



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Козлов А.Н., Коновалов В.С.

Модель неравновесного
процесса ионизации с
учетом поуровневой
кинетики и переноса
излучения в канале
плазменного ускорителя

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Козлов А.Н., Коновалов В.С. Модель неравновесного процесса ионизации с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения в канале плазменного ускорителя // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 103. 28 с. doi:[10.20948/prepr-2017-103](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-103)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-103>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

А.Н. Козлов, В.С. Коновалов

**Модель неравновесного процесса
ионизации с учетом поуровневой
кинетики и переноса излучения
в канале плазменного ускорителя**

Москва — 2017

Козлов А.Н., Коновалов В.С.

Модель неравновесного процесса ионизации с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения в канале плазменного ускорителя

Представлена новая модель для численного исследования течений ионизирующегося газа в канале квазистационарного плазменного ускорителя. В основу модели положены модифицированные МГД уравнения для среды, состоящей из атомов, электронов и ионов, с учетом электропроводности и теплопроводности многокомпонентной среды, а также система уравнений поуровневой кинетики и уравнение переноса излучения.

Ключевые слова: поуровневая кинетика, МГД уравнения, течения ионизирующегося газа, перенос излучения, плазменный ускоритель

Andrey Nikolaevich Kozlov, Venyamin Sergeevich Konovalov

Model of the nonequilibrium ionization process taking into account the level kinetics and radiation transport in the channel of plasma accelerator

New model for a numerical study of the ionizing gas flows in the channel of the quasi-steady plasma accelerator is presented. The model is based on the modified MHD equations for a medium consisting of atoms, electrons and ions, taking into account the electrical conductivity and thermal conductivity of a multicomponent medium, as well as the equations of level kinetics and the equation of radiation transport.

Key words: level kinetics, MHD equations, ionizing gas flows, radiation transport, plasma accelerator

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10278).

Оглавление

| | |
|--|----|
| Введение | 3 |
| Система уравнений поуровневой кинетики | 5 |
| Кинетика ионизации и рекомбинации в рамках МДП | 8 |
| МГД уравнения для многокомпонентной плазмы | 9 |
| Электропроводность и теплопроводность среды | 14 |
| Перенос излучения | 15 |
| Модель течения в квазиодномерном приближении | 18 |
| Расчет течения и сопоставление с МДП | 21 |
| Заключение..... | 24 |
| Библиографический список..... | 25 |

Введение

Простейший квазистационарный плазменный ускоритель (КСПУ), схематично представленный на рис. 1, состоит из двух коаксиальных электродов, подсоединенных к электрической цепи. При наличии разности потенциалов между электродами происходит пробой нейтрального газа и образуется фронт ионизации, отвечающий фазовому переходу от газообразного состояния материи к плазме. За фронтом ионизовавшаяся плазма ускоряется вдоль оси канала за счет силы Ампера $\mathbf{F} = \frac{1}{c}[\mathbf{j}\mathbf{H}]$, где \mathbf{j} – ток в плазме, протекающий от одного электрода к другому и имеющий преимущественно радиальное направление. В простейших системах процессы происходят при наличии азимутального магнитного поля H_φ , которое генерируется электрическим током, проходящим вдоль внутреннего электрода. Процесс ионизации и предварительного ускорения плазмы происходит, в частности, в первой ступени двухступенчатого КСПУ [1-11]. Плазменные ускорители являются многофункциональными системами, предназначенными для различных технологических приложений, термоядерных исследований, а также представляют интерес для разработки перспективных мощных электрореактивных плазменных двигателей.

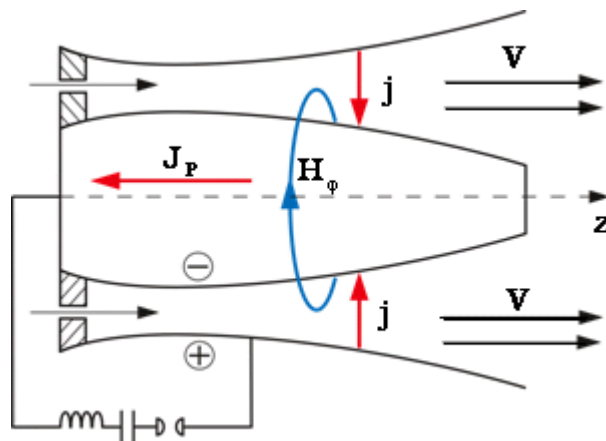


Рис. 1. Схема коаксиального плазменного ускорителя

Теоретическим и численным исследованиям динамики потоков ионизирующегося газа и плазмы в плазменных ускорителях посвящено большое количество публикаций (см., например, [1,12-29]). Предметом изучения для данных систем являются трансзвуковые потоки плазмы, в том числе при наличии дополнительного продольного магнитного поля [16-18], приэлектродные процессы, обусловленные эффектом Холла и предшествующие явлению кризиса тока [19, 20], компрессионные потоки [21, 22], перенос излучения [23-25], динамика примесей [26], а также процесс ионизации [27-29].

Изучение течений ионизирующегося газа проводилось с помощью моделей различного уровня сложности. Первоначально численные исследования течений ионизирующегося газа были выполнены на основе скачкообразной зависимости проводимости газа от температуры [13]. При этом проводимость менялась скачком от некоторой малой величины до значения, отвечающего спитцеровской проводимости при достижении газом определенной критической температуры. В дальнейшем была разработана и до сих пор используется физически более содержательная модель для трехкомпонентной среды, состоящей из атомов, электронов и ионов, основанная на предположении о локальном термодинамическом равновесии и соотношении Саха (см., например, [15, 24, 25]). Достаточно узкий фронт ионизации в соответствии с экспериментальными данными удалось получить с помощью численной модели [27-29], в которой модифицированная система МГД уравнений динамики трехкомпонентной среды дополнена уравнением кинетики ионизации и рекомбинации. Соответствующие коэффициенты ионизации и рекомбинации определяются в рамках модифицированного диффузионного приближении с учетом энергетических уровней водородоподобного атома.

Предлагаемая в данной работе модель течений ионизирующегося газа, включающая систему уравнений поуровневой кинетики и переноса излучения, является наиболее полноценным и сложным звеном в иерархии моделей процесса ионизации. Сложность модели обусловлена многообразием составляющих ее частей и связей между ними. Система МГД уравнений содержит диссипативные факторы, обусловленные электропроводностью и теплопроводностью, такой интегральный параметр излучения, как плотность потока энергии излучения, а также потери энергии на ионизацию. В уравнении переноса излучения для различных диапазонов частот фотонов коэффициенты поглощения и излучательная способность зависят как от параметров среды, ее плотности и температуры, так и от населенностей атомных уровней. В свою очередь система уравнений поуровневой кинетики, определяющая населенность уровней, включает вероятности различных столкновительных и радиационных процессов, которые также зависят от параметров среды и характеристик излучения. Все указанные системы необходимо решать совместно в рамках единой эволюционной задачи. Исследование проведено для водородной плазмы, наиболее часто используемой в экспериментах.

Следует отметить, что в канале плазменного ускорителя на образующемся фронте ионизации температура и скорость резко возрастают, а плотность и магнитное поле резко уменьшаются. Этим фронт ионизации принципиально отличается от традиционных ионизирующих ударных волн сжатия в магнитной газодинамике, а также фронтов рекомбинации и волн детонации [30-33].

Теоретические, численные и экспериментальные исследования процессов ионизации, переноса излучения и в целом плазмы связаны со многими актуальными научными направлениями, представленными большим количеством публикаций (см., например, [34-66]).

Система уравнений поуровневой кинетики

Ряд процессов, сопровождающих течение ионизирующегося газа в канале ускорителя, связан с трансформацией частиц, взаимодействующих с окружающими атомами, ионами, электронами и излучением. Переход частицы из одного энергетического состояния в другое происходит в результате прямых процессов ионизации и возбуждения электронных оболочек, а также соответствующих им обратных процессов рекомбинации и гашения. Трансформация частиц приводит к изменению их возбужденных состояний, определяемых энергетическим уровнем и соответствующей конфигурацией электронных оболочек. Изменение населенности уровня в любой точке пространства или концентрации частиц, находящихся в определенном энергетическом состоянии, описывается системой уравнений поуровневой кинетики (см., например, [50, 51])

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \text{div}(n_k \mathbf{V}) = \sum_{j \neq k} n_j w_{jk} - n_k \sum_{j \neq k} w_{kj}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (1)$$

где n_k – населенность k -го энергетического состояния, \mathbf{V} – скорость атомов, w_{jk} – вероятность перехода из j -го в k -е состояние, K – число конфигураций атома. Суммарная концентрация атомов равна $n_a = \sum_{k=1}^K n_k$. В дальнейшем правые части уравнений (1) будут обозначены через Γ_k для атомов в k -м энергетическом состоянии.

В кинетике заселенности атомных уровней вероятности переходов $w_{kj} = C_{kj} + R_{kj}$ в уравнениях (1) определяются скоростями процессов, которые обусловлены столкновениями в первую очередь с электронами C_{kj} и взаимодействием с излучением R_{kj} [50-52]. Приведем отдельные соотношения для вероятностей или скоростей процессов с размерностью $[w] = [C] = [R] = c^{-1}$.

