ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 107 за 2017 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д.

Сложные и экзотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Сложные и экзотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 107. 18 с. doi:10.20948/prepr-2017-107
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-107

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

А. Д. Брюно

Сложные и экзотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве

Москва — 2017

УДК 517.925

Александр Дмитриевич Брюно

Сложные и экзотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2017.

Для пятого уравнения Пенлеве (P_5) вычислены вторые коэффициенты сложных и экзотических асимптотических разложений его решений. Уравнение (P_5) имеет два разных случая I и II, приводящие к таким разложениям. Для каждого случая имеются два сложных разложения (основное и дополнительное) и одно экзотическое. Оказалось, что вторые коэффициенты трёх сложных разложений являются многочленами, но для основного разложения в случае I для этого требуется одно условие на параметры. Для экзотических разложений вторые коэффициенты являются многочленами Лорана только в случае I, а в случае II для этого необходимы и достаточны два условия на параметры.

Ключевые слова: пятое уравнение Пенлеве, сложное разложение, экзотическое разложение, полиномиальность коэффициента.

Alexander Dmitrievich Bruno

Complicated and exotic expansions of solutions to the fifth Painlevé equation.

For the fifth Painlevé equation (P_5), we calculate the second coefficients of the complicated and exotic asymptotic expansions of its solutions. The equation (P_5) has two different cases I and II giving such expansions. Two complicated expansions (main and additional) and one exotic exist in each case. It appears that the second coefficients in 3 complicated expansions are polynomials, but for the main expansion in the case I, one condition on parameters is necessary and sufficient for that. The exotic expansions are always Laurent polynomials only in the case I, and in the case II, two conditions on parameters are necessary and sufficient for that.

Key words: fifth Painlevé equation, complicated expansion, exotic expansion, polynomiality of coefficient.

Работа поддержана программой IV.1.1 ОМН РАН.

Введение

Рассматривается полиномиальное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ). В серии препринтов автора [1–3] были предложены алгоритмы вычислений коэффициентов сложных и экзотических асимптотических разложений решений ОДУ, которые являются рядами Лорана по логарифму независимой переменной и её мнимой степени соответственно. Там же этими алгоритмами были вычислены начальные коэффициенты сложных разложений для третьего и шестого уравнений Пенлеве [1, 2] и экзотические разложения для третьего уравнения Пенлеве. Из шести уравнений Пенлеве P_1 — P_6 сложные и экзотические разложения решений имеют только три: третье (P_3), пятое (P_5) и шестое (P_6), причём для этих трёх уравнений Пенлеве первые коэффициенты сложных разложений решений являются многочленами, а экзотических — многочленами Лорана. В указанных работах показано, что и вторые коэффициенты этих разложений для P_3 и иногда для P_6 являются многочленами (обычными или Лорана). Третьи коэффициенты могут быть или не быть многочленами.

Основные результаты работы

Здесь для пятого уравнения Пенлеве (P_5) вычислены вторые коэффициенты сложных и экзотических разложений его решений. Уравнение P_5 имеет два разных укороченных уравнения, приводящие к таким разложениям. Они отнесены к случаям I и II. В каждом из них имеются по два семейства сложных разложений (основное и дополнительное) и по одному семейству экзотических разложений. Оказалось, что вторые коэффициенты сложных разложений для трёх семейств являются многочленами, а у основного семейства в случае I для этого требуется одно условие на параметры (теоремы 1 и 2), однако вторые коэффициенты экзотических разложений всегда являются многочленами Лорана только в случае I (теорема 3), а в случае II они являются многочленами Лорана только при двух определённых условиях на параметры первого коэффициента, который является решением укороченного уравнения (теорема 4).

1. Подготовительные преобразования

Пятое уравнение Пенлеве P_5 имеет вид

$$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right) {y'}^2 - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(ay + \frac{b}{y}\right) + \frac{cy}{x} + \frac{dy(y+1)}{y-1}\,, \quad (1.1)$$

где a,b,c,d — комплексные параметры, x — независимая, y — зависимая переменные, $y' = dy/dx$ [4]. Чтобы записать уравнение (1.1) в виде дифференциальной суммы, умножим его на $x^2 y(y-1)$ и перенесём все члены в правую часть. Получим уравнение

$$- x^2y(y-1)y'' + x^2(3y-1)y'^2/2 - xy(y-1)x' + (y-1)^3(ay^2+b) - \\ - cxy^2(y-1) + dx^2y^2(y+1)^2 = 0\,. \quad (1.2)$$

Носитель и многоугольник Ньютона этого уравнения показаны на рис. 1.

