



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 113 за 2017 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Ивашкин В.В., Лан Аньци**

Анализ оптимальности  
траекторий экспедиции  
Земля–астероид–Земля

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Ивашкин В.В., Лан Аньци Анализ оптимальности траекторий экспедиции Земля–астероид–Земля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 113. 25 с. doi:[10.20948/prepr-2017-113](https://doi.org/10.20948/prepr-2017-113)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-113>



**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**В.В. Ивашкин, А. Лан**

**АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОСТИ ТРАЕКТОРИЙ ЭКСПЕДИЦИИ  
ЗЕМЛЯ–АСТЕРОИД–ЗЕМЛЯ**

**Москва - 2017**

**Ивашкин В.В., Лан А.**

## **Анализ оптимальности траекторий экспедиции Земля–астероид–Земля**

### **Аннотация**

Анализируются полученные прямыми методами энергетически оптимальные импульсные траектории космического аппарата (КА) для перелета от Земли к астероиду и для возврата от астероида к Земле. Построены сопряженные функции вдоль гелиоцентрических траекторий КА с сообщением в номинале трех импульсов скорости в сферах действия Земли и астероида. Это позволяет исследовать оптимальность в классе многоимпульсных перелетов. Получены производные от функционала по граничным временам траектории. Рассмотрены численные примеры для экспедиции Земля–астероид Апофис–Земля.

**Ключевые слова:** космический аппарат, астероид Апофис, космическая экспедиция к астероиду, оптимальная траектория КА, сопряженные функции, условие оптимальности.

**Vyachesav Vasilievich Ivashkin, Anqi Lang**

## **An Analysis of Optimality of Trajectories for Mission Earth–Asteroid–Earth**

### **Abstract**

Energy optimal impulsive trajectories for space flight from the Earth to the asteroid and following return to the Earth are analyzed. The trajectories are assumed to be obtained by direct methods. There are constructed adjoint functions for heliocentric trajectories with applying the velocity impulses in the celestial body's spheres of influence. It allows investigating the optimality in a class of multi-impulsive flights. The derivatives of functional with respect to the trajectory boundary times are obtained. Numerical examples are given for the mission Earth–asteroid Apophis–Earth.

**Keywords:** spacecraft, asteroid Apophis, space mission to asteroid, optimal space trajectory, adjoint functions, conditions of optimality.

## **Оглавление**

1	Введение. Рассмотренные функционалы задачи.....	3
2	Построение сопряженных функций. Условие оптимальности.....	8
3	Влияние варьирования граничных времен траектории.....	16
4	Численные примеры для экспедиции Земля–Апофис–Земля.....	22
5	Выводы.....	23
6	Библиографический список .....	24

## **Contents**

1	Introduction. Considered functionals in the problem .....	3
2	Construction of adjoint functions. Optimality condition.....	8
3	Influence of variations in trajectory boundary time.....	16
4	Numerical examples for mission Earth–Apophis–Earth.....	22
5	Conclusions .....	23
6	References .....	24

## 1. Введение. Рассмотренные функционалы задачи

В настоящее время актуальны комические исследования малых тел Солнечной системы – астероидов и комет. Особенно важны экспедиции к таким телам, предполагающие после исследования небесного тела возврат КА к Земле и доставку спускаемого аппарата (СА) с научными результатами на поверхность Земли. В частности, особенно важно взять образцы грунта небесного тела и в СА доставить их на Землю для изучения в наземных лабораториях [1-5]. В работе рассматривается метод анализа энергетически оптимальных траекторий экспедиции Земля–астероид–Земля, основанный на построении сопряженных функций, он применяется к анализу экспедиции на астероид Апофис.

1.1. **Схема экспедиции.** Используется следующая схема перелета [6-8]. Сначала КА с начальной массой  $m_0$  выводится ракетой-носителем (РН), например РН «Союз», на близкую к Земле опорную круговую орбиту ИСЗ. После некоторого пассивного движения по этой орбите разгонный блок «Фрегат» (со скоростью истечения газов из двигателя  $c_1$ ) в оптимальный момент  $t_0$  сообщает КА разгонный импульс скорости  $\Delta V_1$  и переводит КА на гиперболическую орбиту отлета от Земли. После этого разгонный блок «Фрегат» массой  $\Delta m_1$  отделяется. С выходом КА из сферы действия Земли в момент  $t_1$  начинается гелиоцентрический полет КА к астероиду. При  $t > t_1$  управление движением КА (коррекция, торможение у астероида и разгон к Земле) осуществляется другой специальной двигательной установкой «большой тяги» ДУ2 со скоростью истечения газов  $c_2$ . Активные участки моделируем импульсами скорости с учетом «гравитационных потерь», если необходимо. При приближении КА к Апофису ДУ2 сообщает КА тормозной импульс скорости  $\Delta V_2$  и переводит КА в момент  $t_2$  на орбиту спутника Апофиса в его сфере действия. После некоторого ожидания у Апофиса, в момент  $t_3$  ДУ2 сообщает КА разгонный импульс скорости  $\Delta V_3$ , и КА переводится на орбиту полета к Земле. В момент  $t_4$  КА подлетает к орбите Земли, входит в сферу действия Земли. Затем от КА отделяется СА, он входит в атмосферу Земли, осуществляется его аэродинамическое торможение и посадка на поверхность Земли. В основном варианте анализа полагаем, что при подлете к Земле для уменьшения энергетических затрат тормозной импульс скорости двигателем не сообщается, аналогично [1, 2], и КА входит в атмосферу с гиперболической скоростью. В этом случае энергетические затраты на экспедицию в номинале определяются тремя величинами импульсов скорости  $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3$ .

1.2. **Модель построения траектории экспедиции.** При оптимизации гелиоцентрической траектории экспедиции и определении ее основных характеристик используем на первом этапе анализа приближенную модель точечных сфер действия (ТСД) Земли и астероида (затем, на втором этапе анализа, траектория уточняется и оптимизируется с учетом основных

возмущений). В этом случае траектория КА определится граничными моментами  $t_1, t_2, t_3, t_4$ . При этом полагаем, что в номинале гелиоцентрическое движение КА между моментами времени  $t_1$  и  $t_2$ , а также между моментами времени  $t_3$  и  $t_4$  – пассивное, причем оно происходит в центральном кеплеровском гравитационном поле Солнца без учета возмущений:

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{V}; d\mathbf{V}/dt = \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\mu_S \mathbf{r} / r^3, \quad (1)$$

здесь  $\mathbf{r}, \mathbf{V}$  – гелиоцентрические радиус-вектор и вектор скорости,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\mathbf{g}$  – гравитационное ускорение,  $\mu_S$  ( $\approx 1,3271244 \cdot 10^{11}$  км<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>) – гравитационный параметр Солнца.

Тогда орбита КА  $\mathbf{q}_{12}$  при движении КА на первой дуге траектории  $P_1P_2$ , при  $t_1 \leq t \leq t_2$ , определится решением соответствующей задачи Эйлера–Ламберта по радиусам-векторам КА  $\mathbf{r}(t_1)$  и  $\mathbf{r}(t_2)$  и времени перелета  $\Delta t_{12}=c$ . При этом времена  $t_1$  и  $t_2$  по элементам орбит Земли  $\mathbf{q}_E$  и астероида  $\mathbf{q}_A$  определяют радиус-векторы Земли  $\mathbf{r}_{E1} = \mathbf{r}(\mathbf{q}_E, t_1)$  и КА  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_{E1}$  в начальный момент  $t_1$ , радиус-векторы астероида  $\mathbf{r}_{A2} = \mathbf{r}(\mathbf{q}_A, t_2)$  и КА  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2) = \mathbf{r}_{A2}$  в конечный момент  $t_2$  первой дуги, а также соответствующие векторы скорости Земли и астероида  $\mathbf{V}_{E1} = \mathbf{V}(\mathbf{q}_E, t_1)$ ,  $\mathbf{V}_{A2} = \mathbf{V}(\mathbf{q}_A, t_2)$ . После определения орбиты КА  $\mathbf{q}_{12}$  определяются скорости КА в граничных точках  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}(\mathbf{q}_{12}, t_1)$ ,  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}(\mathbf{q}_{12}, t_2)$ .

Аналогично, орбита КА  $\mathbf{q}_{34}$  при движении КА на второй дуге траектории  $P_3P_4$ , при  $t_3 \leq t \leq t_4$ , также определится решением задачи Эйлера–Ламберта по радиусам-векторам КА  $\mathbf{r}(t_3)$  и  $\mathbf{r}(t_4)$  и времени перелета  $\Delta t_{34} = t_4 - t_3$ . При этом времена  $t_3$  и  $t_4$  по элементам орбит Земли  $\mathbf{q}_E$  и астероида  $\mathbf{q}_A$  определяют радиус-векторы астероида  $\mathbf{r}_{A3} = \mathbf{r}(\mathbf{q}_A, t_3)$  и КА  $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}(t_3) = \mathbf{r}_{A3}$  в начальный момент  $t_3$  второй дуги траектории, радиус-векторы Земли  $\mathbf{r}_{E4} = \mathbf{r}(\mathbf{q}_E, t_4)$  и КА  $\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}(t_4) = \mathbf{r}_{E4}$  в конечный момент  $t_4$ , а также соответствующие векторы скорости астероида и Земли  $\mathbf{V}_{A3} = \mathbf{V}(\mathbf{q}_A, t_3)$ ,  $\mathbf{V}_{E4} = \mathbf{V}(\mathbf{q}_E, t_4)$ . После определения орбиты КА  $\mathbf{q}_{34}$  определяются скорости КА в граничных точках  $\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}(\mathbf{q}_{34}, t_3)$ ,  $\mathbf{V}_4 = \mathbf{V}(\mathbf{q}_{34}, t_4)$ .

Скорости КА относительно небесных тел, определенные без учета притяжения этих тел, полагаем равными асимптотическим скоростям «на бесконечности»:

$$\mathbf{V}_{\infty 1} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_{E1}(t); \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_{\infty 2} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_{A2}(t); \quad (3)$$

$$\mathbf{V}_{\infty 3} = \mathbf{V}_3 - \mathbf{V}_{A3}(t); \quad (4)$$

$$\mathbf{V}_{\infty 4} = \mathbf{V}_4 - \mathbf{V}_{E4}(t). \quad (5)$$

Эти скорости определяют движение КА относительно соответствующих небесных тел, импульсы скорости и массово-энергетические характеристики полета, в частности функционал траектории  $J$ . Рассмотрим определение импульсов скорости и исследованные функционалы управления.

**1.3. Определение номинальных импульсов скорости.** Первый импульс скорости  $\Delta V_1$  физически сообщается в сфере действия Земли. Он осуществляет переход с начальной опорной круговой орбиты радиуса  $R_0$  ( $\approx 6378+200$  км) на гиперболическую орбиту с скоростью на «бесконечности»  $V_{\infty 1}$ . Тогда величина этого импульса скорости:

$$\Delta V_1 = V_{\pi 1} - V_{c0}; V_{\pi 1} = (V_{\infty 1}^2 + 2\mu_E / R_0)^{1/2}; V_{c0} = (\mu_E / R_0)^{1/2}, \quad (6)$$

здесь  $\mu_E$  ( $\approx 398600,4481$  км<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>) – гравитационный параметр Земли,  $V_{c0}$  – скорость на начальной опорной круговой орбите.