В описании столкновительных процессов участвуют:

1) скорость возбуждения частицы электронным ударом ($A_k + e \rightarrow A_j + \tilde{e}$)

$$C_{kj}^{ex} = 1.31 \cdot 10^{-6} \cdot n_e \cdot f_{kj} \cdot \frac{e^{-E_{kj}/T}}{E_{kj} \sqrt{T}} \cdot \ln \left(1.017 + 0.462 \frac{T}{E_{kj}} \right),$$

2) скорость гашения возбуждения электронным ударом ($A_j + e \rightarrow A_k + \tilde{e}$)

$$C_{kj}^{dex} = 1.31 \cdot 10^{-6} \cdot n_e \cdot \frac{g_k}{g_j} \cdot \frac{f_{kj}}{E_{kj} \sqrt{T}} \cdot \ln \left(1.017 + 0.462 \frac{T}{E_{kj}} \right),$$

3) скорость ионизации атома электронным ударом ($A_k + e \rightarrow A^+ + \tilde{e} + \hat{e}$)

$$C_k^{ion} = 3.02 \cdot 10^{-6} \cdot n_e \cdot \frac{P_1(E_k/T)}{E_k \sqrt{T}},$$

4) скорость тройной рекомбинации ($A^+ + \tilde{e} + \hat{e} \rightarrow A_k + e$)

$$C_k^{rec} = 5.0 \cdot 10^{-28} \cdot n_e^2 \cdot \frac{g_k}{g_{ion}} \cdot \frac{P_1(E_k/T) \cdot e^{E_k/T}}{E_k \cdot T^2}.$$

В данных соотношениях температура и энергия выражены в эВ, g_k – статистический вес k -го состояния атома, $P_1(x) = \int_x^\infty t^{-1} e^{-t} dt$ – первая интегральная показательная функция, а f_{kj} – сила осциллятора для перехода $k \rightarrow j$. Силы осцилляторов f_{kj} для связанно-связанных переходов вычисляются с помощью известных квантово механических соотношений [50].

Скорости радиационных процессов включают:

1) скорость поглощения излучения ($A_k + h\nu_{kj} \rightarrow A_j$)

$$R_{kj}^{abs} = \frac{4\pi^2 e^2}{m_e c} f_{kj} \cdot \int_0^\infty c U_\nu \phi_{kj}(\nu) \frac{d\nu}{h\nu},$$

2) скорость эмиссии излучения ($A_j \rightarrow A_k + h\nu_{kj}$)

$$R_{jk}^{em} = \frac{4\pi^2 e^2}{m_e c} \cdot \frac{n_k^*}{n_j^*} \cdot f_{kj} \cdot \int_0^\infty \left(c U_\nu + \frac{2h\nu^3}{c^2} \right) \phi_{kj}(\nu) e^{-h\nu/k_B T} \frac{d\nu}{h\nu},$$

3) скорость ионизации частицы в k -м состоянии ($A_k + h\nu_k \rightarrow A^+ + e$)

$$R_k^{ion} = 4\pi \int_0^\infty \sigma_k^{PI}(\nu) \cdot c U_\nu \cdot \frac{d\nu}{h\nu},$$

4) скорость рекомбинации иона с испусканием фотона: $A^+ + e \rightarrow A_k + h\nu_k$

$$R_k^{rec} = 4\pi \cdot \frac{n_e n_k^*}{n_e^* n_i^*} \cdot \int_0^\infty \left(c U_\nu + \frac{2h\nu^3}{c^2} \right) \sigma_k^{PI}(\nu) e^{-h\nu/k_B T} \frac{d\nu}{h\nu}.$$

Здесь ν – спектральная частота излучения, $\phi_{kj}(\nu)$ – профиль спектральной линии, нормированный на единицу и имеющий размерность $[\phi_{kj}(\nu)] = \text{с}$, $\sigma_k^{PI}(\nu)$ – сечение фотоионизации из k -го состояния, размерность которого равна $[\sigma_k^{PI}(\nu)] = \text{см}^2$, cU_ν – спектральная плотность энергии излучения, выраженная в потоковых единицах и имеющая размерность $[cU_\nu] = \text{эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{Гц} \cdot \text{стер})$, n_k^* – равновесная населенность k -го уровня.

Профиль линии, учитывающий разные по природе механизмы уширения, определяется по формуле Фойгта:

$$\phi_{kj}(\nu) = \frac{\gamma_e}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s^2} ds}{(\nu - \nu_{kj} - s D)^2 + (\gamma_e)^2}. \quad (2)$$

где $D = \nu_{kj} V_a / c$ – ширина Доплера, V_a – характерная скорость атома, γ_e – суммарная ширина, обусловленная взаимодействием атома с окружающими его ионами, электронами и излучением. Профиль линии Фойгта имеет вид колоколообразной кривой, характерная ширина которой соответствует времени жизни состояния. Взаимодействие с электронами является существенным фактором для характерных концентраций $n \sim 10^{14} \div 10^{17} \text{ см}^{-3}$ и температуры $T \sim 1 \text{ эВ}$. В этом случае для вычисления величины γ_e можно ограничиться уширением электронным ударом, используя следующую формулу [50, 60]:

$$\gamma_e = \frac{32}{3} \frac{\hbar^2 n_e}{m_e^2 \langle V_e \rangle} \ln \left(\frac{R_D}{R_W} + 0.215 \right) I(k, j).$$

где $R_D = \sqrt{k_B T / (4 \pi e^2 n_e)}$ – радиус Дебая, $R_W = a_0 \sqrt{2/3} \sqrt{I(k, j)} e^2 / (\hbar \langle V_e \rangle)$ – радиус Вайскопфа, $I(k, j) = 0.5(k^4 + j^4)$, $\langle V_e \rangle$ – средняя скорость электронов, a_0 – радиус Бора. Эффективная методика вычисления профиля Фойгта изложена в [59].

Расчет сечения фотоионизации осуществляется в приближении Крамерса:

$$\sigma_k^{PI}(\nu) = \frac{38 \pi k e^2 a_0^2}{3\sqrt{3} \hbar c} \left(\frac{E_k}{h\nu} \right)^3, \quad (3)$$

где E_k – энергия ионизации, k – номер уровня, с которого происходит ионизация. Значение E_k для атома водорода определяется по формуле:

$$E_k = -Z^2 e^2 / (2 a_0 k^2).$$

Кинетика ионизации и рекомбинации в рамках МДП

Все познается в сравнении, и данная работа не является исключением. Полученные результаты необходимо будет сравнить с тем, что было получено с помощью другой модели. В иерархии моделей течений ионизирующегося газа отдельное место занимает ранее разработанная модель [27-29] для изучения процесса ионизации с учетом кинетики ионизации и рекомбинации на основе модифицированного диффузионного приближения (МДП) [51]. Данная модель является промежуточным звеном между рассматриваемой моделью, включающей уравнения поуровневой кинетики, и моделью, реализованной в рамках локального термодинамического равновесия (ЛТР).

В приближении ЛТР концентрации компонент плазмы, состоящей из электронов, ионов и атомов, связаны соотношением Саха:

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = K_1 = 2 \frac{\Sigma_i}{\Sigma_a} \left(\frac{2 \pi m_e T}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_1}{T}\right), \quad (4)$$

где E_1 – энергия связи основного состояния, равная энергии ионизации атома, Σ_i и Σ_a – статистические суммы иона и атома, величина K_1 – константа ионизационного равновесия. При условии квазинейтральности плазмы $n_i = n_e$ соотношение (4) позволяет определить состав плазмы и степень ионизации $\alpha = n_e / (n_i + n_a)$. При этом в основе приближения ЛТР лежит предположение о прямой ионизации из основного состояния и обратном процессе тройной рекомбинации. На самом деле, связанный электрон в атоме, прежде чем достигнуть континуума или, наоборот, основного состояния, может переходить с уровня на уровень по сложному пути. В общем случае концентрация частиц в k -м состоянии определяется с помощью уравнений поуровневой кинетики (1).

В рамках кинетики ионизации и рекомбинации, основанной на МДП, уравнения магнитной газодинамики дополняются уравнением, описывающим скорость рождения электронов с учетом различных процессов, представленных в правой части,

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \mathbf{V}) = n_a n_e \beta_{ion} - n_e^2 n_i \alpha_{rec} + \beta_{\omega} n_a - n_e n_i \alpha_{\omega}. \quad (5)$$

Здесь β_{ion} и α_{rec} – коэффициенты ионизации и рекомбинации.

В модифицированном диффузионном приближении диффузия связанного электрона рассматривается в энергетическом пространстве атома с учетом дискретности его уровней, а соответствующий коэффициент ступенчатой рекомбинации α_{cm} определяется с помощью известных подходов, разработанных в [51]. Итоговое соотношение для атомов водорода можно записать в следующем виде [27]:

$$\alpha_{cm} = \frac{h^3 e^4}{2\pi (m_e k_B T_e)^2 \Sigma_i E_1} \left[\sum_{k \geq 1} \frac{(2k+1) \exp(-E_{k+1}/k_B T_e)}{k^3 (k+1)^4 \Lambda_k} \right]^{-1},$$

где $E_k = E_1 / k^2$, $E_1 = 13.6$ эВ = $2.16 \cdot 10^{-11}$ эрг. Коэффициент ступенчатой ионизации $\beta_{cm} = K_1 \alpha_{cm}$ связан с величиной α_{cm} через константу ионизационного равновесия относительно основного состояния согласно (4).

Суммарные коэффициенты ионизации и рекомбинации включают прямой процесс ионизации из основного состояния при столкновении электронов с атомами и обратный процесс рекомбинации:

$$\beta_{ion} = \beta_{cm} + \beta_{np}, \quad \alpha_{rec} = \alpha_{cm} + \alpha_{np},$$

где $\alpha_{np} = (W_{e,1} + A_{e1})/n_e$, $\beta_{np} = W_{1,e}/n_e$, $W_{1,e}$ и $W_{e,1}$ – вероятности переходов, а коэффициент Эйнштейна A_{e1} определяет вероятность соответствующего спонтанного излучения. Основной вклад в процессы ионизации и рекомбинации вносят ступенчатые процессы.

