



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 102 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С.,
Пеньков В.И.

Периодические движения
спутника с магнитным
управлением и маховиком
при повороте в плоскости
орбиты

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Пеньков В.И. Периодические движения спутника с магнитным управлением и маховиком при повороте в плоскости орбиты // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 102. 19 с. doi:[10.20948/prepr-2017-102](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-102)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-102>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

М.Ю. Овчинников, Д.С. Ролдугин, В.И. Пеньков

**Периодические движения спутника
с магнитным управлением и маховиком
при повороте в плоскости орбиты**

Москва — 2017

Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Пеньков В.И.

Периодические движения спутника с магнитным управлением и маховиком при повороте в плоскости орбиты

Рассматривается спутник, оснащенный магнитной системой ориентации и тангажным маховиком. Исследуется алгоритм ориентации спутника в плоскости орбиты при движении вблизи требуемой ориентации. Найдены амплитуды плоских и пространственных периодических движений, показывающие точность ориентации. Проведено исследование устойчивости, численное моделирование.

Ключевые слова: магнитная система ориентации, тангажный маховик, периодические решения

Mikhail Ovchinnikov, Dmitry Roldugin, Vladimir Penkov

Magnetically actuated dual-spin satellite periodical motion during the in-orbit attitude maneuvers

Attitude motion of a satellite equipped with a single flywheel and an active magnetic attitude control system is considered. Control system ensures necessary attitude in orbital plane. Periodic solutions amplitudes are found for planar and spatial motion. Stability and numerical analysis is carried out.

Key words: magnetic attitude control system, flywheel, dual spin, periodic motion

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-71-20117.

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи	3
2. Плоское движение на полярной орбите.....	5
Периодические решения при движении на полярной орбите	5
Устойчивость плоского периодического решения	9
3. Пространственное движение на приполярной орбите	11
4. Плоское движение на орбите с наклоном, близким к 45°	13
Заключение.....	18
Библиография.....	18

Введение

Рассматривается спутник, оснащенный тангажным маховиком (спутник с двойным вращением) и магнитными катушками. Тангажный маховик позволяет добиться устойчивой трехосной ориентации аппарата в орбитальных осях, так как при движении в гравитационном поле устойчиво положение, при котором ось маховика перпендикулярна плоскости орбиты [1,2]. Для обеспечения асимптотической устойчивости и поворота спутника в плоскости орбиты на произвольный угол применяется магнитная система ориентации. Данная работа продолжает [3,4], где были исследованы переходные процессы и, кратко, движение вблизи требуемой ориентации. Здесь рассматривается закон управления, обеспечивающий заданную ориентацию спутника в плоскости орбиты (поворот вокруг оси вращения маховика), исследуется движение аппарата как в плоскости орбиты, так и вне ее.

1. Постановка задачи

Рассматривается движение спутника – твердого тела вокруг центра масс по круговой околоземной орбите в дипольном магнитном поле. Спутник оснащен тангажным маховиком (маховик с постоянной скоростью вращения) и тремя взаимно перпендикулярными магнитными катушками в качестве исполнительных элементов. Текущая ориентация предполагается известной.

Используются две системы координат:

- орбитальная система $Ox_1x_2x_3$, где O – центр масс спутника, ось Ox_3 направлена по радиус-вектору, Ox_2 по нормали к плоскости орбиты, Ox_1 дополняет систему до правой (направлена вдоль вектора скорости поступательного движения спутника);

- связанная система $Ox_1x_2x_3$, ее оси совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

Ориентация спутника описывается с помощью самолетных углов α, β, γ (последовательность поворотов 2-3-1) и компонент угловой скорости. При проведении численного моделирования вместо углов ориентации используется кватернион. Матрица перехода от орбитальной системы к связанной имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Динамические уравнения движения спутника с тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ в связанных осях представлены в виде

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} = \mathbf{M}_{gp} + \mathbf{M}_{ynp}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{h} = (0, h, 0)$ – кинетический момент тангажного маховика, установленного вдоль второй связанной оси спутника, \mathbf{M}_{gp} и \mathbf{M}_{ynp} – гравитационный и управляющий магнитный моменты. Динамические уравнения дополняются кинематическими соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos \beta} (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma), \\ \frac{d\beta}{dt} &= \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \Omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Абсолютная угловая скорость аппарата $\boldsymbol{\omega}$ связана с относительной $\boldsymbol{\Omega}$ соотношением

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_{orb},$$

где $\boldsymbol{\omega}_{orb} = (0, \omega_0, 0)$ – угловая скорость вращения орбитальной системы координат. Для представления геомагнитного поля используется широко распространенная модель прямого диполя [5]. В этом случае вектор индукции в орбитальной системе координат имеет вид

$$\mathbf{B} = B_0 (\cos u \sin i, \cos i, -2 \sin u \sin i) = B_0 (B_1, B_2, B_3),$$

где i – наклонение орбиты спутника, u – аргумент широты.

В [3,4] были рассмотрены переходные процессы в движении спутника. Кратко рассматривалось движение около требуемого положения в режиме гравитационной ориентации и в случае поворота на произвольный угол в плоскости орбиты. В последнем случае был предложен алгоритм управления

$$\mathbf{M}_r = \left(0, k_r \varepsilon \sin(\alpha_d - \alpha), -k_r \varepsilon \sin(\alpha_d - \alpha) \frac{B_{2x}}{B_{3x}} \right), \quad (1.4)$$

где k_r – положительная безразмерная константа, $\varepsilon = kB_0^2 / C\omega_0$, B_{ix} означает i -ю компоненту поля в связанной системе. Система ориентации должна привести спутник в положение $\alpha = \alpha_d$. В [3,4] получена оценка точности ориентации в плоскости орбиты, проведено численное моделирование. Однако управление (1.4) подвержено вырождению, что заставляет вносить в контур управления дополнительные условия, чтобы обойти ситуации, когда B_{3x} близко к нулю. Рассмотрим аналогичное управление

$$\mathbf{M}_r = (0, k_r \varepsilon \sin(\alpha_d - \alpha) B_{3x}^2, -k_r \varepsilon \sin(\alpha_d - \alpha) B_{2x} B_{3x}). \quad (1.5)$$

Это управление реализуется первой катушкой. Используя третью катушку, можно получить управление

$$\mathbf{M}_r = (-k_r \varepsilon \sin(\alpha_d - \alpha) B_{1x} B_{2x}, k_r \varepsilon \sin(\alpha_d - \alpha) B_{1x}^2, 0),$$

которое отдельно рассматривать не будем.

