922	–9.922
			1.514i	–1.514i			+2.138i	–2.138i
x_k^0		–.5819	.0519+	.0519–	–2.0984	5.2551	–9.8393	–9.8393
			1.5148i	1.5148i			+ .931i	–.931i

В целом, метод ломанной Адамара состоит в том, что исходный многочлен заменяется набором более простых многочленов, корни которых вычисляются просто и дают такие приближения корней исходного многочлена, которые достаточно хороши для численного уточнения по методу Ньютона.

3. Модифицированные теоремы о неявной функции для $n = 3$

Теорема 2 (Коши [1]). Пусть при $X^0 = 0$ имеем $f(X) = 0$ и $\partial f / \partial x_3 \neq 0$, тогда вблизи точки $X = X^0$ все решения уравнения $f(X) = 0$ имеют вид

$$x_3 = \sum b_{Q'} X'^{Q'}, \quad (9)$$

где $X' = (x_1, x_2)$, $Q' = (q_1, q_2)$, $b_{Q'} = \text{const}$.

Теорема 3 ([17, 18]). Пусть

$$f(X) = \sum a_Q X^Q, \quad (10)$$

где $a_Q = \text{const}$,

$$q_1 - \lambda_1 q_2 < 0, \quad q_1 - \lambda_2 q_2 < 0, \quad 0 \leq Q \in \mathbb{Z}^3, \quad \lambda_1, \lambda_2 = \text{const} \quad (11)$$

и $a_{(0,0,1)} = \partial f / \partial x_3|_{X=0} \neq 0$. Тогда решение уравнения $f(X) = 0$ имеет вид (9), где $b_{Q'} = \text{const}$ и выполнены неравенства (11); такое решение единственно.

Теорема 4 ([3, гл. II, § 1, теорема 1.1]). Пусть

$$f(X) = \sum a_{q_2 q_3}(x_1) x_2^{q_2} x_3^{q_3}, \quad (12)$$

где сумма конечна, $0 \leq q_2, q_3 \in \mathbb{Z}$, а $a_{q_2 q_3}(x_1)$ — некоторые функции от x_1 , кроме того

$$a_{00}(x_1) \equiv 0, \quad a_{10}(x_1) \neq 0.$$

Тогда решение уравнения $f(X) = 0$ имеет вид

$$x_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x_1) x_3^k, \quad (13)$$

где коэффициенты b_k суть функции от x_1 , являющиеся многочленами от $a_{q_2 q_3}(x_1)$ с $q_2 + q_3 \leq k$, деленными на a_{10}^{2k-1} . Такое разложение единственно.

В русском издании книги [3] имеется опечатка в формулировке этой теоремы. Она исправлена в её английском издании. Кроме того, в [3] она сформулирована вблизи точки $X = 0$, но она справедлива вблизи оси x_1 , т. е. прямой $x_2 = x_3 = 0$.

Имплементация имеется только для теорем 2 и 3 в Maple и в [17].

4. Локальный анализ для $n = 3$

Точка $X = X^0$, $f(X^0) = 0$ называется *простой*, если в ней вектор $(\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \partial f / \partial x_3)$ — не нулевой. В противном случае точка $X = X^0$ называется *особой* или *критической*. Сдвигом $X = X^0 + \tilde{X}$ перенесём точку X^0 в начало координат. Если в этой точке производная $\partial f / \partial x_3 \neq 0$, то согласно теореме 2 о неявной функции вблизи X^0 все решения уравнения $f(X) = 0$ имеют вид (9).