Кроме того, можно учесть процессы, связанные с фотоионизацией и фоторекомбинацией (см., например, [43]). При использовании спектральной плотности равновесного излучения или функции Планка соответствующие коэффициенты вычисляются с помощью следующих соотношений:

$$\beta_{\omega} = \frac{8\pi I^2 k_B T}{c^2 h^3} \sigma_{\omega}^o \exp\left(-\frac{I}{k_B T}\right), \quad \alpha_{\omega} = \frac{\beta_{\omega} n_a}{n_e n_i},$$

где $\sigma_{\omega}^o = 7.9 \cdot 10^{-18}$ см² – эффективное сечение фотоионизации водорода.

МГД уравнения для многокомпонентной плазмы

В данной работе для изучения процесса ионизации в плотной среде и динамики потоков ионизирующегося газа используется модифицированная МГД модель с учетом поуровневой кинетики, переноса излучения, а также электропроводности и теплопроводности. Ограничимся исследованием водородной плазмы, для которой зарядовое состояние ионов $Z_i = 1$.

Рассмотрим уравнения переноса многокомпонентной среды [41], состоящей из ионов, электронов и атомов, находящихся в различных энергетических состояниях, а также уравнения Максвелла для электромагнитного поля. Учитывая, что характерные скорости потоков $V \ll c$, можно пренебречь током смещения $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ в уравнении $rot \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

Поскольку $m_e \ll m_i = m_a = m$, инерцией электронов $m_e \frac{d \mathbf{V}_e}{d t}$ также

пренебрегаем. Пусть n_k отвечает концентрации атомов или их населенности для k -го энергетического состояния, где $k = 1, \dots, K$. Тогда имеем систему:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \operatorname{div} n_k \mathbf{V}_k = \Gamma_k, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{V}_i = \Gamma_i, \quad (6б)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{V}_e = \Gamma_e, \quad (6в)$$

$$m n_k \frac{d \mathbf{V}_k}{d t} + \nabla P_k = \mathbf{R}_{ke} + \mathbf{R}_{ki}, \quad (7a)$$

$$m n_i \frac{d \mathbf{V}_i}{d t} + \nabla P_i = e n_i \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_i, \mathbf{H}] \right) + \sum_{k=1}^K \mathbf{R}_{ik} + \mathbf{R}_{ie}, \quad (7б)$$

$$\nabla P_e = -e n_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_e, \mathbf{H}] \right) + \sum_{k=1}^K \mathbf{R}_{ek} + \mathbf{R}_{ei}, \quad (7в)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} k_B n_k T_k \right) + \operatorname{div} \left(\frac{3}{2} k_B n_k T_k \mathbf{V}_k \right) + \frac{m \mathbf{V}_k^2}{2} \Gamma_k + P_k \operatorname{div} \mathbf{V}_k = -\operatorname{div} \mathbf{q}_k + Q_k, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} k_B n_i T_i \right) + \operatorname{div} \left(\frac{3}{2} k_B n_i T_i \mathbf{V}_i \right) + \frac{m \mathbf{V}_i^2}{2} \Gamma_i + P_i \operatorname{div} \mathbf{V}_i = -\operatorname{div} \mathbf{q}_i + Q_i, \quad (8б)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} k_B n_e T_e \right) + \operatorname{div} \left(\frac{3}{2} k_B n_e T_e \mathbf{V}_e \right) + \frac{m \mathbf{V}_e^2}{2} \Gamma_e + P_e \operatorname{div} \mathbf{V}_e = -\operatorname{div} \mathbf{q}_e + Q_e, \quad (8в)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (9)$$

$$P_k = k_B n_k T_k, \quad P_i = k_B n_i T_i, \quad P_e = k_B n_e T_e. \quad (10)$$

В данной системе индексы i, e, k соответствуют компонентам среды: ионам, электронам и атомам, находящимся в k -м энергетическом состоянии. Величины Γ_k, Γ_i и Γ_e определяют скорость рождения частиц данного сорта в единице объема в результате различных процессов, рассмотренных в первом разделе.

В соответствии с экспериментами концентрация среды является достаточно высокой $n = 10^{16} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Кроме того, речь идет о генерации низкотемпературной плазмы, температура которой $T \sim 1$ эВ. Поэтому радиус Дебая $R_D = \sqrt{k_B T / 4 \pi e^2 n_e}$ является крайне малой величиной по сравнению с характерными размерами системы и пространственными масштабами процессов, включая толщину фронта ионизации. В этом случае среду можно считать квазинейтральной так, что $n_i = n_e$ и в силу квазинейтральности $\Gamma_i = \Gamma_e$.

Для тяжелых частиц с массой $m_i = m_a = m$ плотность и суммарная концентрация частиц определяются соотношениями $\rho = m n$, $n = n_i + n_a$, где

$$n_a = \sum_{k=1}^K n_k. \text{ Для достаточно плотной среды допускается, что скорости всех}$$

компонент равны между собой $\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}$. Незначительные отличия в скоростях электронной и ионной компонент среды, а также между скоростями ионов и атомов, можно оценить с помощью формул, представленных в [41]. Суммируя уравнения (6а), (6б) и (6в), приходим к закону сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \text{ согласно которому имеем } m_i \Gamma_i + \sum_{k=1}^K m_a \Gamma_k = 0.$$

Соотношение $n_e = n_i = n - n_a$ определяет концентрацию ионов и электронов с учетом квазинейтральности среды.

Силы взаимного трения \mathbf{R} в правой части уравнений переноса импульса (7а), (7б) и (7в) соответствуют взаимодействию между частицами различного сорта. С учетом закона сохранения импульса при взаимодействии частиц различного сорта справедливы соотношения: $\mathbf{R}_{kj} = -\mathbf{R}_{jk}$. Складывая

уравнения переноса импульса для всех компонент среды с учетом сохранения импульса при столкновениях, приходим к уравнению движения многокомпонентной плазмы, представляющее собой суммарный баланс импульса $\rho \frac{d \mathbf{V}}{d t} + \nabla P = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]$. В данном уравнении давление отвечает сумме

всех парциальных давлений $P = P_i + P_e + \sum_{k=1}^K P_k$, а ток в плазме формально

определяется с помощью соотношения $\mathbf{j} = e n_i \mathbf{V}_i - e n_e \mathbf{V}_e$. При этом в рамках одножидкостного приближения при условии $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}$ плазменный ток вычисляется с помощью соотношения (9). В итоговом уравнении движения отсутствуют слагаемые, содержащие электрическое поле в силу квазинейтральности плазмы.

Уравнения переноса энергии для компонент среды, являющиеся следствием кинетических уравнений Больцмана с интегральным столкновительным членом в форме Больцмана-Ландау, могут быть представлены в различных формах. В частности, изменение кинетической энергии можно исключить с помощью уравнения движения для каждой из компонент. В результате получим уравнения баланса тепла, например, в виде уравнений (8а), (8б) и (8в). В этих уравнениях слагаемые Q_e , Q_i и Q_k отвечают выделению тепла в среде частиц данного сорта вследствие столкновений с частицами других сортов. Учитывая законы сохранения при столкновениях, имеем, например, $Q_{ei} + Q_{ie} = -\mathbf{R}_{ei} \mathbf{V}_e - \mathbf{R}_{ie} \mathbf{V}_i = -\mathbf{R}_{ei} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i)$.

В соответствии с [41] запишем $\mathbf{R}_{ei} = -f_{ei} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i)$, где $f_{ei} = n_e n_i m_{ei} B_{ei}$,

$$B_{ei} = \frac{4 \sqrt{2\pi} \Lambda e^4}{3 \sqrt{m_{ei}} (k_B T)^{3/2}}, \quad \Lambda - \text{кулоновский логарифм. Тогда получим, что}$$

$$Q_{ei} + Q_{ie} = \frac{n_e m_{ei} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i)^2}{\tau_{ei}}, \quad \text{где } \tau_{ei} = \frac{3 \sqrt{m_{ei}} (k_B T)^{3/2}}{4 \sqrt{2\pi} \Lambda e^4 n_i} \text{ и приведенная масса}$$

равна $m_{ei} \cong m_e$. Основной вклад в выделение тепла вносит взаимодействие электронов с тяжелыми частицами. Взаимодействие электронов с атомами, находящимися в k -м энергетическом состоянии, дает

$$Q_{ek} + Q_{ke} = \frac{n_e m_e (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e)^2}{\tau_{ek}}, \quad \text{где вектор } \mathbf{V} \text{ отвечает скорости тяжелых частиц.}$$

Ток в плазме формально можно представить с помощью соотношения $\mathbf{j} = e n_e (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e)$. Для суммарного тепла, выделяемого в результате трения электронов о тяжелые частицы, имеем

$$Q_{mp} = n_e m_e (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e)^2 \left(\frac{1}{\tau_{ei}} + \sum_{k=1}^K \frac{1}{\tau_{ek}} \right) = \frac{m_e \mathbf{j}^2}{n_e e^2} \left(\frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{ea}} \right).$$

Это тепло можно представить в обычном виде $Q_{mp} = \mathbf{j}^2 / \sigma$, где проводимость определяется через сумму частот столкновений электрона с тяжелыми частицами с помощью следующего соотношения:

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e (v_{ea} + v_{ei})}. \quad (11)$$

Здесь величина $v_{ei} = 1/\tau_{ei}$ отвечает частоте столкновений электронов с ионами.