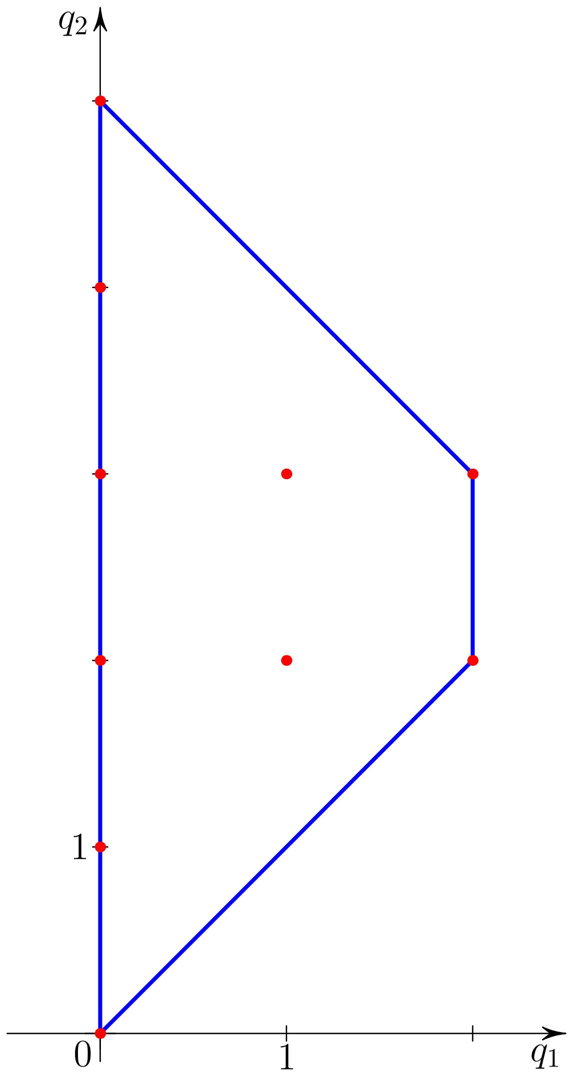

Рис. 1. Носитель и многоугольник Ньютона уравнения (1.2).

Сделаем в уравнении (1.2) подстановку $y = 1 + z$, получаем уравнение

$$- x^2zz''(z+1) + x^2z'^2\left(\frac{3}{2}z+1\right) - xzz'(z+1) + az^3(z+1)^2 + bz^3 + \\ + cxz(z+1)^2 + dx^2(z+1)^2(2+z) = 0\,. \quad (1.3)$$

Носитель и многоугольник Ньютона этого уравнения показаны на рис. 2.

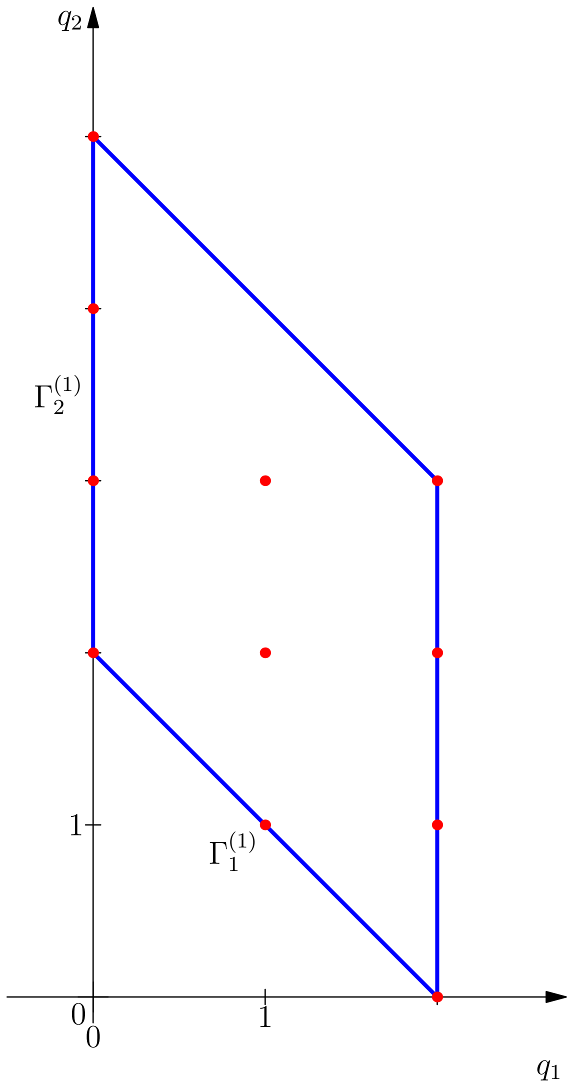

Рис. 2. Носитель и многоугольник уравнения (1.3).

Рассмотрим два случая с разными укороченными уравнениями, соответствующими нижнему наклонному ребру $\Gamma_1^{(1)}$ рис. 2 (случай I) и левому вертикальному ребру $\Gamma_2^{(1)}$ рис. 2 (случай II).

Случай I. Чтобы преобразовать ребро $\Gamma_1^{(1)}$ в вертикальное, сделаем степенное преобразование $z = xv$. Тогда $z' = v + xv'$, $z'' = 2v' + xv''$ и уравнение (1.3), делённое на x^2, принимает вид

$$\begin{aligned} g(x,v) \overset{def}{=} & -x^2vv''(1+xv) + x^2v'^2\left(1+\frac{3}{2}xv\right) - xv'v + \frac{1}{2}xv^3 + \\ & + a(xv^3 + 2x^2v^4 + x^3v^5) + bxv^3 + c(v + 2xv^2 + x^2v^3) + \\ & + d(2 + 5xv + 4x^2v^2 + x^3v^3) = 0\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Его носитель и многоугольник Ньютона показаны на рис. 3.

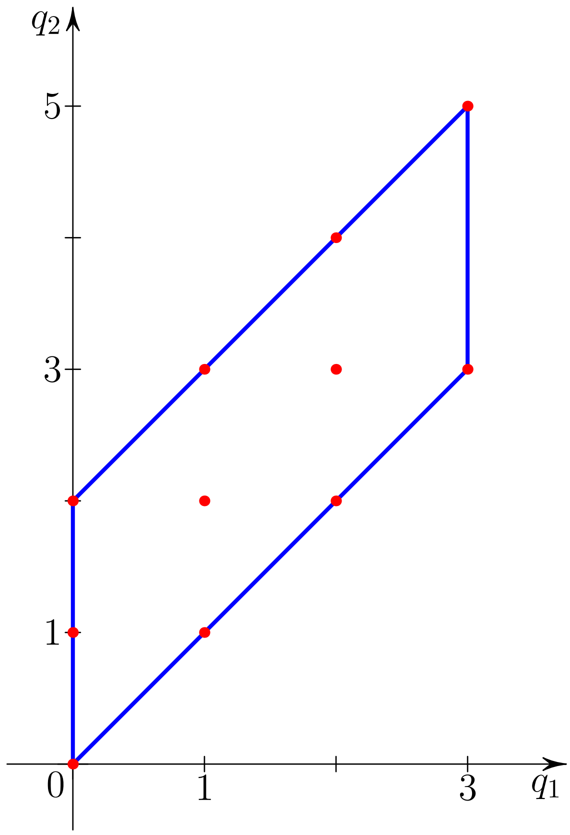

Рис. 3. Носитель и многоугольник Ньютона уравнения (1.4).