4.1. Многогранник Ньютона. Пусть точка $X^0 = 0$ — особая. Записываем многочлен в виде $f(X) = \sum a_Q X^Q$ (3) с $n = 3$ и строим его многогранник Ньютона. То есть: носитель $\mathbf{S} = \{Q : a_Q \neq 0\}$, многогранник Ньютона \mathbf{N} как выпуклую оболочку носителя, находим его границу $\partial \mathbf{N}$ и её обобщённые грани $\Gamma_j^{(d)}$, т. е. вершины с $d = 0$, ребра с $d = 1$ и обычные грани с $d = 2$. Для каждой из них вычисляем граничное множество $\mathbf{S}_j^{(d)} = \mathbf{S} \cap \Gamma_j^{(d)}$, укороченный многочлен

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum a_Q X^Q \text{ по } Q \in \mathbf{S}_j^{(d)}$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_j^{(d)}$ в сопряжённом пространстве \mathbb{R}_*^3 . При $X \rightarrow 0$ решения полного уравнения стремятся к нетривиальным решениям тех укороченных уравнений

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = 0,$$

у которых нормальный конус $U_j^{(d)}$ пересекается с отрицательным октантом $P \leq 0$ в \mathbb{R}_*^3 . Для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ укороченная сумма $\hat{f}_j^{(0)}$ состоит из одного слагаемого. Такие укорочения нам не интересны и в дальнейшем не рассматриваются. Будем рассматривать лишь укорочения, т. е. укороченные суммы, соответствующие ребрам $\Gamma_j^{(1)}$ и граням $\Gamma_j^{(2)}$.

4.2. Степенные преобразования [17]. Введем *степенные преобразования*

$$\ln X = \alpha \ln Y, \quad (14)$$

где $\ln X = (\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3)^*$, $\ln Y = (\ln y_1, \ln y_2, \ln y_3)^*$, α — невырожденная квадратная 3×3 матрица (α_{ij}) с рациональными элементами α_{ij} (зачастую они будут целыми). При степенном преобразовании (14) моном X^Q переходит в моном $Y^{\tilde{Q}}$, где

$$\tilde{Q}^* = \alpha^* Q^*.$$

Степенное преобразование (14) в двойственном пространстве \mathbb{R}_*^3 индуцирует линейное преобразование

$$\tilde{P}^* = \alpha^{-1} P^*.$$

Матрица B называется *унимодулярной*, если все ее элементы целые и $\det B = \pm 1$. Очевидно, для унимодулярной матрицы B обратная матрица B^{-1} также унимодулярна.

Теорема 5 ([17, теорема 2]). *Для грани $\Gamma_j^{(d)}$ существует степенное преобразование (14) с унимодулярной матрицей α , которое переводит укороченную сумму $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ в сумму от d координат, т. е.*

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = Y^R h(Y),$$

где $h(Y) = h(y_1)$, если $d = 1$, и $h(Y) = h(y_1, y_2)$, если $d = 2$. Здесь $R = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$. При этом дополнительные координаты y_2, y_3 при $d = 1$ и y_3 при $d = 2$ являются локальными, и для многочлена $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ сумма $h(Y)$ также будет многочленом.

Умножению многочлена $f(X)$ на X^P соответствует параллельный перенос носителя $\mathbf{S}(f)$ и многогранника $\Gamma(f)$ на вектор P . Поэтому если после степенного преобразования (14), применённого к многочлену $f(X)$, получаем конечную сумму $g(Y)$, содержащую отрицательные степени координат y_1, y_2 или y_3 , то существует такой вектор P , что произведение $Y^P g(Y)$ является многочленом, т. е. все показатели степени его мономов неотрицательны.

Структура решений полного уравнения, стремящихся к решениям укороченного уравнения, определяется размерностью d соответствующей обобщённой грани. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

4.3. Случай ребра, т. е. $d = 1$ [17]. В этом случае по теореме 5 существует степенное преобразование и сокращение, приводящее многочлен $f(X)$ к виду (10), (11). При этом образ ребра $\Gamma_j^{(1)}$ находится на оси q_3 , т. е. $q_1 = q_2 = 0$. Соответствующее укорочение является многочленом $h(y_3)$. Пусть $y_3 = y_3^0$ — его корень. Если это простой корень, то применима теорема 3, которая дает решение полного уравнения $f(X) = 0$ в виде

$$y_3 = \sum b_{Q'} Y'^{Q'},$$

$Q' = (q_1, q_2)$ с неравенствами

$$q_1 - \lambda_1 q_2 < 0, \quad q_1 - \lambda_2 q_2 < 0.$$

Если y_3^0 — кратный корень, то сдвигом $y_3 = y_3^0 + \tilde{y}_3$ переводим его в начало координат; получаем новый многочлен $g(y_1, y_2, \tilde{y}_3)$ и ищем его корни с помощью построения многогранника Ньютона, как описано выше.