Чтобы исследовать влияние управления (1.5) на динамику спутника, запишем линеаризованные уравнения движения после переходных процессов, когда $\beta, \gamma \sim 0$, $\Omega_i \sim 0$,

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} + (1 - \theta_A) \dot{\beta} + \theta_A \gamma &= -3\lambda_A (\beta \sin \alpha \cos \alpha + \gamma \cos^2 \alpha) + \varepsilon C / A \bar{M}_1, \\ \ddot{\alpha} &= 3\lambda_B \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon C / B \bar{M}_2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\ddot{\beta} + (\theta_C - 1) \dot{\gamma} + \theta_C \beta = -3\lambda_C (\gamma \sin \alpha \cos \alpha + \beta \sin^2 \alpha) + \varepsilon \bar{M}_3,$$

где $\lambda_A = \frac{B-C}{A}$, $\lambda_B = \frac{C-A}{B}$, $\lambda_C = \frac{B-A}{C}$, $h_A = \frac{h}{A\omega_0}$, $h_C = \frac{h}{C\omega_0}$, $\theta_A = h_A + \lambda_A$,

$\theta_C = h_C + \lambda_C$, \bar{M}_i – компоненты безразмерного управляющего момента, дифференцирование происходит по аргументу широты. Кроме управления (1.5) примем во внимание действие демпфирующего дипольного момента $\mathbf{m} = k(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B})$. Тогда линеаризованный механический демпфирующий момент задается как

$$\mathbf{M} = k\omega_0 B_0^2 \begin{pmatrix} \dot{\beta} B_{1x} B_{3x} - \dot{\gamma} (B_{2x}^2 + B_{3x}^2) + \dot{\alpha} B_{1x} B_{2x} \\ \dot{\gamma} B_{1x} B_{2x} - \dot{\alpha} (B_{1x}^2 + B_{3x}^2) + \dot{\beta} B_{2x} B_{3x} \\ \dot{\alpha} B_{2x} B_{3x} - \dot{\beta} (B_{2x}^2 + B_{1x}^2) + \dot{\gamma} B_{1x} B_{3x} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Размерный параметр k определяет величину управляющего магнитного момента, тогда как безразмерный параметр k_r определяет соотношение между величинами позиционной и демпфирующей компонент управления.

2. Плоское движение на полярной орбите

Периодические решения при движении на полярной орбите

При движении спутника на полярной орбите появляется возможность отделить вращение в плоскости орбиты (угол α) от движения вне плоскости (β, γ). Уравнения движения вне плоскости допускают решение $\beta = \gamma = 0$. Уравнение движения в плоскости имеет вид

$$\ddot{\alpha} = 3\lambda_B \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon C / B \left[k_r \sin(\alpha_d - \alpha) (\cos u \sin \alpha - 2 \sin u \cos \alpha)^2 - (1 + 3 \sin^2 u) \dot{\alpha} \right]. \quad (2.1)$$

Влияние гравитационного момента заключается в смещении положения равновесия в сторону $\alpha = 0$ (для определенности положим, что $B > C$). Периодическая зависимость вектора геомагнитной индукции от аргумента широты приводит к периодическим колебаниям около этого нового положения равновесия.

Определим сначала примерное смещение спутника в плоскости орбиты. Будем считать, что гравитационный и управляющий магнитный моменты малы ($\lambda_B \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$). Предположение малого управляющего момента вполне естественно, так как магнитная система ориентации обычно комплектуется слабыми катушками. Предположение малого гравитационного момента может показаться искусственным. Однако гравитационный момент не должен превалировать над управляющим, иначе нет смысла говорить об управлении поворотом в плоскости орбиты: движение будет определяться в первую очередь гравитационным моментом. Усредним (2.1) по аргументу широты,

$$\ddot{\alpha} = t\mu \sin \alpha \cos \alpha + \mu k_r \sin(\alpha_d - \alpha) \left(\frac{1}{2} \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \right) - 5/2 \mu \dot{\alpha}, \quad (2.2)$$

где $\mu = \varepsilon C/B \ll 1$ – малый параметр, параметр $t = \lambda/\mu = 3\lambda_B/\mu = O(1)$ отражает соотношение между величинами гравитационного и магнитного моментов. Введем новую переменную $\rho = \alpha - \alpha_d$, характеризующую отклонение спутника от требуемого положения. Разложим тригонометрические функции в (2.2) в ряд, сохраняя вторую степень по ρ (вообще говоря, угол ρ не является малым, если t велико). Для определения положения равновесия (2.2) получаем уравнение

$$c_2 \rho^2 + c_1 \rho + c_0 = 0,$$

где

$$c_2 = \mu \sin \alpha_d \cos \alpha_d (3k_r - 2m),$$

$$c_1 = t\mu (\cos^2 \alpha_d - \sin^2 \alpha_d) - k_r \mu \left(\frac{1}{2} \sin^2 \alpha_d + 2 \cos^2 \alpha_d \right),$$

$$c_0 = t\mu \sin \alpha_d \cos \alpha_d.$$

Для выбранной динамической конфигурации спутника ($B > C$) положение равновесия определяется выражением

$$\rho_0 = \left(-c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_0 c_2} \right) / 2c_2. \quad (2.3)$$

Заметим, что $c_2 \neq 0$ при реалистичных параметрах спутника. Для спутника с параметрами $A = 1.5$, $B = 1.7$, $C = 1.3$ кг·м²/с, $k = 5/3 \cdot 10^6$ Н·м·с/Тл², $k_r = 3$, на орбите высотой 1000 км получаем значения характерных величин магнитного управляющего момента $\mu \approx 0.37$ и гравитационного момента $\lambda = 3\lambda_B \approx -0.35$.