Если записать согласно [2]

$$g(x,v) = g_0(x,v) + xg_1(x,v) + x^2 g_2(x,v) + x^3 g_3(x,v)\,,$$

то

$$\begin{aligned}
&g_0(x,v) = -x^2 vv'' + x^2 v'^2 - xv'v + cv + 2d\,,\\
&g_1(x,v) = -x^2 v^2 v'' + \frac{3}{2} x^2 vv'^2 + \left(\tfrac{1}{2} + a + b\right) v^3 + 2cv^2 + 5dv\,, \qquad (1.5)\\
&g_2(x,v) = 2av^4 + cv^3 + 4dv^2\,, \qquad g_3(x,v) = av^5 + dv^3\,.
\end{aligned}$$

Случай II. Теперь сделаем в уравнении (1.3) замену $z = \dfrac{1}{w}$. Тогда

$$z' = -\frac{w'}{w^2}, \quad z'' = \frac{2w'^2 - ww''}{w^3}\,,$$

и уравнение (1.3) после умножения на w^5 принимает вид

$$h(x,w) \stackrel{def}{=} x^2ww''(1+w) - x^2w'^2\left(\frac{1}{2}+w\right) + xww'(1+w) + a(1+w)^2 +$$

$$+bw^2 + cxw^2(w+1)^2 + dx^2w^2(w+1)^2(1+2w) = 0\,. \tag{1.6}$$

Его носитель и многоугольник Ньютона показаны на рис. 4.

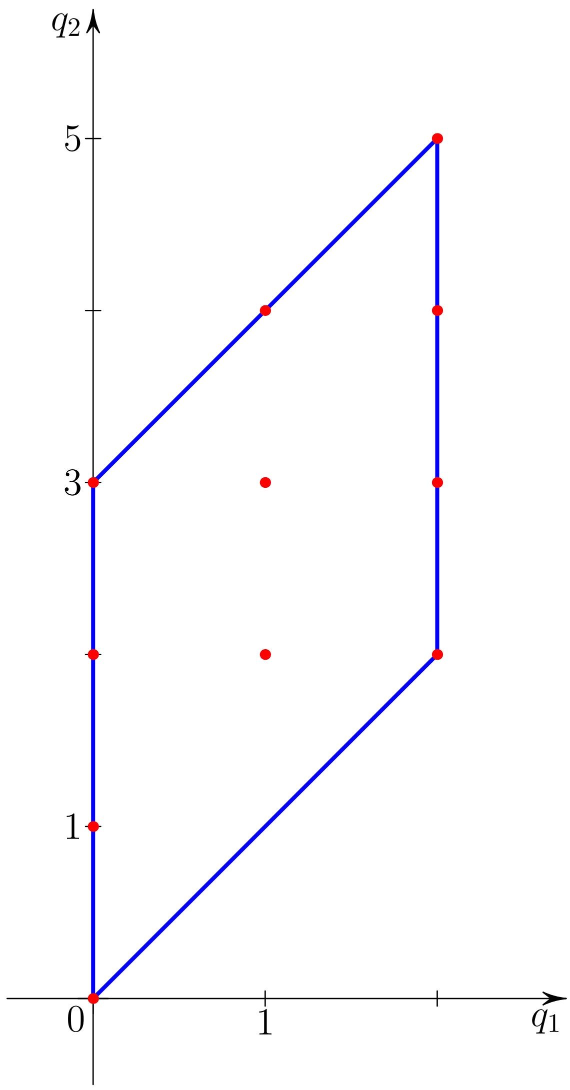

Рис. 4. Носитель и многоугольник уравнения (1.6).

Если записать

$$h(x,w) = h_0(x,w) + xh_1(x,w) + x^2h_2(x,w)\,,$$

то

$$
\begin{aligned}
h_0(x,w) =& x^2ww''(w+1) - x^2w'^2\left(w+\frac{1}{2}\right) + xww'(w+1)+\\
&+ a(w+1)^2 + bw^2\,, \\
h_1(x,w) =& cw^2(1+w)^2\,,\\
h_2(x,w) =& dw^2(w+1)^2(2w+1)\,.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Теперь заметим, что сложные разложения решений уравнений (1.4) и (1.6) имеют вид

$$v \ \text{или} \ w = \varphi_0(\xi) + x\varphi_1(\xi) + x^2\varphi_2(\xi) + \cdots\ , \tag{1.8}$$

где $\xi = \ln x + \tilde{c}$. Поскольку в обоих случаях $\varphi_0(\xi)$ известны, то наша ближайшая цель — это вычислить φ_1. Согласно теореме 1 [2] коэффициент φ_1 удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{\delta g_0}{\delta v}\,(x\varphi_1) + xg_1(\varphi_0) = 0\,, \tag{1.9}$$

где φ_0 удовлетворяет уравнению $g_0(\varphi_0) = 0$. Впервые уравнение (1.9) выведено в [1].