В уравнениях (8а), (8б) и (8в) также пренебрегаем газодинамической вязкостью компонент среды в силу пренебрежимо малого влияния соответствующих диссипативных факторов. В тоже время микроскопические тепловые потоки \mathbf{q}_e , \mathbf{q}_i и \mathbf{q}_a , обусловленные в первую очередь теплопроводностью, будут учтены. В рассматриваемом диапазоне параметров задачи стандартные оценки передачи тепла и характерного времени обмена энергией между компонентами показывают, что $T_i \approx T_e = T$. Это подтверждают экспериментальные данные. Возможное незначительное превышение электронной температуры T_e над T_i и T_a не является существенной деталью проводимых исследований. Соответственно предполагаем, что $T_a = T_i = T_e = T$. Итоговое уравнение баланса энергии для многокомпонентной плазмы получается суммированием балансов энергии (8а), (8б) и (8в) для компонент.

Закон Ома в обобщенном виде является следствием уравнения переноса импульса (7в) для электронной компоненты, в котором мы пренебрегли инерцией электронов. Учитывая выше приведенные соотношения, слагаемые в правой части уравнения (7в) можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{R}_{ei} + \sum_{k=1}^K \mathbf{R}_{ek} = \frac{n_e m_e}{\tau_{ei}} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e) + \sum_{k=1}^K \frac{n_e m_e}{\tau_{ek}} (\mathbf{V} - \mathbf{V}_e) = \frac{m_e}{e \tau_{ei}} \mathbf{j} + \sum_{k=1}^K \frac{m_e}{e \tau_{ek}} \mathbf{j} = \frac{e n_e}{\sigma} \mathbf{j},$$

где проводимость σ определяется соотношениями (11). В одножидкостном приближении $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_e = \mathbf{V}$, пренебрегая слагаемым ∇P_e в уравнении (7в) для рассматриваемого случая сильных магнитных полей, приходим к закону Ома в классической форме $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{V}, \mathbf{H}]$, где ток в плазме вычисляется с помощью соотношения (9), а проводимость определяется через сумму частот столкновений электрона с тяжелыми частицами: ионами и атомами.

В итоге получим модифицированные МГД уравнения с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} + \operatorname{div}(n_k \mathbf{V}) &= \sum_{j \neq k} n_j w_{jk} - n_k \sum_{j \neq k} w_{kj}, \quad k = 1, \dots, K, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) &= 0, \quad \rho \frac{d \mathbf{V}}{d t} + \nabla P = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad \frac{d}{d t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \operatorname{div}(\rho \varepsilon \mathbf{V}) + P \operatorname{div} \mathbf{V} &= \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - \operatorname{div} \mathbf{q} - \operatorname{div} \mathbf{W}, \quad (12) \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - c \operatorname{rot} \frac{\mathbf{j}}{\sigma}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \\ P &= P_e + P_i + \sum_{k=1}^K P_k = (1 + \alpha)(c_p - c_v) \rho T, \quad \varepsilon = (1 + \alpha) c_v T + \varepsilon_I, \\ k_B / m = R = c_p - c_v = c_v (\gamma - 1), \quad n_e = n_i = n - \sum_{k=1}^K n_k, \quad \mathbf{q} &= -\kappa_{e \rightarrow a} \nabla T. \end{aligned}$$

Здесь $\rho = mn$ и $n = n_i + \sum_{k=1}^K n_k = n_i + n_a$ – плотность и концентрация тяжелых частиц, P – суммарное давление, \mathbf{q} – тепловой поток, $\kappa_{e \rightarrow a}$ – коэффициент электрон-атомарной теплопроводности, \mathbf{W} – плотность потока энергии излучения. Степень ионизации вычисляется с помощью соотношения $\alpha = n_e / n$. В понятие внутренней энергии на единицу массы ε включается дополнительное слагаемое ε_I , ответственное за потери энергии на ионизацию. Кроме того, в уравнении состояния среды можно учесть потери энергии на диссоциацию молекул. В уравнении для внутренней энергии джоулев нагрев $Q_{mp} = \mathbf{j}^2 / \sigma$ за счет взаимодействия электронов с ионами существенно превосходит тепло, выделяемое при трении между собой остальных компонент. Систему (12) вместе с представленными способами определения σ и $\kappa_{e \rightarrow a}$ следует рассматривать как обобщение классической магнитной газодинамики на случай частично ионизованной многокомпонентной плазмы.

Электропроводность и теплопроводность среды

Электропроводность среды в уравнениях равна $\sigma = e^2 n_e / m_e \nu_e$, где средняя частота столкновений электронов с другими частицами ν_e складывается из частот столкновений с атомами и ионами: $\nu_e = \nu_{ei} + \sum_{k=1}^K \nu_{ek} = \nu_{ei} + \nu_{ea}$. Частоты столкновений можно представить в общем виде $\nu_{ea} = n_a \langle V_e \rangle S_{ea}$, $\nu_{ei} = n_i \langle V_e \rangle S_{ei}$, где S_{ea} , S_{ei} – эффективные сечения столкновений.

В данной работе также, как в ряде предшествующих исследований (см., например, [23-25,27-29]), рассматривается процесс ионизации водорода, для которого эффективное сечение столкновения электронов с атомами определяется в [45] с помощью соотношения $S_{ea}^H = 1.2 \cdot 10^{-13} / \sqrt{T}$ [см²].

Согласно формуле (11) итоговые соотношения для электропроводности плазмы сложного состава можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}, \quad \sigma_1 = \frac{e^2 n_e}{m_e n_a \langle V_e \rangle S_{ea}}, \quad \sigma_2 = \frac{e^2 n_e \tau_{ei}}{m_e}, \quad (13)$$

где величина τ_{ei} в соотношениях (11) и (13) отвечает характерному времени столкновений электронов с ионами, указанному выше.

Микроскопический поток тепла в уравнении для внутренней энергии (12) представлен в традиционной форме $\mathbf{q} = -\kappa_{e \rightarrow a} \nabla T$. При больших степенях ионизации заметный вклад в суммарную теплопроводность вносит электронная теплопроводность поперек азимутального магнитного поля в канале плазменного ускорителя. В исследованиях процесса ионизации водорода в канале КСПУ в соответствии с [41] используется следующее соотношение:

$$\kappa_{\perp e} = \frac{1}{m_e} k_B n_e (k_B T_e) \tau_e \gamma_0(\chi) \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} \right]$$

где $\gamma_0(\chi) = (11.92 + 4.664 \chi^2) / (3.77 + 14.79 \chi^2 + \chi^4)$ – функция, учитывающая влияние замагниченности электронной компоненты плазмы, определяемой параметром $\chi = \omega_e \tau_e$.

При малых степенях ионизации наибольший вклад вносит теплопроводность атомов $\kappa_a = 24 \cdot T^{3/4} \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}} \right]$. Электрон-атомарная теплопроводность с учетом перехода от малой степени ионизации к состоянию с $\alpha = 1$ вычисляется по формуле [45]

$$\kappa_{a \rightarrow e} = \kappa_{\perp e} \left(1 + \sqrt{2} \frac{m_e}{m_i} \frac{\kappa_{\perp e}}{\kappa_a} \frac{S_{ea}}{S_{aa}} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-1} + \kappa_a \left(1 + \frac{S_{ai}}{S_{aa}} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{-1}, \quad (14)$$

которая содержит отношения эффективных сечений рассеяния частиц $S_{ea} / S_{aa} = 1.5 \cdot 10^{-2}$ и $S / S_{aa} = 1.44 \cdot T^{0.16}$.

В соответствии с (14) при больших степенях ионизации заметную роль в суммарном теплопереносе играет классическая электронная теплопроводность поперек магнитного поля, а при малых степенях ионизации основной вклад вносит атомарная теплопроводность. Результаты численных экспериментов показывают, что роль теплопроводности в целом незначительна.

Перенос излучения

В общем случае уравнение для внутренней энергии в системе (12) помимо плотности потока энергии излучения \mathbf{W} может содержать плотность энергии излучения U , которые определяются через интенсивность излучения $I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ вдоль выбранного направления и для определенного участка спектра,

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) d\mathbf{\Omega} d\nu, \quad \mathbf{W}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \int_0^{4\pi} I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) \mathbf{\Omega} d\mathbf{\Omega} d\nu. \quad (15)$$

В МГД уравнениях для достаточно плотной среды плотность энергии излучения U можно не учитывать, так как она мала по сравнению с тепловой или внутренней энергией среды ($U \ll \rho \varepsilon$). Однако поток энергии излучения $\mathbf{W} \sim cU$ может играть заметную роль в перераспределении энергии.

Интенсивность излучения вычисляется с помощью уравнения переноса излучения, которое в общем случае имеет следующий вид,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \eta_\nu(\mathbf{r}) - \kappa_\nu(\mathbf{r}) \cdot I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad (16)$$

где интенсивность излучения с частотой ν , распространяющегося в направлении телесного угла $\mathbf{\Omega}$, отвечает точке с координатой \mathbf{r} . Излучательная способность $\eta_\nu(\mathbf{r})$ и коэффициент поглощения вещества $\kappa_\nu(\mathbf{r})$ являются известными функциями температуры и плотности вещества [43, 52, 53]. Уравнение (16) записано в предположении изотропного рассеяния. Скорость распространения излучения существенно выше характерных скоростей плазмодинамических процессов. Поэтому поле излучения мгновенно подстраивается под распределение параметров потока, и можно ограничиться решением стационарного уравнения переноса излучения

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \eta_\nu(\mathbf{r}) - \kappa_\nu(\mathbf{r}) \cdot I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}). \quad (17)$$

Наиболее простое граничное условие для уравнения (17) соответствует отсутствию падающего извне излучения. В некоторых случаях стенки ускорителя могут играть роль дополнительного источника излучения, которое можно учесть на основе данных о степени черноты металлов в зависимости от температуры [56].