Пусть требуемое положение спутника в плоскости орбиты $\alpha_d = 40^\circ$. Тогда новое положение равновесия $\alpha' = \alpha_d + \rho_0 \approx 34.5^\circ$. Несмотря на то, что характерные величины управляющего и возмущающего моментов близки, отклонение от требуемого положения ρ невелико. Линеаризуем уравнение (2.1) около положения α' , положив $\alpha = \alpha' + x$,

$$\ddot{x} = \mu \left[m(b^2 - a^2) - dk_r (a \cos u - 2b \sin u)^2 - 2ck_r (a \cos u - 2b \sin u)(b \cos u + 2a \sin u) \right] x + \\ + \mu \left[mab - ck_r (a \cos u - 2b \sin u)^2 \right] - \mu(1 + 3\sin^2 u) \dot{x},$$

где $a = \sin \alpha'$, $b = \cos \alpha'$, $c = \sin \rho_0$, $d = \cos \rho_0$. Переходя к двойному аргументу широты, это уравнение приведем к виду

$$\ddot{x} = \mu \left[f_0(u) + f_1(u)x + f_2(u)\dot{x} \right],$$

где

$$f_i(u) = a_i + b_i \cos 2u + c_i \sin 2u,$$

$$a_1 = m(b^2 - a^2) - dk_r(2b^2 + 1/2a^2) + 3ck_r ab, \quad a_0 = mab - ck_r(2b^2 + 1/2a^2), \quad a_2 = -5/2,$$

$$b_1 = dk_r(2b^2 - 1/2a^2) - 5ck_r ab, \quad b_0 = ck_r(2b^2 - 1/2a^2), \quad b_2 = 3/2,$$

$$c_1 = 2dk_r ab + 2ck_r(b^2 - a^2), \quad c_0 = 2abck_r, \quad c_2 = 0.$$

Наконец, представим уравнения в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(u)\mathbf{y} + \mathbf{g}(u), \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{y} = (x, \dot{x}),$$

$$\mathbf{A}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu f_1(u) & \mu f_2(u) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}(u) = (0, \mu f_0(u)).$$

Будем численно искать амплитуды π -периодических решений (2.4) в зависимости от величин управляющего магнитного и возмущающего гравитационного моментов.

На рис. 1 и 2 представлен результат поиска амплитуд периодических решений – минимальное и максимальное значения угла $\alpha_0 = \alpha_d + \rho_0 + x$. Для каждой пары значений λ , μ согласно (2.3) вычисляется смещение ρ_0 и ищется периодическое решение уравнения (2.4). Другие параметры спутника и орбиты сохранены.

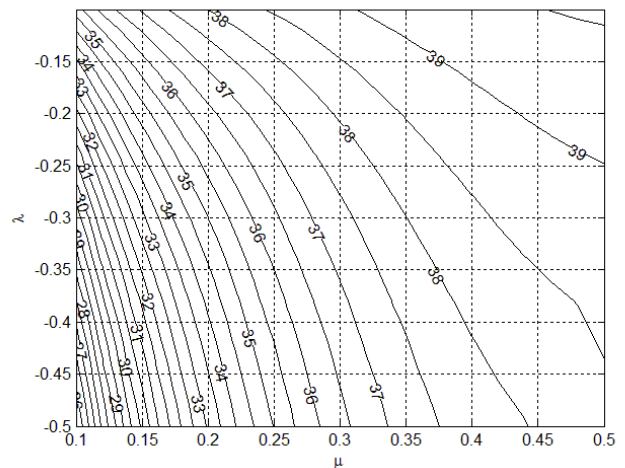
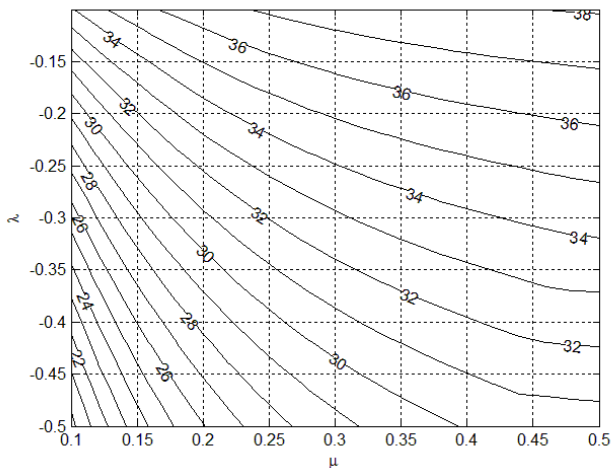


Рис. 1. Минимальное значение угла α Рис. 2. Максимальное значение угла α

Как и следовало ожидать, с ростом μ (величина магнитного управляющего момента) амплитуда увеличивается – спутник ближе к требуемому положению $\alpha_d = 40^\circ$. С ростом λ по абсолютной величине (величина гравитационного момента) амплитуда уменьшается – спутник ближе к устойчивому в гравитационном поле положению равновесия $\alpha = 0$. Для рассмотренного выше частного примера угол α находится в пределах 32.58° – 38° . Численное моделирование (рис. 3) уравнения (2.1) дает границы 32.6° – 38° .

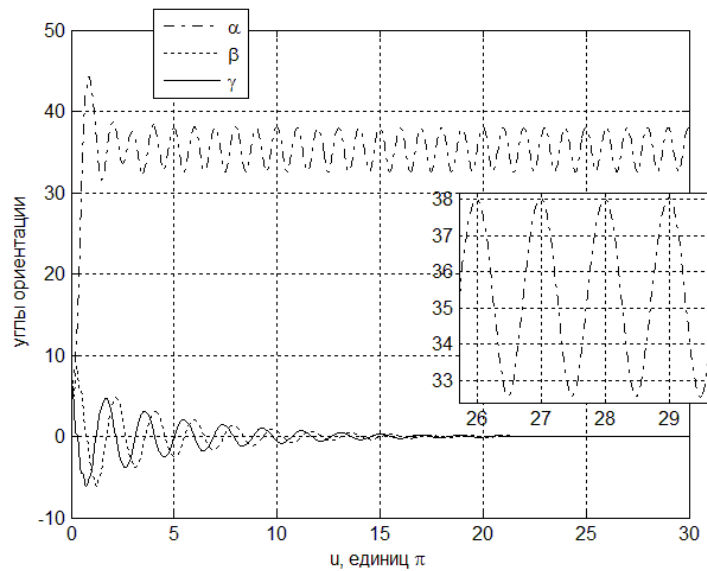


Рис. 3. Результат численного моделирования движения спутника

При поиске амплитуд периодических решений также находятся начальные данные этих решений. При численном моделировании эта информация не используется. Рис. 3 получен при начальных данных 0.1 по каждому углу и

угловой скорости. Со временем движение выходит на полученное выше периодическое решение для α и $\beta = \gamma = 0$. Поэтому можно ожидать, что это решение асимптотически устойчиво.