4.4. Случай грани, т. е. $d = 2$. В этом случае согласно теореме 5 с помощью степенного преобразования и сокращения приводим многочлен $f(X)$ к виду $g(Y)$, где $g(Y) = h(y_1, y_2)$ при $y_3 = 0$. Уравнение $h(y_1, y_2) = 0$ определяет плоскую алгебраическую кривую. Пусть $\tilde{h}(y_1, y_2)$ — неприводимый сомножитель многочлена $h(y_1, y_2)$ и g — род соответствующей кривой. Дальнейший анализ зависит от числа g .

0) Случай $g = 0$. Тогда существует бирациональная параметризация $y_1 = \varphi(t)$, $y_2 = \psi(t)$ и $t = \eta(y_1, y_2)$. Делаем бирациональную замену координат

$$y_1 = \varphi(t) + \beta_1 z, \quad y_2 = \psi(t) + \beta_2 z, \tag{15}$$

где β_1 и β_2 — такие постоянные, что $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. Тогда многочлен $\tilde{h}(y_1, y_2)$ переходит в многочлен $H(t, z)$, который при $z = 0$ тождественно равен нулю, а его производная $\partial H / \partial z \neq 0$ при $z = 0$. При замене (15) во всем многочлене $g(Y)$ он переходит в многочлен $G(Z)$, где $z_1 = t$, $z_2 = z$, $z_3 = y_3$. Если $\tilde{h}(y_1, y_2)$ — простой множитель многочлена $h(y_1, y_2)$, то применяем теорему 4 и получаем ветвь вида (13)

$$z_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z_1) z_3^k, \tag{16}$$

где $b_k(z_1)$ суть рациональные функции.

Пример 6 (продолжение примера 2). В многочлене $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$ сделаем подстановку

$$x_1 = \frac{3t}{1+t^3} + 3z, \quad x_2 = \frac{3t^2}{1+t^3}. \quad (17)$$

После умножения на общий знаменатель получим многочлен

$$\tilde{f}(t, z) = (1+t^3)^2 z^3 + 3z^2 t(1+t^3) + zt^2(2-t^3),$$

у которого прямая $z = 0$ является корнем. На этой прямой

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = t^2(2-t^3) \neq 0.$$

Эта производная обращается в ноль при $t_0 = 0$ (что соответствует двойной точке $x_1 = x_2 = 0$, ей же соответствует $t = \infty$) и при $t_1 = \sqrt[3]{2}$. В этой последней точке $\partial f / \partial x_1 = 0$ на $f = 0$. Точку t_1 можно убрать, если вместо (17) сделать замену с другим набором чисел β_1, β_2 в (16). Но тогда получится другая точка $t_2 \neq 0, \infty$, где $\partial \tilde{f} / \partial z = 0$ при $z = 0$. \square

Если $\tilde{h}(y_1, y_2)$ — кратный множитель в $h(y_1, y_2)$, то после замены (16) надо для полученного многочлена снова строить многогранник Ньютона и т. д. Аналогично, для каждой из особых точек многочлена $h(y_1, y_2)$: надо сдвигать её в начало координат по y_1, y_2 и строить многогранник Ньютона. Примеры таких вычислений см. в [17].