2. Вычисление φ_1 в случае I для сложных разложений

В $g_j(x,v)$ из (1.5) заменим независимую переменную x на $\xi = \ln x + \tilde{c}$, где $\tilde{c}$ — произвольная постоянная. Тогда $xv' = \dot{z}, x^2v'' = \ddot{v} - \dot{v}$, где точка сверху означает производную по ξ. Получаем

$$
\begin{aligned}
g_0^*(\xi,v) =& g_0(x,v) = -v\ddot{v} + \dot{v}^2 + cv + 2d\,,\\
g_1^*(\xi,v) =& g_1(x,v) = -v^2(\ddot{v} - \dot{v}) + \frac{3}{2}v\dot{v}^2 + \omega v^3 + 2cv^2 + 5dv\,,\\
g_2^*(\xi,v) =& g_2(x,v) = 2av^4 + cv^3 + 4dv^2\,, \quad g_3^*(\xi,v) = g_3(x,v) = av^5 + dv^3\,,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $\omega = \dfrac{1}{2} + a + b$.

Согласно разделу 3.1 [2] решения $v = \varphi_0(\xi)$ уравнения $g_0(\xi,v) = 0$, являющиеся рядами Лорана по убывающим степеням ξ, образуют следующие **два** семейства.

Дополнительное: $\varphi_0 = v = \beta\xi$ при $c = 0$, где $\beta^2 = -2d$, и

основное: $\varphi_0 = v = -\dfrac{c}{2}\xi^2 - \dfrac{d}{c}$ при $c \neq 0$.

Согласно (2.1)

$$\frac{\delta g_0^*}{\delta v} = -v\frac{d^2}{d\xi^2} + 2\dot{v}\frac{d}{d\xi} + c - \ddot{v}\,. \tag{2.2}$$

Согласно лемме 1 [2]

$$\frac{d}{d\xi}(x\varphi_1) = x[\varphi_1 + \dot\varphi_1], \quad \frac{d^2}{d\xi^2}(x\varphi_1) = x[\varphi_1 + 2\dot\varphi_1 + \ddot\varphi_1]\,. \tag{2.3}$$

Рассмотрим сначала дополнительное семейство. Тогда

$$\frac{\delta g_0^*}{\delta v} = -\beta\xi\frac{d^2}{d\xi^2} + 2\beta\frac{d}{d\xi}\,, \quad g_1 = \omega\beta^3\xi^3 + \beta^3\xi^2 + \left(\frac{3}{2}\beta^3 + 5d\beta\right)\xi$$

и уравнение (1.9) после сокращения на x и учёта равенства $2d = -\beta^2$ принимает вид

$$-\beta\xi[\varphi_1 + 2\dot\varphi_1 + \ddot\varphi_1] + 2\beta[\varphi_1 + \dot\varphi_1] + \omega\beta^3\xi^3 + \beta^3\xi^2 - \beta^3\xi = 0\,.$$

Оно имеет полиномиальное решение

$$\varphi_1 = -2\omega d(\xi^2 - 2\xi + 2) - 2d\xi + 2d\,. \tag{2.4}$$

Рассмотрим теперь основное семейство. Тогда

$$\frac{\delta g_0^*}{\delta v} = \left(\frac{c}{2}\xi^2 + \frac{d}{c}\right)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2c\xi\frac{d}{d\xi} + 2c\,,$$

$$g_1^* = \omega v^3 - c\xi v^2 + cv^2 + \frac{3}{2}c^2\xi^2 v + 2cv^2 + 5dv = \omega v^3 - c\xi v^2 + 2dv\,.$$

Уравнение (1.9) после сокращения на x есть

$$\left(\frac{c}{2}\xi^2 + \frac{d}{c}\right)[\varphi_1 + 2\dot\varphi_1 + \ddot\varphi_1] - 2c\xi[\varphi_1 + \dot\varphi_1] + 2c\varphi_1 + \omega v^3 - c\xi v^2 + 2dv = 0\,. \tag{2.5}$$

Рассмотрим сначала вспомогательное уравнение

$$\left(\frac{c}{2}\xi^2 + \frac{d}{c}\right)[\varphi_1 + 2\dot\varphi_1 + \ddot\varphi_1] - 2c\xi[\varphi_1 + \dot\varphi_1] + 2c\varphi_1 + \omega v^3 = 0\,.$$

Оно имеет полиномиальное решение

$$\varphi_1 = -\omega\frac{c^2}{4}[\xi^4 - 4\xi^3 + (8 + 2\lambda)\xi^2 - (8 + 4\lambda)\xi + \lambda^2]\,, \tag{2.6}$$

где $\lambda = \dfrac{2d}{c^2}$. Теперь рассмотрим уравнение (2.5) с $\omega = 0$. Разделим это уравнение на $c/2$ и положим $\varphi_1 = c^2\psi_1/2$. Тогда уравнение (2.5) принимает вид

$$(\xi^2 + \lambda)[\psi_1 + 2\dot\psi_1 + \ddot\psi_1] - 4\xi[\psi_1 + \dot\psi_1] + 4\psi_1 - \xi(\xi^2 + \lambda)^2 + 2\lambda(\xi^2 + \lambda) = 0\,. \tag{2.7}$$

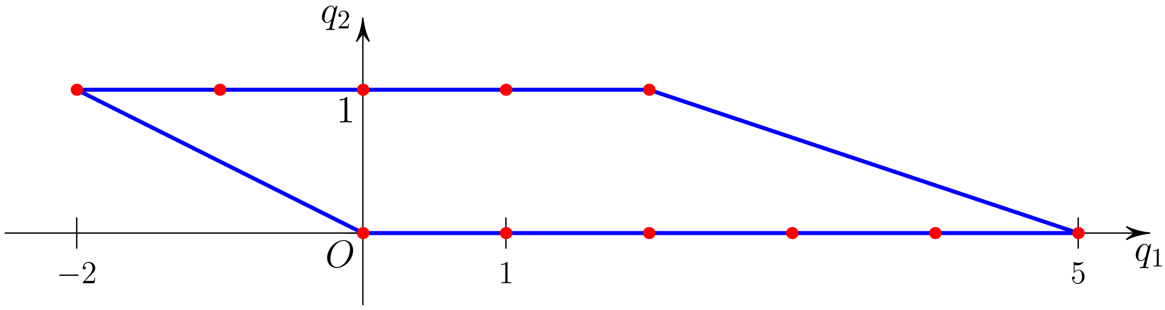

Рис. 5. Носитель и многоугольник уравнения (2.7).