Устойчивость плоского периодического решения

Полученные плоские периодические решения на полярной орбите можно использовать [6] для построения движений спутника на приполярной орбите. При этом логично предположить, что появятся колебания спутника вне плоскости орбиты, пусть и с малой амплитудой. Чтобы использовать полученное в предыдущем разделе периодическое плоское движение $\alpha = \alpha_d + \rho_0 + x$, $\beta = \gamma = 0$ (и соответствующие величины скоростей $\omega_2, \omega_3, \omega_1$) в качестве порождающего для системы (1.6) необходимо показать его асимптотическую устойчивость. В этом случае найденное плоское периодическое решение окажется единственным, и ему будет соответствовать единственное периодическое решение системы (1.6) при малом изменении наклона.

Чтобы исследовать устойчивость плоского периодического решения, составим уравнения в вариациях для (1.6), соответствующие найденному в предыдущем разделе решению. Обозначая знаком « Δ » вариацию $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma)$, имеем

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(u) \Delta \mathbf{x}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{демпф}} + \mathbf{A}_{\text{поз}} + \mathbf{A}_{\text{кин}} + \mathbf{A}_{\text{грав гир}}.$$

Матрица, соответствующая демпфирующей части управления

$$\mathbf{A}_{\text{демп}} = \begin{pmatrix} -\varepsilon C/A f_1^2 & 0 & -\varepsilon C/A f_1 f_2 & 0 & -\varepsilon C/A \omega_{20} f_2^2 & -\varepsilon C/A \omega_{20} f_1 f_2 \\ 0 & -\mu(1+3\sin^2 u) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon f_1 f_2 & 0 & -\varepsilon f_2^2 & 0 & \varepsilon \omega_{20} f_1 f_2 & \varepsilon \omega_{20} f_1^2 \\ & & \mathbf{0}_{3 \times 6} & & & \end{pmatrix},$$

$$f_1 = 2 \cos \alpha_0 \sin u - \sin \alpha_0 \cos u,$$

$$f_2 = 2 \sin \alpha_0 \sin u + \cos \alpha_0 \cos u.$$

Матрица, соответствующая позиционной части управления

$$\mathbf{A}_{\text{поз}} = k_r \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mu g_1 & 0 & 0 \\ & 0 & -\varepsilon g_2 f_1 f_2 & -\varepsilon g_2 f_1^2 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \end{pmatrix},$$

$$g_1 = 2 \sin(\alpha_0 - \alpha_d) \left[\frac{1}{2} \cos(\alpha_0 + u) - \frac{3}{2} \cos(\alpha_0 - u) \right] \times \left[\frac{3}{2} \sin(\alpha_0 - u) - \frac{1}{2} \sin(\alpha_0 + u) \right] - \\ - \cos(\alpha_0 - \alpha_d) \left[\frac{3}{2} \sin(\alpha_0 - u) - \frac{1}{2} \sin(\alpha_0 + u) \right]^2,$$

$$g_2 = \cos \alpha_0 \sin \alpha_d - \cos \alpha_d \sin \alpha_0.$$

Матрица, соответствующая кинематическим уравнениям

$$\mathbf{A}_{кин} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица, соответствующая гироскопическому и гравитационному моментам

$$\mathbf{A}_{грав\ гиp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta_A - 1 & 0 & -3\lambda_A \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 & -3\lambda_A \cos^2 \alpha_0 - \theta_A \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \cos 2\alpha_0 & 0 & 0 \\ 1 - \theta_C & 0 & 0 & -3\lambda_C \cos 2\alpha_0 & -\theta_C - 3\lambda_C \sin^2 \alpha_0 & -3\lambda_C \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{pmatrix}.$$

Для исследования устойчивости проводился численный поиск матрицы монодромии уравнения (2.5) с параметрами, использованными при получении рис. 1 и 2 (включая перебор значений λ и μ). Максимальные значения характеристических показателей матрицы монодромии представлены на рис. 4.

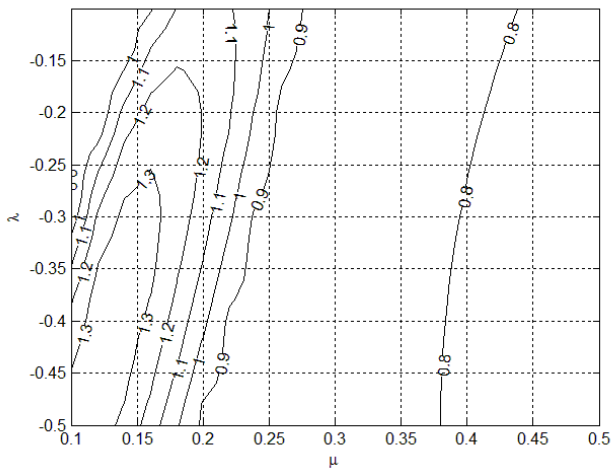


Рис. 4. Устойчивость плоских периодических решений

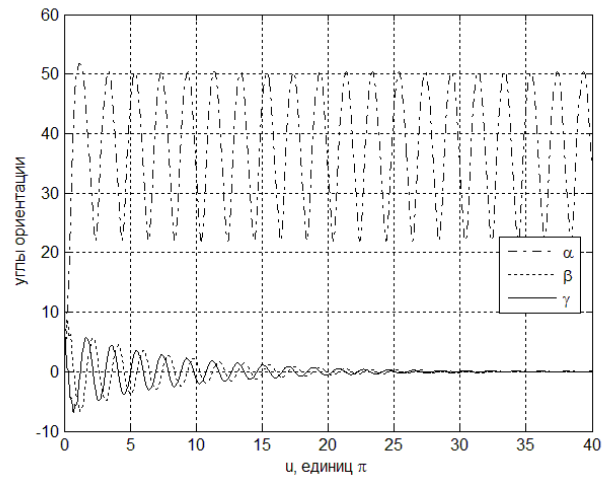


Рис. 5. Возрастание амплитуды колебаний

Из рис. 4 видно, что при малом управляющем моменте полученное плоское решение оказывается неустойчивым. Гравитационный момент вносит слишком большое возмущение. При этом, как и следовало ожидать, при малом гравитационном моменте снова наблюдается устойчивость. Численное