Аналогично полагаем приближенно, что второй и третий импульсы скорости  $\Delta V_2$  и  $\Delta V_3$  соответственно прилагаются в сфере действия астероида Апофиса на круговых орбитах радиусом  $R_2, R_3$  ( $\approx 500$  м). Учитывая, что предельная скорость КА перед вторым импульсом была  $V_{\infty 2}$  (2), а после третьего импульса скорости  $V_{\infty 3}$  (3), для величин данных импульсов скорости получим:

$$\Delta V_2 = V_{\pi 2} - V_{c2}; V_{\pi 2} = (V_{\infty 2}^2 + 2\mu_A / R_2)^{1/2}; V_{c2} = (\mu_A / R_2)^{1/2}, \quad (7)$$

$$\Delta V_3 = V_{\pi 3} - V_{c3}; V_{\pi 3} = (V_{\infty 3}^2 + 2\mu_A / R_3)^{1/2}; V_{c3} = (\mu_A / R_3)^{1/2}, \quad (8)$$

где  $V_{\pi 2}, V_{\pi 3}$  – скорости в перицентрах астероидоцентрических гиперболических орбит,  $V_{c2}, V_{c3}$  – скорости на астероидоцентрических круговых орбитах;  $\mu_A$  – гравитационный параметр астероида.

*Замечание 1.* Для астероида Апофис (и подобных ему) размеры (средний радиус  $\sim 160$  м), гравитационный параметр  $\mu_A$  ( $\approx 2$  м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>) очень малы, первая и вторая космические скорости также малы (сантиметры в сек.). В то же время скорости «на бесконечности»  $V_{\infty 2}, V_{\infty 3}$  велики (километры в сек. – сотни метров в сек.). Поэтому, учитывая также, что сама рассматриваемая модель – приближенная, можно в (7, 8) не учитывать притяжение астероида и полагать приближенно, что импульс  $\Delta V_2$  гасит скорость  $V_{\infty 2}$  и переводит КА на орбиту астероида  $q_A$ , а импульс  $\Delta V_3$  добавляет КА скорость  $V_{\infty 3}$  и переводит его на орбиту  $q_{34}$  полета к Земле:

$$\Delta V_2 \approx -V_{\infty 2} = V_{A2} - V_2; \Delta V_2 \approx V_{\infty 2} \approx V_{\pi 2}; \quad (7a)$$

$$\Delta V_3 \approx V_{\infty 3} = V_3 - V_{A3}; \Delta V_3 \approx V_{\infty 3} \approx V_{\pi 3}. \quad (8a)$$

*Замечание 2.* В основном варианте анализа траекторий экспедиции рассмотрен случай управления, когда для уменьшения энергетических затрат нет торможения движения КА перед входом в атмосферу Земли,  $\Delta V_4 = 0$ , аналогично проектам [1-5]. В качестве дополнительного варианта рассмотрен также случай торможения и входа КА в атмосферу с вытянутой эллиптической орбиты, аналогично [9].

*Замечание 3.* Выше рассмотрена номинальная схема полета. Будем также варьировать траекторию, когда будут вводиться дополнительные малые импульсы скорости на пассивных дугах полета, аналогично [10, 11]. В этом случае, если в минимальном варианте введем по одному малому импульсу скорости на каждой дуге  $\delta V_{m1}$ ,  $\delta V_{m2}$ , то получим пятиимпульсную проварьированную траекторию, рис. 1.

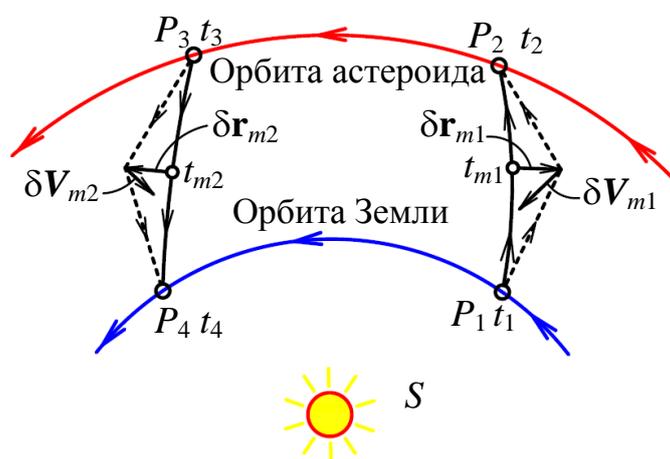


Рис. 1. Схема варьирования траектории экспедиции КА введением дополнительных импульсов скорости.

В рамках такой модели движения КА можно оптимизировать траекторию КА, определив функционал и множества допустимых времен  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

**1.4. Критерии оптимальности.** Возможны различные критерии оптимальности траектории. Часто рассматривается минимум суммарной характеристической скорости. В импульсном случае это – минимум суммы величин импульсов скорости [12-14, 7 и др.]:

$$J_1 = \sum_{i=1}^N \Delta V_i. \quad (9)$$

Здесь в номинале  $N = 3$ , при варьировании введением двух дополнительных импульсов скорости  $N = 5$ .

Если эти импульсы скорости сообщаются одной двигательной установкой и без отделения промежуточных масс, то минимум характеристической скорости приводит к максимуму конечной массы. В более общем случае, когда меняются двигательные установки,  $c_1 \neq c_2$  и есть отделение масс, более эффективно применять для оптимизации траектории максимизацию конечной массы  $m_f$  или минимизацию функционала

$$J_2 = -m_f. \quad (10)$$

Определим этот функционал в данном случае для импульсного случая. В начальной точке  $P_1$  гелиоцентрической траектории масса КА  $m_1$ :

$$m_1 = m_0 \exp(-\Delta V_1/c_1) - \Delta m_1 = m_0 \mu_1 - \Delta m_1; \quad (11)$$

$$\mu_1 = \exp(-\Delta V_1/c_1), \quad (11a)$$

здесь  $\Delta V_1$  определяется при заданных временах ( $t_1, t_2$ ) скоростью  $\mathbf{V}_{\infty 1}$  (2, 6);  $m_0$  – начальная масса КА на начальной опорной околоземной орбите  $T_0$ ;  $c_1$  – скорость истечения газов из ДУ разгонного блока «Фрегат»;  $\Delta m_1$  – отделяемая после разгона у Земли масса разгонного блока «Фрегат».

После сообщения КА у астероида второго, тормозного, импульса скорости  $\Delta \mathbf{V}_2$  с помощью ДУ2 со скоростью истечения газов  $c_2$  масса КА

$$m_2 = m_1 \mu_2 = m_1 \exp(-\Delta V_2/c_2); \quad (12)$$

$$\mu_2 = \exp(-\Delta V_2/c_2); \quad (12a)$$

здесь импульс скорости  $\Delta \mathbf{V}_2$  определяется скоростью  $\mathbf{V}_{\infty 2}$  (3, 7, 7a).

Аналогично, масса КА после приложения третьего, ускоряющего, импульса скорости  $\Delta \mathbf{V}_3$

$$m_3 = m_2 \mu_3 = m_2 \exp(-\Delta V_3/c_2); \quad (13)$$

$$\mu_3 = \exp(-\Delta V_3/c_2); \quad (13a)$$

импульс скорости  $\Delta V_3$  определяется скоростью  $\mathbf{V}_{\infty 3}$  (4, 8, 8a). В номинальном трехимпульсном варианте, когда нет промежуточных импульсов скорости  $\delta \mathbf{V}_{m1}$ ,  $\delta \mathbf{V}_{m2}$ , конечная масса

$$m_f = m_3 = m_1 \mu_2 \mu_3 = m_1 \mu_{23} = (m_0 \mu_1 - \Delta m_1) \mu_2 \mu_3 = m_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3 - \Delta m_1 \mu_2 \mu_3. \quad (14a)$$

$$\mu_{23} = \mu_2 \mu_3; \quad (14b)$$

$$m_f = m'_f - \Delta m_{23}; m'_f = m_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3; \Delta m_{23} = \Delta m_1 \mu_2 \mu_3. \quad (14c)$$

Если траектория варьируется и вводятся с помощью ДУ2 малые промежуточные импульсы скорости  $\delta \mathbf{V}_{m1}$ ,  $\delta \mathbf{V}_{m2}$ , то в линейном приближении конечная масса

$$m_f = m_1 \mu_{m1} \mu_2 \mu_3 \mu_{m2} = m_1 \mu; \quad (15)$$

$$\mu = \mu_{m1} \mu_2 \mu_3 \mu_{m2} = \exp(-(\delta \mathbf{V}_{m1} + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \delta \mathbf{V}_{m2})/c_2); \quad (15a)$$

$$\mu_{m1} = \exp(-\delta \mathbf{V}_{m1}/c_2) \approx 1 - \delta \mathbf{V}_{m1}/c_2, \quad (15b)$$

$$\mu_{m2} = \exp(-\delta \mathbf{V}_{m2}/c_2) \approx 1 - \delta \mathbf{V}_{m2}/c_2. \quad (15c)$$

В последнем случае введение этих малых импульсов скорости при заданных временах  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , вызывает изменение скоростей  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , и, поэтому, импульсов скорости  $\Delta V_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Более точно энергетическую эффективность траектории отражает максимизация полезной массы  $m_P$  [6]. Эту массу определяем, вычитая из конечной массы  $m_f$  (15) массу двигательной установки ДУ2  $\Delta m_2$ . Относительно последней полагаем, что эта отделяемая масса  $\Delta m_2$  включает массу постоянной части  $a$  и массу баков  $b$ , пропорциональную массе топлива  $m_F$ , расходуемого на орбитах  $P_1P_2$  и  $P_3P_4$  при сообщении импульсов скорости  $\delta V_{m1}$ ,  $\Delta V_2$ ,  $\Delta V_3$ ,  $\delta V_{m2}$  (15a):

$$\Delta m_2 = a + b m_F; \quad (16a)$$

$$m_F = m_1 - m_f = m_1 (1 - \mu); \quad (16b)$$

$$m_P = m_f - \Delta m_2. \quad (16c)$$

Минимизируемым функционалом в данном случае будет:

$$J_3 = -m_P. \quad (17)$$

Далее рассмотрим эти три случая (9, 10, 17).

## **2. Построение сопряженных функций. Условие оптимальности**

Сначала рассмотрим вариант варьирования траектории, когда граничные времена  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) зафиксированы, а могут сообщаться малые дополнительные импульсы скорости  $\delta V_{m1}$ ,  $\delta V_{m2}$ .

### **2.1. Сопряженные переменные в случае минимизации суммы величин импульсов скорости**

Сначала рассмотрим вариант, когда минимизируемый функционал – характеристическая скорость, т.е. в данном импульсном случае минимизируется сумма величин импульсов скорости  $J_1$  (9). Отметим, что рассматриваем произвольную, не обязательно оптимальную, траекторию.