Коэффициент поглощения κ_ν и излучательная способность η_ν в (17) зависят не только от состояния среды, ее плотности и температуры, а также от

спектрального параметра ν , связанного с энергией фотона $h\nu$. Для определения их значений необходимы в общем случае расчет спектра атома и вычисление населенностей состояний атомов. Процессы испускания и поглощения света, связанные с переходами электрона из одного энергетического состояния в другое и большей частью рассмотренные в первом разделе, подразделяются на три составляющих: а) связанно-связанные процессы, к которым относятся абсорбция и эмиссия излучения, возбуждение и гашение электронным ударом; б) связанно-свободные процессы, которые включают фотоионизацию и фоторекомбинацию, столкновительную ионизацию и тройную рекомбинацию, а также в) свободно-свободные процессы, которые отвечают тормозному излучению и обратному тормозному поглощению $A_k + e + h\nu_k \leftrightarrow A_k + \tilde{e}$.

Соответственно коэффициент поглощения и излучательная способность складываются из трех частей, отвечающих а) поглощению и излучению в линиях, б) фотоионизации и фоторекомбинации и в) рассеянию. Излучательная способность и коэффициент поглощения, исправленный на вынужденное излучение, определяются с помощью следующих соотношений [50, 52, 58, 60]:

$$\begin{aligned}
 \kappa_\nu &= n \sum_{\substack{k < j \\ k, j=1}}^K x_k \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{kj} \phi_{kj}(\nu) \left(1 - \frac{n_j g_k}{n_k g_j} \right) + n \sigma_K^{ff}(\nu) (1 - e^{-h\nu/k_B T}) + \\
 &+ n \sum_{k=1}^K x_k \sigma_k^{PI}(\nu) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{m_e k_B T} \right)^{3/2} \frac{n_i g_k}{n x_k \Sigma_i} \exp\left(\frac{h\nu_k - h\nu}{k_B T} \right) \right), \\
 \eta_\nu &= n \sum_{\substack{k > j \\ j, k=1}}^K x_k \frac{g_j \pi e^2}{g_k m_e c} f_{jk} \phi_{jk}(\nu) \frac{h\nu^3}{\pi c^2} + n \frac{h\nu^3}{\pi c^2} \sigma_K^{ff}(\nu) e^{-h\nu/k_B T} + \\
 &+ \sum_{k=1}^K n_i n_e \frac{(h\nu)^3}{4 \hbar^2 \pi^2 c^2} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{m_e k_B T} \right)^{3/2} \sigma_k^{PI}(\nu) \frac{g_k}{\Sigma_i} \exp\left(\frac{h\nu_k - h\nu}{k_B T} \right), \quad (18)
 \end{aligned}$$

где ν – частота фотона, x_k – относительная концентрация k -го состояния атома, g_k – статистический вес k -го состояния атома, f_{kj} – сила осцилляторов при переходе атома из k -го в j -е состояние, $\phi_{kj}(\nu)$ – профиль линии соответствующего связанно-связанного перехода, $\sigma_k^{PI}(\nu)$ – сечение фотоионизации из k -го состояния, $\sigma_K^{ff}(\nu)$ – сечение обратного тормозного поглощения [50]. Суммирование в формулах проводится по всем состояниям атома. Излучательная способность (18) отвечает количеству энергии частоты ν самопроизвольно или спонтанно излучаемой в 1 см^{-3} вещества в 1 сек в единичном интервале частот.

Профиль линии, учитывающий разные по природе механизмы уширения, определяется по формуле Фойгта (2).

Расчет сечений связанно-свободных и свободно-свободных процессов осуществляется в приближении Крамерса в соответствии с формулой (3) и соотношением

$$\sigma_K^{ff}(\nu) = \frac{16 \pi^3}{3 \sqrt{3}} \frac{n_e e^6}{4 \pi^2 h c m_e^2 \nu^3 \langle V_e \rangle}.$$

В частном случае локального термодинамического равновесия населенности состояний связаны уравнением Саха (4) и формулой Больцмана:

$$x_k = \frac{n_a g_k}{n \sum_a} \exp(-(E_k - E_1)/k_B T). \quad (19)$$

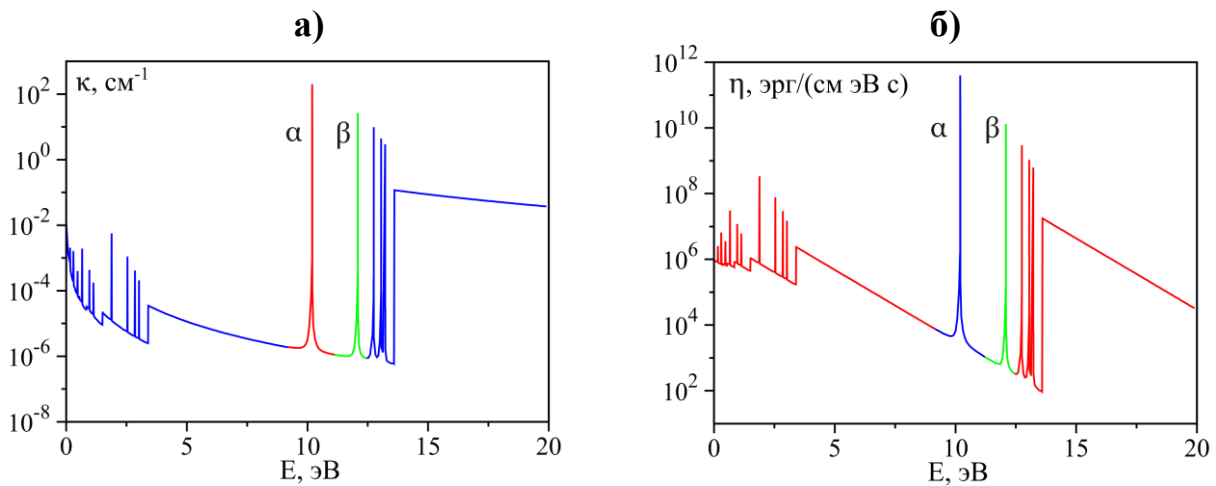


Рис. 2. Зависимость коэффициента а) поглощения и б) излучательной способности от энергии излучения для концентрации $n = 3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ и температуры $T = 1 \text{ эВ}$. α - и β -линии Лаймана выделены

На рис. 2а и 2б представлены зависимости соответственно коэффициента поглощения и излучательной способности водородной плазмы для указанных параметров среды. Излучательная способность, отвечающая единичному интервалу частот (18), на рис. 2б отнесена к единичному интервалу энергии фотонов в 1 эВ. На рисунках отмечены α - и β -линии серии Лаймана. Ранее было показано (см., например, [23]), что эти линии переносят значительную долю энергии линейчатого спектра, поэтому профили этих линий описываются более детально, чем профили остальных линий. Для детального описания этих спектральных линий использовался профиль Фойгта (2). При этом на ширину линии приходится несколько спектральных групп, подробно описывающих форму ядра и крыльев линий. В то же время линии в остальной части спектра описываются в рамках одной группы. Весь спектр в расчетах разбивается до 300 и более спектральных групп.

Коэффициент поглощения и излучательная способность, представленные на рис. 2, рассчитаны в предположении равновесной заселенности уровней атома водорода в соответствии с (19) для концентрации среды $n = 1.4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ и значения температуры $T = 1 \text{ эВ}$. Значения коэффициентов соответствуют трем группам процессов перехода электрона из одного энергетического состояния в другое, включая связанно-связанные процессы, отвечающие поглощению и излучению в линиях. В данном примере коэффициент поглощения построен с учетом более 10 уровней энергии. Каждый из рассмотренных процессов перехода электрона из одного энергетического состояния в другое вносит свой вклад в излучение и поглощение. С увеличением температуры коэффициент поглощения уменьшается, так как становится меньше количество поглотителей и увеличивается число возбужденных атомов.

Модель течения в квазиодномерном приближении

На данном этапе модель течения ионизирующегося газа с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения в канале плазменного ускорителя реализована в квазиодномерном приближении. Результаты исследований двумерных осесимметричных течений в приближении локального термодинамического равновесия (ЛТР), представленные, например, в [24, 25], продемонстрировали, что процессы в основном происходят в продольном направлении. Это подтверждает применимость МГД модели в рамках квазиодномерного приближения.

В квазиодномерном приближении течение рассматривается в узком осесимметричном канале заданного сечения, представленном на рис. 3. Предполагаем, что зазор $\Delta r(z)$ между электродами мал, и средний радиус канала $r = r_0$ является постоянной величиной. Сечение канала равно $f(z) = 2\pi r_0 \Delta r(z)$, где z – координата вдоль канала. Наиболее узкая часть канала расположена между сечениями А и В, указанными на рисунке. Магнитное поле ортогонально плоскости рисунка, ток и электрическое поле имеют радиальное направление.