Его носитель и многоугольник см. на рис. 5.

Поскольку наклон правого ребра равен **трём**, то будем искать его полиномиальное решение в виде многочлена степени **три**

$$\psi = \xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D\,.$$

Подставим это выражение в уравнение (2.7) и приравняем нулю коэффициенты при ξ^5,ξ^4,ξ^3,ξ^2,ξ^1,ξ^0. Получим **шесть** линейных алгебраических уравнений для **трёх** коэффициентов B,C,D. Подсистема из первых **четырёх** уравнений для ξ^5,ξ^4,ξ^3,ξ^2 является треугольной и имеет решение

$$B = -2, \quad C = 2 + \lambda, \quad D = -4\lambda.$$

При подстановке этих значений в уравнения при ξ и ξ^0 получаем уравнения $16\lambda = 0$ и $-16\lambda = 0$. Следовательно, $\lambda = 0$, т.е. $d = 0$, ибо $\lambda = 2d/c^2$. Итак, уравнение (2.7) имеет полиномиальное решение только при $d = \lambda = 0$, и это решение есть

$$\psi_1 = \xi^3 - 2\xi^2 + 2\xi\,.$$

Таким образом, уравнение (2.5) имеет полиномиальное решение только при $d = 0$, и это решение есть

$$\varphi_1 = -\omega\frac{c^2}{4}[\xi^4 - 4\xi^3 + 8\xi^2 - 8\xi] + \frac{c^2}{2}[\xi^3 - 2\xi^2 + 2\xi]\,. \tag{2.8}$$

Итак, доказана

Теорема 1. *В случае I в сложных разложениях* (1.8) *решений уравнения* P_5 *коэффициент* $\varphi_1(\xi)$ *является полиномом* (2.8) *для основного семейства только при* $d = 0$ *и* (2.4) *для дополнительного семейства при любых значениях параметров.*

Замечание 1. Здесь для существования полиномиального коэффициента $\varphi_1(\xi)$ впервые потребовалось **одно** дополнительное условие $d = 0$. Но это меньше, чем превышение числа уравнений над числом искомых коэффициентов, равное **четырём**.

3. Вычисление φ_1 в случае II для сложных разложений

В $h_j(x,w)$ из (1.7) заменим независимую переменную $\xi = \ln x + \tilde{c}$. Получим

$$\begin{aligned} h_0^*(\xi,w) &= h_0(x,w) = \ddot{w}w(w+1) - \dot{w}^2\left(w+\frac{1}{2}\right) + a(w+1)^2 + bw^2\,, \\ h_1^*(\xi,w) &= h_1(x,w) = cw^2(w+1)^2\,, \\ h_2^*(\xi,w) &= h_2(x,w) = dw^2(w+1)(2w+1)\,. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Уравнение $h_0^*(\xi,w) = 0$ совпадает с уравнением $g_0(\xi,y) = 0$ из (4.4) [2], если положить

$$w = -y, \quad a = -b, \quad b = -c \quad \text{и} \quad h_0^* = -g_0/2\,. \qquad (3.2)$$

Поэтому согласно разделу 4.1 [2] решения $w = \varphi_0(\xi)$ уравнения $h_0^*(\varphi_0) = 0$, являющиеся рядами Лорана по убывающим степеням ξ, относятся к двум следующим семействам:
дополнительное семейство $w = \varphi_0 = \beta\xi$ при $a + b = 0$, $\beta^2 = 2a$
и основное семейство

$$w = \varphi_0 = \frac{a+b}{2}\xi^2 - \frac{a}{a+b} = \frac{\alpha}{2}\xi^2 - \frac{a}{\alpha} \qquad (3.3)$$

при $\alpha \stackrel{def}{=} a + b \neq 0$. Имеем

$$\frac{\delta h_0^*}{\partial w} = w(w+1)\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\left(w+\frac{1}{2}\right)\dot{w}\frac{d}{d\xi} + 2a(w+1) + 2bw + \ddot{w}(2w+1) - \dot{w}^2\,. \quad (3.4)$$

Вычислим решение уравнения (1.9) для дополнительного семейства. При $\alpha = 0$ имеем $w = \beta\xi, \dot{w} = \beta, \ddot{w} = 0, \dot{w}^2 = 2a$, и уравнение (1.9), делённое на x, имеет вид

$$\beta\xi(\beta\xi+1)\left[\varphi_1 + 2\dot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_1\right] - \beta(2\beta\xi+1)\left[\varphi_1 + \dot{\varphi}_1\right] + c\beta^2\xi^2(\beta\xi+1)^2 = 0\,.$$

Оно имеет полиномиальное решение

$$\varphi_1 = c\beta[-\beta\xi^2 + (2\beta-1)\xi + 1]\,. \qquad (3.5)$$

Для основного семейства уравнение (1.9), делённое на x, есть

$$w(w+1)\left[\varphi_1 + 2\dot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_1\right] - \alpha\xi(2w+1)\left[\varphi_1 + \dot{\varphi}_1\right] + \alpha(2w+1)\varphi_1 + cw^2(w+1)^2 = 0\,,$$