#### **2.1.1. Вариация функционала $J_1$ с учетом дополнительных импульсов скорости**

Пусть вводятся малые дополнительные импульсы скорости  $\delta V_{m1}$  – в некоторый произвольный момент времени  $t_{m1}$  ( $t_1 < t_{m1} < t_2$ ) и  $\delta V_{m2}$  – в некоторый момент времени  $t_{m2}$  ( $t_3 < t_{m2} < t_4$ ). Это вызовет вариации радиус-векторов

траектории  $\delta \mathbf{r}(t_{m1})$  и  $\delta \mathbf{r}(t_{m2})$  в эти моменты времени и вариации  $\delta \Delta \mathbf{V}_1$ ,  $\delta \Delta \mathbf{V}_2$ ,  $\delta \Delta \mathbf{V}_3$  основных импульсов скорости. Тогда получим вариацию функционала:

$$dJ_1 = \delta|\Delta \mathbf{V}_1| + |\delta \mathbf{V}_{m1}| + \delta|\Delta \mathbf{V}_2| + \delta|\Delta \mathbf{V}_3| + |\delta \mathbf{V}_{m2}|. \quad (18)$$

Основные импульсы скорости  $\Delta \mathbf{V}_i$  и их величины определяются скоростями «на бесконечности»  $\mathbf{V}_{\infty i}$ . В данном случае граничные времена не меняются и скорости Земли и астероида не меняются, поэтому полные вариации скоростей на «бесконечности»  $\mathbf{V}_{\infty i}$  и основных импульсов определяются изохронными вариациями скорости КА  $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}(t_i)$ :

$$d\mathbf{V}_{\infty i} = \delta \mathbf{V}_i. \quad (18a)$$

Поэтому в линейном приближении получим:

$$\delta J_1 = (\partial \Delta V_1 / \partial \mathbf{V}_{\infty 1}) \delta \mathbf{V}_1 + |\delta \mathbf{V}_{m1}| + (\partial \Delta V_2 / \partial \mathbf{V}_{\infty 2}) \delta \mathbf{V}_2 + (\partial \Delta V_3 / \partial \mathbf{V}_{\infty 3}) \delta \mathbf{V}_3 + |\delta \mathbf{V}_{m2}|. \quad (18b)$$

Рассмотрим производные от величин импульсов скорости по соответствующим векторам скорости на «бесконечности»  $\partial \Delta V_i / \partial \mathbf{V}_{\infty i}$ . Учитывая выражение (6) для величины импульса  $\Delta \mathbf{V}_1$ , получим:

$$\frac{\partial \Delta V_1}{\partial \mathbf{V}_{\infty 1}} = \left( \frac{\partial \Delta V_1}{\partial v_{\infty 1x}}; \frac{\partial \Delta V_1}{\partial v_{\infty 1y}}; \frac{\partial \Delta V_1}{\partial v_{\infty 1z}} \right) = \frac{\partial v_{\pi 1}}{\partial \mathbf{V}_{\infty 1}} = \frac{\mathbf{V}_{\infty 1}^*}{v_{\pi 1}}; \quad (19a)$$

Здесь и далее «\*» означает транспонирование. Аналогично, учитывая выражения (7, 8), получим:

$$\frac{\partial \Delta V_2}{\partial \mathbf{V}_{\infty 2}} = \left( \frac{\partial \Delta V_2}{\partial v_{\infty 2x}}; \frac{\partial \Delta V_2}{\partial v_{\infty 2y}}; \frac{\partial \Delta V_2}{\partial v_{\infty 2z}} \right) = \frac{\partial v_{\pi 2}}{\partial \mathbf{V}_{\infty 2}} = \frac{\mathbf{V}_{\infty 2}^*}{v_{\pi 2}}; \quad (19b)$$

$$\frac{\partial \Delta V_3}{\partial \mathbf{V}_{\infty 3}} = \left( \frac{\partial \Delta V_3}{\partial v_{\infty 3x}}; \frac{\partial \Delta V_3}{\partial v_{\infty 3y}}; \frac{\partial \Delta V_3}{\partial v_{\infty 3z}} \right) = \frac{\partial v_{\pi 3}}{\partial \mathbf{V}_{\infty 3}} = \frac{\mathbf{V}_{\infty 3}^*}{v_{\pi 3}}. \quad (19c)$$

Замечание 1. При полете к малому астероиду типа Апофиса,  $\mu_A \approx 0$ , будет, с учетом (7a), (8a):

$$\frac{\partial \Delta V_2}{\partial \mathbf{V}_{\infty 2}} = \frac{\mathbf{V}_{\infty 2}^*}{v_{\pi 2}} = \frac{\mathbf{V}_{\infty 2}^*}{V_{\infty 2}} = -\frac{\Delta \mathbf{V}_2}{\Delta V_2}; \quad (19d)$$

$$\frac{\partial \Delta V_3}{\partial \mathbf{V}_{\infty 3}} = \frac{\mathbf{V}_{\infty 3}^*}{v_{\pi 3}} = \frac{\mathbf{V}_{\infty 3}^*}{V_{\infty 3}} = \frac{\Delta \mathbf{V}_3}{\Delta V_3}. \quad (19e)$$

Учитывая (18-19), получим для вариации функционала выражение:

$$\delta J_1 = (\mathbf{V}_{\infty 1}^* / v_{\pi 1}) \delta \mathbf{V}_1 + |\delta \mathbf{V}_{m1}| + (\mathbf{V}_{\infty 2}^* / v_{\pi 2}) \delta \mathbf{V}_2 + (\mathbf{V}_{\infty 3}^* / v_{\pi 3}) \delta \mathbf{V}_3 + |\delta \mathbf{V}_{m2}|. \quad (20)$$

### 2.1.2. Введение сопряженных переменных

Преобразуем это выражение аналогично [10, 11], введя сопряженные к вектору скорости и радиусу-вектору (1) функции  $\lambda_v$ ,  $\lambda_r$ , удовлетворяющие уравнениям:

$$d\lambda_v/dt = -\lambda_r; d\lambda_r/dt = -(\partial g/\partial \mathbf{r})^* \lambda_v. \quad (21a)$$

В данном случае кеплеровского поля (1), система (21a) интегрируема, поэтому, как и для изохронных вариаций вектора скорости и радиус-вектора  $\delta \mathbf{V}(t)$ ,  $\delta \mathbf{r}(t)$ , для сопряженных функций  $\lambda_v(t)$ ,  $\lambda_r(t)$  есть аналитические выражения, задаваемые, например, формулами для изохронных производных [12-15, 7 и др.]. Сопряженные переменные  $\lambda_v(t)$ ,  $\lambda_r(t)$  и вариации  $\delta \mathbf{V}(t)$ ,  $\delta \mathbf{r}(t)$  связаны на каждой пассивной дуге соотношением [10]:

$$(\lambda_v(t), \delta \mathbf{V}(t)) + (\lambda_r(t), \delta \mathbf{r}(t)) = (\lambda_v(t), \delta \mathbf{V}(t)) - (\lambda_v'(t), \delta \mathbf{r}(t)) = \text{const}; \quad (21b)$$

где  $\lambda_v' = d\lambda_v/dt = -\lambda_r$ . Вектор-функцию  $\lambda_v(t)$ , сопряженную к вектору скорости, называют обычно «базис-вектором» [9]. Для краткости будем обозначать:

$$\lambda = \lambda_v; \lambda' = \lambda_v' = -\lambda_r; \lambda_1 = \lambda_v(t_1); \lambda_2 = \lambda_v(t_2); \lambda_3 = \lambda_v(t_3); \lambda_4 = \lambda_v(t_4). \quad (21c)$$

Для данного случая минимизации характеристической скорости  $J_1$  определим следующим образом граничные значения базис-вектора [10, 13, 7]:

$$\lambda_1 = \mathbf{V}_{\infty 1}/V_{\pi 1}; \lambda_2 = -\mathbf{V}_{\infty 2}/V_{\pi 2}; \lambda_3 = \mathbf{V}_{\infty 3}/V_{\pi 3}; \lambda_4 = \mathbf{0}. \quad (22)$$

Это полностью определяет вектор-функции  $\lambda_v(t)$ ,  $\lambda_r(t)$  на всей траектории экспедиции,  $t_1 \leq t \leq t_2$ ;  $t_3 \leq t \leq t_4$ . Тогда выражение для вариации (20) принимает вид:

$$\delta J_1 = (\lambda_1, \delta \mathbf{V}_1) + |\delta \mathbf{V}_{m1}| - (\lambda_2, \delta \mathbf{V}_2) + (\lambda_3, \delta \mathbf{V}_3) + |\delta \mathbf{V}_{m2}|. \quad (23)$$

Здесь первые три правых члена соответствуют первой дуге траектории, а последние два члена – второй дуге. Преобразуем (23), используя на каждой дуге соотношение (21b) и условия  $\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\lambda_1, \delta \mathbf{V}_1) &= (\lambda_{m1}, \delta \mathbf{V}_{m1}^-) + (\lambda_{r_{m1}}, \delta \mathbf{r}_{m1}); \\ (\lambda_2, \delta \mathbf{V}_2) &= (\lambda_{m1}, \delta \mathbf{V}_{m1}^+) + (\lambda_{r_{m1}}, \delta \mathbf{r}_{m1}); \\ (\lambda_3, \delta \mathbf{V}_3) &= (\lambda_{m2}, \delta \mathbf{V}_{m2}^-) + (\lambda_{r_{m2}}, \delta \mathbf{r}_{m2}); \\ (\lambda_4, \delta \mathbf{V}_4) &= 0 = (\lambda_{m2}, \delta \mathbf{V}_{m2}^+) + (\lambda_{r_{m2}}, \delta \mathbf{r}_{m2}); \end{aligned} \quad (23a)$$

где

$$\lambda_{mi} = \lambda_v(t_{mi}); \lambda_{r_{mi}} = \lambda_r(t_{mi}); i = (1; 2). \quad (23b)$$

Отсюда следует:

$$(\lambda_1, \delta \mathbf{V}_1) - (\lambda_2, \delta \mathbf{V}_2) = -(\lambda_{m1}, \delta \mathbf{V}_{m1}^+ - \delta \mathbf{V}_{m1}^-) = -(\lambda_{m1}, \delta \mathbf{V}_{m1}); \quad (23c)$$

$$(\lambda_3, \delta \mathbf{V}_3) = -(\lambda_{m2}, \delta \mathbf{V}_{m2}^+ - \delta \mathbf{V}_{m2}^-) = -(\lambda_{m2}, \delta \mathbf{V}_{m2}); \quad (23d)$$

где

$$\delta \mathbf{V}_{m1}^+ - \delta \mathbf{V}_{m1}^- = \delta \mathbf{V}_{m1}; \quad (23e)$$

$$\delta \mathbf{V}_{m2}^+ - \delta \mathbf{V}_{m2}^- = \delta \mathbf{V}_{m2} \quad (23f)$$

– вариации скорости при  $t = t_{m1}$ ,  $t = t_{m2}$ , т.е. промежуточные дополнительные малые импульсы скорости, возникающие при варьировании радиус-вектора на  $\delta \mathbf{r}_{m1}$  и  $\delta \mathbf{r}_{m2}$  в промежуточные моменты  $t_{m1}$ ,  $t_{m2}$ . Подставляя (23а, 23b) в (23), получим:

$$\begin{aligned} \delta J_1 &= |\delta \mathbf{V}_{m1}| - (\boldsymbol{\lambda}_{m1}, \delta \mathbf{V}_{m1}) + |\delta \mathbf{V}_{m2}| - (\boldsymbol{\lambda}_{m2}, \delta \mathbf{V}_{m2}) = \\ &= \delta V_{m1} (1 - (\boldsymbol{\lambda}_{m1}, \delta \mathbf{V}_{m1}^0)) + \delta V_{m2} (1 - (\boldsymbol{\lambda}_{m2}, \delta \mathbf{V}_{m2}^0)); \end{aligned} \quad (24)$$

здесь учтено, что

$$\delta \mathbf{V}_{mi} = \delta V_{mi} \delta \mathbf{V}_{mi}^0, \quad i=(1, 2); \quad (24a)$$

если

$$\delta V_{mi} = |\delta \mathbf{V}_{mi}|, \quad \delta \mathbf{V}_{mi}^0 = \delta \mathbf{V}_{mi} / |\delta \mathbf{V}_{mi}| \quad (24b)$$

– модули и единичные векторы вдоль дополнительных промежуточных малых импульсов скорости.

### 2.1.3. Условие оптимальности траектории для многоимпульсных перелетов

Возьмем вариации радиус-вектора  $\delta \mathbf{r}_{m1}$  и  $\delta \mathbf{r}_{m2}$  в промежуточных точках  $t_{mi}$  так, чтобы вариации скорости  $\delta \mathbf{V}_{mi}$  и единичные векторы  $\delta \mathbf{V}_{mi}^0$  были направлены вдоль базис-вектора  $\boldsymbol{\lambda}_{mi}$  в этих точках. Тогда

$$(\boldsymbol{\lambda}_{mi}, \delta \mathbf{V}_{mi}^0) = |\boldsymbol{\lambda}_{mi}|; \quad i = (1, 2). \quad (24c)$$

$$\delta J_1 = |\delta \mathbf{V}_{m1}| (1 - |\boldsymbol{\lambda}_{m1}|) + |\delta \mathbf{V}_{m2}| (1 - |\boldsymbol{\lambda}_{m2}|). \quad (24d)$$

Если в некоторый момент  $t_{mi}$  будет  $|\boldsymbol{\lambda}_{mi}| > 1$ , то, используя данную конструкцию вариации траектории на той дуге, где выполняется это условие, получим улучшение функционала, т.е.  $\delta J_1 < 0$ . Поэтому в этом случае исходная траектория экспедиции неоптимальна на множестве траекторий, на которых можно вводить дополнительные импульсы скорости. Следовательно, выполнение условия

$$|\boldsymbol{\lambda}(t)| \leq 1, \quad t_1 \leq t \leq t_2; \quad t_3 \leq t \leq t_4 \quad (25)$$

необходимо для оптимальности траектории на данном более широком множестве перелетов с числом импульсов более трех.