моделирование уравнения (2.1) показывает существование периодического решения и в области неустойчивости, но с большой амплитудой (колебания в пределах до 60°). В приближенных уравнениях (2.4), полученных в предположении небольшой амплитуды колебаний, этот результат переходит в неустойчивость. Также заметим, что колебания остаются плоскими (уравнение (2.1) верно в любом случае для полярной орбиты). Таким образом, качественное изменение решения имеет место лишь для уравнений (2.4), тогда как для исходных уравнений (2.1) наблюдается лишь количественное изменение. С учетом этого замечания можно несколько расширить область применимости результата, приведенного на рис. 1 и 2. Проведенное численное моделирование показывает, что его можно использовать при характеристических показателях примерно до 1.1. Один пример колебаний с большой, но еще приемлемой амплитудой колебаний, приведен на рис. 5. Пример получен при $\mu \approx 0.22$ и $\lambda \approx -0.176$, что соответствует $A=1.4 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, характеристический показатель чуть больше, чем 1.1.

3. Пространственное движение на приполярной орбите

Рассмотрим движение на орбите с наклоном, мало отличающимся от 90° . Решение уравнений (1.6) представим в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x}_1,$$

где $\delta = \pi/2 - i$ – малый параметр, \mathbf{x}_0 – порождающее решение, полученное в предыдущем разделе. Уравнение, определяющее первое приближение \mathbf{x}_1 , имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}(u)\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(u).$$

Матрица \mathbf{A} получена в предыдущем разделе. Вектор \mathbf{g} суть

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \varepsilon C/A\omega_{20}f_2 \\ 0 \\ -\varepsilon\omega_{20}f_1 + \varepsilon k_r g_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения, определяющие движение в плоскости орбиты (переменные $\alpha_{(1)}, \omega_{2(1)}$), отделяются и имеют нулевое периодическое решение. В первом приближении движение в плоскости орбиты не меняется. Колебания вне плоскости (переменные $\beta_{(1)}, \gamma_{(1)}, \omega_{3(1)}, \omega_{1(1)}$) в силу вида функции \mathbf{g} оказываются 2π -периодическими. На рис. 6 представлен результат поиска таких периодических решений – амплитуды отклонения оси установки тангажного маховика от плоскости орбиты наклоном 80° . На рис. 7 представлена

начальная фаза φ_β колебаний угла β в предположении, что $\beta_{(1)} = A_\beta \sin(u + \varphi_\beta)$. При этом нужно отметить, что всегда $\varphi_\gamma - \varphi_\beta \approx \pi/2$, и можно считать, что $\varphi_\beta \approx -\pi/4$. Рис. 6 и 7 построены для величин управляющего момента $\mu \geq 0.2$, соответствующих устойчивому (за исключением небольшой области, в которой, впрочем, плоское решение все еще достаточно точно) плоскому решению на полярной орбите.

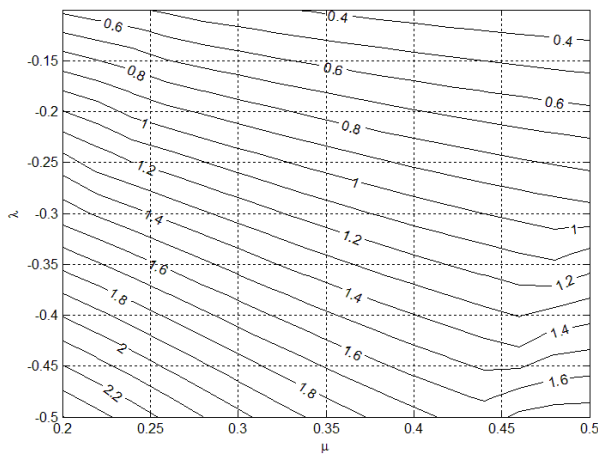


Рис. 6. Амплитуда отклонения оси маховика от нормали

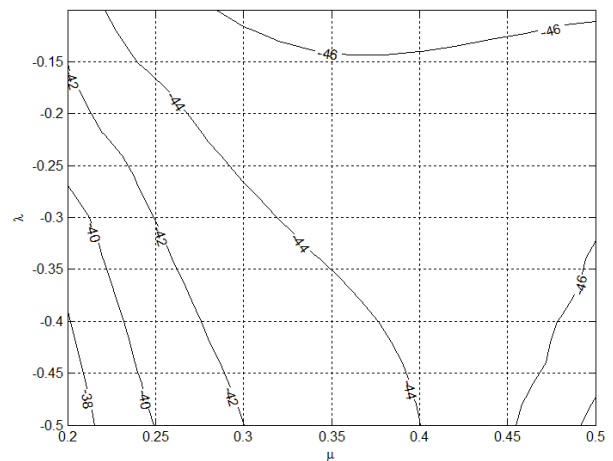


Рис. 7. Начальная фаза колебаний β

Рост по абсолютной величине λ означает увеличение момента инерции A (границы изменения 1.41-1.58 кг·м², другие два момента инерции не изменяются), что в свою очередь влечет уменьшение параметра λ_c . Таким образом, действие восстанавливающего гравитационного момента вне плоскости орбиты уменьшается, и отклонение оси установки маховика от нормали увеличивается. С ростом управляющего магнитного момента отклонение уменьшается в силу действия демпфирующей части момента совместно с тангажным маховиком (величина кинетического момента маховика приводит к превалированию его действия над действием паразитной части восстанавливающего магнитного момента). Интересно отметить, что при большой величине магнитного и гравитационного моментов наблюдается обратная зависимость. Это связано с тем, что плоское решение, полученное в предыдущем разделе, оказывается недостаточно точным. Для рассмотренного выше частного примера ($A=1.5$ кг·м²) на орбите наклонением 80° получаем амплитуды $\delta\beta_{(1)}=1.51^\circ$, $\delta\gamma_{(1)}=1.31^\circ$ и отклонение оси установки маховика от

нормали к плоскости орбиты до 1.29° . Численное моделирование (рис. 8) дает отклонение оси на угол до 1.26° .