где $w = \dfrac{\alpha}{2}\xi^2 - \dfrac{a}{\alpha}$. Оно имеет полиномиальное решение

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) = -c\Bigg[&\frac{\alpha^2}{4}\xi^4 - \alpha^2\xi^3 + \left(2\alpha^2 + \frac{\alpha}{2} - a\right)\xi^2 - \\ &- \left(2\alpha^2 + \alpha - 2a\right)\xi + \frac{a(a-\alpha)}{\alpha^2}\Bigg]\,. \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Итак, доказана

Теорема 2. *В случае II в сложных разложениях* (1.8) *решений уравнения* P_5 *коэффициент* $\varphi_1(\xi)$ *является полиномом* (3.6) *для основного семейства и* (3.5) *— для дополнительного семейства.*

4. Экзотическое разложение в случае I

Введём новую независимую переменную

$$\xi = x^{i\gamma},\, \gamma \in \mathbb{R},\, \gamma \neq 0\,. \tag{4.1}$$

Тогда

$$v' = i\gamma\dot{v}\frac{\xi}{x},\, v'' = \ddot{v}\left(i\gamma\frac{\xi}{x}\right)^2 + \dot{v}(i\gamma)^2\frac{\xi}{x^2} - \dot{v}i\gamma\frac{\xi}{x^2}\,, \tag{4.2}$$

где точка сверху означает дифференцирование по ξ. Тогда

$$\begin{aligned} xv' &= i\gamma\xi\dot{v}\,,\\ x^2v'' &= -\gamma^2\xi^2\ddot{v} - \gamma^2\xi\dot{v} - i\gamma\xi\dot{v}\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Поэтому формулы (1.5) принимают вид

$$g_0 = \gamma^2 v(\xi^2\ddot{v} + \xi\dot{v}) - \gamma^2\xi^2\dot{v}^2 + cv + d\,,$$

$$g_1 = v^2(\gamma^2\xi^2\ddot{v} + \gamma^2\xi\dot{v} + i\gamma\dot{v}) - \frac{3}{2}\gamma^2\xi^2\dot{v}^2 + \omega v^3 + 2cv^2 + 5dv\,.$$

Положим

$$\tilde{g}_0 = g_0/\gamma^2,\, \tilde{g}_1 = g_1/\gamma^2,\, \tilde{\omega} = \omega/\gamma^2,\, \tilde{c} = c/\gamma^2,\, \tilde{d} = d/\gamma^2\,.$$

Тогда эти формулы примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0 &= v(\xi^2\ddot{v} + \xi\dot{v}) - \xi^2\dot{v}^2 + \tilde{c}v + \tilde{d}\,,\\ \tilde{g}_1 &= v^2\left[\xi^2\ddot{v} + \xi\dot{v}\left(1 - \frac{1}{i\gamma}\right)\right] - \frac{3}{2}v\xi^2\dot{v}^2 + \tilde{\omega}v^3 + 2\tilde{c}v^2 + 5\tilde{d}v\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из первой формулы (4.4) следует

$$\frac{\delta\tilde{g}_0}{\delta v} = v\xi^2\frac{d^2}{d\xi^2} + (v - 2\dot{v}\xi)\xi\frac{d}{d\xi} + \tilde{c} + \xi^2\ddot{v} + \xi\dot{v}\,. \tag{4.5}$$

Согласно [3] укороченное уравнение $\tilde{g}_0 = 0$ имеет три семейства решений, являющихся рядами Лорана по ξ: F_1, F_2^+ и F_3, но все они являются подсемействами одного большого семейства F решений

$$\varphi_0 = v = A\xi + B + C\xi^{-1}\,,$$

параметры которых связаны соотношениями

$$B = -\tilde{c}, \qquad 4AC = \tilde{c}^2 - 2\tilde{d}\,.$$

Поскольку

$$v - 2\dot{v}\xi = -A\xi + B + 3C\xi^{-1}, \quad \tilde{c} + \xi^2\ddot{v} + \xi\dot{v} = A\xi - B + C\xi^{-1}\,,$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_1 = \tilde{\omega}v^3 + v^2\left[\ddot{v}\xi^2 + \dot{v}\xi\left(1 - \frac{1}{i\gamma}\right)\right] - \frac{3}{2}v\xi^2\dot{v}^2 + 2\tilde{c}v^2 + 5\tilde{d}v =\\ = \tilde{\omega}\left[A^3\xi^3 + 3A^2B\xi^2 + 3(AB^2 + A^2C)\xi + B^3 + 6ABC + 3(AC^2 + B^2C)\xi^{-1} +\right.\\ \left. +3BC^2\xi^{-2} + C^3\xi^{-3}\right] - A^3\frac{2+i\gamma}{2i\gamma}\xi^3 - A^2B\frac{4+3i\gamma}{2i\gamma}\xi^2 +\\ + \left(-A^2C\frac{2+11i\gamma}{2i\gamma} - AB^2\frac{2+i\gamma}{2i\gamma}\right)\xi + \frac{1}{2}B^3 - 7ABC +\\ + \left(AC^2\frac{2-11i\gamma}{2i\gamma} + B^2C\frac{2-i\gamma}{2i\gamma}\right)\xi^{-1} + BC^2\frac{4-3i\gamma}{2i\gamma}\xi^{-2} + C^3\frac{2-i\gamma}{2i\gamma}\xi^{-3}\,,\end{aligned}$$

то уравнение для $\varphi_1(\xi)$ имеет вид

$$\begin{aligned}(A\xi + B + C\xi^{-1})\left[\frac{1}{i\gamma}\left(\frac{1}{i\gamma} - 1\right)\varphi_1 + \frac{2}{i\gamma}\xi\dot{\varphi}_1 + \xi^2\ddot{\varphi}_1\right] +\\ +(-A\xi + B + 3C\xi^{-1})\left[\frac{1}{i\gamma}\varphi_1 + \xi\dot{\varphi}_1\right] + (A\xi - B + C\xi^{-1})\varphi_1 + \tilde{g}_1 = 0\,.\end{aligned}$$