## 2.2. Случай максимизации конечной массы

Рассмотрим теперь случай, когда максимизируется конечная масса  $m_f$  (11-15), т.е. минимизируется функционал  $J_2$  (10).

### 2.2.1. Вариация функционала $J_2$ с учетом дополнительных импульсов скорости

Опять полагаем здесь, что закреплены граничные времена  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) и вводятся малые дополнительные импульсы скорости в промежуточных

точках траектории, в моменты времени  $t_{mj}$ ,  $j = 1, 2$ . Рассмотрим выражение для вариации функционала.

Учитывая (15–15с), получим в линейном приближении для вариаций  $\delta m_f$  за счет дополнительных импульсов  $\delta \mathbf{V}_{m1}$ ,  $\delta \mathbf{V}_{m2}$ :

$$(\delta m_f)_{m1} = - (m_f/c_2) \delta \mathbf{V}_{m1}; (\delta m_f)_{m2} = - (m_f/c_2) \delta \mathbf{V}_{m2}, \quad (26a)$$

здесь  $\delta \mathbf{V}_{mj} = |\delta \mathbf{V}_{mj}|$  – модуль дополнительного импульса скорости  $\delta \mathbf{V}_{mj}$ ,  $j = 1, 2$ .

Тогда для вариации функционала  $J_2$  (10) получим в линейном приближении:

$$\delta J_2 = (\delta J_2)_{1+} + (\delta J_2)_{m1+} + (\delta J_2)_{2+} + (\delta J_2)_{3+} + (\delta J_2)_{m2} = \\ - (\partial m_f / \partial \mathbf{V}_{\infty 1}) \delta \mathbf{V}_1 + (m_f / c_2) \delta \mathbf{V}_{m1} - (\partial m_f / \partial \mathbf{V}_{\infty 2}) \delta \mathbf{V}_2 - (\partial m_f / \partial \mathbf{V}_{\infty 3}) \delta \mathbf{V}_3 + (m_f / c_2) \delta \mathbf{V}_{m2}, \quad (26b)$$

здесь  $(\delta J_2)_i$  – вариации функционала  $J_2$  за счет вариации скорости  $\mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $(\delta J_2)_{mj}$  – вариации функционала  $J_2$  за счет дополнительных импульсов  $\delta \mathbf{V}_{mj}$ ,  $j = 1, 2$ .

При варьировании только  $\mathbf{V}_1$ , учитывая (2, 6, 11, 14, 19) и полагая  $\Delta m_1 = \text{const}$ , получим:

$$\partial m_f / \partial \mathbf{V}_{\infty 1} = \partial m_f / \partial \mathbf{V}_1 = \partial (m_1 \mu_2 \mu_3) / \partial \mathbf{V}_1 = \mu_2 \mu_3 \partial m_1 / \partial \mathbf{V}_1 = m_0 \mu_2 \mu_3 (\partial \mu_1 / \partial \mathbf{V}_1) = \\ = m_0 \mu_2 \mu_3 (-\mu_1 / c_1) \partial \Delta \mathbf{V}_1 / \partial \mathbf{V}_1 = -(m_0 \mu_1 \mu_2 \mu_3 / c_1) (\mathbf{V}_{\infty 1}^* / V_{\pi 1}) = - (m_f' / c_1) (\mathbf{V}_{\infty 1}^* / V_{\pi 1}), \quad (27a)$$

где  $m_f'$  приведено в (14с),

$$\partial \mu_1 / \partial \mathbf{V}_1 = (-\mu_1 / c_1) (\mathbf{V}_{\infty 1}^* / V_{\pi 1}), \quad (27b)$$

тогда:

$$\partial J_2 / \partial \mathbf{V}_1 = (m_f' / c_1) (\mathbf{V}_{\infty 1}^* / V_{\pi 1}); \quad (27c)$$

$$(\delta J_2)_{1+} = (m_f' / (c_1 V_{\pi 1})) (\mathbf{V}_{\infty 1}, \delta \mathbf{V}_1). \quad (28)$$

Аналогично, учитывая (3, 7, 12, 14, 19), получим градиенты для анализа влияния варьирования скорости  $\mathbf{V}_2$ :

$$\partial m_f / \partial \mathbf{V}_{\infty 2} = \partial m_f / \partial \mathbf{V}_2 = \partial (m_1 \mu_2 \mu_3) / \partial \mathbf{V}_2 = m_1 \mu_3 \partial \mu_2 / \partial \mathbf{V}_2 = - (m_1 \mu_2 \mu_3 / c_2) (\partial \Delta \mathbf{V}_2 / \partial \mathbf{V}_2) = \\ = - (m_f / c_2) (\mathbf{V}_{\infty 2}^* / V_{\pi 2}) \approx (m_f / c_2) (\Delta \mathbf{V}_2^* / \Delta \mathbf{V}_2), \quad (29a)$$

$$\partial J_2 / \partial \mathbf{V}_2 = (m_f / c_2) (\mathbf{V}_{\infty 2}^* / V_{\pi 2}) \approx - (m_f / c_2) (\Delta \mathbf{V}_2^* / \Delta \mathbf{V}_2). \quad (29b)$$

Тогда вариация функционала:

$$(\delta J_2)_{2+} = (m_f / (c_2 V_{\pi 2})) (\mathbf{V}_{\infty 2}, \delta \mathbf{V}_2) \approx - (m_f / (c_2 \Delta \mathbf{V}_2)) (\Delta \mathbf{V}_2, \delta \mathbf{V}_2). \quad (30)$$

При варьировании скорости  $\mathbf{V}_3$ , учитывая (4, 8, 13, 14, 19), получим:

$$\partial m_f / \partial \mathbf{V}_{\infty 3} = \partial m_f / \partial \mathbf{V}_3 = \partial (m_1 \mu_2 \mu_3) / \partial \mathbf{V}_3 = m_1 \mu_2 \partial \mu_3 / \partial \mathbf{V}_3 = - (m_1 \mu_2 \mu_3 / c_2) (\partial \Delta \mathbf{V}_3 / \partial \mathbf{V}_3) = \\ = - (m_f / c_2) (\mathbf{V}_{\infty 3}^* / V_{\pi 3}) \approx - (m_f / c_2) (\Delta \mathbf{V}_3^* / \Delta \mathbf{V}_3), \quad (31a)$$

$$\partial J_2 / \partial \mathbf{V}_3 = (m_f / c_2) (\mathbf{V}_{\infty 3}^* / V_{\pi 3}) \approx (m_f / c_2) (\Delta \mathbf{V}_3^* / \Delta V_3). \quad (31b)$$

Тогда вариация функционала:

$$(\delta J_2)_3 = (m_f / (c_2 V_{\pi 3})) (\mathbf{V}_{\infty 3}, \delta \mathbf{V}_3) \approx (m_f / (c_2 \Delta V_3)) (\Delta \mathbf{V}_3, \delta \mathbf{V}_3). \quad (32)$$

Подставляя (28, 30, 32) в (26b), получим выражение для вариации функционала:

$$\begin{aligned} \delta J_2 = & (m_f' / (c_1 V_{\pi 0})) (\mathbf{V}_{\infty 1}, \delta \mathbf{V}_1) + (m_f / c_2) \delta V_{m1} + (m_f / (c_2 V_{\pi 2})) (\mathbf{V}_{\infty 2}, \delta \mathbf{V}_2) + \\ & + (m_f / (c_2 V_{\pi 3})) (\mathbf{V}_{\infty 3}, \delta \mathbf{V}_3) + (m_f / c_2) \delta V_{m2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Для случая малого астероида типа Апофиса будет:

$$\begin{aligned} \delta J_2 \approx & (m_f' / (c_1 V_{\pi 0})) (\mathbf{V}_{\infty 1}, \delta \mathbf{V}_1) + (m_f / c_2) \delta V_{m1} + (m_f / (c_2 V_{\infty 2})) (\mathbf{V}_{\infty 2}, \delta \mathbf{V}_2) + \\ & + (m_f / (c_2 V_{\infty 3})) (\mathbf{V}_{\infty 3}, \delta \mathbf{V}_3) + (m_f / c_2) \delta V_{m2}. \end{aligned} \quad (33a)$$

### 2.2.2. Введение сопряженных переменных

Вводим сопряженные к вектору скорости и радиусу-вектору (1) функции  $\lambda_V$ ,  $\lambda_r$  (21a, 21b). В соответствии с (27c, 29b, 31b) и [13] положим:

$$\lambda_V(t_1) = \frac{c_2 m_f'}{c_1 m_f V_{\pi 1}} \mathbf{V}_{\infty 1}; \quad \lambda_V(t_2) = -\frac{V_{\infty 2}}{V_{\pi 2}}; \quad \lambda_V(t_3) = \frac{V_{\infty 3}}{V_{\pi 3}}; \quad \lambda_V(t_4) = \mathbf{0}. \quad (34)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \partial J_2 / \partial \mathbf{V}_1 &= (m_f' / c_1) (\mathbf{V}_{\infty 1}^* / V_{\pi 0}) = (m_f / c_2) \lambda_V^*(t_1); \\ \partial J_2 / \partial \mathbf{V}_2 &= (m_f / c_2) (\mathbf{V}_{\infty 2}^* / V_{\pi 2}) = - (m_f / c_2) \lambda_V^*(t_2); \\ \partial J_2 / \partial \mathbf{V}_3 &= (m_f / c_2) (\mathbf{V}_{\infty 3}^* / V_{\pi 3}) = (m_f / c_2) \lambda_V^*(t_3). \end{aligned} \quad (34a)$$

Вариация  $\delta J_2$  (33) приводится к виду:

$$\delta J_2 = (m_f / c_2) [(\lambda_1, \delta \mathbf{V}_1) + \delta V_{m1} - (\lambda_2, \delta \mathbf{V}_2) + (\lambda_3, \delta \mathbf{V}_3) + \delta V_{m2}]. \quad (34b)$$

Учитывая (21b) и закрепленность граничных времен, получим (23a), (23b). Отсюда следует (23c), (23d), с учетом (23e), (23f). Тогда преобразуем (34b):

$$\begin{aligned} \delta J_2 = & (m_f / c_2) [ - (\lambda_{m1}, \delta \mathbf{V}_{m1}) + \delta V_{m1} - (\lambda_{m2}, \delta \mathbf{V}_{m2}) + \delta V_{m2} ] = \\ = & (m_f / c_2) \{ \delta V_{m1} [1 - (\lambda_{m1}, \delta \mathbf{V}_{m1}^0)] + \delta V_{m2} [1 - (\lambda_{m2}, \delta \mathbf{V}_{m2}^0)] \}. \end{aligned} \quad (35a)$$

Здесь использованы обозначения (24a, 24b).