1) Случай $g = 1$. Сначала бирациональной заменой $y_1, y_2 \leftrightarrow z_1, z_2$ приводим многочлен $\tilde{h}(y_1, y_2)$ к нормальной форме Вейерштрасса $H(z_1, z_2)$. Затем, используя функцию Вейерштрасса $\wp(t)$ и ее производную $\wp'(t)$, делаем подстановку

$$z_1 = \wp(t) + \beta_1 u, \quad z_2 = \wp'(t) + \beta_2 u$$

с $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ и получаем такой многочлен $\tilde{g}(\wp(t), \wp'(t), u)$, что $\tilde{g}(\wp(t), \wp'(t), 0) = 0$ и $\partial \tilde{g} / \partial u \neq 0$ на $u = 0$.

Поэтому делаем эти замены в полном многочлене $g(Y)$ и получаем многочлен $G(\wp(t), \wp'(t), u, z_3)$, где $G = 0$, $\partial G / \partial u \neq 0$ при $u = z_3 = 0$. Если \tilde{h} — простой множитель многочлена h , то применима теорема 4. При этом получаем разложение (16) для поверхности, коэффициенты которого b_k являются рациональными функциями от $\wp(t)$ и $\wp'(t)$.

Если \tilde{h} — кратный множитель в h , то строим многоугольник Ньютона по q_2 и q_3 .

Особые точки многочлена $h(Y)$ выделяются и исследуются отдельно через многогранники Ньютона.

2) Случай гиперэллиптический с $g > 1$. Этот случай исследуется аналогично предыдущему, если найдена униформизация $y_1 = \varphi(t)$, $y_2 = \psi(t)$. То же самое справедливо и в любых случаях с $g > 1$. Получается разложение по целым степеням локальной переменной, коэффициенты которого являются рациональными функциями от $\varphi(t)$, $\psi(t)$.

Замечание 2. Анализ поверхности \mathcal{F} вблизи кривой \mathcal{P} , состоящей из особых точек, заключается в следующем. Кривая \mathcal{P} переводится в координатную ось y_1 . Затем полученный многочлен рассматривается как многочлен от y_2, y_3 , коэффициенты которого зависят от параметра y_1 . Для него строится многоугольник Ньютона по y_2, y_3 . Для почти всех значений y_1 этот многоугольник вблизи $y_2 = y_3 = 0$ фиксирован, но в некоторых точках y_1^0 он иной. Эти точки разбивают ось y_1 на отрезки. В каждом отрезке получают свои разложения. Окрестности точек $y_1 = y_1^0$, $y_2 = y_3 = 0$ исследуются отдельно.

Имплементация имеется только для многогранника Ньютона и степенных преобразований [17].

Замечание 3. Если для кривой $\mathcal{F} : f(x_1, x_2) = 0$ не удалось найти параметризацию, то можно найти несколько более простых приближенных кривых $\check{\mathcal{F}}_l : \check{f}_l(x_1, x_2) = 0$, $l = 1, \dots, m$, которые приближают исходную кривую \mathcal{F} в своем множестве \mathcal{W}_l пространства \mathbb{R}^2 или \mathbb{C}^2 .

Может случиться, что кривая $\check{\mathcal{F}}_l$ параметризуема: $x_1 = \check{\varphi}_l(t)$, $x_2 = \check{\psi}_l(t)$. Эту параметризацию можно уточнить. Пусть $g(t, \varepsilon) = f(\varphi_l(t) + \beta_1\varepsilon, \psi_l(t) + \beta_2\varepsilon)$. Находим ε по методу Ньютона: из уравнения $f(\varphi_l(t), \psi_l(t)) + \varepsilon_1 \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(\varphi_l, \psi_l) = 0$ и т. д. При этом все последовательные добавки $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ являются рациональными функциями от $\varphi_l(t)$ и $\psi_l(t)$.