Оно имеет решение в виде многочлена Лорана

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi) =& \tilde{\omega}\gamma^2\left[\frac{A^2}{(1+i\gamma)^2}\xi^2 + \frac{2AB}{1+i\gamma}\xi + \frac{B^2}{1+\gamma^2} + \frac{AC(2+6\gamma^2)}{(1+\gamma^2)^2} +\right.\\ &\left.\frac{2BC}{1-i\gamma}\xi^{-1} + \frac{C^2}{(1-i\gamma)^2}\xi^{-2}\right] +\\ &+ \gamma^2\left[-\frac{A^2(2+i\gamma)}{2i\gamma(1+i\gamma)^2}\xi^2 - \frac{AB}{i\gamma(1+i\gamma)}\xi + \frac{B^2}{2(1+\gamma^2)} -\right.\\ &\left.\frac{AC(1-\gamma^2)}{(1+\gamma^2)^2} + \frac{BC}{i\gamma(1-i\gamma)}\xi^{-1} + \frac{C^2(2-i\gamma)}{2i\gamma(1-i\gamma)^2}\xi^{-2}\right].\end{aligned} \tag{4.6}$$

Итак, доказана

Теорема 3. *В случае I в экзотическом разложении* (1.8) *решений уравнения* P_5 *коэффициент* $\varphi_1(\xi)$ *является многочленом Лорана* (4.6).

5. Экзотическое разложение в случае II

Введём новую независимую переменную $\xi = x^{i\gamma}$ согласно (4.1). Тогда согласно (4.2) выражения (1.7), делённые на γ^2, примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0(\xi,w) =&\gamma^{-2}h_0(x,w) = -w(w+1)(\xi^2\ddot{w}+\xi\dot{w}) + \left(w+\frac{1}{2}\right)\xi^2\dot{w}^2 + \\ &+\tilde{a}(w+1)^2+\tilde{b}w^2\,, \\ \tilde{h}_1(\xi,w) =&\gamma^{-2}h_1(x,w) = \tilde{c}w^2(w+1)^2\,, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\tilde{a} = a/\gamma^2$, $\tilde{b} = b/\gamma^2$, $\tilde{c} = c/\gamma^2$. Согласно [4, 5] все экзотические решения уравнения $\tilde{h}_0(\xi,w) = 0$ имеют вид

$$w = \varphi_0 = A\xi + B + C\xi^{-1}\,, \tag{5.2}$$

где параметры связаны соотношениями

$$B = \tilde{a}+\tilde{b}-\frac{1}{2}\,, \qquad 4AC = (\tilde{a}+\tilde{b})^2+\tilde{a}-\tilde{b}+\frac{1}{4}\,. \tag{5.3}$$

Согласно (5.1)

$$\frac{\delta\tilde{h}_0}{\delta w} = -w(w+1)\xi^2\tfrac{d^2}{d\xi^2} - w(w+1)\xi\tfrac{d}{d\xi} + 2\left(w+\frac{1}{2}\right)\dot{w}\xi^2\tfrac{d}{d\xi} +$$

$$+2\tilde{a}(w+1)+2\tilde{b}w-(2w+1)\left(\xi^2\ddot{w}+\xi\dot{w}\right)+\xi^2\dot{w}^2\,.$$

Уравнение (1.9) для φ_1 принимает вид

$$a_1\left[\frac{1}{i\gamma}\left(\frac{1}{i\gamma}-1\right)\varphi_1+\frac{2}{i\gamma}\xi\dot{\varphi}_1+\xi^2\ddot{\varphi}_1\right]+a_2\left[\frac{1}{i\gamma}\varphi_1+\xi\dot{\varphi}_1\right]+a_3\varphi_1+\tilde{h}_1=0\,, \tag{5.4}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 =& - w(w+1) = -A^2\xi^2 - A(2B+1)\xi - 2AC - B(B+1) - \\
& - (2B+1)C\xi^{-1} - C^2\xi^{-2}\,, \\
a_2 =& (2w+1)\dot{w}\xi - w(w+1) = A^2\xi^2 - [2AC + B(B+1)] - 2(2B+1)C\xi^{-1} - \\
& - 3C^2\xi^{-2}\,, \\
a_3 =& 2\tilde{a}(w+1) + 2\tilde{b}w - (2w+1)(\xi^2\ddot{w} + \xi\dot{w}) + \xi^2\dot{w}^2 = -A^2\xi^2 - 2AC + \\
& + B(B+1) - C^2\xi^{-2}\,, \\
\frac{\tilde{h}_1}{\tilde{c}} =& w^2(w+1)^2 = A^4\xi^4 + 2A^3(2B+1)\xi^3 + [4A^3C + A^2\beta]\xi^2 + \\
& + [6A^2(2B+1)C + 2AB(B+1)(2B+1)]\xi + 6A^2C^2 + 2A\beta C + \\
& + B^2(B+1)^2 + [6A(2B+1)C^2 + 2B(B+1)(2B+1)C]\xi^{-1} + \\
& + [4AC^3 + \beta C^2]\xi^{-2} + 2(2B+1)C^3\xi^{-3} + C^4\xi^{-4}\,, \\
\beta =& 6B(B+1) + 1.
\end{aligned}$$

Носитель и многоугольник Ньютона уравнения (5.4) показаны на рис. 6.