### 2.2.3. Условие оптимальности траектории

Преыдушие выкладки в п. 3 подходили для любой траектории, не обязательно оптимальной. Опять, как и в п. 2.3, возьмем вариации радиус-вектора  $\delta \mathbf{r}_{m1}$  и  $\delta \mathbf{r}_{m2}$  в промежуточных точках  $t_{mi}$  так, чтобы вариации скорости  $\delta \mathbf{V}_{mi}$  и единичные векторы  $\delta \mathbf{V}_{mi}^0$  были направлены вдоль базис-вектора  $\lambda_{mi}$  в этих точках. Тогда будет выполняться соотношение (24c). Соотношение (35a) принимает форму:

$$\delta J_2 = (m_f/c_2) \{ \delta V_{m1} [1 - |\lambda_{m1}|] + \delta V_{m2} [1 - |\lambda_{m2}|] \}. \quad (35b)$$

Пусть в некоторый момент  $t_{mj}$  будет  $|\lambda_{mj}| > 1$ . Тогда используем данную конструкцию вариации траектории на той дуге, где выполняется это условие. А на другой дуге варьировать траекторию не будем. Получим улучшение функционала,  $\delta J_2 < 0$ . В этом случае исходная траектория экспедиции неоптимальна на множестве траекторий, на которых можно вводить дополнительные импульсы скорости. Выполнение условия (25), следовательно, необходимо для оптимальности траектории на данном более широком множестве многоимпульсных перелетов с числом импульсов более трех.

### 2.3. Случай максимизации полезной массы

Рассмотрим теперь случай, когда максимизируется полезная масса  $m_p$  (16а-16с), т.е. минимизируется функционал  $J_3$  (17).

#### 2.3.1. Выражение для функционала $J_3$

Опять полагаем, что закреплены граничные времена  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) и вводятся малые дополнительные импульсы скорости в промежуточных точках траектории, в некоторые моменты времени  $t_{mj}$ ,  $j=1, 2$ . Рассмотрим выражение для вариации функционала. Сначала получим выражение для функционала (17). Учитывая (16а-16с, 11-11а), получим для полезной массы:

$$\begin{aligned} m_p &= m_f - \Delta m_2 = m_f - a - b(m_1 - m_f) = (1+b) m_f - b m_1 - a = \\ &= (1+b) m_f - b(m_0 \mu_1 - \Delta m_1) - a = (1+b) m_f - b m_0 \mu_1 + b \Delta m_1 - a; \end{aligned} \quad (36a)$$

для функционала:

$$J_3 = - m_p = - (1+b) m_f + b m_0 \mu_1 - b \Delta m_1 + a. \quad (36b)$$

Здесь: конечная масса (14а, 15, 11)

$$m_f = m_1 \mu_{m1} \mu_2 \mu_3 \mu_{m2}; \quad m_1 = m_0 \mu_1 - \Delta m_1; \quad \mu_1 = \exp(- \Delta V_1/c_1); \quad (36c)$$

$$\mu_i = \exp(- \Delta V_i/c_2), \quad i=2, 3; \quad \mu_{mj} = \exp(- \delta V_{mj}/c_2); \quad j = 1, 2; \quad (36d)$$

отделяемая в конце полета масса

$$\Delta m_2 = a + b(m_1 - m_f); \quad (36e)$$

поэтому

$$m_f = m_f(\Delta V_1, \delta V_{m1}, \Delta V_2, \Delta V_3, \delta V_{m2}); \quad \mu_1 = \mu_1(\Delta V_1). \quad (36f)$$

#### 2.3.2. Вариация функционала $J_3$ с учетом дополнительных импульсов скорости

Аналогично  $\delta J_2$  (26b) получим выражение для  $\delta J_3$ . Опять в данном случае  $\delta t_1 = \delta t_2 = \delta t_3 = \delta t_4 = 0$ , поэтому справедливо (18а). Учитывая выражение для полезной массы (16с, 36а), а также (26а), получим в линейном приближении:

$$\begin{aligned} \delta J_3 &= (\delta J_3)_{1+} + (\delta J_3)_{m1+} + (\delta J_3)_{2+} + (\delta J_3)_{3+} + (\delta J_3)_{m2} = \\ &= - (\partial m_P / \partial \mathbf{V}_{\infty 1}) \delta \mathbf{V}_1 + (1+b) (m_f / c_2) \delta V_{m1} - (\partial m_P / \partial \mathbf{V}_{\infty 2}) \delta \mathbf{V}_2 - (\partial m_P / \partial \mathbf{V}_{\infty 3}) \delta \mathbf{V}_3 + \\ &\quad + (1+b) (m_f / c_2) \delta V_{m2}, \end{aligned} \quad (37)$$

здесь  $(\delta J_3)_i$  – вариация функционала  $J_3$  за счет вариации скорости  $\mathbf{V}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $(\delta J_3)_{mj}$  – вариации функционала  $J_3$  за счет дополнительных импульсов  $\delta \mathbf{V}_{mj}$ ,  $j = 1, 2$ . Получим градиенты  $\partial m_P / \partial \mathbf{V}_{\infty i}$ , учитывая выражение  $m_P$  через  $m_f$ ,  $\mu_1$  (36а), а также градиенты (27а, 29а, 31а) и (27б). Для градиента  $\partial m_P / \partial \mathbf{V}_{\infty 1}$ :

$$\begin{aligned} \partial m_P / \partial \mathbf{V}_{\infty 1}^* &= (1+b) \partial m_f / \partial \mathbf{V}_{\infty 1} - b m_0 \partial \mu_1 / \partial \mathbf{V}_{\infty 1}^* = - (1+b) (m_f' / c_1) (\mathbf{V}_{\infty 1} / V_{\pi 1}) + \\ &\quad + b m_0 (\mu_1 / c_1) (\mathbf{V}_{\infty 1} / V_{\pi 1}). \end{aligned}$$

Учитывая (14с), получим:

$$\partial m_P / \partial \mathbf{V}_{\infty 1}^* = - \frac{m_0 \mu_1 (1+b)}{c_1 V_{\pi 1}} \left( \mu_2 \mu_3 - \frac{b}{1+b} \right) \mathbf{V}_{\infty 1}. \quad (38)$$

Аналогично:

$$\partial m_P / \partial \mathbf{V}_{\infty 2}^* = (1+b) \partial m_f / \partial \mathbf{V}_{\infty 2} = - (1+b) (m_f / c_2) (\mathbf{V}_{\infty 2} / V_{\pi 2}) = - \frac{m_f (1+b)}{c_2 V_{\pi 2}} \mathbf{V}_{\infty 2}; \quad (39)$$

$$\partial m_P / \partial \mathbf{V}_{\infty 3}^* = (1+b) \partial m_f / \partial \mathbf{V}_{\infty 3} = - (1+b) (m_f / c_2) (\mathbf{V}_{\infty 3} / V_{\pi 3}) = - \frac{m_f (1+b)}{c_2 V_{\pi 3}} \mathbf{V}_{\infty 3}. \quad (40)$$

Тогда вариация функционала

$$\begin{aligned} \delta J_3 &= \frac{m_0 \mu_1 (1+b)}{c_1 V_{\pi 1}} \left( \mu_2 \mu_3 - \frac{b}{1+b} \right) (\mathbf{V}_{\infty 1}, \delta \mathbf{V}_1) + (1+b) (m_f / c_2) \delta V_{m1} + \\ &\quad + \frac{m_f (1+b)}{c_2 V_{\pi 2}} (\mathbf{V}_{\infty 2}, \delta \mathbf{V}_2) + \frac{m_f (1+b)}{c_2 V_{\pi 3}} (\mathbf{V}_{\infty 3}, \delta \mathbf{V}_3) + (1+b) (m_f / c_2) \delta V_{m2}. \end{aligned} \quad (41а)$$

Вынесем множитель  $(1+b) (m_f / c_2)$ . Тогда:

$$\delta J_3 = [m_f (1+b) / c_2] C; \quad (41б)$$

где

$$\begin{aligned} C &= \frac{m_0 \mu_1 c_2}{c_1 V_{\pi 1} m_f} \left( \mu_2 \mu_3 - \frac{b}{1+b} \right) (\mathbf{V}_{\infty 1}, \delta \mathbf{V}_1) + \delta V_{m1} + (\mathbf{V}_{\infty 2}, \delta \mathbf{V}_2) / V_{\pi 2} + \\ &\quad + (\mathbf{V}_{\infty 3}, \delta \mathbf{V}_3) / V_{\pi 3} + \delta V_{m2}. \end{aligned} \quad (41с)$$

### 2.3.3. Введение сопряженных переменных

Определяем сопряженные переменные в граничных точках траектории:

$$\lambda_V(t_1) = (c_2 m_0 \mu_1 / c_1 m_f V_{\pi 1}) \left( \mu_2 \mu_3 - \frac{b}{1+b} \right) \mathbf{V}_{\infty 1}; \quad (42а)$$

$$\lambda_V(t_2) = - \frac{V_{\infty 2}}{V_{\pi 2}}; \quad \lambda_V(t_3) = \frac{V_{\infty 3}}{V_{\pi 3}}; \quad \lambda_V(t_4) = \mathbf{0}. \quad (42б)$$

Тогда:

$$\delta J_3 = \frac{m_f(1+b)}{c_2} [(\lambda_V(t_1), \delta V_1) + \delta V_{m1} - (\lambda_V(t_2), \delta V_2) + (\lambda_V(t_3), \delta V_3) + \delta V_{m2}]. \quad (43)$$

Используя свойство (21b) и закрепленность граничных времен, получим (23a), (23b). Отсюда следует (23c, 23d), с учетом (23e, 23f). Тогда преобразуем (43):

$$\begin{aligned} \delta J_3 &= [(1+b) m_f/c_2] [ - (\lambda_{m1}, \delta V_{m1}) + \delta V_{m1} - (\lambda_{m2}, \delta V_{m2}) + \delta V_{m2} ] = \\ &= [(1+b) m_f/c_2] \{ \delta V_{m1} [1 - (\lambda_{m1}, \delta V_{m1}^0)] + \delta V_{m2} [1 - (\lambda_{m2}, \delta V_{m2}^0)] \}. \end{aligned} \quad (44a)$$

Здесь использованы обозначения (24a, 24b).

### 2.3.4. Условие оптимальности траектории

Возьмем вариации радиус-вектора  $\delta \mathbf{r}_{m1}$  и  $\delta \mathbf{r}_{m2}$  в промежуточных точках  $t_{mi}$  так, чтобы вариации скоростей  $\delta V_{mi}$  и единичные векторы  $\delta \mathbf{V}_{mi}^0$  были направлены вдоль базис-вектора  $\lambda_{mi}$  в этих точках. Тогда будет выполняться соотношение (24c). Соотношение (44) принимает форму:

$$\delta J_3 = [(1+b) m_f/c_2] \{ \delta V_{m1} [1 - |\lambda_{m1}|] + \delta V_{m2} [1 - |\lambda_{m2}|] \}. \quad (44b)$$

Предположим, что существует отрезок траектории, где  $|\lambda_{mi}| > 1$ , и пусть в некоторый момент  $t_{mj}$  будет  $|\lambda_{mj}| > 1$ . Используем данную конструкцию вариации на той дуге, где выполняется это условие, а на другой дуге варьировать не будем. В силу (44b) получим улучшение функционала,  $\delta J_3 < 0$ . В этом случае исходная траектория экспедиции неоптимальна на множестве многоимпульсных траекторий, на которых можно вводить дополнительные импульсы скорости. Выполнение условия (25)  $|\lambda(t)| \leq 1$ , следовательно, необходимо для оптимальности траектории на данном более широком множестве многоимпульсных перелетов с числом импульсов более трех.

В случае нарушения данного условия (25) выражение (44b) может, при возможности введения дополнительных импульсов скорости, быть использовано для улучшения траектории по функционалу, например, градиентным методом или каким-либо квазиньютоновским методом.

## 3. Влияние варьирования граничных времен траектории

Теперь рассмотрим вариант варьирования траектории, когда варьироваться независимо все граничные времена  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), а дуги перелета между граничными временами пассивны, т.е. на этих дугах малые дополнительные импульсы скорости  $\delta V_{m1}$ ,  $\delta V_{m2}$  не сообщаются, рис. 2. Получим соответствующую вариацию функционала, аналогично [10].