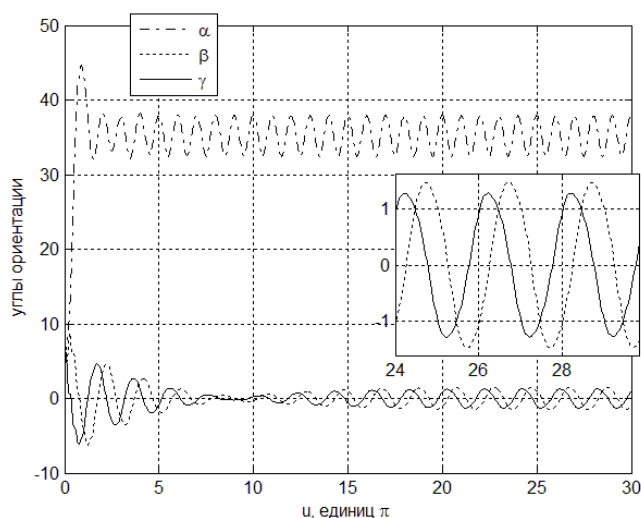


Рис. 8. Результат численного моделирования

Численный пример получен с начальными данными 0.1. Моделирование исходных нелинейных уравнений движения (1.2)-(1.3) показывает, что результатом, представленным на рис. 6, можно пользоваться для орбит с произвольным наклоном, кроме приэкваториальных. Рис. 6 получен для орбиты наклоном 80° ($\delta=10^\circ$). Для орбиты наклоном 40° ($\delta=50^\circ$) отклонение оси установки маховика от нормали составляет около 7.5° – примерно в 6 раз больше (при сравнении результатов численных расчетов). Фактически, наблюдается линейная зависимость точности ориентации оси маховика от наклона орбиты: меняется δ , тогда как решение x_1 , полученное в этом разделе, примерно сохраняется. Ошибка в примерном определении амплитуды колебаний увеличивается.

4. Плоское движение на орбите с наклоном, близким к 45°

Такая закономерность обусловлена наличием тангажного маховика и демпфирующей частью управления и верна лишь для движения вне плоскости орбиты. Движение в плоскости, обеспечиваемое управлением (1.5), сохраняется лишь для орбит с высоким наклоном (примерно до 50°). При малом наклоне в установившемся режиме, когда ось установки маховика примерно совпадает с нормалью к плоскости орбиты, первая и третья компоненты вектора геомагнитной индукции малы. Управление в плоскости орбиты мало по сравнению с гравитационным. Однако оказывается, что ожидаемое равномерное ухудшение точности ориентации на орбитах с высоким

наклонением дополняется резким ухудшением на орбитах наклонением около 45-50°. Моделирование показывает резкое увеличение амплитуды периодических колебаний. Найдем примерное наклонение, при котором происходит этот скачок амплитуды.

Рассмотрим движение спутника на орбите с наклонением, близким к 45°, $i = \pi/4 + \delta$. Здесь δ – новый малый параметр. Тогда выражение для вектора геомагнитной индукции в орбитальной системе принимает вид

$$\mathbf{B} = B_0/\sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos u \\ 1 \\ -2 \sin u \end{pmatrix} + \delta B_0/\sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos u \\ -1 \\ -2 \sin u \end{pmatrix}.$$

Позиционная часть управляющего момента в линейном приближении уменьшается примерно в 2 раза в силу квадратичной зависимости от компонент вектора индукции. Существенно меняется демпфирующая часть, при этом появляется зависимость движения в плоскости от движения вне плоскости. Чтобы упростить исследование, отделив движение в плоскости, воспользуемся тем фактом, что движение вне плоскости представляет собой периодические колебания с небольшой амплитудой. Будем считать, что

$$\beta = Am \sin(u - \pi/4), \quad \gamma = Am \sin(u + \pi/4). \quad (4.1)$$

Здесь для упрощения дальнейших вычислений амплитуду Am колебания углов β и γ считаем одинаковой. Эту амплитуду можно оценить по приведенному в предыдущем разделе примеру. Увеличение полученной примерно амплитуды пропорционально увеличению наклонения. В результате амплитуды колебаний углов на орбите наклонением 45° составляют $A_\beta \approx 6.8^\circ$, $A_\gamma \approx 5.9^\circ$, из них определено среднее значение Am . Фазы были получены в предыдущем разделе и составляют $\varphi_\beta \approx -44^\circ$, $\varphi_\gamma \approx 49^\circ$, однако в (4.1) они заменены на упрощающие дальнейшие выкладки $\mp 45^\circ$. После учета этих предположений получаем следующее уравнение движения в плоскости орбиты,

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = & m \sin \alpha \cos \alpha + \mu k_r \sin(\alpha_d - \alpha) \left[\frac{(1 + 2\delta)(\cos u \sin \alpha - 2 \sin u \cos \alpha)^2}{\dots} + \right. \\ & \left. + 2Am \sin(u + \pi/4)(2 \sin u \cos \alpha - \cos u \sin \alpha) \right] - \mu(1 + 3 \sin^2 u) \dot{\alpha} - \\ & - 2\mu Am \dot{\alpha} \left[\delta(1 + 3 \sin^2 u) + \sin(u + \pi/4)(2 \cos \alpha \sin u - \sin \alpha \cos u) + \right. \\ & \left. + \sin(u - \pi/4)(2 \sin \alpha \sin u + \cos \alpha \cos u) \right] + \\ & + \mu Am \left[\cos(u + \pi/4)(2 \sin \alpha \sin u + \cos \alpha \cos u) - \right. \\ & \left. \cos(u - \pi/4)(2 \cos \alpha \sin u - \sin \alpha \cos u) \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подчеркнутая часть аналогична (2.1). Дальнейшее исследование проведем так же, как в разделе 2. Усредним (4.2) в предположении малых управляющего и гравитационного моментов и определим положение равновесия α' . При этом изменяются коэффициенты c_i , полученные во втором разделе,

$$\begin{aligned} c'_2 &= c_2 - 1/4 Am\mu(b+a)(\cos \pi/4 - 2\sin \pi/4) - 2Am\mu k_r (-\cos \pi/4 a - 1/2 \sin \pi/4 b), \\ c'_1 &= c_1 + 1/2 Am\mu(-a+b)(\cos \pi/4 - 2\sin \pi/4) - 2Am\mu k_r (\cos \pi/4 b - 1/2 \sin \pi/4 a), \\ c'_0 &= c_0 + 1/2 Am\mu(b+a)(\cos \pi/4 - 2\sin \pi/4). \end{aligned}$$