Находить эти кривые $\check{\mathcal{F}}_l$ можно так. Пусть

$$f(X) = \sum a_Q X^Q,$$

где $X = (x_1, x_2)$. Каждому слагаемому $a_Q X^Q$ ставится в соответствие точка $\check{Q} = (Q, \ln |a_Q|)$. Их совокупность образует *сверхноситель* $\check{\mathbf{S}} \subset \mathbb{R}^3$. Его выпуклая оболочка \mathbf{H} — это *многогранник Адамара*. Каждой грани $\check{\Gamma}_l^{(2)}$ верхней части его границы $\partial\mathbf{H}$ соответствует укороченный многочлен

$$\check{f}_l^{(2)}(X) = \sum a_Q X^Q \text{ по } Q \in \check{\Gamma}_l^{(2)} \cap \check{\mathbf{S}}.$$

Для нормальной формы суперэллиптической кривой $x_2^m = R(x_1)$ множества \mathcal{W}_l ограничены только значениями x_1 , а значения x_2 там произвольны. Точность приближения $\check{\mathcal{F}}_l$ к \mathcal{F} можно оценить по точности приближения корней уравнения $\check{R}_l(x_1) = 0$ к корням уравнения $R(x_1) = 0$.

Пример 7 (продолжение примера 4). Пусть кривая $\mathcal{F} : f \stackrel{\text{def}}{=} -y^2 + ax + bx^3 + cx^5 = 0$, где постоянные $a, b, c \neq 0$. Её род $g = 2$.

Если $|ac| < |b|^2$, то имеем два приближенных многочлена $\check{f}_1 = -y^2 + ax + bx^3$ и $\check{f}_2 = -y^2 + bx^3 + cx^5$. Они приближают многочлен f в $\mathcal{W}_1 = \{x : \ln|x| < \gamma, y - \text{любое}\}$ и $\mathcal{W}_2 = \{x : \ln|x| > \gamma, y - \text{любое}\}$ соответственно, где $\gamma = (\ln|a| - \ln|c|)/4$. Их кривые $\check{\mathcal{F}}_1$ и $\check{\mathcal{F}}_2$ имеют род 1, следовательно, параметризуются. См. рис. 3, прямая, проходящая через точки \check{Q}_1 и \check{Q}_5 показана пунктиром, её нормаль — это вектор $(\gamma, 1)$.

Если $|ac| > |b|^2$, то имеется один приближенный многочлен $\check{f}_3 = -y^2 + ax + cx^5$ для всех x, y . Его кривая $\check{\mathcal{F}}_3$ имеет род 2, но благодаря дополнительным симметриям она параметризуется [5, 6, 8]. См. рис. 4. \square

Замечание 4. Аналогичная техника применима и при $n = 4$, но там может потребоваться глобальная параметризация двумерного алгебраического многообразия, заданного одним многочленом от трёх переменных. Если такая глобальная параметризация не находится, то её можно заменить несколькими приближенными параметризациями, которые находятся с помощью четырёхмерного многогранника Адамара.

Замечание 5. Униформизация двумерных алгебраических поверхностей с помощью радикалов рассматривается в [20].

Благодарности

Автор благодарит А. Б. Батхина за большую помощь в подготовке этой работы.

Список литературы

- [1] Гурса Э. Курс математического анализа. — М.-Л.: ГТТИ, 1993. Т. 1, Ч. 2. = Goursat E. Course of Mathematical Analysis. — Dover Publ. Inc., New York. 1959.
- [2] Брюно А. Д. Локальный метод анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука. 1979. = Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1989.
- [3] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит. 1998. = Power Geometry in Algebraic and Differential Equations. Elsevier Science (North-Holland), Amsterdam, 2000.
- [4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: «Наука». 1967. Т. 3. = Bateman H. and Erdélyi A. Higher Transcendental Functions, V. 3. — McGraw-Hill, 1955.