### 3.1. Случай минимизации суммы величин импульсов скорости

#### 3.1.1. Вариации величин импульсов скорости

Рассмотрим сначала вариацию орбиты  $P_1P_2$  для перелета от орбиты Земли к орбите астероида. При этом варьируются точки  $P_1$  на орбите Земли и  $P_2$  на орбите астероида.

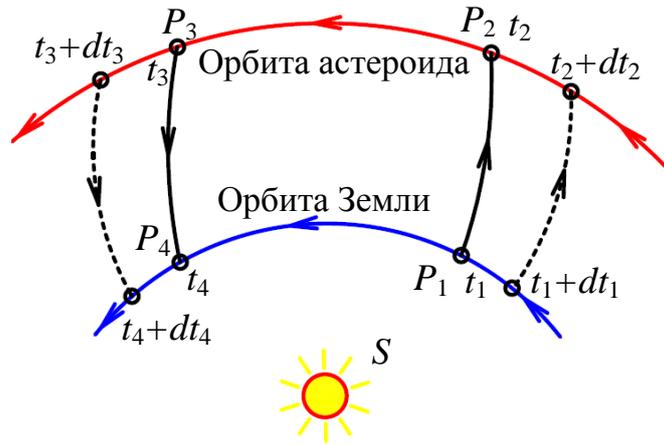


Рис. 2. Схема варьирования траектории экспедиции КА смещением граничных времен  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Учитывая выражения (6, 7) для величин импульсов скорости  $\Delta V_1$  и  $\Delta V_2$ , а также (2, 3) для скоростей «на бесконечности»  $\mathbf{V}_{\infty 1}$ ,  $\mathbf{V}_{\infty 2}$ , а также выражения

$$d\mathbf{V}_{\infty 1} = d\mathbf{V}_1 - d\mathbf{V}_{E1}; d\mathbf{V}_{\infty 2} = d\mathbf{V}_2 - d\mathbf{V}_{A2}; d\mathbf{V}_{\infty 3} = d\mathbf{V}_3 - d\mathbf{V}_{A3}; d\mathbf{V}_{\infty 4} = d\mathbf{V}_4 - d\mathbf{V}_{E4} \quad (45a)$$

для вариаций скоростей «на бесконечности», получим вариации величин импульсов скорости:

$$d\Delta V_1 = (\partial\Delta V_1/\partial\mathbf{V}_{\infty 1}) d\mathbf{V}_{\infty 1} = ((\mathbf{V}_{\infty 1}/V_{\pi 1}), (d\mathbf{V}_1 - d\mathbf{V}_{E1})); \quad (45b)$$

$$d\Delta V_2 = (\partial\Delta V_2/\partial\mathbf{V}_{\infty 2}) d\mathbf{V}_{\infty 2} = ((\mathbf{V}_{\infty 2}/V_{\pi 2}), (d\mathbf{V}_2 - d\mathbf{V}_{A2})) \approx ((-\Delta V_2/\Delta V_2), (d\mathbf{V}_2 - d\mathbf{V}_{A2})), \quad (46)$$

здесь  $(\partial\Delta V_1/\partial\mathbf{V}_{\infty 1})$ ,  $(\partial\Delta V_2/\partial\mathbf{V}_{\infty 2})$  – соответствующие градиенты (19).

Аналогично при варьировании орбиты  $P_3P_4$  для перелета от орбиты астероида к орбите Земли, учитывая выражение (8) для величины импульса скорости  $\Delta V_3$ , а также (4) для скорости «на бесконечности»  $\mathbf{V}_{\infty 3}$  и выражения (19), (45a), получим для вариации импульса скорости  $\Delta V_3$ :

$$d\Delta V_3 = (\partial\Delta V_3/\partial\mathbf{V}_{\infty 3}) d\mathbf{V}_{\infty 3} = ((\mathbf{V}_{\infty 3}/V_{\pi 3}), (d\mathbf{V}_3 - d\mathbf{V}_{A3})) \approx ((\Delta V_3/\Delta V_3), (d\mathbf{V}_3 - d\mathbf{V}_{A3})). \quad (47)$$

#### 3.1.2. Вариация функционала

Складывая выражения (45, 46, 47), для вариации функционала получим:

$$dJ_1 = ((\mathbf{V}_{\infty 1}/V_{\pi 1}), (d\mathbf{V}_1 - d\mathbf{V}_{E1})) + ((\mathbf{V}_{\infty 2}/V_{\pi 2}), (d\mathbf{V}_2 - d\mathbf{V}_{A2})) + ((\mathbf{V}_{\infty 3}/V_{\pi 3}), (d\mathbf{V}_3 - d\mathbf{V}_{A3})). \quad (48a)$$

Ранее в (22) были введены сопряженные переменные с граничными значениями при минимизации  $J_1$ . Тогда вариация функционала примет вид:

$$dJ_1 = (\lambda_1, (d\mathbf{V}_1 - d\mathbf{V}_{E1})) - (\lambda_2, (d\mathbf{V}_2 - d\mathbf{V}_{A2})) + (\lambda_3, (d\mathbf{V}_3 - d\mathbf{V}_{A3})). \quad (48b)$$

Преобразуем это выражение, учитывая, что варьируются только точки  $P_i$ , сообщаются вариации граничных времен  $dt_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , и обозначая изохронные вариации символом  $\delta$ . Тогда в линейном приближении:

$$d\mathbf{V}_i = \delta\mathbf{V}_i + (d\mathbf{V}_i/dt) dt_i = \delta\mathbf{V}_i + \mathbf{g}(\mathbf{r}_i) dt_i; i = 1, 2, 3. \quad (48c)$$

$$d\mathbf{V}_{E1} = \mathbf{V}_E(t_1 + dt_1) - \mathbf{V}_E(t_1) = (d\mathbf{V}_{E1}/dt) dt_1 = \mathbf{g}(\mathbf{r}_{E1}) dt_1; \quad (48d)$$

$$d\mathbf{V}_1 - d\mathbf{V}_{E1} = \delta\mathbf{V}_1; \quad (48e)$$

$$d\mathbf{V}_{Aj} = \mathbf{V}_A(t_j + dt_j) - \mathbf{V}_A(t_j) = (d\mathbf{V}_{Aj}/dt) dt_j = \mathbf{g}(\mathbf{r}_{Aj}) dt_j; j = 2, 3; \quad (48f)$$

$$d\mathbf{V}_j - d\mathbf{V}_{Aj} = \delta\mathbf{V}_j; j = 2, 3; \quad (48g)$$

$$dJ_1 = (\lambda_1, \delta\mathbf{V}_1) - (\lambda_2, \delta\mathbf{V}_2) + (\lambda_3, \delta\mathbf{V}_3). \quad (49)$$

Используя свойство (21b) на каждой пассивной дуге траектории КА, преобразуем (49):

$$(\lambda_1, \delta\mathbf{V}_1) + (\lambda_{r1}, \delta\mathbf{r}_1) = (\lambda_2, \delta\mathbf{V}_2) + (\lambda_{r2}, \delta\mathbf{r}_2); \quad (49a)$$

$$(\lambda_3, \delta\mathbf{V}_3) + (\lambda_{r3}, \delta\mathbf{r}_3) = (\lambda_4, \delta\mathbf{V}_4) + (\lambda_{r4}, \delta\mathbf{r}_4); \quad (49b)$$

$$(\lambda_1, \delta\mathbf{V}_1) - (\lambda_2, \delta\mathbf{V}_2) = -(\lambda_{r1}, \delta\mathbf{r}_1) + (\lambda_{r2}, \delta\mathbf{r}_2); \quad (49c)$$

$$(\lambda_3, \delta\mathbf{V}_3) = -(\lambda_{r3}, \delta\mathbf{r}_3) + (\lambda_{r4}, \delta\mathbf{r}_4); \quad (49d)$$

$$dJ_1 = -(\lambda_{r1}, \delta\mathbf{r}_1) + (\lambda_{r2}, \delta\mathbf{r}_2) - (\lambda_{r3}, \delta\mathbf{r}_3) + (\lambda_{r4}, \delta\mathbf{r}_4). \quad (50)$$

Учитываем, что вариации радиус-вектора КА  $\delta\mathbf{r}_i$  удовлетворяют условиям:

$$\delta\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_i - \mathbf{V}_i dt_i; i = 1, 2, 3, 4; \quad (51a)$$

$$d\mathbf{r}_k = \mathbf{V}_{Ek} dt_k; k = 1, 4; d\mathbf{r}_j = \mathbf{V}_{Aj} dt_j; j = 2, 3; \quad (51b)$$

$$\delta\mathbf{r}_1 = (\mathbf{V}_{E1} - \mathbf{V}_1) dt_1 = -\mathbf{V}_{\infty 1} dt_1; \quad (51c)$$

$$\delta\mathbf{r}_2 = (\mathbf{V}_{A2} - \mathbf{V}_2) dt_2 = -\mathbf{V}_{\infty 2} dt_2; \quad (51d)$$

$$\delta\mathbf{r}_3 = (\mathbf{V}_{A3} - \mathbf{V}_3) dt_3 = -\mathbf{V}_{\infty 3} dt_3; \quad (51e)$$

$$\delta\mathbf{r}_4 = (\mathbf{V}_{E4} - \mathbf{V}_4) dt_4 = -\mathbf{V}_{\infty 4} dt_4. \quad (51f)$$

Тогда выражение (50) для вариации функционала принимает форму:

$$dJ_1 = (\boldsymbol{\lambda}_{r1}, \mathbf{V}_{\infty 1}) dt_1 - (\boldsymbol{\lambda}_{r2}, \mathbf{V}_{\infty 2}) dt_2 + (\boldsymbol{\lambda}_{r3}, \mathbf{V}_{\infty 3}) dt_3 - (\boldsymbol{\lambda}_{r4}, \mathbf{V}_{\infty 4}) dt_4. \quad (52a)$$

Заменяя  $\boldsymbol{\lambda}_r$  на  $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ , получим

$$dJ_1 = -(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_1, \mathbf{V}_{\infty 1}) dt_1 + (\dot{\boldsymbol{\lambda}}_2, \mathbf{V}_{\infty 2}) dt_2 - (\dot{\boldsymbol{\lambda}}_3, \mathbf{V}_{\infty 3}) dt_3 + (\dot{\boldsymbol{\lambda}}_4, \mathbf{V}_{\infty 4}) dt_4. \quad (52b)$$

Отметим, что справедливо соотношение

$$(\dot{\boldsymbol{\lambda}}, \mathbf{a}) = s\dot{p}a, \quad (53a)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda}' = d\boldsymbol{\lambda}/dt; \mathbf{a} = k\boldsymbol{\lambda}, p = |\boldsymbol{\lambda}|, \dot{p} = p' = dp/dt; s = \text{sign}(k); a = |\mathbf{a}| = |k|p. \quad (53b)$$

Используя это соотношение и выражения (22) для граничных значений сопряженных функций, получим также:

$$dJ_1 = -\dot{p}_1 V_{\infty 1} dt_1 - \dot{p}_2 V_{\infty 2} dt_2 - \dot{p}_3 V_{\infty 3} dt_3 + (\dot{\boldsymbol{\lambda}}_4, \mathbf{V}_{\infty 4}) dt_4. \quad (54)$$

Тогда частные производные от функционала по временам  $t_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и  $t_4$ :

$$\partial J_1 / \partial t_j = s_j (\boldsymbol{\lambda}_{rj}, \mathbf{V}_{\infty j}) = -s_j (\dot{\boldsymbol{\lambda}}_j, \mathbf{V}_{\infty j}) = -\dot{p}_j V_{\infty j}; s_1 = s_3 = 1; s_2 = -1; \quad (55a)$$

$$\partial J_1 / \partial t_4 = -(\boldsymbol{\lambda}_{r4}, \mathbf{V}_{\infty 4}) = (\dot{\boldsymbol{\lambda}}_4, \mathbf{V}_{\infty 4}). \quad (55b)$$

Уравнения (52, 54-55), вместе с уравнениями для определения граничных сопряженных функций, могут быть использованы для улучшения траектории по функционалу, например градиентным или квазиньютоновским методом.