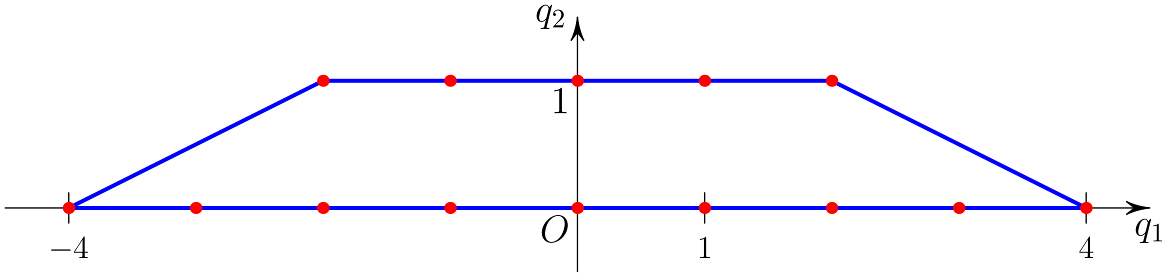

Рис. 6. Носитель и многоугольник уравнения (5.4).

Поскольку наклоны боковых рёбер многоугольника равны ± 2, то решения уравнения (5.4) ищем в виде многочлена Лорана со степенями от -2 до $+2$

$$\varphi_1 = D\xi^2 + E\xi + F + G\xi^{-1} + H\xi^{-2}\,. \tag{5.5}$$

Подставляя это выражение в систему (5.4), получаем для **пяти** коэффициентов D,E,F,G,H линейную систему **девяти** уравнений, соответствующих обнулению коэффициентов при ξ^4, ξ^3, ξ^2, ξ, ξ^0, ξ^{-1}, ξ^{-2}, ξ^{-3}, ξ^{-4}. Из уравнений при ξ^4, ξ^3, ξ^2 находим

$$\begin{gathered}
D \stackrel{def}{=} D_1 = -c\frac{A^2}{(1+i\gamma)^2}\,, \quad E \stackrel{def}{=} E_1 = -c\frac{A(2B+1)}{1+i\gamma}\,, \\
F \stackrel{def}{=} F_1 = -c\frac{2AC(1-\gamma^2)}{(1+\gamma^2)^2} - c\frac{B(B+1)(1-3\gamma^2)}{(1+\gamma^2)^2}\,.
\end{gathered} \tag{5.6}$$

С другой стороны, из уравнений при $\xi^{-2}, \xi^{-3}, \xi^{-4}$ находим

$$
\begin{gathered}
H = H_2 = -c\frac{C^2}{(1-i\gamma)^2}\,, \quad G = G_2 = -c\frac{(2B+1)C}{1-i\gamma}\,, \\
F = F_2 = -c\frac{2AC(1+7\gamma^2)}{(1+\gamma^2)^2} - c\frac{B(B+1)(1+5\gamma^2)}{(1+\gamma^2)^2}\,.
\end{gathered}
\tag{5.7}
$$

Равенство двух значений $F_1 = F_2$ согласно (5.6) и (5.7) возможно только при условии

$$
2AC + B(B+1) = 0\,. \tag{5.8}
$$

Тогда

$$
F = -c\frac{4AC\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} = c\frac{2B(B+1)\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2}\,. \tag{5.9}
$$

Подставляя найденные значения (5.6), (5.7), (5.9) коэффициентов D,E,F,G,H в уравнения при ξ и ξ^{-1}, получаем, что при $A(2B+1)C \neq 0$ они выполнены только при условии $\gamma^4 = 1$, т.е. $\gamma^2 = \pm 1$. Поскольку $\gamma^2 > 0$, то это значит, что $\gamma^2 = 1$. Получаем второе условие

$$
A(2B+1)C(\gamma^2 - 1) = 0\,. \tag{5.10}
$$

Уравнение при ξ^0 при подстановке найденных коэффициентов и учёте условия (5.10) выполнено.
Итак, доказана

Теорема 4. *В случае II в экзотическом разложении* (1.8) *решений уравнения* P_5 *коэффициент* $\varphi_1(\xi)$ *является многочленом Лорана* (5.5)*,* (5.6)*,* (5.7)*,* (5.9) *только при двух условиях* (5.8) *и* (5.10) *на параметры решения* $\varphi_0(\xi)$ (5.2) *укороченного уравнения.*

Замечание 2. Здесь для существования полиномиального коэффициента φ_1 потребовались дополнительные условия. Но число этих условий, равное **двум**, меньше, чем превышение числа линейных уравнений над числом неизвестных, равное **четырём**. Следовательно, и здесь ситуация вырожденная, т. е. не общего положения.

Список литературы

[1] А. Д. Брюно, О сложных разложениях решений ОДУ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2011. № 15. 26 с.
URL:`http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-15`

[2] А. Д. Брюно, Вычисление сложных асимптотических разложений решений уравнений Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 55. 27 с. doi:10.20948/prepr-2017-55
URL: `http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-55`

[3] А. Д. Брюно, Экзотические разложения решений третьего уравнения Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, № 96. 22 с. doi:10.20948/prepr-2017-96
URL: `http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-96`

[4] А. Д. Брюно, И. В. Горючкина, Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды Моск. Матем. Общества. 2010. Т. 71, С. 6–118 = A.D. Bruno and I.V. Goryuchkina, Asymptotic expansions of solutions of the sixth Painleve equation // Transactions of Moscow Math. Soc. 2010. V. 71. P. 1–104.

[5] А. Д. Брюно, А. В. Парусникова, Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве // ДАН. 2011. Т. 438. № 4. С. 439–443 = A.D. Bruno and A.V. Parusnikova, Local expansions of solutions to the fifth Painleve equation // Doklady Mathematics. 2011. **83**:3. P. 348–352.

Список иллюстраций

Содержание