- [5] Brezhnev Yu. V. On the uniformization of algebraic curves // Moscow Mathematical Journal. — 2008. — V. 8, No. 2. — Pp. 233–271.
- [6] Brezhnev Yu. V. On uniformization of Burnside’s curve $y^2 = x^5 - x$ // Journ. Math. Phys. — 2009. **50**:10.
- [7] Brezhnev Yu. V. The sixth Painlevé transcendent and uniformization of algebraic curves // J. Differential Equations. — 2016. — V. 260, no. 3. — Pp. 2507–2556. DOI: 10.1016/j.jde.2015.10.009
- [8] Belokolos E. D., Enolskii V. Z. Reduction of Abelian functions and completely integrable equations // J. Math. Sci. — 2001. — V. 106, No. 6. — Pp. 3395–3486 (Part I) and 2002. — V. 108, No. 3. — Pp. 295–374 (Part II).
- [9] Ônishi Y. Complex multiplication formulae for hyperelliptic curves of genus three // Tokyo Journal Mathematics. — 1998. — V. 21. — Pp. 381–431.
- [10] Аптекарев А. И., Туляков Д. Н., Ятцелев М. Л. О параметризации одной комплексной алгебраической кривой рода 2 // Матем. заметки. — 2015. — Т. 98:5. — С. 782–785. = Aptekarev A. I., Toulyakov D. N. and Yattselev M. L. On the parametrization of a certain algebraic curve of genus 2 // Math. Notes.— 2015.— Vol. 95, No. 5.— Pp. 843–846. DOI: 10.4213/mzm10799
- [11] Aptekarev A. I., Toulyakov D. N., Van Assche W. Hyperelliptic uniformization of algebraic curves of third order // J. Computational and Applied Mathematics. — 2015. — V. 284. — Pp. 38–49. DOI: 10.1016/j.cam.2014.11.048
- [12] Уокер Р. Алгебраические кривые. Пер. с англ. — М.: Книжный дом «ЛИБ-РОКОМ», 2009. = Walker R. J. Algebraic Curves.— Princeton, New Jersey, 1950.
- [13] Eilbeck J. C., Enolski V. Z., Matsutani S., Ônishi Y., Previato E. Abelian functions for trigonal curves of genus three // Int. Math. Res. Notices. — 2007. — V. 2007. Article ID rnm140. DOI: 10.1093/imrn/rnm140
- [14] Eilbeck J. C. Weierstrass functions for higher genus curves // <http://www.ma.hw.ac.uk/Weierstrass>
- [15] Bobenko A., Klein Ch. (editors) Computational Approach to Riemann Surfaces. — Berlin: Springer, LNM 2013, 2011.
- [16] Hadamard J. Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d’une fonction considerée par Riemann // Journal de mathematiques pures et appliques. — 1893. — T. 9, No. 2. — Pp. 171–215.

- [17] Брюно А. Д., Батхин А. Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Программирование. — 2012. — Т. 38, no. 2. — С. 12–30 = Resolution of algebraic singularity by algorithms of Power Geometry // Programming and Computer Software. — 2012. — V. 38, No. 2. — Pp. 57–72. DOI: 10.1134/S036176881202003X
- [18] Bruno A. D. Asymptotic solving essentially nonlinear problems // Mathematics and Statistics. — 2016. — Vol. 4, No. 1. — Pp. 27–39. DOI: 10.13189/ms.2016.040104
- [19] Sendra J. R., Sevilla D. Radical parametrizations of algebraic curves by adjoint curves // Journal of Symbolic Computation.— 2011.— Vol. 46.— Pp. 1030–1038. DOI: 10.1016/j.jsc.2011.05.005
- [20] Sendra J. R., Sevilla D. First step towards radical parametrization of algebraic surfaces // Computer Aided Geometric Design.— 2013.— Vol. 30. Pp. 374–388. DOI: 10.1016/j.cagd.2012.12.004
- [21] Harrison M. Explicit solution by radicals, gonial maps and plane models of algebraic curves of genus 5 or 6 // Journal of Symbolic Computation.— 2013.— Vol. 51.— Pp. 3–21. DOI: 10.1016/j.jsc.2012.03.004

Список рисунков

1	Носитель и многоугольник Ньютона листа Декарта (6).	6
2	Лист Декарта. Пунктиром показана асимптота.	7
3	Суперноситель и ломаная Адамара при $ ac < b ^2$ примера 4. . .	10
4	Суперноситель и ломаная Адамара при $ ac > b ^2$ примера 4. . .	10
5	Ломаная Адамара многочлена $f(x)$ примера 5.	11