## 3.2. Случай максимизации конечной массы

### 3.2.1. Градиенты от функционала $J_2$ по «скорости на бесконечности»

В данном случае функционал определен в (10), конечная масса  $m_f$  задается в (36с, 36d), где  $\delta V_{m1} = \delta V_{m2} = 0$ ,  $\mu_{m1} = \mu_{m2} = 1$ . Здесь полагаем, что  $m_0$ ,  $\Delta m_1$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  – константы. Тогда, используя полученные ранее градиенты от полезной массы (38-40) и вводя граничные сопряженные переменные (34), получим градиенты от функционала по скоростям «на бесконечности»:

$$\begin{aligned} \partial J_2 / \partial \mathbf{V}_{\infty 1} &= (m_f' / c_1) (\mathbf{V}_{\infty 1}^* / V_{\pi 0}) = (m_f / c_2) \boldsymbol{\lambda}_V^*(t_1); \\ \partial J_2 / \partial \mathbf{V}_{\infty 2} &= (m_f / c_2) (\mathbf{V}_{\infty 2}^* / V_{\pi 2}) = - (m_f / c_2) \boldsymbol{\lambda}_V^*(t_2); \\ \partial J_2 / \partial \mathbf{V}_{\infty 3} &= (m_f / c_2) (\mathbf{V}_{\infty 3}^* / V_{\pi 3}) = (m_f / c_2) \boldsymbol{\lambda}_V^*(t_3). \end{aligned} \quad (56)$$

### 3.2.2. Вариация функционала $J_2$

Градиенты (56) определяют вариацию функционала. С учетом (45a) и обозначая

$$d_2 = m_f / c_2, \quad (57)$$

получим:

$$dJ_2 = d_2 [(\lambda_1, d\mathbf{V}_{\infty 1}) - (\lambda_2, d\mathbf{V}_{\infty 2}) + (\lambda_3, d\mathbf{V}_{\infty 3})]; \quad (58a)$$

$$dJ_2 = d_2 [(\lambda_1, (d\mathbf{V}_1 - d\mathbf{V}_{E1})) - (\lambda_2, (d\mathbf{V}_2 - d\mathbf{V}_{A2})) + (\lambda_3, (d\mathbf{V}_3 - d\mathbf{V}_{A3}))]. \quad (58b)$$

Отсюда, с учетом (48с-48g), получим:

$$dJ_2 = d_2 [(\lambda_1, \delta\mathbf{V}_1) - (\lambda_2, \delta\mathbf{V}_2) + (\lambda_3, \delta\mathbf{V}_3)]. \quad (58c)$$

Используя свойство (21b) на пассивных дугах траектории КА и преобразуя (58с) аналогично (49а-49d), получим:

$$dJ_2 = d_2 [-(\lambda_{r1}, \delta\mathbf{r}_1) + (\lambda_{r2}, \delta\mathbf{r}_2) - (\lambda_{r3}, \delta\mathbf{r}_3) + (\lambda_{r4}, \delta\mathbf{r}_4)]. \quad (58d)$$

Преобразуем  $\delta\mathbf{r}_i$  аналогично (51а-51f), тогда:

$$dJ_2 = d_2 [(\lambda_{r1}, \mathbf{V}_{\infty 1}) dt_1 - (\lambda_{r2}, \mathbf{V}_{\infty 2}) dt_2 + (\lambda_{r3}, \mathbf{V}_{\infty 3}) dt_3 - (\lambda_{r4}, \mathbf{V}_{\infty 4}) dt_4] \quad (59a)$$

$$dJ_2 = d_2 [-(\lambda_1', \mathbf{V}_{\infty 1}) dt_1 + (\lambda_2', \mathbf{V}_{\infty 2}) dt_2 - (\lambda_3', \mathbf{V}_{\infty 3}) dt_3 + (\lambda_4', \mathbf{V}_{\infty 4}) dt_4]. \quad (59b)$$

Учитывая соотношения (53а, 53b), преобразуем (59b) к виду:

$$dJ_2 = -d_2 [p_1' V_{\infty 1} dt_1 + p_2' V_{\infty 2} dt_2 + p_3' V_{\infty 3} dt_3 - (\lambda_4', \mathbf{V}_{\infty 4}) dt_4]. \quad (59c)$$

Отсюда следуют частные производные от  $J_2$  по временам  $t_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и  $t_4$ :

$$\partial J_2 / \partial t_j = s_j d_2 (\lambda_{rj}, \mathbf{V}_{\infty j}) = -s_j d_2 (\lambda_j', \mathbf{V}_{\infty j}) = -d_2 p_j' V_{\infty j}; \quad s_1 = s_3 = 1; \quad s_2 = -1; \quad (60a)$$

$$\partial J_2 / \partial t_4 = -d_2 (\lambda_{r4}, \mathbf{V}_{\infty 4}) = d_2 (\dot{\lambda}_4, \mathbf{V}_{\infty 4}). \quad (60b)$$

Уравнения (59а-60b), вместе с уравнениями для определения граничных сопряженных функций, могут быть использованы для улучшения траектории по функционалу, например градиентным или квазиньютоновским методом.

### 3.3. Случай максимизации полезной массы

#### 3.3.1. Градиенты от функционала по «скоростям на бесконечности»

Для определения градиентов от функционала по «скоростям на бесконечности» используем выражение для функционала (36). При этом полагаем, что варьируются только граничные времена, поэтому  $\delta V_{m1} = 0$ ,  $\delta V_{m2} = 0$ . Здесь полагаем также, что  $m_0$ ,  $\Delta m_1$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $a$ ,  $b$  – константы. Тогда, используя полученные ранее градиенты от полезной массы (38-40) и вводя граничные сопряженные переменные (42), получим градиенты от функционала:

$$\partial J_3 / \partial \mathbf{V}_{\infty 1}^* = \frac{m_0 \mu_1 (1+b)}{c_1 V_{\pi 1}} (\mu_2 \mu_3 - \frac{b}{1+b}) \mathbf{V}_{\infty 1} = \frac{m_f (1+b)}{c_2} \lambda_1; \quad (61a)$$

$$\partial J_3 / \partial \mathbf{V}_{\infty 2}^* = (1+b) (m_f / c_2) (\mathbf{V}_{\infty 2} / V_{\pi 2}) = -\frac{m_f (1+b)}{c_2} \lambda_2; \quad (61b)$$

$$\partial J_3 / \partial \mathbf{V}_{\infty 3}^* = (1+b) (m_f / c_2) (\mathbf{V}_{\infty 3} / V_{\pi 3}) = \frac{m_f(1+b)}{c_2} \boldsymbol{\lambda}_3. \quad (61c)$$

### 3.2.3. Вариация функционала $J_3$

Тогда, с учетом (45a), для вариации функционала получим выражение:

$$dJ_3 = \frac{m_f(1+b)}{c_2} [(\boldsymbol{\lambda}_1, (d\mathbf{V}_1 - d\mathbf{V}_{E1})) - (\boldsymbol{\lambda}_2, (d\mathbf{V}_2 - d\mathbf{V}_{A2})) + (\boldsymbol{\lambda}_3, (d\mathbf{V}_3 - d\mathbf{V}_{A3}))]. \quad (62)$$

Учитываем (48e, 48g) и обозначаем

$$d_3 = m_f(1+b)/c_2. \quad (63a)$$

Тогда

$$dJ_3 = d_3 [(\boldsymbol{\lambda}_1, \delta \mathbf{V}_1) - (\boldsymbol{\lambda}_2, \delta \mathbf{V}_2) + (\boldsymbol{\lambda}_3, \delta \mathbf{V}_3)]. \quad (63b)$$

Используя свойство (21b) на пассивных дугах траектории КА и преобразуя (63b) аналогично (49a-49d), получим:

$$dJ_3 = d_3 [-(\boldsymbol{\lambda}_{r1}, \delta \mathbf{r}_1) + (\boldsymbol{\lambda}_{r2}, \delta \mathbf{r}_2) - (\boldsymbol{\lambda}_{r3}, \delta \mathbf{r}_3) + (\boldsymbol{\lambda}_{r4}, \delta \mathbf{r}_4)]. \quad (63c)$$

Преобразуем  $\delta \mathbf{r}_i$  аналогично (51a-51f), тогда:

$$dJ_3 = d_3 [(\boldsymbol{\lambda}_{r1}, \mathbf{V}_{\infty 1}) dt_1 - (\boldsymbol{\lambda}_{r2}, \mathbf{V}_{\infty 2}) dt_2 + (\boldsymbol{\lambda}_{r3}, \mathbf{V}_{\infty 3}) dt_3 - (\boldsymbol{\lambda}_{r4}, \mathbf{V}_{\infty 4}) dt_4] \quad (64a)$$

$$dJ_3 = d_3 [-(\boldsymbol{\lambda}'_1, \mathbf{V}_{\infty 1}) dt_1 + (\boldsymbol{\lambda}'_2, \mathbf{V}_{\infty 2}) dt_2 - (\boldsymbol{\lambda}'_3, \mathbf{V}_{\infty 3}) dt_3 + (\boldsymbol{\lambda}'_4, \mathbf{V}_{\infty 4}) dt_4]. \quad (64b)$$

Учитывая соотношения (53a) и (42), преобразуем (64b) к виду:

$$dJ_3 = -d_3 [p_1' V_{\infty 1} dt_1 + p_2' V_{\infty 2} dt_2 + p_3' V_{\infty 3} dt_3 - (\boldsymbol{\lambda}'_4, \mathbf{V}_{\infty 4}) dt_4]. \quad (64c)$$

Отсюда следуют частные производные от  $J_3$  по временам  $t_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и  $t_4$ :

$$\partial J_3 / \partial t_j = s_j d_3 (\boldsymbol{\lambda}_{rj}, \mathbf{V}_{\infty j}) = -s_j d_3 (\boldsymbol{\lambda}'_j, \mathbf{V}_{\infty j}) = -d_3 p_j' V_{\infty j}; s_1 = s_3 = 1; s_2 = -1; \quad (65a)$$

$$\partial J_3 / \partial t_4 = -d_3 (\boldsymbol{\lambda}_{r4}, \mathbf{V}_{\infty 4}) = d_3 (\boldsymbol{\lambda}'_4, \mathbf{V}_{\infty 4}). \quad (65b)$$

Уравнения (64-65), вместе с уравнениями для определения граничных сопряженных функций, могут быть использованы для улучшения траектории по функционалу, например градиентным или квазиньютоновским методом.