В выражениях для c_i , приведенных во втором разделе, следует заменить k_r на $k'_r = k_r(1+2\delta)$. Далее, линеаризуя уравнения движения, получаем

$$\ddot{x} + \varphi_2 \dot{x} + \varphi_1 x + \varphi_0 = 0, \quad (4.3)$$

$$\varphi_2 = -f_2 - f'_2, \quad \varphi_1 = -f_1 - f'_1, \quad \varphi_0 = -f_0 - f'_0,$$

$$\begin{aligned} f'_2 &= -2\delta(1+3\sin^2 u) - 2Am\sin(u+\pi/4)(-a\cos u + 2b\sin u) - \\ &\quad - 2Am\sin(u-\pi/4)(b\cos u + 2a\sin u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_1 &= Am\cos(u-\pi/4)(b\cos u + 2a\sin u) - Am\cos(u+\pi/4)(a\cos u - 2b\sin u) - \\ &\quad - 2Amk_r \sin(u+\pi/4) [c(-2a\sin u - b\cos u) + d(2b\sin u - a\cos u)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_0 &= -Am\cos(u-\pi/4)(-a\cos u + 2b\sin u) + Am\cos(u+\pi/4)(b\cos u + 2a\sin u) - \\ &\quad - 2Amk_r \sin(u+\pi/4)c(2b\sin u - a\cos u). \end{aligned}$$

Выражения для f_i приведены в разделе 2 (в них снова нужно положить $k'_r = k_r(1+2\delta)$). В линеаризованных уравнениях резкое возрастание амплитуды можно интерпретировать как возникновение неустойчивости.

На рис. 9 приведены характеристические показатели (4.3) в зависимости от наклона орбиты и амплитуды колебаний вне плоскости орбиты (эта амплитуда в основном определяется параметрами тангажного маховика, не влияющими на уравнение (4.3)). По рис. 9 видно, что устойчивость теряется при наклоне орбиты около $50-52^\circ$. При этом увеличение амплитуды колебаний вне плоскости отрицательно сказывается на устойчивости.

На рис. 10 и 11 представлен результат численного моделирования движения спутника с использованием уравнений (1.6) на орбитах наклоном 50° и 40° соответственно.

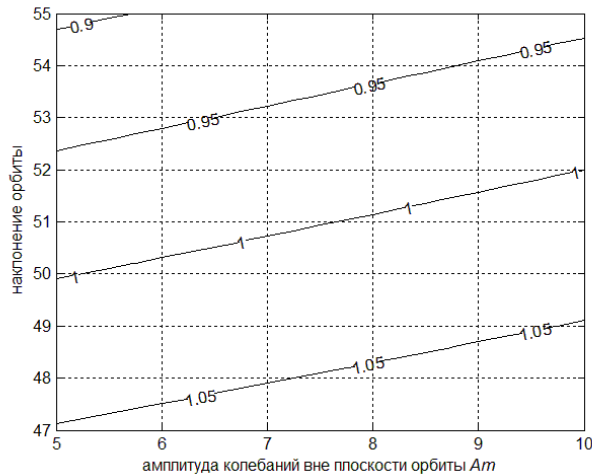


Рис. 9. Устойчивость решений на орбите наклонением около 45°

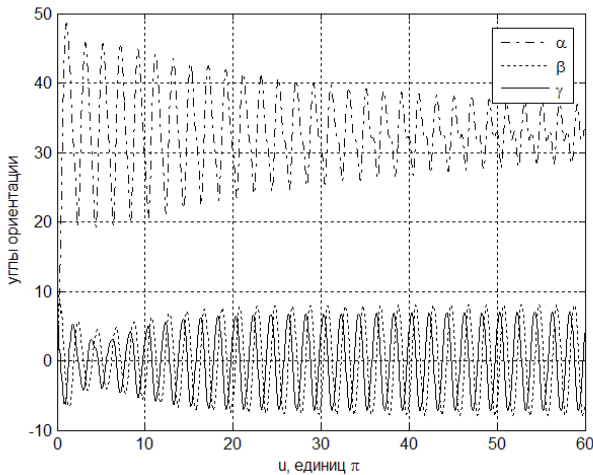


Рис. 10. Численное моделирование
линеаризованных уравнений,
наклонение 50°

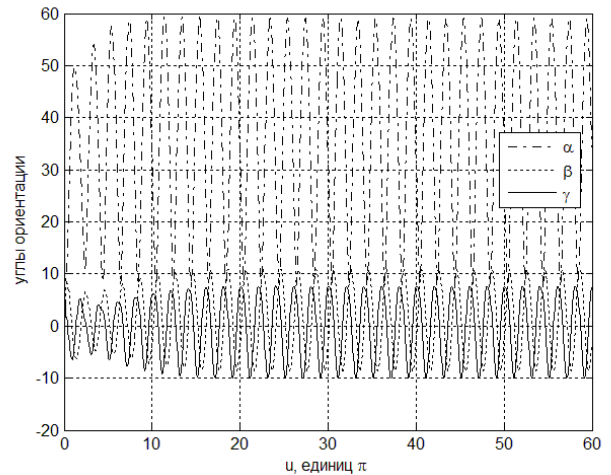


Рис. 11. Численное моделирование
линеаризованных уравнений,
наклонение 40°

На рис. 10 видно, что амплитуда колебаний все еще медленно уменьшается. Это соответствует пограничному случаю с наклонением 50° на рис. 9. Линейная система (4.3) имеет асимптотически устойчивое периодическое решение, однако степень устойчивости мала и в численном примере амплитуда уменьшается медленно. На рис. 11, заведомо соответствующем неустойчивости в (4.3) при наклонении 40° , амплитуда достигает примерно 25° . На рис. 12 и 13 представлен аналогичный результат, полученный при использовании исходных нелинейных уравнений (1.2)-(1.3). На этих рисунках γ_{ii} – углы между соответствующими осями орбитальной и связанной систем координат.