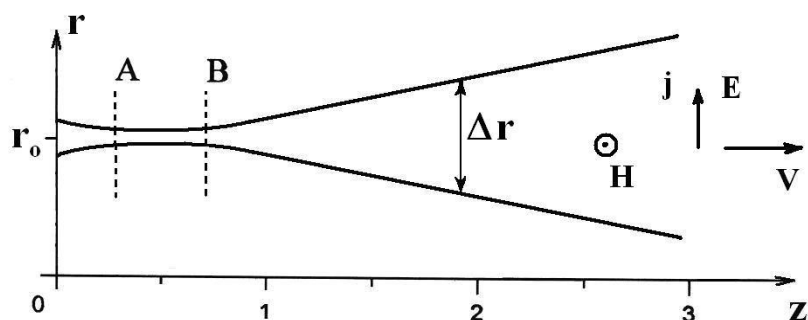


Рис. 3. Форма канала плазменного ускорителя в квазиодномерной модели

В приближении узкого канала можно пренебречь изменением переменных поперек узкой трубки. МГД величины зависят только от переменных t и z при условии аксиальной симметрии течения ($\partial / \partial \varphi = 0$). В задаче участвуют азимутальная компонента магнитного поля $H = H_\varphi$ и продольная компонента скорости $V = V_z$. С учетом сделанных замечаний уравнения, выражающие законы сохранения, можно записать в безразмерной форме следующим образом:

$$\frac{\partial n f}{\partial t} + \frac{\partial n V f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial n_k f}{\partial t} + \frac{\partial n_k V f}{\partial z} = f \tilde{\Gamma}_k, \quad (20)$$

$$\tilde{\Gamma}_k = \sum_{j \neq k} n_j w_{jk} - n_k \sum_{j \neq k} w_{kj}, \quad k = 1, \dots, K$$

$$\frac{\partial n V f}{\partial t} + \frac{\partial (n V f) V}{\partial z} = -f \frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{H^2}{2} \right), \quad \frac{\partial H f}{\partial t} + \frac{\partial H V f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(v f \frac{\partial H}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial (f n S)}{\partial t} + \frac{\partial [(f n S) V]}{\partial z} = \frac{2(\gamma - 1)}{\beta(1 + \alpha) T} \left[f v j^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \tilde{\kappa} \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial f W_z}{\partial z} - f \tilde{\varepsilon}_I \right],$$

$$S = \ln \frac{P}{n^\gamma}, \quad P = n^\gamma e^S = \frac{\beta}{2} (1 + \alpha) n T, \quad T = \frac{2 n^{\gamma-1} e^S}{\beta(1 + \alpha)},$$

$$n = n_i + n_a, \quad n_a = \sum_{k=1}^K n_k, \quad n_e = n_i = n - n_a, \quad \alpha = \frac{n_e}{n},$$

$$v = \frac{1}{\text{Re}_m} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}, \quad \sigma_1 = \frac{\alpha \sigma_{10}}{(1 - \alpha) \sqrt{T}}, \quad \sigma_2 = \sigma_{20} T^{3/2}.$$

В системе (20) вместо уравнения для внутренней энергии ε используется эквивалентное уравнение для энтропии S . На входе $z = 0$ полагаем, что $\rho = 1$, $n_k = n_k^0$, $T = 1$, $H = 1$. Значение n_k^0 на входе определяется в приближении ЛТР.

Таким образом, итоговая система уравнений, описывающая неравновесную плазму с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения, состоит из уравнений (1), (12), (15) - (18) в общем случае, а также уравнений (20), (15) - (18) в квазиодномерном приближении.

В средней части канала в процессе ионизации происходит последовательный переход скорости потока сначала через газодинамическую скорость звука C_g , а затем через скорость быстрой магнитозвуковой волны или скорость сигнала C_s [1] в отсутствие продольного магнитного поля, т.е. при наличии единственной азимутальной компоненты магнитного поля,

$$C_s = \sqrt{C_g^2 + C_A^2}, \quad C_g^2 = \gamma P / \rho, \quad C_A^2 = H^2 / \rho. \quad (21)$$

Поэтому на выходе из ускорителя $z = z_{out}$ для исследуемых трансзвуковых потоков предполагается свободное сверхзвуковое вытекание плазмы.

В качестве единиц измерения выбраны размерные величины, отвечающие значениям параметров на входе в ускоритель: n_o ($\rho_o = m n_o$), T_o , H_o , а также L – длина канала. Характерная величина азимутального магнитного поля на входе в канал H_o определяется разрядным током в системе J_p так, что $H_o = 2J_p / c R_o$, где R_o – характерный радиус канала, и указанное выше его безразмерное значение равно $r_o = R_o / L$. С помощью этих величин формируются единицы: давления – $H_o^2 / 4\pi$, скорости – $V_o = H_o / \sqrt{4\pi\rho_o}$, времени – L/V_o . Переход к безразмерным значениям потока энергии излучения W в (20) осуществляется с помощью следующей единицы: $W_o = V_o H_o^2 / 4\pi$.

Безразмерные параметры в уравнениях (20) выражаются через исходные размерные величины:

$$\beta = \frac{8\pi P_o}{H_o^2} (P_o = k n_o T_o), \quad \nu = \frac{1}{\text{Re}_m} = \frac{c^2}{4\pi L V_o \sigma}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{4\pi T_o \kappa_{a \rightarrow e}}{H_o^2 V_o L}$$

Безразмерные магнитная вязкость ν , обратно пропорциональная магнитному числу Рейнольдса Re_m , содержит значения σ_{10} и σ_{20} , определяемые через исходные размерные параметры и физические константы.

Учет потерь энергии на ионизацию, включая радиационные потери, осуществляется с помощью слагаемого в правой части уравнения для энтропии

$$\tilde{\varepsilon}_I = -\frac{\beta}{2} \zeta \sum_{k=1}^K \tilde{E}_k \tilde{\Gamma}_k, \quad \text{где параметр } \zeta \geq 1, \quad \tilde{E}_k = E_k / k_B T_o \quad \text{и} \quad \tilde{\Gamma}_k = L \Gamma_k / V_o n_o.$$

Методам численного решения задач, постановка которых основана на дифференциальных уравнениях в частных производных, в том числе МГД уравнениях, посвящен ряд работ (см., например, [15, 53, 63-66]). Численная модель течений в квазиодномерном приближении предполагает расщепление по физическим факторам, учитывая смешанный тип МГД уравнений. Расчет гиперболической части уравнений (20) осуществляется на основе одного из алгоритмов вычисления переноса с коррекцией потоков [65]. Диссипативные факторы, включая магнитную вязкость в уравнении диффузии магнитного поля, учитываются с помощью метода потоковой прогонки [66].

Численное интегрирование задачи осложняется необходимостью решать уравнение переноса излучения и систему уравнений поуровневой кинетики, которая интегрируется с помощью одного из алгоритмов, используемых для решения жестких систем дифференциальных уравнений [67].

В соответствии с уравнениями (15) и (17) задачу о переносе излучения в потоках ионизирующегося газа следует решать в трехмерной постановке для осесимметричного течения в канале ускорителя. Сетку для 3D задачи о переносе излучения легко получить поворотом исходной сетки в плоскости переменных (z, r) на 360 градусов вокруг оси канала с заданным шагом.

Интенсивность излучения должна быть определена по разным направлениям для дальнейшего вычисления интегральных значений плотности и потока энергии излучения (15) в любом узле или ячейки сетки. С этой целью строится дополнительная угловая сетка по азимутальному и полярному углу. Разбиение телесного угла $\Omega = 4\pi$ на элементы угловой сетки производится методом, обеспечивающим равномерное распределение лучей по направлениям. Угловые сетки с необходимым числом лучей в полном телесном угле связаны с каждым узлом координатной сетки. В квазиодномерной модели осесимметричного течения угловая сетка строится для точек или узлов сетки, расположенных на среднем радиусе канала $r = r_0$ в (r, z) плоскости.

В соответствии с методом длинных характеристик осуществляется трассировка луча для того, чтобы определить точки его пересечения с гранями ячеек координатной сетки и место падения луча на одну из границ трехмерной расчетной области. Уравнение переноса излучения (17) решается вдоль каждого заданного луча и для соответствующей частоты или энергии фотона. При этом коэффициент поглощения κ_ν и излучательная способность среды η_ν зависят от температуры и плотности среды, которые меняются вдоль луча. Полагаем, что в пределах отдельно взятой ячейки коэффициент поглощения и излучательная способность постоянны и вычисляются по среднему значению плотности и температуры в центре ячейки. Один из немаловажных факторов в расчетах переноса излучения связан с необходимостью учета теневых областей, которые возникают в процессе трассировки расчетной области лучами, выходящими из произвольного узла координатной сетки. Невидимые теневые области исключаются из расчета потока энергии излучения для данного узла сетки.

Для решения уравнения переноса излучения используется метод длинных характеристик [53, 58], который позволяет в деталях учесть геометрию канала ускорителя. Метод численного решения уравнения переноса излучения в общем трехмерном случае подробно изложен применительно к плазменному ускорителю в работах [24, 25]. Квазистационарные течения ионизирующего газа рассчитываются методом установления.

Расчет течения и сопоставление с МДП

Один из численных экспериментов представлен рис. 4 и 5, на которых изображены результаты расчета течения ионизирующего газа в канале коаксиального плазменного ускорителя в квазиодномерном приближении с учетом поуровневой кинетики и переноса излучения в широком спектральном диапазоне энергий фотонов. В качестве рабочего вещества взят водород, наиболее часто используемый в экспериментальных исследованиях, поскольку вся программа по разработке мощных плазменных ускорителей изначально была ориентирована на термоядерные исследования. Для атома водорода учитывается до 40 возбужденных уровней.

Представленный пример установившегося квазистационарного течения ионизирующегося газа отвечает следующему набору исходных размерных и безразмерных параметров задачи: $T_o = 3000 \text{ }^\circ K$, $n_o = 2.5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $L = 20 \text{ см}$, $J_p = 25 \text{ кА}$, $\beta = 0.46$, $\sigma_{01} = 1107$, $\sigma_{02} = 0.47$, $V_o = 1.03 \cdot 10^6 \text{ см/с}$. Площадь поперечного сечения канала задана соотношениями: $f(z) = 0.3 - 0.8z(1-z)$, если $z \leq 1$; и $f(z) = 0.8z - 0.5$, если $1 < z \leq z_{out}$. Канал, изображенный на рис. 3, представляет собой сопло единичной длины, надстроенное справа линейно расширяющимся раструбом. Предполагаем, что на входе в канал подается равновесный слабоионизованный газ. Соответственно степень ионизации α_{in} при $z = 0$ определяется с помощью соотношения (4), отвечающего приближению локального термодинамического равновесия, а населенности состояний на входе вычисляются на основе формулы Больцмана (19).