**Замечание 4.** Если между временами  $t_i$  есть связи, то переходим к независимым переменным  $x_j$ . Например, если заданы времена  $\Delta t_{23} = t_3 - t_2$  и  $\Delta t_{\Sigma} = t_4 - t_1$ , то можно взять  $x_1 = t_1$ ,  $x_2 = \Delta t_{12} = t_2 - t_1$ . Тогда, выражая  $dt_1, dt_2, dt_3, dt_4$  через  $dx_1, dx_2$ , получим:

$$dJ_k = (\partial J_k / \partial x_1) dx_1 + (\partial J_k / \partial x_2) dx_2; k = 1, 2, 3; \quad (66a)$$

$$\partial J_k / \partial x_1 = \partial J_k / \partial t_1 + \partial J_k / \partial t_2 + \partial J_k / \partial t_3 + \partial J_k / \partial t_4; \quad (66b)$$

$$\partial J_k / \partial x_2 = \partial J_k / \partial t_2 + \partial J_k / \partial t_3. \quad (66c)$$

## 4. Численные примеры для экспедиции Земля–Апофис–Земля

В работах [6, 16-18] приведены результаты определения прямыми методами оптимальных траекторий для экспедиции Земля–Апофис–Земля. В качестве примера рассмотрим оптимальные по максимуму полезной массы КА траектории № 11 (рис. 3) и № 14 [18]. Для траектории № 11 задано:  $\Delta t_{\Sigma} = 690$  сут,  $\Delta t_{23} = 7$  сут; возьмем  $x_1 = t_1$ ,  $x_2 = \Delta t_{12}$ ; получено:  $t_1 = 24.05.2019$ ,  $\Delta t_{12} = 335$  сут,  $t_4 = 13.04.2021$ , сумма величин импульсов скорости  $V_{\text{хар}} = 6,618$  км/с, конечная масса  $m_f = 527$  кг, полезная масса  $m_p = 272$  кг; имеем:  $\partial J_3 / \partial x_1 \approx -0.0004 \sim 0$ ,  $\partial J_3 / \partial x_2 \approx 0.0001 \sim 0$ . Для траектории № 14 с увеличенным временем ожидания у астероида задано  $\Delta t_{\Sigma} = 690$  сут; получено:  $t_1 = 23.05.2019$ ,  $\Delta t_{12} = 336$  сут,  $\Delta t_{23} = 93$  сут,  $t_4 = 12.04.2021$ ,  $V_{\text{хар}} = 6,519$  км/с,  $m_f = 544$  кг,  $m_p = 293$  кг.

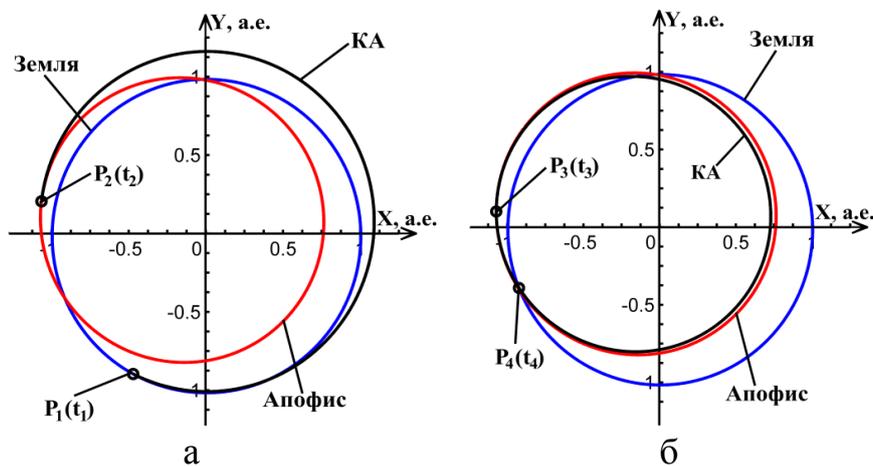


Рис.3. Межпланетная траектория №11: а) перелет от Земли ( $P_1$ ) до Апофиса ( $P_2$ ); б) перелет от Апофиса ( $P_3$ ) до Земли ( $P_4$ )

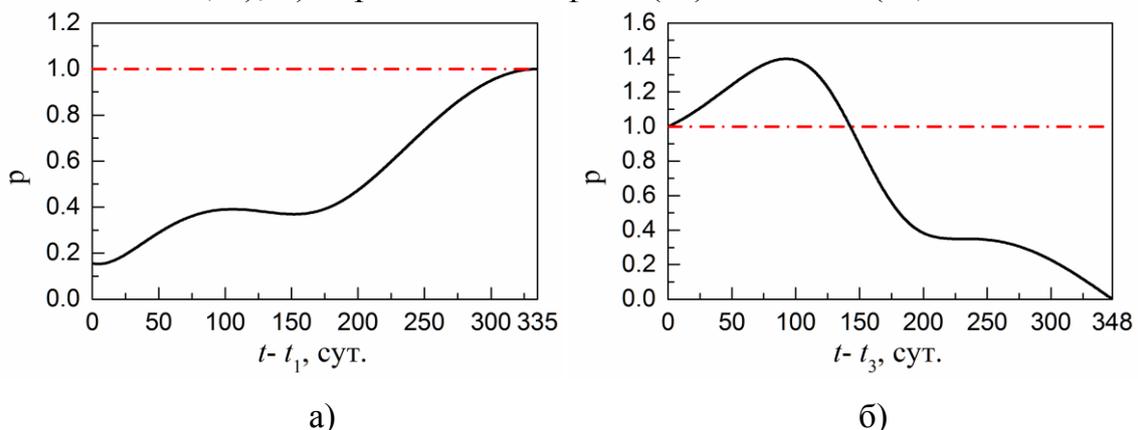


Рис. 4. Изменение модуля базис-вектора на траектории № 11:  
а) перелет от Земли до Апофиса; б) перелет от Апофиса до Земли

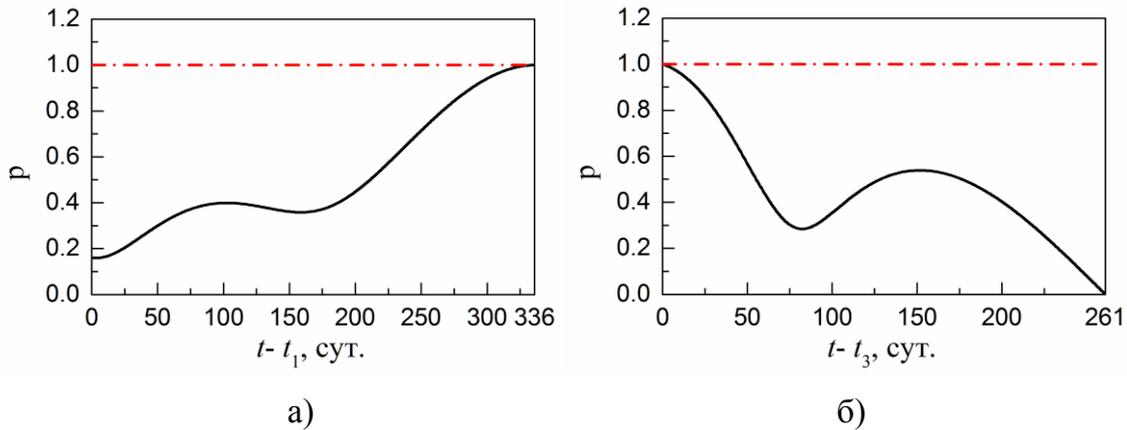


Рис.5. Изменение модуля базис-вектора на траектории № 14:  
 а) перелет от Земли до Апофиса; б) перелет от Апофиса до Земли

Для данной траектории № 11 на рис. 4 приведен график изменения по времени модуля базис-вектора  $p = |\lambda|$  на каждом пассивном участке полета. Здесь на некотором начальном отрезке второго участка, после приложения импульса  $\Delta \mathbf{V}_3$ :  $\dot{p}_3 = dp_3/dt > 0$ ,  $p > 1$ , условие (25) не выполняется, траекторию можно улучшить. Из выражений (65) для частных производных от функционала видно, что если  $dt_3 > 0$ , то уменьшим функционал,  $dJ_3 < 0$ . Это подтверждает улучшение характеристик траектории № 14, у которой большее время  $t_3$  и время ожидания,  $\Delta t_{23} = 93$  сут. На рис. 5 представлено изменение  $p(t)$  для этой траектории. Здесь  $p \leq 1$ , условие оптимальности выполняется.

## 5. Выводы

В препринте рассмотрена задача построения базис-вектора Лоудена вдоль гелиоцентрической траектории экспедиции КА к астероиду, с пребыванием у астероида в течение некоторого времени и последующим возвращением к Земле. Предполагается, что управление полетом КА осуществляется с помощью двух двигателей «большой тяги»: один выполняет разгон от Земли и отделяется, другой осуществляет последующее управление. Для орбит перелета КА от Земли к астероиду и возврата КА к Земле построены сопряженные функции. Вектор-функция, сопряженная к вектору скорости КА, является базис-вектором Д.Ф. Лоудена. На основе этих функций получены формулы для вариаций функционала при варьировании траектории КА введением малых дополнительных импульсов скорости. Для случая, когда можно варьировать граничные времена траектории, определены соответствующие вариации функционала и производные от функционала по граничным временам. Полученные формулы для вариаций функционала могут быть использованы при проверке траектории КА на оптимальность в классе многоимпульсных перелетов и для улучшения траектории по функционалу. Рассмотрены три типа функционала – минимизация суммы величин импульсов скорости, максимизация конечной массы и максимизация полезной массы. Приведены численные примеры для экспедиции к астероиду Апофис.

## Библиографический список

1. Atkins K.L., Brownlee D.E., Duxbury T. et al. STARDUST: Discovery's InterStellar dust and cometary sample return mission [C] // Aerospace Conference, 1997. Proceedings., IEEE. 1997, 4: 229-245.
2. Sandford S.A. The Power of Sample Return Missions-Stardust and Hayabusa. Proceedings of the International Astronomical Union, 2011, 7(S280): 275-287.
3. Хаябуса-2. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Хаябуса-2>
4. Хаябуса-2: подготовка к старту новой астероидной экспедиции. URL: <http://www.nkj.ru/news/24922/>
5. OSIRIS-Rex. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/OSIRIS-REx>
6. Ивашкин В.В., Крылов И.В., Лан А. Оптимальные траектории для экспедиции КА к астероиду Апофис с возвращением к Земле // Астрономический вестник. 2013. Т. 47. № 4. С. 361-372.
7. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов. М.: Наука. 1976 г. 744 с.
8. Hohmann W.F. Die Erreichbarkeit der Himmelskörper. Untersuchungen über das Raumfahrtproblem. München und Berlin, Druck und Verlag R.Oldenbourg. 1925. Перевод: Пионеры ракетной техники. Гансвиндт. Годдард. Эсно-Пельтри. Оберт. Гоман. Избранные труды (1891-1938). М.: Наука. 1977. С. 525-607.
9. Eneev T.M., Ivashkin V.V., Sharov V.A., Bagdasaryan Ju.V. Space autonomous navigation system of Soviet project for manned fly by Moon // Acta Astronautica, Vol. 66. 2010. Pp. 341-347.
10. Lion P.M., Handelsman M. Primer Vector on Fixed-Time Impulsive Trajectories // AIAA Journal, Vol. 6, No. 1, 1968, pp. 127-132.
11. Jezewski D.J., Rozendaal H.L. An Efficient Method for Calculating Optimal Free-Space N-Impulse Trajectories // AIAA Journal, 1968, Vol. 6, No. 11, pp. 2160-2165.
12. Lawden, D.F. 1963. Optimal trajectories for space navigation. London, Butterworths. 1963. Перевод: Лоуден, Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. Пер. с англ. В.К.Исаева. М.: «Мир», 1966. 152 с.
13. Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет – М.: Наука. 1975. 392 с.
14. Pines S. Constants of the Motion for Optimum Thrust Trajectories in a Central Force Field // 1964. Vol. 2. No. 11. Pp. 2010-2014.
15. Чарный В.И. Об изохронных производных. Сб. «Искусственные спутники Земли». Вып. 16. Изд. АН СССР. 1963.
16. Ivashkin, V.V., Krylov, I.V., Lang, A. Optimal spacecraft trajectories for expedition to asteroid Apophis with return to Earth. // International Astronautical Congress IAC-2013. Proceedings. 2013. Vol. 7, pp. 5388-5398.

17. Лан Аньци. Анализ космических траекторий для экспедиции Земля–Апофис–Земля и движения космического аппарата вокруг астероида Апофис. Инженерный журнал: наука и инновации, 2017. № 7(67). С. 1-19.
18. Ивашкин В.В., Лан А. Определение и анализ оптимальных космических траекторий для организации экспедиции Земля–Апофис–Земля с применением двигательных установок большой тяги // Космонавтика и ракетостроение. Вып. 5 (98). 2017. С. 63-71.