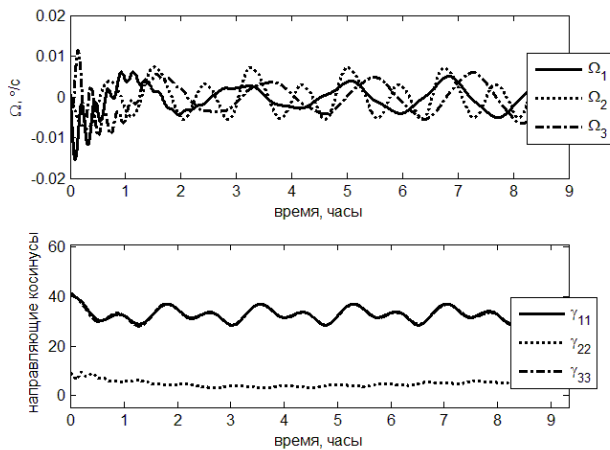


Рис. 12. Численное моделирование исходных уравнений, наклонение 50°

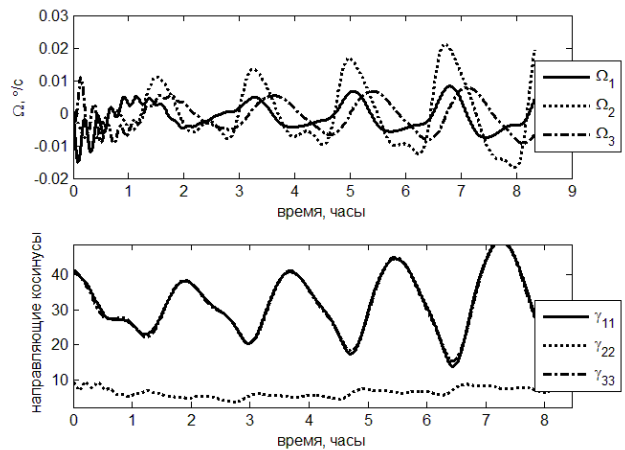


Рис. 13. Численное моделирование исходных уравнений, наклонение 40°

На рис. 13 периодический характер движения, который еще просматривается на рис. 12, нарушается и возрастает «амплитуда» колебаний. Для сравнения на рис. 14 приведен результат моделирования на орбите с заведомо высоким наклонением.

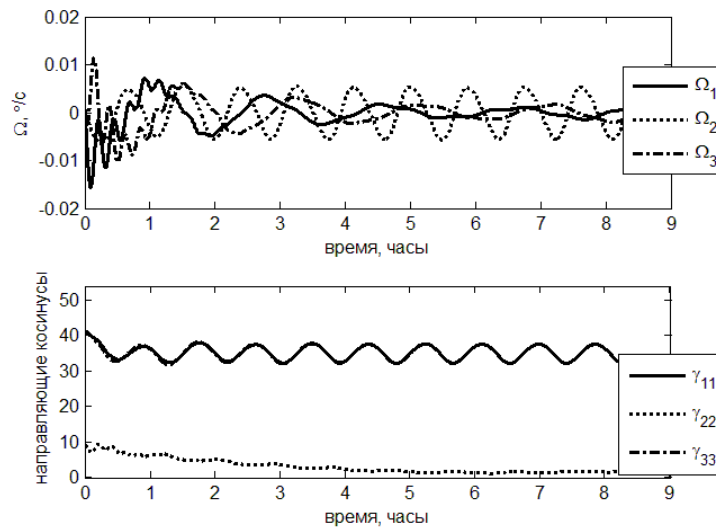


Рис. 14. Численное моделирование исходных уравнений, наклонение 70°

Численное моделирование уравнений (1.6) показывает падение амплитуды колебаний на приэкваториальной орбите. Это связано с тем, что вектор геомагнитной индукции оказывается практически перпендикулярным плоскости орбиты. В результате влияние управления (1.5) на движение в плоскости орбиты мало (в том смысле, что величина наклонения – малый параметр). Фактически, имеет место движение в гравитационном поле под действием слабого демпфирующего момента. Уменьшение амплитуды

колебаний имеет место в диапазоне наклонов 20-25°. При этом на орбитах наклоном около 20° действие управления (1.5) еще достаточно, чтобы заметно сместить спутник от положения устойчивого положения равновесия в гравитационном поле. Возникает узкий диапазон наклонов, в котором практическое использование управления возможно. Одновременно спутник еще (по сравнению с орбитами с еще меньшим наклоном) достаточно близок к требуемому положению в плоскости орбиты и амплитуда колебаний уже (по сравнению с орбитами наклоном до 45°) мала. Тем не менее, эффективность управления невелика (спутник ближе к гравитационному положению равновесия, чем к требуемому положению). Кроме того, моделирование исходных уравнений (1.2)-(1.3) показывает менее обнадеживающие результаты. Такой режим можно лишь рассматривать как аварийный в случае выхода из строя большей части маховиков спутника, движущегося на приэкваториальной орбите.

Заключение

Для спутника, оснащенного тангажным маховиком и активной магнитной системой ориентации, предложен алгоритм поворота спутника в плоскости орбиты. Рассмотрено движение вблизи требуемой ориентации. Найдены амплитуды периодических решений как для движения в плоскости орбиты, так и для пространственных движений на полярной и приполярной орбитах, проведено исследование устойчивости. Показано резкое возрастание амплитуды колебаний на орбитах наклоном около 45°. Приведены примеры численного моделирования.

Библиография

1. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Серия: Исследование космического пространства. Т.11. М: ВИНТИ, 1978. 221 с.
2. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Нутационные демпферы спутников с двойным вращением // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1977. V. 15, № 2. pp. 225–242.
3. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С. Движение спутника с двойным вращением в магнитном и гравитационном полях // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 22. 23 с.
4. Овчинников М.Ю. и др. Движение спутника, оснащенного тангажным маховиком и магнитными катушками, в гравитационном поле // *Космические исследования.* 2017. V. 55, № 3. с. 218–225.
5. Пичужкина А.В., Ролдугин Д.С. Использование моделей геомагнитного

поля в задачах ориентации искусственных спутников Земли // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 87. 30 с.

6. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 496 с.