КСПУ является системой проточного типа и в ускорителе обеспечивается непрерывная подача газа на входе с определенным значением давления P_o , которое по порядку величины равно $P_o \approx 10 \text{ Тор}$ в небольших установках и ускорителях первой ступени КСПУ [1-11].

Характерное время расчета задачи методом установления с выходом на стационарное или квазистационарное решение соответствует характерному времени $t_o = L/V_o$ или в безразмерных переменных $t = 1$. Это время установления, соответствующее времени пролета частиц в канале, много меньше длительности разряда. Поэтому в численных экспериментах мы не учитываем процессы в электрической цепи и полагаем, что $J_p = const$.

На рис. 4 изображены распределения плазмодинамических параметров вдоль канала ускорителя в установившемся течении ионизирующегося газа: а) суммарной концентрации тяжелых частиц, б) температуры, в) скорости, г) степени ионизации, д) магнитного поля и е) величины Γ , характеризующей отклонение от равновесия. Здесь $\Gamma = - \sum_{k=1}^K \Gamma_k$ и Γ_k отвечает правой части (6а).

В окрестности сформировавшегося фронта ионизации наблюдается резкий рост температуры, скорости и степени ионизации. Одновременно происходит резкое уменьшение плотности, поскольку ускорение плазмы благодаря силе Ампера сопровождается ее разрежением. В процессе ускорения происходит переход скорости потока через скорость сигнала (21). Ток протекает в основном в окрестности фронта, и это приводит к резкому ослаблению магнитного поля.

Пунктирные кривые на рис. 4 соответствуют расчету в МДП приближении для тех же параметров задачи. При этом величина Γ отвечает правой части уравнения (5). Видно, что по сравнению с МДП приближением распределение МГД переменных качественно не меняется. Однако учет поуровневой кинетики и переноса излучения приводит к тому, что фронт ионизации заметно смещается влево по сравнению с расчетом в МДП приближении.

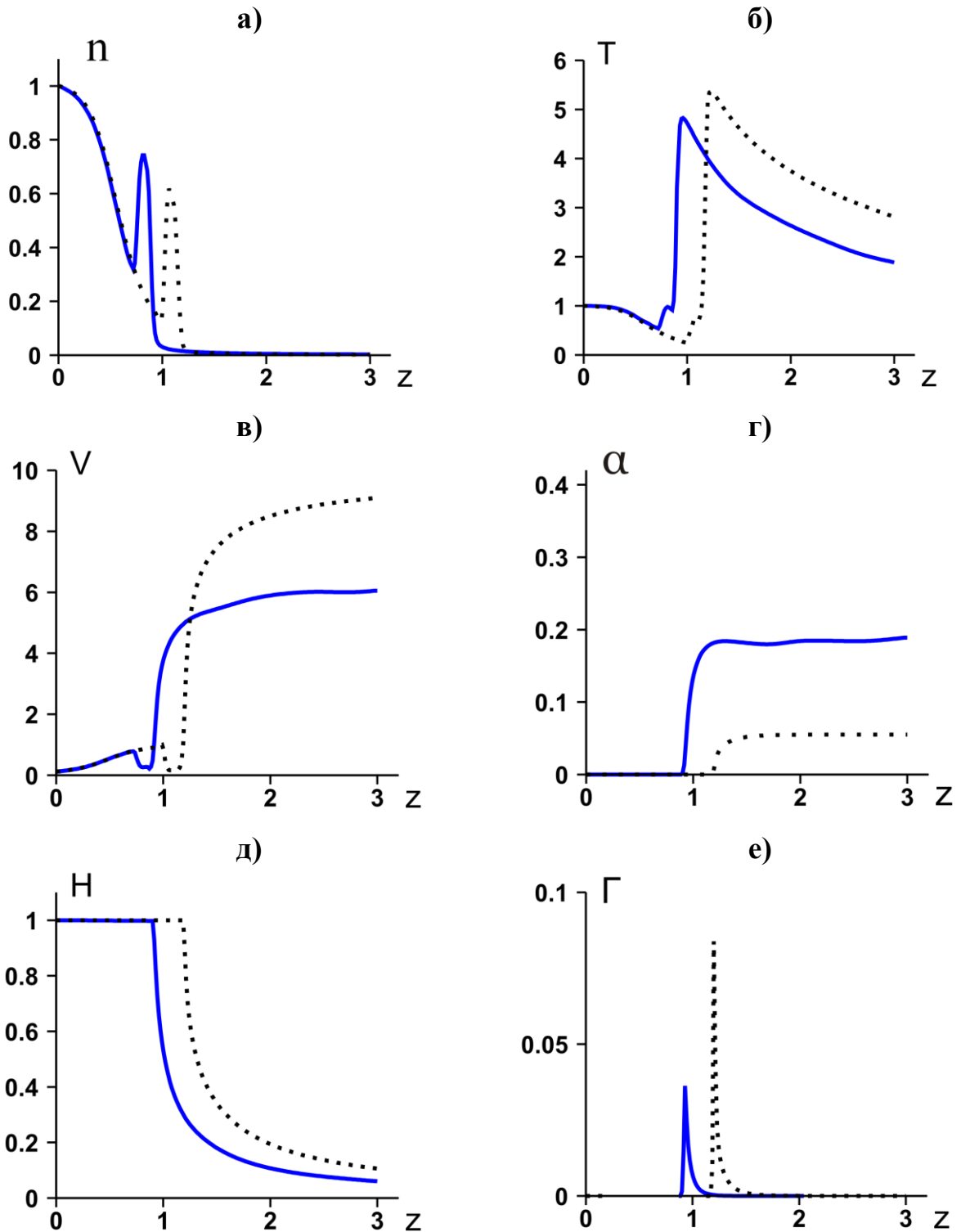


Рис. 4. Изменение вдоль канала ускорителя МГД переменных при учете поуровневой кинетики и переноса излучения в потоке ионизирующегося газа. Штриховые кривые отвечают МДП приближению

Распределения населенностей атомных уровней представлены на рис. 5, в частности, для атомов в основном состоянии n_1 (кривая 1) и в первом возбужденном состоянии n_2 (кривая 2). Распределению концентрации ионов n_i

или электронов n_e в силу квазинейтральности соответствует кривая, отмеченная индексом i . Кривые 3, 4, 5, ... отвечают населенностям остальных возбужденных уровней n_3 , n_4 , n_5 и т.д.

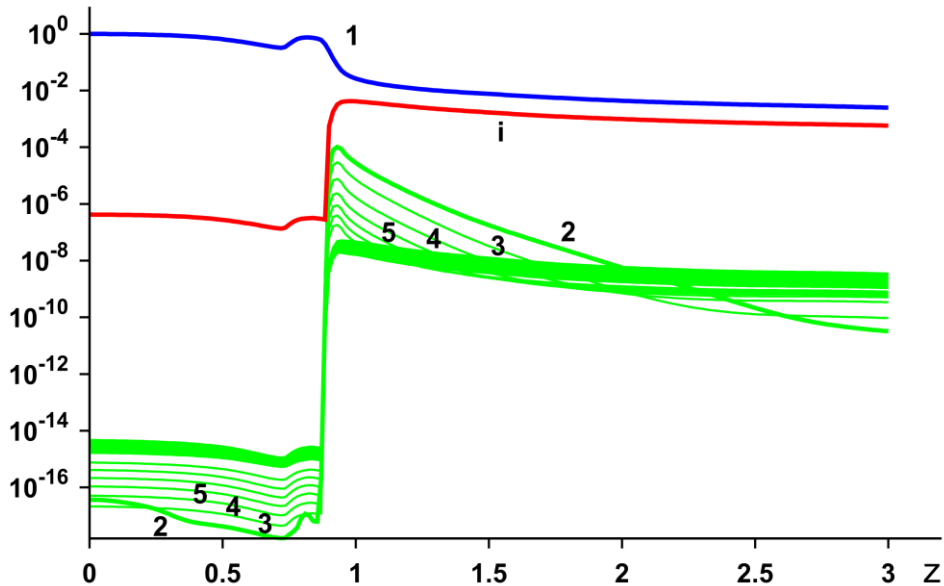


Рис. 5. Распределение населенностей атомных уровней в потоке ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя.

В результате численного эксперимента получена детальная картина процессов в окрестности фронта ионизации, включая распределения населенностей атомных уровней в потоке ионизирующегося газа. Расчеты течений на основе модели радиационной МГД с учетом поуровневой кинетики согласуются с исследованиями, проведенными ранее с учетом кинетики ионизации и рекомбинации в рамках МДП. В то же время новая модель позволяет исследовать процессы, которые не были доступны для детального и глубокого изучения с помощью прежних моделей. Разработанная модель позволяет изучить влияние поуровневой кинетики на перенос излучения и получить поле излучения, согласованное с населенностью атомных уровней.

Заключение

Исследование течений ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя проведено для многокомпонентной среды, состоящей из атомов, электронов и ионов, на основе модифицированных МГД уравнений с учетом электропроводности и теплопроводности, дополненных системой уравнений поуровневой кинетики и уравнением переноса излучения. Выявлены особенности неравновесного процесса ионизации, связанные с распределением населенностей атомных уровней. Расчеты течений сопоставлены с результатами исследований процесса ионизации, полученными ранее в рамках модифицированного диффузионного приближения, также используемого для описания кинетики ионизации и рекомбинации.

Библиографический список

1. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2008. 613 с.
2. Волошко А.Ю., Гаркуша И.Е., Морозов А.И., Соляков Д.Г., Терешин В.И., Царенко А.В., Чеботарев В.В. Исследование локальной картины течения плазмы в двухступенчатом КСПУ. // Физика плазмы. 1990. Т.16, №2. С.168-175.
3. Tereshin V.I., Bandura A.N., Byrka O.V., Chebotarev V.V., Garkusha I.E., Landman I., Makhraj V.A., Neklyudov I.M., Solyakov D.G., Tsarenko A.V. Application of powerful quasi-steady-state plasma accelerators for simulation of ITER transient heat loads on divertor surfaces. // Plasma Phys. Contr. Fusion. 2007. V. 49. P. A231-A239.
4. Белан В.Г., Золотарев С.П., Левашов В.Ф., Майнашев В.С., Морозов А.И., Подковыров В.Л., Скворцов Ю.В. Экспериментальное исследование квазистационарного плазменного ускорителя, питаемого от индуктивного и емкостного накопителей. // Физика плазмы. 1990. Т.16, № 2. С. 176-185.
5. Klimov N., Podkovyrov V., Zhitlukhin A., Kovalenko D., Bazylev B., Landman I., Pestchanyi S., Janeschitz G., Federici G., Merola M., Loarte A., Linke J., Hirai T., Compan J. Experimental study of PFCs erosion under ITER-like transient loads at plasma gun facility QSPA. // Journal of Nuclear Materials. 2009. V. 390-391. P. 721-726.
6. Ананин С.И., Асташинский В.М., Баканович Г.И., Костюкевич Е.А., Кузмицкий А.М., Маньковский А.А., Минько Л.Я., Морозов А.И. Исследование процессов формирования плазменных потоков в квазистационарном сильноточном плазменном ускорителе (КСПУ). // Физика плазмы. 1990. Т.16, № 2. С. 186-196.
7. Astashynski V.M., Ananin S.I., Askerko V. V., Kostyukevich E.A., Kuzmitski A.M., Uglov V.V., Anishchik V.M., Astashynski V.V., Kvasov N.T., Danilyuk L.A. Materials surface modification using quasi-stationary plasma accelerators. // J. Surface and Coating Technology. 2004. V. 180-181. P. 392-395.
8. Дьяконов Г.А., Тихонов В.Б. Экспериментальное исследование влияния геометрии ускорительного канала и внешнего магнитного поля на режимы течения плазмы в коаксиальном квазистационарном плазменном ускорителе (КСПУ) типа П-50А. // Физика плазмы. 1994. Т. 20, № 6. С. 533-540.
9. Garkusha I.E. High current plasma accelerators: physics and applications. // Journal of Kharkiv National University. Physical series: Nuclei, Particles, Fields. 2013. V. 1040. P. 28-39.
10. Solyakov D.G. High-power plasma dynamic systems of quasi-stationary type in IPP NSK KIPT: results and prospects. // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics(21). 2015. No. 1. P. 104-109.
11. Kozlov A.N., Drukarenko S.P., Klimov N.S., Moskacheva A.A., Podkovyrov V.L. The experimental research of the electric characteristics of discharge in the quasi-steady plasma accelerator with the longitudinal magnetic field. // Problems of Atomic Science and Technology. Ser.: Plasma Physics. 2009. No. 1. P. 92-94.

12. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле. // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974, вып. 8. С. 3-87.
13. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах. // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974, вып. 8. С. 88-163.
14. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В. Численное моделирование течений плазмы в КСПУ. // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 147-157.
15. Брушлинский К.В. Математические основы вычислительной механики жидкости, газа и плазмы. г. Долгопрудный: Издат. Дом "Интеллект", 2017.
16. Козлов А.Н. Влияние продольного магнитного поля на эффект Холла в канале плазменного ускорителя. // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 165-175.
17. Kozlov A.N. Basis of the quasi-steady plasma accelerator theory in the presence of a longitudinal magnetic field. // J. Plasma Physics. 2008. V.74, No.2. P.261-286.
18. Brushlinskii K.V., Styopin E.V. On the magnetohydrodynamics flows in curved coaxial channels. // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series, 2017, V. 788, No. 012009.
19. Козлов А.Н. Двухжидкостная магнитогидродинамическая модель течений плазмы в квазистационарном ускорителе с продольным магнитным полем. // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 3. С. 44-55.
20. Козлов А.Н. Исследование приэлектродных процессов в квазистационарных плазменных ускорителях с непроницаемыми электродами. // Физика плазмы. 2012. Т. 38, № 1. С. 15-25.
21. Kozlov A.N. The study of plasma flows in accelerators with thermonuclear parameters. // Plasma Physics and Controlled Fusion. 2017. V. 59, No. 11. Ar. 115004, P. 1-7.
22. Kozlov A.N., Drukarenko S.P., Seytkhalilova E.I., Solyakov D.G., Velichkin M.A. The comparative analysis of the compressible plasma streams generated in QSPA from the various gases. // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. 2012. No. 6. P. 120-122.
23. Kozlov A.N., Garkusha I.E., Konovalov V.S., Novikov V.G. The radiation intensity of the Lyman alpha line at ionization front in the quasi-steady plasma accelerator. // Problems of Atomic Science and Technology. Series: Plasma Physics. 2013, No.1. P. 128-130.
24. Козлов А.Н., Коновалов В.С. 3D модель переноса излучения в потоках ионизирующегося газа и плазмы. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2016. № 86, 32 с. <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-86>
25. Kozlov A.N., Konovalov V.S. Numerical study of the ionization process and radiation transport in the channel of plasma accelerator. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (CNSNS). 2017. V. 51. P. 169-179.

26. Морозов А.И., Козлов А.Н. Эффект самоочищения потока водородной плазмы в ускорителе КСПУ. // Физика экстремальных состояний вещества. Под ред. Фортова В.Е. и др. Изд.ИПХФ РАН, Черногловка, 2007, С.316-319.
27. Козлов А.Н. Кинетика ионизации и рекомбинации в канале плазменного ускорителя. // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 181-188.
28. Брушлинский К.В., Козлов А.Н., Коновалов В.С. Численные модели стационарных и пульсирующих течений ионизирующегося газа в каналах плазменных ускорителей. // ЖВМ и МФ. 2015. Т. 55, № 8. С. 1405-1416.
29. Бармин А.А., Козлов А.Н. Структура стационарного фронта ионизации в канале плазменного ускорителя. // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 4. С. 155-167.
30. Бармин А.А., Куликовский А.Г. Фронты ионизации и рекомбинации в электромагнитном поле. // Итоги науки. Гидродинамика. Т. 5. М.: ВИНТИ. 1971. С. 5-31.
31. Великович А.Л., Либерман М.А. Физика ударных волн в газах и плазме. М.: Наука. 1987. 295 с.
32. Левин В.А., Скопина Г.А. Распространение волн детонации в закрученных потоках газа. // Прикладная механика и теоретическая физика. 2004. Т. 45, № 4. С. 3-6.
33. Каждан Я.М., Антонова Р.Н., Имшенник В.С. Структура фронтов сильных столкновительных ударных волн в двухтемпературной электронно-ионной идеальной плазме с произвольным зарядом ионов. // Физика плазмы. 2006. Т. 32, № 4. С. 330-339.
34. Alfven H. Cosmical electrodynamics. Oxford, N.Y., 1950. (Альфвен Х. Космическая электродинамика. М.: ИЛ, 1952. 291 с.)
35. Spitzer L. Physics of fully ionized gases. Interscience publishers LTD. NY. 1956. (Л. Спитцер. Физика полностью ионизованного газа. М.: ИЛ, 1957. 112 с.)
36. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957; М.: Наука, 2-е изд., 1982. 620 с.
37. Франк-Каменецкий Д.А. Физические процессы внутри звезд. М.: Физматлит, 1959. 543 с.
38. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. М.: Физматгиз, 1961.
39. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред. М.: Госатомиздат, 1961. 244 с.
40. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с. (2-е изд. М.: Логос, 2005. 328 с.)
41. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. // Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963, вып. 1. С. 183-272.
42. Шафранов В.Д. Электромагнитные волны в плазме. // Вопросы теории плазмы./ Под ред. М.А.Леонтовича. М.: Госатомиздат. 1963, вып. 3. С. 3-140.
43. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
44. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Физматлит, 1970. 672 с.

45. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. М.: Наука, 1971. 543 с.
46. Ландау Л.Д., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1972. 527с.
47. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 525 с.
48. Смирнов Б.М. Физика слабоионизованного газа. М.: Наука, 1978. 423 с.
49. Баранов В.Б., Краснобаев К.В. Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977. 337 с.
50. Вайнштейн Л.А., Собельман И.И., Юков Е.А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. М.: Наука. 1979. 319 с.
51. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982. 375 с.
52. Михалас Д. Звездные атмосферы (1 часть). М.: Мир, 1982. 352 с.
53. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 304 с.
54. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988. 303 с.
55. Трубников Б.А. Теория плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1996. 464 с.
56. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением. М.: Мир, 1975. 934 с.
57. Александров А.Ф., Рухадзе А.А. Лекции по электродинамике плазмopodobных сред. М.: изд. МГУ, 1999. 336 с.
58. Castor John I. Lectures on radiation hydrodynamics. – Lawrence Livermore National Laboratory, 2000.
59. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы. М.: Физматлит, 2000. 399 с.
60. Фортон В.Е. Уравнения состояния вещества: от идеального газа до кварк-глюонной плазмы. М.: Физматлит. 2012. 492 с.
61. Имшенник В.С., Боброва Н.А. Динамика столкновительной плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1997. 319 с.
62. Суржииков С.Т. Физическая механика газовых разрядов. М.: изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 640 с.
63. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
64. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс Пресс. 2004. 328 с.
65. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990. 661 с.
66. Дегтярев Л.М., Фаворский А.П. Поточный вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами. // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 1. С. 211-218.
67. Hairer E., Wanner G. Solving ordinary differential equations. II. Stiff and differential-algebraic problems. Springer. 1996. (Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебр. задачи. М.: Мир, 1999. 685 с. Перевод под ред. С.С. Филиппова)